BULLETIN 13 (3), 1970

IDEAUX A DROITE MINIMAUX D'UN ANNEAU PRIMITIF

PAR
G. THIERRIN

Soit R un anneau primitif à droite et soit A un idéal à droite de R. Dans un récent article [2], Ménard a montré que A est minimal si et seulement si $abA = baA$ $\forall a, b \in A$. Le but de cette note est de montrer que A est minimal si et seulement si $aA = a^2A$ $\forall a \in A$.

LEMME. *Soit R un anneau semi-simple* [1], *soit A un idéal à droite de R et soit $S = \mathrm{Rad}(A)$ le radical de l'anneau A. Alors A est un idéal à droite minimal de R si et seulement si $\bar{A} = A/S$ est un corps.*

Preuve. La condition est nécessaire, c'est immédiat. Montrons qu'elle est suffisante. D'après ([1], p. 10) on a $S = \{s \mid s \in A, sA = 0\}$. Donc S est un idéal nilpotent de A et, d'après ([1], p. 54) A est un anneau SBI. Soit $\bar{u}$ l'élément unité de $\bar{A}$ et soit $u \in \bar{u}$. Il existe alors $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $e \equiv u(S)$. D'où pour tout $x \in A$

$$ex \equiv ux \equiv x(S),\ ex - x \in S,\ (e-1)A \subseteq S$$
$$xe \equiv xu \equiv x(S),\ xe - x \in S,\ A(e-1) \subseteq S.$$

Comme $(e-1)A$ est un idéal à droite de R nilpotent, on a $(e-1)A = 0$, $ex = x$ $\forall x \in A$, $eA = A = eR$ et $eAe = Ae = eRe$.

Si $s \in S$, alors de $sA = 0$ suit $s = s - se$ et donc $s \in A(e-1)$. D'où $A(e-1) = S$. Comme $A = Ae \oplus A(e-1)$ et comme $A(e-1) = S$ est un idéal de A, on a $A/A(e-1) \cong Ae$. Donc $Ae = eRe$ est un corps. Donc, d'après ([1], p. 65), $A = eR$ est un idéal à droite minimal de R.

PROPOSITION. *Soit R un anneau primitif à droite et soit A un idéal à droite de R. Alors A est minimal si et seulement si $xA = x^2A$ $\forall x \in A$.*

Preuve. La condition est nécessaire, car si A est minimal, on a $xA = 0$ ou $xA = A$ $\forall x \in A$.

La condition est suffisante. En effet, soit S le radical de A et soit $T = A/S$. D'après ([1], p. 34), T est un anneau primitif et l'on a $xT = x^2T$ $\forall x \in T$. Montrons que T est un corps et la proposition sera démontrée. L'anneau T n'a pas de nilpotents non nuls et la relation $ab = 0$ entraîne $ba = 0$, car ba est nilpotent. De là suit $aTb = 0$ et comme T est primitif, donc premier, on a $a = 0$ ou $b = 0$. Par conséquent T n'a pas de diviseurs de zéro. De $a^4T = a^2T$ suit l'existence de $x \in T$ tel que $a^4x = a^3$. Si $a \neq 0$, on a $a^2x = a$ puisque T n'a pas de diviseurs de zéro. D'où $a^2xa = a^2$ et $axa = a$. Donc T est un anneau régulier sans diviseurs de zéro et par conséquent T est un corps.

Références

1. N. Jacobson, *Structure of rings*, Colloq. Publ., Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1956.

2. J. Ménard, *Anneaux réversifs et anneaux interversifs*, Canad. Math. Bull. **12** (1969), 389–399.

Université de Montréal,
Montréal, Québec
Summer Research Institute,
Kingston, Ontario