Arabic sciences and philosophy, 31 (2021) : 149-157
doi:10.1017/S0957423920000119

NOTE SUR L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN ENTIER CHEZ IBN AL-HAYṮAM ET COMPARAISON AVEC AL-BAĠDĀDĪ

LEÏLA HAMOUDA
Université de Tunis El Manar
École nationale d'ingénieurs de Tunis
LR99ES20, Laboratoire de modélisation mathématique et numérique dans les sciences de l'ingénieur, 2092, Tunis, Tunisie
Email : leila.hamouda@lamsin.rnu.tn

YASSINE HACHAICHI
École nationale d'ingénieurs de Carthage
Laboratoire EITIC, LR18ES44
Email : hachaichi.ens@gmail.com

1. INTRODUCTION

Dans le cadre des algorithmes numériques introduits et élaborés par les mathématiciens arabes, à partir du IXe siècle, figure l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier naturel. Cet algorithme a été étudié chez plusieurs d'entre eux et surtout bien expliqué par al-Baġdādī (mort vers 1037) dans le chapitre « Comment extraire la racine des nombres entiers » de son livre « La complétion du calcul », *Al-takmila fī al-ḥisāb*[1]. Dans ce chapitre, al-Baġdādī expose son travail pédagogiquement en six sections traitant de plusieurs manières différentes le problème de l'extraction de la racine carrée d'un entier[2]. À la même époque, dans un texte isolé intitulé « Sur la cause de la racine, de son doublement et de son déplacement[3] », Ibn al-Hayṯam (mort vers 1040)

[1] A. S. Saidan, *Al-takmila fī al-ḥisāb li-ʿAbd al-Qāhir b. Ṭāhir al-Baġdādī maʿa risāla lahū fī l-misāḥa : Tahqīq wa-dirāsa mūqārana* (Kuwait : Institute of Arabic Manuscripts, 1985), p. 71-82, *Fī bayāni kayfyati ʾiḫrāji al-jūḏūri min al-aʿdādi al-ṣiḥāḥi*.

[2] Dans le chapitre cité n. 1 *supra*, al-Baġdādī présente l'extraction de la racine carrée d'un entier comme une méthode purement numérique. L'algorithme est le même que dans les textes d'al-Ḫwārizmī et d'al-Uqlidīsī. Il donne des exemples bien choisis qui, par comparaison avec ceux d'al-Ḫwārizmī, nécessitent un plus grand nombre d'itérations dans la recherche des racines carrées. Dans chaque section, al-Baġdādī commence par donner une explication théorique qu'il valide ensuite sur des exemples. Il utilise un *taḥt*, et le résultat est obtenu à la dernière itération sans garder trace des étapes antérieures. Voir aussi Y. Hachaïchi, L. Hamouda, S. Toumi, « Extraction de la racine carrée d'un entier naturel chez al-Baghdādī », `https://arxiv.org/abs/1906.07964`, juin 2019.

donne une justification géométrique de l'algorithme en se basant sur des notions algébriques précises.

Dans son texte, Ibn al-Hayṯam ne rappelle pas l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier, algorithme qu'il suppose bien connu. Pour lui, le problème de l'extraction d'une racine carrée est un problème géométrique inverse de celui de trouver la surface d'un carré. Roshdi Rashed a édité et traduit le texte d'Ibn al-Hayṯam, et il a donné un commentaire mathématique de l'algorithme ainsi que les deux approximations du reste qui en résulte [4].

Dans cette note de lecture, nous allons d'abord expliquer et illustrer la justification géométrique de l'algorithme donnée par Ibn al-Hayṯam ; ensuite nous comparerons les deux travaux d'Ibn al-Hayṯam et d'al-Baġdādī ; enfin, nous montrerons quelle est la meilleure estimation du reste.

2. EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN ENTIER NATUREL CHEZ IBN AL-HAYṮAM

2.1. *Justification géométrique de l'algorithme*

Dans son texte, Ibn al-Hayṯam utilise le mot *ʿillat* [5] ; nous verrons qu'il donne une justification de l'algorithme de l'extraction de la racine en interprétant géométriquement chaque étape, bien que le texte ne contienne aucune figure. Ibn al-Hayṯam se place ainsi dans un cadre sémantique afin de donner un sens à l'algorithme en exposant ce qu'on appelle aujourd'hui une preuve de la correction de ce dernier. Cette justification géométrique utilise également l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

Dans la décomposition décimale de la racine carrée s où $s = \sum_{i=0}^{n} s_i 10^i$ $(s_i = 0,\cdots,9)$, Ibn al-Hayṯam considère chaque $s_i 10^i$ (où $i = 0,\cdots,n$) comme le côté d'un carré, chacun de leurs carrés comme la surface de ce même carré, et chaque produit d'un $s_i 10^i$ par $2s_{i-1}10^{i-1}$ comme deux fois la surface d'un rectangle de côtés $s_i 10^i$ et $s_{i-1}10^{i-1}$.

En calculant les décimales s_i (où $i = 0,\ldots,n$) avec l'algorithme donné par al-Baġdādī [6] (voir l'article cité n. 2 *supra*), on construit un carré de

[3] *Maqāla fī ʿillat al-jaḏr wa iḍʿāfihi wa naqlihi*, texte édité et traduit dans R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle* (Londres : Al Furqān, 1993-2002), vol. 2, p. 463-487.

[4] Voir *op. cit. in* n. 3.

[5] « Cause » ou « preuve ».

côté $s_n 10^n + s_{n-1}10^{n-1} + \cdots + s_1 10 + s_0$. Dans la figure 1, la partie en gris foncé représente la surface du carré de côté $s_n 10^n$, c'est-à-dire $(s_n 10^n)^2$.

Soit N_0 le gnomon restant après avoir retranché du grand carré la surface du carré gris foncé. C'est-à-dire que $N_0 = N - (s_n 10^n)^2$. En reprenant les notations de Rashed[7], on calcule ensuite N_1 donné par $N_1 = N_0 - 2s_n 10^n s_{n-1}10^{n-1} - (s_{n-1}10^{n-1})^2 = N - (s_n 10^n + s_{n-1}10^{n-1})^2$.

Dans la figure 2, le grand carré gris foncé représente toujours $(s_n 10^n)^2$, le second carré gris foncé représente $(s_{n-1}10^{n-1})^2$, et la partie en gris clair est la surface des deux rectangles, chacun de côtés $s_n 10^n$ et $s_{n-1}10^{n-1}$.

Ibn al-Hayṯam continue cette construction jusqu'à balayer toute la surface initiale qui n'est autre que $N = E^2 = s^2 = (\sum_{i=0}^{n} s_i 10^i)^2$ dans le cas d'un carré parfait.

Dans le cas où N n'est pas un carré parfait, géométriquement, on a une succession de carrés de côtés $s_i 10^i$ (où $i = 0, \ldots, n$) et un gnomon qui correspond au reste.

