

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE DES TOURS DE BOTT ET CALCUL DE SCHUBERT ÉQUIVARIANT

MATTHIEU WILLEMS

*UFR de Mathématiques, Université Paris 7 Denis Diderot, 2, place Jussieu,
Case 7012, 75251 Paris Cedex 05, France* (willems@math.jussieu.fr)

(Received 11 December 2003; accepted 14 April 2004)

Résumé On calcule les restrictions aux points fixes de deux bases de la cohomologie équivariante des tours de Bott, et on précise la structure multiplicative de ces algèbres de cohomologie. En s’aidant du travail de Duan, on en déduit une méthode de calcul des constantes de structure de la cohomologie équivariante des variétés de drapeaux (calcul de Schubert équivariant).

Abstract ‘Equivariant cohomology of Bott towers and equivariant Schubert calculus’. We calculate the restrictions to fixed points of two bases of the equivariant cohomology of Bott towers, and we describe the multiplicative structure of these cohomology algebras. We build on the work of Duan to give a method to calculate the structure constants of the equivariant cohomology of the flag varieties (equivariant Schubert calculus).

Mots clefs : cohomologie équivariante ; variétés de drapeaux ; calcul de Schubert

Keywords : equivariant cohomology; flag manifolds; Schubert calculus

AMS 2000 *Mathematics subject classification*: Primary 55N91; 14M15; 14N15

Table des matières

1. Préliminaires et notations	127
1.1 Algèbres de Kac–Moody	127
1.2 Groupes de Kac–Moody et variétés de drapeaux	128
2. Tours de Bott et variétés de Bott–Samelson	128
2.1 Tours de Bott	128
2.2 Variétés de Bott–Samelson	133
3. Cohomologie équivariante	137
3.1 Préliminaires	137
3.2 Cohomologie équivariante des tours de Bott	140
3.3 Cohomologie équivariante des variétés de Bott–Samelson	144
3.4 Cohomologie équivariante des variétés de drapeaux	147
4. Calcul de Schubert équivariant	152
4.1 Généralités	153
4.2 Structure multiplicative de $H_T^*(T)$	155
4.3 Calcul de Schubert équivariant	156

Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe. Soient $B \subset G$ un sous-groupe de Borel de G , et $H \subset B$ un sous-groupe de Cartan de B d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On note T le tore compact maximal de H et $X = G/B$ la variété de drapeaux associée à ces données (plus généralement, on s'intéressera aux variétés de drapeaux des groupes de Kac–Moody). Soit Γ une variété de Bott–Samelson, et soit $g : \Gamma \rightarrow X$ l'application naturelle de Γ dans la variété de drapeaux X . Le tore compact T agit sur Γ et X , et l'application g est T -équivariante.

Les tours de Bott sont des variétés toriques particulières munies de l'action d'un tore D . Une variété de Bott–Samelson Γ munie de l'action du tore T peut être vue comme une tour de Bott Y , et l'action de T sur Γ s'identifie à celle d'un sous-tore de D sur Y .

On calcule les restrictions aux points fixes de deux bases de la cohomologie D -équivariante de Y , et, par restriction, on en déduit des résultats similaires pour Γ . On décrit la structure multiplicative de $H_T^*(\Gamma)$, et en explicitant le morphisme g^* , on donne une méthode de calcul des constantes de structure de $H_T^*(X)$ (calcul de Schubert équivariant).

Dans la §1, on fixe les notations sur les variétés de drapeaux d'un groupe de Kac–Moody.

Dans la §2, on rappelle les définitions et les résultats de [11] sur les tours de Bott et leur lien avec les variétés de Bott–Samelson, et on définit des décompositions cellulaires de ces variétés.

Dans la §3, on commence par des rappels sur la cohomologie équivariante. On calcule ensuite les restrictions aux points fixes de deux bases de la cohomologie D -équivariante des tours de Bott (Théorèmes 3.9 et 3.11), et on commence à décrire la structure multiplicative de ces algèbres (Théorèmes 3.12 et 3.13). Les Théorèmes 3.9, 3.12 et 3.13 généralisent les résultats de [17] sur les variétés de Bott–Samelson. On rappelle le lien entre la cohomologie des variétés de drapeaux et celle des variétés de Bott–Samelson. Dans le cas fini, on calcule la matrice de changement de bases entre deux bases de $H_T^*(X)$ (Proposition 3.30 et Théorème 3.31).

Dans la §4, on précise la structure multiplicative de la cohomologie T -équivariante des variétés de Bott–Samelson (Théorème 4.7), et on en déduit une formule pour calculer les constantes de structure de $H_T^*(X)$ (Théorème 4.8), i.e. les polynômes $p_{u,v}^w \in S(\mathfrak{h}^*)$ vérifiant :

$$\hat{\xi}^u \hat{\xi}^v = \sum_{w \in W} p_{u,v}^w \hat{\xi}^w,$$

où $\{\hat{\xi}^w\}_{w \in W}$ est la base de $H_T^*(X)$ caractérisée par $\int_{\bar{X}_v} \hat{\xi}^w = \delta_{v,w}$, où \bar{X}_v est la variété de Schubert associée à l'élément v du groupe de Weyl W .

Pour calculer ces polynômes $p_{u,v}^w$, on envoie $H_T^*(X)$ dans $H_T^*(\Gamma)$ où les multiplications sont plus faciles. Le Théorème 4.8 généralise la formule donnée par Duan pour la cohomologie ordinaire [6].

1. Préliminaires et notations

1.1. Algèbres de Kac–Moody

Les définitions et les résultats qui suivent sur les algèbres de Kac–Moody sont exposés dans [12] et [15]. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ une matrice de Cartan généralisée (c'est-à-dire telle que $a_{ii} = 2$, $-a_{ij} \in \mathbb{N}$ si $i \neq j$, et $a_{ij} = 0$ si et seulement si $a_{ji} = 0$). On choisit un triplet $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ (unique à isomorphisme près), où \mathfrak{h} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $(2r - \text{rg}(A))$, $\pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq r} \subset \mathfrak{h}^*$, et $\pi^\vee = \{h_i\}_{1 \leq i \leq r} \subset \mathfrak{h}$ sont des ensembles d'éléments linéairement indépendants vérifiant $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$. On notera aussi h_i par α_i^\vee . L'algèbre de Kac–Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est l'algèbre de Lie sur \mathbb{C} engendrée par \mathfrak{h} et par les symboles e_i et f_i ($1 \leq i \leq r$) soumis aux relations $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$, $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout $1 \leq i \leq r$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq r$, et :

$$(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 = (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) \quad \text{pour tout } 1 \leq i \neq j \leq r.$$

L'algèbre \mathfrak{h} s'injecte canoniquement dans \mathfrak{g} . On l'appelle la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On a la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}),$$

où pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tels que } [h, x] = \lambda(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$, et où on définit Δ_+ par $\Delta_+ = \{\alpha \in \sum_{i=1}^r \mathbb{N}\alpha_i \text{ tels que } \alpha \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$. On pose $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ où $\Delta_- = -\Delta_+$. On appelle Δ_+ (respectivement Δ_-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives). Les racines $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq r}$ sont appelées les racines simples. On définit une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b} de \mathfrak{g} par $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on associe le groupe de Weyl $W \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}^*)$, engendré par les réflexions simples $\{s_i\}_{1 \leq i \leq r}$ définies par :

$$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i.$$

Si on note S l'ensemble des réflexions simples, le couple (W, S) est un système de Coxeter. On a donc une notion d'ordre de Bruhat qu'on notera $u \leq v$ et une notion de longueur qu'on notera $l(w)$. On notera 1 l'élément neutre de W et dans le cas fini (i.e. W fini $\Leftrightarrow \mathfrak{g}$ de dimension finie), on note w_0 le plus grand élément de W .

On obtient une représentation de W dans \mathfrak{h} par dualité. Plus précisément, pour tout $1 \leq i \leq r$, on a :

$$\forall h \in \mathfrak{h}, \quad s_i(h) = h - \alpha_i(h)h_i.$$

Le groupe de Weyl préserve Δ . On pose $R = W\pi$, c'est l'ensemble des racines réelles. On pose $R^+ = R \cap \Delta_+$, et pour $\beta = w\alpha_i \in R^+$, on pose $s_\beta = ws_iw^{-1} \in W$ (qui est indépendant du choix du couple (w, α_i) vérifiant $\beta = w\alpha_i$) et $\beta^\vee = wh_i \in \mathfrak{h}$.