[6] Dans un premier temps, al-Baġdādī étiquette par « racine » les rangs impairs (en partant de l'unité) et par « non racine » les rangs pairs ; n'oublions pas que dans la représentation décimale, les rangs impairs correspondent aux puissances paires de 10. Il demande ensuite de se placer *sous* le dernier rang impair et de trouver le plus grand entier dont le carré soit inférieur à ce qu'on a *au dessus*, etc. Soit N l'entier naturel dont on veut calculer la racine carrée. Posons $N = n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0$ la décomposition décimale de N, ce qui revient à dire que $N = \sum_{i=0}^{k} 10^i n_i$ avec n_k, n_{k-1} non tous deux nuls et les n_i appartenant à $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Si k est pair alors il existe un entier p tel que $k = 2p$. Si k est impair alors on rajoute un 0 à gauche de N et on se ramène au cas où k est pair. Expliquons l'algorithme dans le cas où k est pair. Pour un carré parfait, on note s sa racine carrée écrite sous la forme décimale $s = \sum_{i=0}^{p} 10^i s_i$. Nous noterons également le même nombre s sous la forme $(s_p, s_{p-1}, \ldots, s_1, s_0)$. D'abord, al-Baġdādī cherche le plus grand entier s_p tel que $s_p^2 \leq (n_k, n_{k-1}) < (s_p + 1)^2$. Il soustrait alors s_p^2 de (n_k, n_{k-1}) et décale d'un rang vers la droite : avec nos notations, il écrit $2s_p$ au dessous de n_{k-2}. Ensuite, il cherche le plus grand entier s_{p-1} tel que $s_{p-1} \cdot (2s_p, s_{p-1})$ soit inférieur à $(n'_{2p}, n'_{2p-1}, n_{2p-2})$ où le nombre (n'_{2p}, n'_{2p-1}) est (n_{2p}, n_{2p-1}) duquel on a retranché s_p^2. Il retranche ensuite $s_{p-1} \cdot (2s_p, s_{p-1})$ de $(n'_{2p}, n'_{2p-1}, n_{2p-2})$, il double s_{p-1} et il décale le tout d'un rang à droite. On continue ce procédé en cherchant à chaque étape un entier maximal s_{p-i} tel que $s_{p-i} \cdot (2s_p, 2s_{p-1}, \ldots, s_{p-i})$ soit inférieur au reste de la dernière soustraction, on retranche l'un de l'autre, on double s_{p-i} et on décale le tout d'un rang vers la droite, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 0. Enfin, al-Baġdādī divise le nombre obtenu par deux, sauf le rang de l'unité, et il obtient la racine cherchée.

[7] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. 2, p. 464-466.

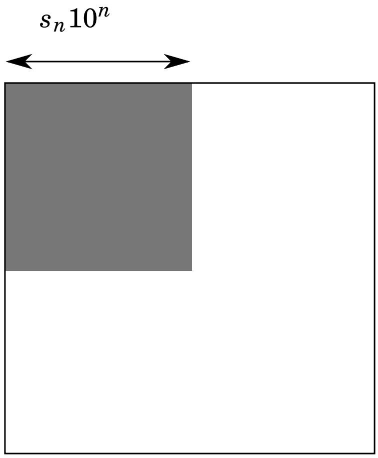

FIG. 1

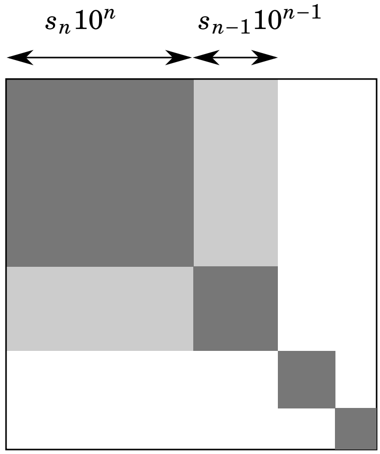

FIG. 2

2.2. Explication du placement des s_i dans la position décimale $2i$ et du recul de $2s_i$ et de $2s_{i-1}$ d'un rang

Dans son texte, Ibn al-Hayṯam demande[8] :

> Pourquoi le premier rang est-il affecté de racine, le second n'est-il pas affecté de racine, celui qui le suit est-il un rang affecté de racine, et celui qui le suit n'est-il pas affecté de racine ?

Pour répondre à cette question, il affirme que les puissances successives de dix qui sont après l'unité sont les côtés des carrés successifs qui sont après l'unité[9], en se basant sur la proposition IX.8 des *Éléments* d'Euclide, c'est-à-dire que

$$10^i \times 10^i = 10^{2i}$$

Notons C_i le carré de côté $s_i 10^i$. Le rang de s_{i-1} est le rang du côté du carré qui est au-dessous de C_i or le rang de ce dernier est $2i$ donc le rang de C_{i-1} est $2(i-1)$. Le rang de C_i est inférieur de 2 au rang de C_{i-1}, donc il est égal à $2(i-1)$.