Pour $(v, w) \in W^2$, on note $v \rightarrow w$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) il existe $\beta \in R^+$ tel que $w = vs_\beta$,
- (ii) $l(w) = l(v) + 1$,

et pour un tel couple, on pose $\beta(v, w) = \beta$ (cette racine est bien uniquement déterminée par la donnée de v et de w) et $\beta^\vee(v, w) = \beta^\vee$.

Pour tout élément w de W , on définit l'ensemble $\Delta(w)$ des inversions de w par $\Delta(w) = \Delta_+ \cap w^{-1}\Delta_-$.

1.2. Groupes de Kac–Moody et variétés de drapeaux

On note $G = G(A)$ le groupe de Kac–Moody associé à \mathfrak{g} par Kac et Peterson dans [13]. On notera e l'élément neutre de G . Dans le cas fini, G est un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et simplement connexe. On note $H \subset B \subset G$ les sous-groupes de G associés respectivement à \mathfrak{h} et \mathfrak{b} . Soit K la forme unitaire standard de G et $T = K \cap H$ le tore maximal de K associé à \mathfrak{h} . On notera $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de T . Les racines α_i appartiennent à it^*

Soit $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G , le groupe quotient $N_G(H)/H$ s'identifie à W . On pose $X = G/B = K/T$. C'est une variété de drapeaux généralisée. On fait agir H sur X par multiplication à gauche, ce qui induit une action de T sur X . L'ensemble des points fixes de T dans X s'identifie à W . Pour toute racine simple α , on note G_α le sous-groupe connexe de G associé à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ et on pose $K_\alpha = K \cap G_\alpha$. Pour $w \in W$, on définit $C(w) = B \cup BwB$ et pour toute racine simple α , on définit le sous-groupe P_α de G par $P_\alpha = C(s_\alpha)$. Le groupe $K_\alpha \subset P_\alpha$ est un sous-groupe compact maximal de P_α et $K_\alpha \cap B = T$. On a la décomposition de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ et si on pose $X_w = BwB/B$, $X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$. Pour tout $w \in W$, la cellule de Schubert X_w est isomorphe à $\mathbb{R}^{2l(w)}$. On obtient ainsi une décomposition cellulaire T -invariante de X où toutes les cellules sont de dimension paire.

Pour tout $w \in W$, la variété de Schubert \bar{X}_w est l'adhérence de la cellule X_w . C'est une sous-variété irréductible et T -invariante de X de dimension réelle $2l(w)$. Les variétés de Schubert ne sont pas lisses en général. Pour tout $w \in W$, on a :

$$\bar{X}_w = \bigsqcup_{w' \leq w} X_{w'}$$

2. Tours de Bott et variétés de Bott–Samelson

Soit $N \geq 1$ un entier naturel. On pose $\mathcal{E} = \{0, 1\}^N$. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) \in \mathcal{E}$, on note $\pi_+(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tels que $\varepsilon_i = 1$ et $\pi_-(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tels que $\varepsilon_i = 0$. On appelle longueur de ε , notée $l(\varepsilon)$, le cardinal de $\pi_+(\varepsilon)$. Pour $1 \leq i \leq N$, on note $(i) \in \mathcal{E}$ l'élément de \mathcal{E} défini par $(i)_j = \delta_{i,j}$. On définit l'élément $(\mathbf{1})$ de \mathcal{E} par $(\mathbf{1})_j = 1$ pour tout j . On munit \mathcal{E} d'une structure de groupe en identifiant $\{0, 1\}$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour tout entier $1 \leq n \leq N$, on pose $(\bar{n}) = (1) + (2) + \dots + (n) \in \mathcal{E}$.

On définit un ordre partiel sur \mathcal{E} par :

$$\varepsilon \leq \varepsilon' \Leftrightarrow \pi_+(\varepsilon) \subset \pi_+(\varepsilon')$$

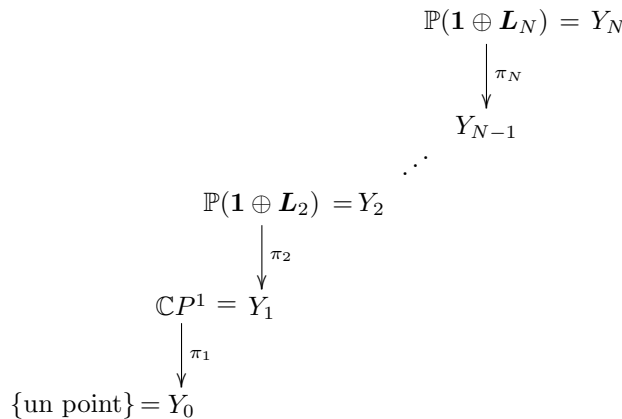
2.1. Tours de Bott

Les définitions et les résultats des §§ 2.1.1 et 2.1.2 sont exposés dans [11].

2.1.1. Définition

Les tours de Bott sont des variétés complexes compactes et lisses construites de la manière suivante.

Soit L_2 un fibré en droites holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$. On pose $Y_2 = \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L_2)$, où $\mathbf{1}$ est le fibré en droites trivial au dessus de $\mathbb{C}P^1$. La variété Y_2 est un fibré au dessus de $Y_1 = \mathbb{C}P^1$ de fibre $\mathbb{C}P^1$; c'est une surface de Hirzebruch. On peut itérer ce processus à l'aide de fibrés en droites notés L_2, L_3, \dots, L_N . A chaque étape, la variété Y_j est un fibré au dessus de Y_{j-1} de fibre $\mathbb{C}P^1$. On obtient alors le diagramme suivant (où pour tout $2 \leq j \leq N$, L_j est un fibré en droites au dessus de Y_{j-1}) :



A chaque étape, on a deux sections particulières

$$s_j^0 : Y_{j-1} \rightarrow Y_j \quad \text{et} \quad s_j^\infty : Y_{j-1} \rightarrow Y_j$$

définies par

$$s_j^0(x) = (x, [1, 0]) \quad \text{et} \quad s_j^\infty(x) = (x, [0, 1]).$$

Par définition, une tour de Bott de dimension N est une famille $\{Y_j, \pi_j, s_j^0, s_j^\infty\}_{1 \leq j \leq N}$ issue d'un diagramme du type précédent.

On dit que deux tours de Bott

$$\{Y_j, \pi_j, s_j^0, s_j^\infty\}_{1 \leq j \leq N} \quad \text{et} \quad \{Y'_j, \pi'_j, s'^0_j, s'^\infty_j\}_{1 \leq j \leq N}$$

sont isomorphes s'il existe N difféomorphismes holomorphes $\{F_j : Y_j \rightarrow Y'_j\}_{1 \leq j \leq N}$ qui commutent avec les applications π_j, s_j^0, s_j^∞ et $\pi'_j, s'^0_j, s'^\infty_j$.

Exemple 2.1. $\mathbb{C}P^1 \times \dots \times \mathbb{C}P^1$ (N fois) est une tour de Bott de dimension N .

2.1.2. Classes d'isomorphisme des tours de Bott

On se donne une liste d'entiers $C = \{c_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq N}$. On considère \mathbb{R}^N muni de sa base canonique (e_1, e_2, \dots, e_N) , et on définit N éléments v_1, v_2, \dots, v_N de \mathbb{R}^N par les formules

suivantes :

$$\begin{aligned} v_N &= -e_N, \\ v_{N-1} &= -e_{N-1} - c_{N-1,N}e_N, \\ &\vdots \\ v_1 &= -e_1 - c_{1,2}e_2 - \cdots - c_{1,N}e_N. \end{aligned}$$

On définit l'éventail Σ_C de \mathbb{R}^N comme la réunion de tous les cônes engendrés par les vecteurs de sous-ensembles Λ de $\{e_1, e_2, \dots, e_N, v_1, v_2, \dots, v_N\}$ tels que si $e_i \in \Lambda$, alors $v_i \notin \Lambda$. On note alors Y_C la variété torique associée à l'éventail Σ_C (voir [5], ou [2, Chapitre 6]), c'est-à-dire le quotient de $(\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0))^N$ par l'action à droite de $(\mathbb{C}^*)^N$ où le i ème facteur de $(\mathbb{C}^*)^N$ agit sur $(\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0))^N$ par :

$$\begin{aligned} &(z_1, w_1, \dots, z_{i-1}, w_{i-1}, z_i, w_i, z_{i+1}, w_{i+1}, \dots, z_N, w_N)a_i \\ &= (z_1, w_1, \dots, z_{i-1}, w_{i-1}, z_i a_i, w_i a_i, z_{i+1}, w_{i+1} a_i^{c_{i,i+1}}, \dots, z_N, w_N a_i^{c_{i,N}}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

On obtient ainsi une variété complexe de dimension N . La variété Y_C est compacte car l'éventail Σ_C est complet dans \mathbb{R}^N (i.e. la réunion des cônes de Σ_C est égale à \mathbb{R}^N), et lisse car l'éventail Σ_C est régulier (i.e. les cônes de Σ_C sont engendrés par des éléments du réseau $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ qui peuvent être complétés en une base de \mathbb{Z}^N).