Ibn al-Hayṯam demande également « Pourquoi reculerons-nous $2s_i$ d'un rang ? » Alors, il explique que, dans l'algorithme, on a besoin de multiplier $2s_i$ par s_{i-1} ce qui représente le double du produit du côté de C_i et du côté de C_{i-1}, donc le rang de $2s_i$ est la puissance de dix entre les deux carrés successifs C_i et C_{i-1}. Le carré C_i est de rang $2i$, le carré C_{i-1} est de rang $2(i-1)$ donc le produit que l'on cherche est de rang $2i-1$.

[8] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. 2, p. 471.
[9] *Ibid.*, vol. 2, p. 470-479.

https://doi.org/10.1017/S0957423920000119 Published online by Cambridge University Press

En effet, $2s_i 10^i \times s_{i-1}10^{i-1} = 2s_i s_{i-1}10^{2i-1}$.

2.3. Estimation du reste r dans la racine carrée chez Ibn al-Hayṯam

Dans le cas où N n'est pas un carré parfait et en notant $N = E^2+R$, Ibn al-Hayṯam montre par l'absurde que le reste R est strictement inférieur à $2E+1$. En effet, il constate que si $R \geq 2E+1$ alors $N \geq (E+1)^2$; mais ceci est impossible puisque E^2 est le plus grand carré inférieur à N.

Ibn al-Hayṯam propose deux estimations de la racine carrée d'un entier naturel non carré :

$$s \approx E + r \text{ où } E = \sum_{i=0}^{n} s_i 10^i \text{ et } r = \begin{cases} \frac{R}{2E} \\ \text{ou} \\ \frac{R}{2E+1} \end{cases} .$$

L'approximation $\frac{R}{2E}$ du reste avait été proposée par al-Ḫwārizmī[10]. L'approximation $\frac{R}{2E+1}$ sera dite « conventionnelle ».

L'idée d'Ibn al-Hayṯam est de comparer les carrés des deux valeurs approchées et de choisir le résultat qui s'approche le plus de l'entier N. Al-Baġdādī choisit l'approximation conventionnelle[11], et il donne des exemples erronés que nous expliciterons dans notre quatrième paragraphe.

3. PROPOSITION D'ESTIMATION DU RESTE

La proposition suivante permet de juger laquelle des deux approximations est la meilleure.

Proposition[12]. Pour tout entier N compris entre deux carrés successifs E^2 et $(E+1)^2$, il existe un entier R strictement inférieur à $2E+1$ tel que $N = E^2+R$. Notons $s = \sqrt{N}$. Si $R \leq E-1$ alors $s \approx E + \frac{R}{2E}$ (formule d'approximation d'al-Ḫwārizmī[13]). Si $R \geq E$ alors $s \approx E + \frac{R}{2E+1}$ (approximation dite conventionnelle).

[10] A. Allard, *Le calcul indien (algorismus), Muḥammad ibn Musa al-Khwārizmī*, (Paris : A. Blanchard, 1992), p. 52-53.

[11] Voir *op. cit. in* n. 1 *supra*, p. 76.

[12] Pour cette proposition et sa démonstration, voir J. Bhar, « Les algorithmes d'extraction des racines carrées et cubiques dans deux traités d'Ibn al-Haytham (fin xᵉ – début xɪᵉ siècle) », mémoire de mastère en mathématiques appliquées, dirigé par Marouane Ben Miled (École nationale d'ingénieurs de Tunis, Laboratoire de modélisation mathématique et numérique dans les sciences de l'ingénieur, 2010).

[13] Voir n. 10 *supra*.