On notera $[z_1, w_1, \dots, z_N, w_N]$ la classe de $(z_1, w_1, \dots, z_N, w_N)$ dans Y_C .

Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$. On note $\{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ les éléments de $\pi_+(\varepsilon)$. On définit alors une liste d'entiers $C(\varepsilon) = \{d_{i,j}(\varepsilon)\}_{1 \leq i < j \leq k}$ par $d_{i,m}(\varepsilon) = c_{i,i_m}$. En particulier, pour tout entier $1 \leq n \leq N$, on pose $C_n = C((\bar{n})) = \{c_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

Pour tout $2 \leq n \leq N$, Y_{C_n} est un fibré au dessus de $Y_{C_{n-1}}$ de fibre $\mathbb{C}P^1$. En effet, on définit un fibré en droites $\mathbf{L}(C_{n-1}, c_{1,n}, c_{2,n}, \dots, c_{n-1,n})$ sur $Y_{C_{n-1}}$ par

$$\mathbf{L}(C_{n-1}, c_{1,n}, c_{2,n}, \dots, c_{n-1,n}) = (\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0))^{n-1} \times_{(\mathbb{C}^*)^{n-1}} \mathbb{C},$$

où le i ème facteur de $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ agit par :

$$((z_1, w_1, \dots, z_{n-1}, w_{n-1}), v)a_i = ((z_1, w_1, \dots, z_{n-1}, w_{n-1})a_i, a_i^{c_{i,n}}v).$$

Ici l'action de a_i sur $(z_1, w_1, \dots, z_{n-1}, w_{n-1})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} &(z_1, w_1, \dots, z_{i-1}, w_{i-1}, z_i, w_i, z_{i+1}, w_{i+1}, \dots, z_{n-1}, w_{n-1})a_i \\ &= (z_1, w_1, \dots, z_{i-1}, w_{i-1}, z_i a_i, w_i a_i, z_{i+1}, w_{i+1} a_i^{c_{i,i+1}}, \dots, z_{n-1}, w_{n-1} a_i^{c_{i,n-1}}). \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement qu'on a bien $\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathbf{L}_n) = Y_{C_n}$, où $\mathbf{1}$ désigne le fibré en droites trivial au dessus de $Y_{C_{n-1}}$, et où on note \mathbf{L}_n au lieu de $\mathbf{L}(C_{n-1}, c_{1,n}, c_{2,n}, \dots, c_{n-1,n})$. Si on définit $\pi_n : Y_{C_n} \rightarrow Y_{C_{n-1}}$ par

$$\pi_n([z_1, w_1, \dots, z_{n-1}, w_{n-1}, z_n, w_n]) = [z_1, w_1, \dots, z_{n-1}, w_{n-1}],$$

la variété Y_C est alors construite à l'aide de fibrations successives de fibres $\mathbb{C}P^1$ selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathbf{L}_N) = Y_{C_N} = Y_C \\
 \downarrow \pi_N \\
 Y_{C_{N-1}} \\
 \vdots \\
 \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathbf{L}_2) = Y_{C_2} \\
 \downarrow \pi_2 \\
 \mathbb{C}P^1 = Y_{C_1} \\
 \downarrow \pi_1 \\
 \{\text{un point}\} = Y_0
 \end{array}$$

Si on définit $s_j^0 : Y_{j-1} \rightarrow Y_j$ et $s_j^\infty : Y_{j-1} \rightarrow Y_j$ comme dans la section précédente, alors la famille $\{Y_{C_j}, \pi_j, s_j^0, s_j^\infty\}_{1 \leq j \leq N}$ est donc une tour de Bott de dimension N , et on obtient ainsi une application :

$$\mathbb{Z}^{N(N-1)/2} \rightarrow \{\text{classes d'isomorphisme de tours de Bott de dimension } N\}, \tag{2.2}$$

qui à $C \in \mathbb{Z}^{N(N-1)/2}$ associe Y_C , et pour toute tour de Bott Y_C dans l'image de (2.2), une application :

$$\mathbb{Z}^N \rightarrow \{\text{classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur } Y_C\}, \tag{2.3}$$

qui à $(m_1, m_2, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$ associe le fibré $L(C, m_1, m_2, \dots, m_N)$ sur Y_C .

Le résultat suivant est alors prouvé dans [11].

Proposition 2.2. *Les applications (2.2) et (2.3) sont des bijections.*

Remarque 2.3. Dans la proposition précédente, il s'agit de classes d'isomorphisme de tours de Bott et non de variétés complexes ayant une telle structure. Par exemple, pour tout entier k , les tours de Bott $Y_{\{k\}}$ et $Y_{\{-k\}}$ représentent la même variété complexe.

Dans toute la suite on suppose donnée une liste d'entiers C et on note Y (au lieu de Y_C) la tour de Bott associée à C .

On fait agir $D_C = (\mathbb{C}^*)^N$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_C \simeq \mathbb{C}^N$) sur Y par :

$$\begin{aligned}
 (e^{\lambda_1(d)}, e^{\lambda_2(d)}, \dots, e^{\lambda_N(d)})[z_1, w_1, z_2, w_2, \dots, z_N, w_N] \\
 = [z_1, e^{-\lambda_1(d)}w_1, z_2, e^{-\lambda_2(d)}w_2, \dots, z_N, e^{-\lambda_N(d)}w_N],
 \end{aligned}$$

où $\lambda_i \in \mathfrak{d}_C^*$ est définie par $\lambda_i((d_1, d_2, \dots, d_N)) = d_i$.

Soit $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. La variété Y s'identifie au quotient de $(S^3)^N$ par $(S^1)^N$ où l'action de $(S^1)^N$ sur $(S^3)^N$ est donnée par la formule (2.1).

L'action de D_C sur Y induit une action de $D = (S^1)^N$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{d} \simeq i\mathbb{R}^N \subset \mathfrak{d}_C$) sur Y . Les λ_i sont dans $i\mathfrak{d}^*$.

2.1.3. *Décomposition cellulaire*

On définit une décomposition cellulaire de Y indexée par \mathcal{E} de la manière suivante.

Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $Y_\varepsilon \subset Y$ l'ensemble des classes $[z_1, w_1, \dots, z_N, w_N]$ qui vérifient pour tout entier i compris entre 1 et N :

$$\begin{aligned} w_i &= 0 & \text{si } \varepsilon_i &= 0, \\ w_i &\neq 0 & \text{si } \varepsilon_i &= 1. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que cette définition est bien compatible avec l'action (2.1) de $(\mathbb{C}^*)^N$ sur $(\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0))^N$.

Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $1 \leq k < l \leq N$, on pose :

$$c_{k,l}(\varepsilon) = -c_{k,l} + \sum_{\substack{k < i_1 < \dots < i_m < l \\ m > 0, i_j \in \pi_+(\varepsilon)}} (-1)^{m+1} c_{k,i_1} c_{i_1,i_2} \dots c_{i_m,l}.$$

Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, on définit $\lambda_i(\varepsilon) \in \mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*$ par :

$$\lambda_i(\varepsilon) = (-1)^{\varepsilon_i+1} \left(\lambda_i + \sum_{j < i, j \in \pi_+(\varepsilon)} c_{j,i}(\varepsilon) \lambda_j \right),$$

où, par convention, $\sum_{\emptyset} = 0$.

On démontre alors facilement la proposition suivante.

Proposition 2.4.

- (i) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Y_ε est un espace affine complexe de dimension $l(\varepsilon)$ stable sous l'action linéaire du tore $D_{\mathbb{C}}$.
- (ii) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\bar{Y}_\varepsilon = \coprod_{\varepsilon' \leq \varepsilon} Y_{\varepsilon'}$.
- (iii) $Y = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Y_\varepsilon$.
- (iv) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, la sous-variété \bar{Y}_ε s'identifie à la variété $Y_{C(\varepsilon)}$ et est donc une sous-variété irréductible lisse de Y .