Démonstration. Le fait que $R \leq 2E+1$ est montré par l'absurde par Ibn al-Hayṯam dans son texte « Sur la cause de la racine, de son doublement et de son déplacement ». Notons $E_1 = E + \frac{R}{2E}$ et $E_2 = E + \frac{R}{2E+1}$. Soit $D_1 = |N - E_1| = \left|N - \left(E + \frac{R}{2E}\right)^2\right|$. Or $N = E^2 + R$ donc $D_1 = \frac{R^2}{4E^2}$. Soit $D_2 = |N - E_2| = \left|N - \left(E + \frac{R}{2E+1}\right)^2\right|$. Or $N = E^2 + R$ donc $D_2 = \left|\frac{R}{2E+1} - \left(\frac{R}{2E+1}\right)^2\right|$; mais $0 < \frac{R}{2E+1} < 1$ donc $D_2 = \frac{R}{2E+1} - \left(\frac{R}{2E+1}\right)^2$. En calculant la fraction $\frac{D_1}{D_2}$, on trouve que

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{R}{4E^2}\frac{(2E+1)^2}{(2E+1-R)}.$$

1$^{\text{er}}$ cas : si $R \leq E-1$ alors $R < E$ et $E+2 \leq 2E+1-R$, donc

$$\frac{D_1}{D_2} < \frac{E}{4E^2}\frac{(2E+1)^2}{(E+2)},$$

c'est à dire que

$$\frac{D_1}{D_2} < 1 + \frac{1-4E}{4E^2+8E}.$$

Or $E \geq 1$ donc $1-4E \leq 0$. Ainsi $\frac{D_1}{D_2} < 1$ et la première approximation est la meilleure.

2$^{\text{e}}$ cas : si $R \geq E$ alors $2E+1-R \leq E+1$, donc

$$\frac{D_1}{D_2} \geq \frac{E}{4E^2}\frac{(2E+1)^2}{(E+1)} = \frac{4E^2+4E+1}{4E^2+4E} > 1.$$

La deuxième approximation est alors la meilleure.

Cette proposition facilite le choix de l'estimation de la racine carrée : nous avons montré qu'au lieu de calculer le carré des deux estimations pour les comparer avec l'entier N dont nous cherchons la racine carrée, il suffit de calculer $R = N - E^2$.

4. COMPARAISON DES TRAVAUX D'IBN AL-HAYṮAM ET AL-BAĠDĀDĪ

Dans son texte « Sur la cause de la racine, de son doublement et de son déplacement », l'approche d'Ibn al-Hayṯam pour extraire la racine carrée d'un entier naturel est purement justificative, d'où le titre de son opuscule et l'usage du mot *ʿillat*. Il prouve l'exactitude de la solution donnée par l'algorithme, au moyen d'une justification géométrique et des règles du calcul algébrique ; ce qui correspond à une preuve de correction de l'algorithme. Il ne donne pas d'exemple.

Dans son texte « Comment extraire la racine des nombres entiers », al-Baġdādī donne l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier de plusieurs manières différentes et, ce qui est notable, de manière purement numérique. Cet algorithme est déjà connu de ses prédécesseurs (al-Ḫwārizmī) et de ses contemporains (Kušyār [14]). Pour justifier l'exactitude de la solution donnée par son algorithme, al-Baġdādī donne non seulement des exemples mais aussi des critères de vérification, notamment dans la cinquième section de son travail [15].

Les deux mathématiciens Ibn al-Hayṯam et al-Baġdādī se complètent dans leurs approches. Le premier est soucieux de l'aspect fondamental et mathématique du problème et il est également plus précis que le second dans son choix d'approximation du reste. Al-Baġdādī axe son travail sur l'aspect numérique, et il prend des exemples faisant intervenir de grands nombres entiers dans le but probable de mieux transmettre l'algorithme de calcul de la racine carrée.