De plus, nous allons avoir besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 2.5.

- (i) L'ensemble Y^D des points fixes de Y sous l'action de D est constitué des 2^N points :

$$[z_1, w_1, z_2, w_2, \dots, z_N, w_N], \quad \text{où } (z_i, w_i) \in \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

On identifiera donc Y^D avec \mathcal{E} en identifiant $(1, 0)$ avec 0 et $(0, 1)$ avec 1. Le point fixe $\varepsilon \in Y^D$ est l'unique point fixe de Y_ε .

- (ii) Soit $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2$, alors :

$$\varepsilon \in \bar{Y}_{\varepsilon'} \iff \varepsilon \leq \varepsilon',$$

et dans ce cas si on note $T_\varepsilon^\varepsilon$, l'espace tangent à $\bar{Y}_{\varepsilon'}$ en ε , les poids de la représentation de D dans $T_\varepsilon^\varepsilon$, induite par l'action de D sur Y sont les $\{\lambda_i(\varepsilon)\}_{i \in \pi_+(\varepsilon')}$.

2.2. Variétés de Bott–Samelson

On utilise les notations de la §1.

2.2.1. Définitions

Les définitions qui suivent sont exposées dans [15, Chapitre 7].

Considérons une suite de N racines simples μ_1, \dots, μ_N non nécessairement distinctes. On définit :

$$\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N) = P_{\mu_1} \times_B P_{\mu_2} \times_B \cdots \times_B P_{\mu_N} / B,$$

comme l'espace des orbites de B^N dans $P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \cdots \times P_{\mu_N}$, sous l'action à droite de B^N définie par :

$$(g_1, g_2, \dots, g_N)(b_1, b_2, \dots, b_N) = (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2, \dots, b_{N-1}^{-1} g_N b_N), \quad b_i \in B, \quad g_i \in P_{\mu_i}.$$

On obtient ainsi une variété projective irréductible et lisse. On notera $[g_1, g_2, \dots, g_N]$ la classe de (g_1, g_2, \dots, g_N) dans $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$. On note $g_{\mu_i} \in P_{\mu_i}$ un représentant quelconque de la réflexion de $N_{P_{\mu_i}}(H)/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On définit de même $\Gamma^K(\mu_1, \dots, \mu_N)$ comme l'espace des orbites de T^N dans $K_{\mu_1} \times K_{\mu_2} \times \cdots \times K_{\mu_N}$, sous l'action à droite de T^N définie par :

$$(k_1, k_2, \dots, k_N)(t_1, t_2, \dots, t_N) = (k_1 t_1, t_1^{-1} k_2 t_2, \dots, t_{N-1}^{-1} k_N t_N), \quad t_i \in T, \quad k_i \in K_{\mu_i}.$$

Les inclusions $K_{\mu_i} \subset P_{\mu_i}$ et $T \subset B$ induisent une application :

$$\iota : \Gamma^K(\mu_1, \dots, \mu_N) \rightarrow \Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N).$$

Comme pour tout i les inclusions $K_{\mu_i} \subset P_{\mu_i}$ et $T \subset B$ induisent un isomorphisme de variétés C^∞ : $K_{\mu_i}/T \cong P_{\mu_i}/B$, l'application ι est un isomorphisme de variétés C^∞ .

Dans la suite, on suppose donnée une suite de N racines simples μ_1, \dots, μ_N , et on note Γ (respectivement Γ^K) au lieu de $\Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$ (respectivement $\Gamma^K(\mu_1, \dots, \mu_N)$) la variété de Bott–Samelson associée à ces données.

On définit une action à gauche de B sur Γ par :

$$b[g_1, g_2, \dots, g_N] = [b g_1, g_2, \dots, g_N], \quad b \in B, \quad g_i \in P_{\mu_i}.$$

Par restriction, on obtient ainsi une action de H et de T .

On définit alors une application g de Γ dans X par multiplication (c'est-à-dire $g([g_1, \dots, g_N]) = g_1 * \cdots * g_N[B]$, où '*' désigne la multiplication dans le groupe G). Cette application est T -équivariante.

2.2.2. Décomposition cellulaire

Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma$ l'ensemble des classes $[g_1, g_2, \dots, g_N]$ qui vérifient pour tout entier i compris entre 1 et N :

$$\begin{aligned} g_i \in B & \quad \text{si } \varepsilon_i = 0, \\ g_i \notin B & \quad \text{si } \varepsilon_i = 1. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que cette définition est bien compatible avec l'action de B^N .
 Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $1 \leq i \leq N$, on définit :

$$v_i(\varepsilon) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq i, \\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k},$$

où, par convention, $\prod_{\emptyset} = 1$. On pose $v(\varepsilon) = v_N(\varepsilon)$.

Pour $i \leq j$, on définit également :

$$v_i^j(\varepsilon) = \prod_{\substack{i \leq k \leq j, \\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}.$$

Ce sont des éléments de W .

De plus, on pose $\alpha_i(\varepsilon) = v_i(\varepsilon)\mu_i$, c'est une racine.

On démontre alors facilement la proposition suivante.

Proposition 2.6.

- (i) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Γ_ε est un espace affine complexe de dimension $l(\varepsilon)$ stable sous l'action de B , et cette action induit une action linéaire du tore H sur Γ_ε .
- (ii) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\bar{\Gamma}_\varepsilon = \coprod_{\varepsilon' \leq \varepsilon} \Gamma_{\varepsilon'}$.
- (iii) $\Gamma = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$.
- (iv) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ s'identifie à la variété $\Gamma(\mu_i, i \in \pi_+(\varepsilon))$ et est donc une sous-variété irréductible lisse de Γ .

Remarque 2.7. Dans [9], Gaussent définit d'autres décompositions cellulaires des variétés de Bott–Samelson.

Soit Γ^T l'ensemble des points fixes de T dans Γ , on peut identifier Γ^T avec \mathcal{E} grâce au lemme suivant.

Lemme 2.8.

- (i) L'ensemble Γ^T est constitué des 2^N points :

$$[g_1, g_2, \dots, g_N], \quad \text{où } g_i \in \{e, g_{\mu_i}\}.$$

On identifiera donc Γ^T avec \mathcal{E} en identifiant e avec 0 et g_{μ_i} avec 1.

- (ii) Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, le point fixe ε est l'unique point fixe de Γ_ε .

2.2.3. Une autre structure complexe

On va définir une structure complexe sur Γ^K différente de celle déduite de l'isomorphisme de variétés C^∞ entre Γ^K et Γ . Cette structure permettra d'identifier les variétés de Bott–Samelson à des tours de Bott en tant que variétés complexes.

La projection $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h}$ induit un homomorphisme de groupe de Lie $\Theta : B \rightarrow H$. On définit alors $\Gamma^\infty = \Gamma^\infty(\mu_1, \dots, \mu_N)$ comme l'espace des orbites de B^N dans $P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \dots \times P_{\mu_N}$, sous l'action à droite de B^N définie par :

$$(g_1, g_2, \dots, g_N)(b_1, b_2, \dots, b_N) = (g_1 b_1, \Theta(b_1)^{-1} g_2 b_2, \dots, \Theta(b_{N-1})^{-1} g_N b_N), \quad b_i \in B, \quad g_i \in P_{\mu_i}. \quad (2.4)$$

Comme précédemment, la variété Γ^∞ est isomorphe (en tant que variété C^∞) à Γ^K et donc aussi à Γ . On fait agir H sur Γ^∞ de la même manière que sur Γ .

2.2.4. Les variétés de Bott–Samelson sont des tours de Bott

Pour identifier les variétés de Bott–Samelson à des tours de Bott, on procède par récurrence sur $N \geq 1$.

Pour $N = 1$, on va expliciter un isomorphisme entre Γ_μ et $\mathbb{C}P^1$. On note $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ l'indice tel que $\mu = \alpha_k$. On définit alors un homomorphisme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{p}_\mu$ en envoyant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } e_k, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } f_k \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ sur } h_k.$$

On obtient ainsi un homomorphisme $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow P_\mu$ et un difféomorphisme holomorphe :

$$SL(2, \mathbb{C})/B_{SL(2, \mathbb{C})} \cong P_\mu/B,$$

où $B_{SL(2, \mathbb{C})}$ désigne le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures.

De plus, l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a, c]$$

définit un difféomorphisme holomorphe :

$$SL(2, \mathbb{C})/B_{SL(2, \mathbb{C})} \cong \mathbb{C}P^1.$$

On obtient ainsi bien un difféomorphisme $\phi_\mu^\infty : \Gamma_\mu \cong \mathbb{C}P^1$.

On montre maintenant que $\Gamma^\infty(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ peut s'écrire $\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathbf{L}_N)$ où \mathbf{L}_N est un fibré en droites sur $\Gamma^\infty(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1})$.

On note \mathbb{C}_{μ_N} l'espace vectoriel \mathbb{C} muni de l'action de B triviale sur la partie unipotente de B et définie pour $h \in H$ par la multiplication par $e^{\mu_N}(h)$. On munit \mathbb{C}_{μ_N} d'une action de B^{N-1} en faisant agir seulement la dernière composante de B^{N-1} . On pose alors $\mathbf{L}_N = (P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \dots \times P_{\mu_{N-1}}) \times_{B^{N-1}} \mathbb{C}_{\mu_N}$, où l'action de B^{N-1} sur $P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \dots \times P_{\mu_{N-1}}$ est donnée par l'équation (2.4) (en remplaçant N par $N - 1$).

On a alors

$$\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathbf{L}_N) = (P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \cdots \times P_{\mu_{N-1}}) \times_{B^{N-1}} \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$$

et

$$\Gamma^\infty(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) = (P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \cdots \times P_{\mu_{N-1}}) \times_{B^{N-1}} (P_{\mu_N}/B),$$

où l'action de B^{N-1} sur $P_{\mu_1} \times P_{\mu_2} \times \cdots \times P_{\mu_{N-1}}$ est donnée par l'équation (2.4) (en remplaçant N par $N - 1$), et où $(b_1, b_2, \dots, b_{N-1}) \in B^{N-1}$ agit sur P_{μ_N}/B par multiplication à gauche par $(\Theta(b_{N-1}))^{-1}$.

Il suffit maintenant de trouver un difféomorphisme holomorphe B^{N-1} -équivariant entre P_{μ_N}/B et $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$. Comme seule la dernière composante de B^{N-1} agit sur P_{μ_N}/B et sur $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$, et comme la partie unipotente de cette dernière composante agit trivialement sur P_{μ_N}/B et sur $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$, il suffit de trouver un difféomorphisme H -équivariant : $P_{\mu_N}/B \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$, où $h \in H$ agit sur P_{μ_N}/B par multiplication à gauche par h^{-1} et sur $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_{\mu_N})$ par multiplication de la deuxième composante par $e^{\mu_N}(h)$. On montre facilement que le difféomorphisme $\phi_{\mu_N}^\infty$ convient.

On a ainsi identifié les variétés de Bott–Samelson à des tours de Bott et le résultat suivant, prouvé dans [11], nous donne la liste d'entiers associée à cette construction.

Proposition 2.9. *La construction précédente définit un difféomorphisme holomorphe ϕ^∞ entre $\Gamma^\infty = \Gamma^\infty(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ et la tour de Bott Y_C , avec $C = \{c_{j,k}\}_{1 \leq j < k \leq N}$, où $c_{j,k}$ est défini par $c_{j,k} = \mu_k(\mu_j^\vee)$.*

La liste C est donc un ensemble de nombres de Cartan dépendant du choix de la suite $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$.

Soit $\tau : \mathfrak{d}_\mathbb{C}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ l'application définie par $\tau(\lambda_i) = \mu_i$. Elle envoie \mathfrak{d}^* dans \mathfrak{t}^* . Soit $\mathfrak{s}^* \subset \mathfrak{t}^*$ l'image de \mathfrak{d}^* par τ et soit $\mathfrak{s}_\mathbb{C}^* \subset \mathfrak{h}^*$ l'image de $\mathfrak{d}_\mathbb{C}^*$. On a les deux suites suivantes (où les premières flèches sont surjectives et les deuxièmes injectives) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}^* &\xrightarrow{\tau} \mathfrak{s}^* \hookrightarrow \mathfrak{t}^* , \\ \mathfrak{d}_\mathbb{C}^* &\xrightarrow{\tau} \mathfrak{s}_\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathfrak{h}^* . \end{aligned}$$

On en déduit la suite suivante sur les tores complexes :

$$H \twoheadrightarrow S_\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} D_\mathbb{C} .$$

On continue à noter γ le morphisme de H dans $D_\mathbb{C}$ ainsi défini.

On a alors la suite suivante sur les tores compacts :

$$T \twoheadrightarrow S \xrightarrow{\gamma} D .$$

L'action de $h \in H$ sur Γ^∞ étant donnée par la formule :

$$h[g_1, g_2, \dots, g_N] = [hg_1h^{-1}, hg_2h^{-1}, \dots, hg_Nh^{-1}],$$

le tore H agit sur Γ^∞ via son image $S_{\mathbb{C}}$. De plus, d'après la construction de ϕ^∞ :

$$\forall (h, x) \in H \times \Gamma^\infty, \quad \phi^\infty(hx) = \gamma(h)\phi^\infty(x),$$

et l'action de H sur Γ^∞ s'identifie donc à celle d'un sous-tore de $D_{\mathbb{C}}$ sur $Y_{\mathbb{C}}$.

On note $\phi : \Gamma \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$ l'isomorphisme (de variétés C^∞) induit par ϕ^∞ . On vérifie, grâce à la construction de ϕ^∞ , que ϕ envoie Γ_ε sur Y_ε et le point $\varepsilon \in \Gamma^T$ sur le point $\varepsilon \in Y^D$.

Le tore T agit sur Γ via son image S , et on a :

$$\forall (t, x) \in T \times \Gamma, \quad \phi(tx) = \gamma(t)\phi(x).$$

L'action de T sur Γ s'identifie donc à celle d'un sous-tore de D sur $Y_{\mathbb{C}}$.

Remarque 2.10. L'action holomorphe de $D_{\mathbb{C}}$ sur Γ^∞ ne définit pas en général une action holomorphe de $D_{\mathbb{C}}$ sur Γ .

3. Cohomologie équivariante

3.1. Préliminaires

Soit $U_{\mathbb{C}}$ un tore complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ et soit $U \subset U_{\mathbb{C}}$ le tore compact maximal de $U_{\mathbb{C}}$.

On note $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de U , et $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*$. C'est l'algèbre des fonctions polynomiales à coefficients complexes sur \mathfrak{u} .

Soit M un espace topologique muni d'une action continue de U . Notons $\mathbb{E}U \rightarrow \mathbb{B}U$ le fibré universel de U et $\mathbb{E}U \times^U M$ l'espace topologique obtenu en quotientant $\mathbb{E}U \times M$ par l'action de U définie par $u(p, m) = (pu^{-1}, um)$ pour tous $u \in \mathbb{E}U, m \in M$ et $u \in U$. Pour tout anneau commutatif A , on définit la cohomologie U -équivariante de X à coefficients dans A , notée $H_U^*(M, A)$, comme la cohomologie singulière de $\mathbb{E}U \times^U M$ à coefficients dans A . C'est une $H_U^*(pt, A)$ -algèbre. Dans toute la suite on prendra pour A le corps des nombres complexes, et on notera $H_U^*(M)$ au lieu de $H_U^*(M, \mathbb{C})$. Dans ce cas, $H_U^*(pt)$ s'identifie à $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$.

Toute application $g : M \rightarrow N$ continue et U -équivariante entre deux espaces topologiques munis d'une action continue de U induit un morphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -algèbres $g^* : H_U^*(N) \rightarrow H_U^*(M)$.

3.1.1. Intégration et restriction aux points fixes

On suppose que M est un CW complexe orienté de dimension paire n , ne possédant pas de cellule de codimension 1. Alors, la fibration U -équivariante triviale : $M \rightarrow \{pt\}$ et l'intégration sur les fibres (voir [1] pour ces définitions) permettent de définir un homomorphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -modules gradués :

$$\int_M : H_U^*(M) \rightarrow S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*),$$

de degré $-n$.

Si N est une sous-variété U -invariante de M admettant une telle structure, on peut définir le morphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -modules gradués :

$$\int_N : H_U^*(M) \rightarrow S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*),$$

obtenu en restreignant μ à N puis en intégrant sur N .

Si on note M^U l'ensemble des points fixes de U dans M , l'inclusion $M^U \subset M$ fournit un morphisme $i_U^* : H_U^*(M) \rightarrow H_U^*(M^U)$ appelé restriction aux points fixes. Si M^U est discret, $H_U^*(M^U)$ s'identifie à la $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -algèbre des fonctions sur M^U à valeurs dans $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ de degré borné munie de l'addition et de la multiplication point par point. On notera cette algèbre $F_b(M^U; S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*))$.