En ce qui concerne le choix de l'estimation du reste, Ibn al-Hayṯam recommande de calculer les deux valeurs approchées de la racine (celle d'al-Ḫwārizmī et celle dite conventionnelle) et de comparer leurs deux carrés avec l'entier dont on cherche la racine, alors qu'al-Baġdādī tranche en choisissant l'approximation conventionnelle qui n'est pas toujours la plus appropriée. Pour expliquer son choix, al-Baġdādī donne deux exemples qui sont les entiers 2 et 3, et nous remarquons que dans ces deux cas, le reste R est bien supérieur ou égal à la partie entière E. Pour ces deux cas, la proposition démontrée ci-dessus prouve que son choix est juste.

Pour $N = 2$, al-Baġdādī écrit $2 = 1^2 + 1$ et considère les deux approximations $\sqrt{2} \approx 1 + 1/2$ et $\sqrt{2} \approx 1 + 1/3$ puis il les élève au carré pour avoir, respectivement, $2 + 1/4$ et $1 + 7/9$. Il constate que $1 + 7/9$ est plus proche

[14] M. Levey et M. Petruck, *Principles of Hindu reckoning : A translation with introduction and notes of the Kitāb fī usul ḥisāb al-Hind [Kushyar ibn Labbān]*, 1967.

[15] Cette cinquième section contient une vérification modulo 9. Soit N le nombre dont on cherche la racine carrée et s sa racine carrée. 1er cas : N est un carré parfait, c'est-à-dire que $N = s^2$ où s est un entier. Après avoir cherché s avec l'algorithme donné dans la première section, on note a et b les restes respectifs des divisions euclidiennes de N et s par 9. D'après al-Baġdādī, le calcul de la racine carrée est juste si $a = b$. 2e cas : N n'est pas un carré parfait c'est-à-dire que $N = E^2 + R$ avec $0 \leq R \leq 2E$. Soient a, b et c les restes respectifs des divisions euclidiennes des entiers N, E^2 et R par 9 c'est-à-dire que $N \equiv a$ [9], $E^2 \equiv b$ [9] et $R \equiv c$ [9]. Al-Baġdādī affirme que le calcul de la racine est juste si $a = b + c$[9]. Dans les deux cas, al-Baġdādī semble commettre une erreur en prenant une implication pour une équivalence. Il écrit : « S'il lui correspond alors le travail est juste, s'il ne lui correspond pas alors c'est faux. » Voir *op. cit. in* n. 1 *supra*, p. 80-81.

https://doi.org/10.1017/S0957423920000119 Published online by Cambridge University Press

de 2 que $2+1/4$.

Pour $N=3$, il considère que $3=1^2+2$ et donne les deux approximations $\sqrt{3}\approx 2$ et $\sqrt{3}\approx 1+2/3$ puis il les élève au carré pour avoir, respectivement, 4 et $2+7/9$. Il constate que $2+7/9$ est plus proche de 3 que 4.

Il en conclut que ceci reste vrai pour tout entier.

Pour montrer que cette conclusion est fausse dans le cas général, prenons l'exemple de $10=3^2+1$. Par la méthode d'al-Ḫwārizmī, on obtient $\sqrt{10}\approx 3+1/6$ et par celle dite conventionnelle $\sqrt{10}\approx 3+1/7$ en les élevant respectivement au carré, on obtient $10+1/36$ pour la première et $9+43/49$ pour la seconde. Or $0<1/36<6/49$ donc la première approximation est meilleure.

Cependant, l'erreur du choix d'approximation commise par al-Baġdādī dans la section 2 de son travail est atténuée par le fait que dans la section 5 du même ouvrage, en multipliant par une puissance paire de dix l'entier dont on cherche la racine carrée, il assure que le résultat qu'il obtient est aussi précis que nous voulions qu'il soit[16]. En effet, le nombre de zéros qu'il ajoute se traduit, de nos jours, par un même nombre de chiffres après la virgule dans le calcul de la racine carrée.