Remarque 3.1. Si M^U est fini, comme c'est le cas pour les tours de Bott et les variétés de drapeaux dans le cas fini, toute fonction sur M^U à valeurs dans $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ est de degré borné.

Si M admet une structure de CW -complexe U -équivariant (non nécessairement fini) orienté $M = \coprod_{f \in \mathcal{F}} M_f$, ne comportant aucune cellule de dimension impaire et seulement un nombre fini de cellules en chaque dimension paire, et si M^U est discret, les Propositions 2.5.1 et 2.6.1 de [1] nous donnent la proposition suivante.

Proposition 3.2.

- (i) La cohomologie U -équivariante de M^U s'identifie à $F_b(M^U; S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*))$.
- (ii) La restriction aux points fixes $i_U^* : H_U^*(M) \rightarrow F_b(M^U; S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*))$ est injective.
- (iii) La cohomologie U -équivariante de M est un $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -module libre qui admet comme base la famille $\{\hat{\sigma}_f^U\}_{f \in \mathcal{F}}$ d'éléments homogènes de degré $\dim(M_f)$ caractérisés par :

$$\int_{M_{f'}} \hat{\sigma}_f^U = \delta_{f',f},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

3.1.2. Formule de localisation

Si M est une variété différentiable munie d'une action différentiable de U , la cohomologie U -équivariante de M s'identifie à la cohomologie du complexe des formes différentielles $\mu(Y)$ à coefficients complexes sur M dépendant polynomialement de $Y \in \mathfrak{u}$ et vérifiant une condition de U -équivariance évidente muni de la différentielle $D = d - 2i\pi\iota(Y)$ (voir [1]).

De plus, si M est compacte, connexe, et orientée, pour toute forme $\mu(Y)$, on peut définir le polynôme $\int_M \mu(Y) \in S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ qui induit un morphisme en cohomologie. Ce morphisme s'identifie à l'intégration topologique définie dans la §3.1.1 (voir [1]), et on notera donc encore $\int_M : H_U^*(M) \rightarrow S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ ce morphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -modules.

On suppose que M est une variété différentiable compacte de dimension $2n$ munie d'une structure presque complexe préservée par l'action de U . On suppose de plus que

M^U est fini. En chaque point fixe $m \in M^U$, l'action de U sur M induit une action de U sur $T_m M$, l'espace tangent à M en m muni de sa structure complexe. On note $(\alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m) \in (\mathfrak{iu}^*)^n \subset (\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)^n$ les poids de la représentation de U dans $T_m M$. Dans ce cas, la formule de localisation (voir [3]) s'écrit de la manière suivante.

Proposition 3.3. *Pout toute forme $\hat{\sigma}^U \in H_U^*(M)$, on a :*

$$\int_M \hat{\sigma}^U = \sum_{m \in M^U} \frac{i_U^*(\hat{\sigma}^U)(m)}{\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^m}.$$

3.1.3. *Evaluation à l'origine et restriction*

La projection canonique $\mathbb{E}U \times M \rightarrow \mathbb{E}U \times^U M$ induit un homomorphisme de \mathbb{C} -algèbre $v_0 : H_U^*(M) \rightarrow H^*(M)$ appelé évaluation à l'origine.

On suppose que M admet une décomposition cellulaire U -équivariante orientée $M = \coprod_{f \in \mathcal{F}} M_f$, ne comportant aucune cellule de dimension impaire et seulement un nombre fini de cellules en chaque dimension paire. On note $\hat{\sigma}_f^U$ la base de $H_U^*(M)$ (en tant que $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -module) donnée par la Proposition 3.2.

La décomposition $M = \coprod_{f \in \mathcal{F}} M_f$ fournit une base y_f sur \mathbb{C} de la cohomologie ordinaire de M . La Proposition 2.5.1 et le Lemme 5.5.1 de [1] nous donnent le résultat suivant.

Proposition 3.4. *L'évaluation à l'origine v_0 est l'homomorphisme de \mathbb{C} -algèbres $H_U^*(M) \rightarrow H^*(M)$ défini par :*

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ et } \forall h \in S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*), \quad v_0(h\hat{\sigma}_f^U) = h(0)y_f.$$

Soit $V_{\mathbb{C}}$ un sous-tore de $U_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ et soit $V = V_{\mathbb{C}} \cap U$ le tore compact maximal de V . On a alors un morphisme de restriction $p_V^U : H_U^*(M) \rightarrow H_V^*(M)$. L'intégration commutant à la restriction, on obtient facilement la proposition suivante.

Proposition 3.5. *L'application p_V^U est l'homomorphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -algèbres $H_U^*(M) \rightarrow H_V^*(M)$ défini par :*

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ et } \forall h \in S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*), \quad p_V^U(h\hat{\sigma}_f^U) = \tilde{p}_V^U(h)\hat{\sigma}_f^V,$$

où l'application $\tilde{p}_V^U : S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow S(\mathfrak{v}_{\mathbb{C}}^*)$ est déduite de l'inclusion $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$.

3.1.4. *Dualité de Poincaré*

Si M est un espace topologique compact, la dualité de Poincaré n'est pas toujours vérifiée en cohomologie équivariante. Cependant, si on suppose de plus que $H_U^*(M)$ est un $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -module libre isomorphe à $H^*(M) \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$, on démontre facilement que l'application :

$$\alpha : H_U^*(M) \rightarrow \text{Hom}_{S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)}(H_U^*(M), S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*))$$

définie par $\alpha(\hat{\sigma}_1^U)(\hat{\sigma}_2^U) = \int_M \hat{\sigma}_1^U \hat{\sigma}_2^U$ est un isomorphisme de $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -modules.

Si M est un espace topologique compact qui vérifie les hypothèses de la Proposition 3.2, on a donc le résultat suivant.

Proposition 3.6. *Il existe une base $\{\hat{P}_f^U\}_{f \in \mathcal{F}}$ du $S(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^*)$ -module $H_U^*(M)$ caractérisée par :*

$$\forall \hat{\sigma}^U \in H_U^*(M), \quad \int_M \hat{P}_f^U \hat{\sigma}^U = \int_{\bar{M}_f} \hat{\sigma}^U.$$

3.2. Cohomologie équivariante des tours de Bott

On reprend les notations de la §2.1. Soit $N \geq 1$ un entier naturel, $\mathcal{E} = \{0, 1\}^N$, et soit $C = \{c_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq N}$ une liste d'entiers. Soit $Y = Y_C$ la tour de Bott associée à cette liste.

3.2.1. *Restrictions aux points fixes*

La décomposition $Y = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Y_\varepsilon$ munit Γ d'une structure de CW -complexe orienté D -équivariant fini où toutes les cellules sont de dimension paire ; de plus l'ensemble des points fixes de l'action de D sur Γ est fini et s'identifie à \mathcal{E} . On peut donc appliquer la Proposition 3.2, et on a le résultat suivant.

Proposition 3.7.

- (i) *La cohomologie D -équivariante de Y^D s'identifie à $F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*))$.*
- (ii) *La restriction aux points fixes $i_D^* : H_D^*(Y) \rightarrow F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*))$ est injective.*
- (iii) *La cohomologie D -équivariante de Y est un $S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*)$ -module libre qui admet comme base la famille $\{\hat{\sigma}_\varepsilon^D\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ d'éléments homogènes de degré $2l(\varepsilon)$ caractérisés par :*

$$\int_{\bar{Y}_{\varepsilon'}} \hat{\sigma}_\varepsilon^D = \delta_{\varepsilon', \varepsilon}.$$

Définition 3.8. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit $\sigma_\varepsilon^D \in F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*))$ par :

$$\sigma_\varepsilon^D(\varepsilon') = \begin{cases} \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon') & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.9. *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a :*

$$i_D^*(\hat{\sigma}_\varepsilon^D) = \sigma_\varepsilon^D.$$

Les restrictions aux points fixes sont donc des produits de formes linéaires.

Preuve. En utilisant les Propositions 3.3 et 2.4 et le Lemme 2.5, on obtient pour tout $\hat{\sigma}^D \in H_D^*(Y)$:

$$\int_{\bar{Y}_\varepsilon} \hat{\sigma}^D = \sum_{\varepsilon' \leq \varepsilon} \frac{i_D^*(\hat{\sigma}^D)(\varepsilon')}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon')}. \tag{3.1}$$

Soit $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}$, et soit $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D = i_D^*(\hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^D)$. Montrons par récurrence sur la longueur de ε que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon)$.