5. CONCLUSION

Le but du traité d'Ibn al-Hayṯam est de présenter une justification de la correction de l'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un entier en l'interprétant dans un cadre géométrique, qui repose lui-même sur le socle axiomatique euclidien. L'approche d'Ibn al-Hayṯam fait partie de cette tradition conceptuelle où l'on souhaite montrer géométriquement des résultats algébriques donnés par des algorithmes. Nous retrouvons cela chez Ṯabit b. Qurra[17], alors qu'al-Baġdādī expose les algorithmes numériques sans justification ni théorique ni géométrique, hormis la vérification du résultat par des critères donnés dans la section 5 de son travail[18]. Il serait intéressant de regrouper les textes semblables de différents auteurs afin de vérifier s'ils constituent une école de calcul algorithmique numérique.

[16] Voir l'article cité n. 2 *supra*.

[17] Roshdi Rashed (dir.), *Thabit ibn Qurra : Science and philosophy in ninth-century Baghdad* (De Gruyter, 2009), p. 153-172.

[18] Voir *op. cit. in* n. 1 *supra*, p. 80.

Le traité d'Ibn al-Hayṯam et le chapitre d'al-Baġdādī concernant l'extraction de la racine carrée s'inscrivent dans une tradition plus générale à laquelle appartient également l'algorithme Ruffini-Hörner du début du dix-neuvième siècle. Dans son commentaire mathématique, Rashed en parle et écrit « Nous sommes en présence d'un algorithme qui conduira à celui de Ruffini-Hörner[19]. » Ce dernier algorithme permet d'estimer la racine carrée de tout réel positif en s'appuyant sur le théorème des valeurs intermédiaires et en la cherchant décimale par décimale. L'évolution de l'algorithme d'extraction de la racine carrée n'a été possible qu'après avoir dépassé deux grands obstacles : le premier était la séparation entre algèbre et géométrie, et le deuxième était le besoin d'étendre le calcul décimal aux puissances négatives de 10. Ces deux obstacles ont été surmontés par al-Karaji puis al-Samawʾal[20].

En outre, le travail d'al-Baġdādī montre qu'un algorithme d'extraction de la racine carrée était déjà bien assimilé et étudié, du point de vue numérique, au onzième siècle déjà. L'efficacité et la « simplicité » de son travail ont contribué à la fortune de cet algorithme. Cet algorithme est encore étudié de nos jours et il ne cesse d'être amélioré[21]. Le *taḥt* utilisé par al-Baġdādī et l'implémentation binaire utilisée de nos jours constituent deux facettes différentes d'un même objectif : optimiser l'espace matériel d'une part, l'espace mémoire d'autre part.

Remerciements. Nous remercions Marouane Ben Miled qui nous a beaucoup aidé dans la révision de cette note ainsi que dans notre recherche bibliographique. Nous remercions également Seïf Toumi de nous avoir éclairé sur le travail d'al-Baġdādī.

[19] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. 2, p. 462.

[20] Salah Ahmad, Roshdi Rashed, *Al-bāhir en algèbre d'As-Samawʾal* (Imprimerie de l'Université de Damas, 1972) ; R. Rashed, « Extraction de la racine nième et l'invention des fractions décimales », *Archive for history of exact sciences*, 18 (3), 1978 ; R. Rashed, « Les recommencements de l'algèbre aux xɪᵉ et xɪɪᵉ siècles », dans J. Murdoch et E. Sylla (dir.), *The cultural context of medieval learning* (Dordrecht : Reidel, 1975), p. 33-60.

[21] Voir P. Kachhwal, B. Rout, « Novel square root algorithm and its FPGA implementation », 978-1-4799-3140-8/14/2014 IEEE ; et T. Sutikno, « An optimized square root algorithm for implementation in FPGA hardware », *Telkomnika*, vol. 8, nº 1, avril 2010 : p. 1-8. ; dans ces deux articles, les auteurs améliorent la version *hardware* de cette méthode d'extraction de la racine carrée, en optimisant l'espace mémoire.

https://doi.org/10.1017/S0957423920000119 Published online by Cambridge University Press