	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
$\sigma_{(0,0)}^D$	1	1	1	1
$\sigma_{(1,0)}^D$	0	λ_1	0	λ_1
$\sigma_{(0,1)}^D$	0	0	λ_2	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\sigma_{(1,1)}^D$	0	0	0	$\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)$

Figure 1. Restrictions aux points fixes pour la surface de Hirzebruch H_{-1} .

Grâce à la formule (3.1) et à la caractérisation de $\hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^D$, on démontre facilement par récurrence sur $l(\varepsilon)$ que si ε n'est pas plus grand que ε_0 , on a bien $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon) = 0$.

On peut donc se limiter au cas où $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon = \varepsilon_0$, la formule (3.1) et le fait que

$$\int_{Y_{\varepsilon_0}} \hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^D = 1$$

nous donnent bien $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon_0) = \sigma_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon_0)$.

Soit $\varepsilon > \varepsilon_0$. On suppose le résultat vérifié pour tout ε' de longueur strictement plus petite que ε , on applique la formule (3.1) et le fait que $\int_{Y_\varepsilon} \hat{\sigma}_{\varepsilon_0}^D = 0$ pour obtenir

$$\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon_0)} \lambda_i(\varepsilon')}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon')} + \frac{\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon)}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon)} = 0,$$

d'où :

$$\sum_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon} \frac{1}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \lambda_i(\varepsilon')} + \tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon) \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon) = 0.$$

Si on pose $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - (j)$, où j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, on a alors :

$$\sum_{\substack{\varepsilon_0 \leq \varepsilon' < \varepsilon \\ \varepsilon' \neq \tilde{\varepsilon}}} \frac{1}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \lambda_i(\varepsilon')} - \frac{1}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)} \lambda_i(\varepsilon)} + \frac{\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon)}{\prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon)} = 0.$$

En effet, comme j est le plus grand élément de $\pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, pour tout $i \in \pi_+(\varepsilon) \setminus \pi_+(\varepsilon_0)$, $i \neq j$, $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i(\tilde{\varepsilon})$ et $\lambda_j(\varepsilon) = -\lambda_j(\tilde{\varepsilon})$. Pour les mêmes raisons, on s'aperçoit, en distinguant les termes qui ont un 1 en j ème position et ceux qui ont un 0 en j ème position, que la première somme est nulle, et on obtient alors bien :

$$\tilde{\sigma}_{\varepsilon_0}^D(\varepsilon) = \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon_0)} \lambda_i(\varepsilon).$$

□

Exemple 3.10. Dans la Figure 1, on explicite ces formules dans le cas de la surface de Hirzebruch $H_{-1} = Y_{\{-1\}}$.

3.2.2. *Dualité de Poincaré*

On note $\{\hat{P}_\varepsilon^D\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ la base de $H_D^*(Y)$ donnée par la Proposition 3.6. Ces classes de cohomologie sont caractérisées par les formules :

$$\int_Y \hat{P}_\varepsilon^D \hat{\sigma}_{\varepsilon'}^D = \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

On pose $P_\varepsilon^D = i_D^*(\hat{P}_\varepsilon^D)$. Une démonstration analogue à celle du Théorème 3.9 nous donne les formules suivantes.

Théorème 3.11.

$$P_\varepsilon^D(\varepsilon') = \begin{cases} \prod_{i \in \pi_-(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon') & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.3. *Structure multiplicative*

L'algèbre $H_D^*(Y)$ est une algèbre de polynômes (où les indéterminées représentent des classes de degré 2) quotientée par des relations de degré 2 que l'on va expliciter.

On pose $\sigma_i^D = \sigma_{(i)}^D$ et $\hat{\sigma}_i^D = \hat{\sigma}_{(i)}^D$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.12. *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a :*

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^D = \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \hat{\sigma}_i^D.$$

De plus, on a les formules de multiplication suivantes :

$$\hat{\sigma}_i^D \hat{\sigma}_\varepsilon^D = \begin{cases} \hat{\sigma}_{\varepsilon+(i)}^D & \text{si } i \in \pi_-(\varepsilon), \\ \sigma_i^D(\varepsilon) \hat{\sigma}_\varepsilon^D + \sum_{j < i, j \in \pi_-(\varepsilon)} c_{j,i}(\varepsilon) \hat{\sigma}_\varepsilon^D \hat{\sigma}_j^D & \text{si } i \in \pi_+(\varepsilon). \end{cases}$$

Preuve. Par injectivité de la restriction aux points fixes, il suffit de démontrer ces formules pour σ_i^D et σ_ε^D .

La première formule se voit immédiatement sur la définition des σ_ε^D .

Pour la deuxième formule, on écrit le produit $\sigma_i^D \sigma_\varepsilon^D$ sous la forme :

$$\sigma_i^D \sigma_\varepsilon^D = \sum_{\varepsilon' \in \mathcal{E}} C_{\varepsilon'} \sigma_{\varepsilon'}^D. \tag{3.2}$$

Soit $\varepsilon' \in \mathcal{E}$ tel que $\varepsilon' \not\geq \varepsilon$. On montre que pour tout $\varepsilon'' \leq \varepsilon'$, $C_{\varepsilon''} = 0$. Pour cela, on procède par récurrence sur $l(\varepsilon'')$ en évaluant l'égalité (3.2) en ε'' . On obtient ainsi que $C_{\varepsilon'} = 0$ si $\varepsilon' \not\geq \varepsilon$.

De plus, pour des raisons de degré, $C_{\varepsilon'} = 0$ si $l(\varepsilon') > l(\varepsilon) + 1$, et l'égalité (3.2) s'écrit donc sous la forme :

$$\sigma_i^D \sigma_\varepsilon^D = C_i \sigma_\varepsilon^D + \sum_{j \neq i, j \in \pi_-(\varepsilon)} C_j \sigma_{\varepsilon+(j)}^D.$$

En évaluant en ε , on trouve C_i , puis en évaluant en $\varepsilon + (j)$, on trouve C_j . □

En particulier, on a les relations suivantes :

$$(\hat{\sigma}_i^D)^2 = \lambda_i \hat{\sigma}_i^D - \sum_{j < i} c_{j,i} \hat{\sigma}_i^D \hat{\sigma}_j^D.$$

Si on pose $x_i = \hat{\sigma}_i^D$, on a donc le théorème suivant.

Théorème 3.13. *L'algèbre $H_D^*(Y)$ est l'algèbre de polynômes $S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*)[x_1, \dots, x_N]$ (où les indéterminées sont de degré 2) quotientée par les relations :*

$$x_i^2 = \lambda_i x_i - \sum_{j < i} c_{j,i} x_i x_j.$$

Exemple 3.14. *On considère la liste d'entiers $C = \{c_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq 3}$ définie par :*

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= c_{2,3} = -1, \\ c_{1,3} &= 2, \end{aligned}$$

et on pose $Y = Y_C$. Alors, $H_D^*(Y)$ s'identifie au quotient de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3][x_1, x_2, x_3]$ par les relations :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \lambda_1 x_1, \\ x_2^2 &= \lambda_2 x_2 + x_1 x_2, \\ x_3^2 &= \lambda_3 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_3. \end{aligned}$$

Exemple 3.15. *On considère la liste d'entiers $C = \{c_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ définie par :*

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= c_{1,4} = c_{3,4} = -2, \\ c_{1,3} &= c_{2,4} = 2, \\ c_{2,3} &= -1, \end{aligned}$$

et on pose $Y = Y_C$. Alors, $H_D^*(Y)$ s'identifie au quotient de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4][x_1, x_2, x_3, x_4]$ par les relations :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \lambda_1 x_1, \\ x_2^2 &= \lambda_2 x_2 + 2x_1 x_2, \\ x_3^2 &= \lambda_3 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_3, \\ x_4^2 &= \lambda_4 x_4 + 2x_3 x_4 - 2x_2 x_4 + 2x_1 x_4. \end{aligned}$$

3.2.4. Cohomologie ordinaire

La décomposition cellulaire $Y = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Y_\varepsilon$ fournit une base $(y_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ de la cohomologie ordinaire de Y . Si on pose $y_i = y_{(i)}$, la Proposition 3.4 et le Théorème 3.13 nous donnent la description suivante de la cohomologie ordinaire de Y .

Proposition 3.16. *La cohomologie ordinaire de Y est engendrée par des éléments $(y_i)_{1 \leq i \leq N}$ de degré 2 soumis aux relations :*

$$y_i^2 + \sum_{j < i} c_{j,i} y_i y_j = 0.$$

3.3. Cohomologie équivariante des variétés de Bott–Samelson

On reprend les notations de la § 2.2. On choisit N racines simples μ_1, \dots, μ_N non nécessairement distinctes, et on pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$. Pour $1 \leq i < j \leq N$, on pose $b_{i,j} = \mu_j(\mu_i^\vee)$ et $B = \{b_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq N}$.

3.3.1. Restrictions aux points fixes

Les résultats de cette section ne dépendant pas de la structure complexe sur Γ , on peut identifier Γ avec la tour de Bott $Y = Y_B$, la décomposition $\Gamma = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$ avec la décomposition $Y = \coprod_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Y_\varepsilon$, et le point fixe $\varepsilon \in \Gamma^T$ avec le point fixe $\varepsilon \in Y^D$ à l'aide de l'isomorphisme ϕ de la § 2.2.4. Le tore T agit sur Γ via son image S , et le tore S s'identifie, par l'homomorphisme γ , à un sous-tore du tore D qui agit sur Y (voir § 2.2.4).

Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit $\hat{\sigma}_\varepsilon^S \in H_S^*(\Gamma)$ par $\hat{\sigma}_\varepsilon^S = p_S^D(\hat{\sigma}_\varepsilon^D)$. D'après la Proposition 3.5, la famille $\{\hat{\sigma}_\varepsilon^S\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ est une base du $S(\mathfrak{s}_\mathbb{C}^*)$ -module libre $H_S^*(\Gamma)$ vérifiant :

$$\forall (\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2, \quad \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon'}} \hat{\sigma}_\varepsilon^S = \delta_{\varepsilon', \varepsilon}.$$

Comme T agit sur Γ via image dans S , $H_T^*(\Gamma) = H_S^*(\Gamma) \otimes_{S(\mathfrak{s}_\mathbb{C}^*)} S(\mathfrak{h}^*)$.

Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit alors $\hat{\sigma}_\varepsilon^T \in H_T^*(\Gamma)$ par $\hat{\sigma}_\varepsilon^T = \hat{\sigma}_\varepsilon^S \otimes 1$. Pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2$:

$$\int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon'}} \hat{\sigma}_\varepsilon^T = \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon'}} \hat{\sigma}_\varepsilon^S = \delta_{\varepsilon', \varepsilon}.$$

On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 3.17.

- (i) La cohomologie T -équivariante de Γ^T s'identifie à $F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{h}^*))$.
- (ii) La restriction aux points fixes $i_T^*: H_T^*(\Gamma) \rightarrow F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{h}^*))$ est injective.
- (iii) La cohomologie T -équivariante de Γ est un $S(\mathfrak{h}^*)$ -module libre qui admet comme base la famille $\{\hat{\sigma}_\varepsilon^T\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ d'éléments homogènes de degré $2l(\varepsilon)$ vérifiant :

$$\int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon'}} \hat{\sigma}_\varepsilon^T = \delta_{\varepsilon', \varepsilon}.$$

Définition 3.18. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on définit $\sigma_\varepsilon^T \in F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{h}^*))$ par :

$$\sigma_\varepsilon^T(\varepsilon') = \begin{cases} (-1)^{l(\varepsilon)} \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon') & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.19. Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a :

$$i_T^*(\hat{\sigma}_\varepsilon^T) = \sigma_\varepsilon^T.$$

Preuve. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H_S^*(\Gamma) & \xleftarrow{p_S^D} & H_D^*(Y) \\
 \downarrow i_S^* & & \downarrow i_D^* \\
 F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*)) & \xleftarrow{\tilde{\tau}} & F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*))
 \end{array}$$

où l'application $\tilde{\tau} : F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^*)) \rightarrow F_b(\mathcal{E}; S(\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*))$ est déduite de $\tau : \mathfrak{d}_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$.

Pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2$, on a donc :

$$i_T^*(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^T)(\varepsilon') = i_S^*(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^S)(\varepsilon') = i_S^* p_S^D(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^D)(\varepsilon') = \tilde{\tau}(\sigma_{\varepsilon}^D)(\varepsilon').$$

D'après l'expression de σ_{ε}^D (voir Définition 3.8), il suffit alors de prouver que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

$$\alpha_i(\varepsilon) = -\tau(\lambda_i(\varepsilon)).$$

Comme $s_{\nu_s} \nu_s = -\nu_s$, il faut vérifier que pour toute suite $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ de racines simples, on a la relation suivante :

$$s_{\nu_1} s_{\nu_2} \cdots s_{\nu_{s-1}} \nu_s = \nu_s + \sum_{1 \leq i < s} b_i \nu_i, \tag{3.3}$$

avec

$$b_i = \sum_{\substack{i_0=i < i_1 < \dots < i_m=s, \\ m > 0}} (-1)^m a(\nu_{i_0}, \nu_{i_1}) a(\nu_{i_1}, \nu_{i_2}) \cdots a(\nu_{i_{m-1}}, \nu_{i_m}),$$

où $a(\nu, \nu')$ est le nombre de Cartan associé aux racines simples ν et ν' (i.e. $a(\nu, \nu') = \nu'(\nu^\vee)$). Cette relation est une conséquence immédiate de la définition des réflexions simples à l'aide des nombres de Cartan et se démontre par récurrence sur s : pour $s = 1$, cela traduit la relation $s_{\nu} \nu' = \nu' - a(\nu, \nu') \nu$. \square

3.3.2. Dualité de Poincaré et structure multiplicative

On note $\{\hat{P}_{\varepsilon}^T\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ la base de $H_T^*(\Gamma)$ donnée par la Proposition 3.6. On pose $P_{\varepsilon}^T = i_T^*(\hat{P}_{\varepsilon}^T)$. Par restriction, on obtient les formules suivantes grâce au Théorème 3.11.

Théorème 3.20.

$$P_{\varepsilon}^T(\varepsilon') = \begin{cases} (-1)^{N-l(\varepsilon)} \prod_{i \in \pi_-(\varepsilon)} \alpha_i(\varepsilon') & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\sigma_i^T = \sigma_{(i)}^T$ et $\hat{\sigma}_i^T = \hat{\sigma}_{(i)}^T$. La structure multiplicative de $H_T^*(\Gamma)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.21. *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on a :*

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^T = \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} \hat{\sigma}_i^T.$$

De plus, on a les formules de multiplication suivantes :

$$\hat{\sigma}_i^T \hat{\sigma}_\varepsilon^T = \begin{cases} \hat{\sigma}_{\varepsilon+(i)}^T & \text{si } i \in \pi_-(\varepsilon), \\ \hat{\sigma}_i^T(\varepsilon) \hat{\sigma}_\varepsilon^T + \sum_{j < i, j \in \pi_-(\varepsilon)} \alpha_j^i(\varepsilon) (\mu_j^\vee) \hat{\sigma}_\varepsilon^T \hat{\sigma}_j^T & \text{si } i \in \pi_+(\varepsilon), \end{cases}$$

où on a posé $\alpha_j^i(\varepsilon) = v_{j+1}^i(\varepsilon)(\mu_i)$.

Preuve. Pour démontrer ces formules, on peut remplacer $\hat{\sigma}_i^T$ et $\hat{\sigma}_\varepsilon^T$ par $\hat{\sigma}_i^S$ et $\hat{\sigma}_\varepsilon^S$. On utilise alors les résultats analogues pour les tours de Bott et l’homomorphisme de restriction p_S^D .

La Proposition 3.5 et le Théorème 3.12 donnent immédiatement la première formule. Pour prouver la deuxième formule, il faut montrer :

$$s_j \alpha_j^i(\varepsilon) - \alpha_j^i(\varepsilon) = -\tilde{\tau}(c_{j,i}(\varepsilon)) \mu_j = -c_{j,i}(\varepsilon) \mu_j.$$

Cette formule est une conséquence immédiate de l’équation (3.3). □

En particulier, on a l’expression suivante des carrés des éléments de degré 2 :

$$(\hat{\sigma}_i^T)^2 = \mu_i \hat{\sigma}_i^T - \sum_{j < i} b_{j,i} \hat{\sigma}_i^T \hat{\sigma}_j^T.$$

Si on pose $x_i = \hat{\sigma}_i^T$, on a donc le théorème suivant.

Théorème 3.22. *L’algèbre $H_T^*(\Gamma)$ est l’algèbre de polynômes $S(\mathfrak{h}^*)[x_1, \dots, x_N]$ (où les indéterminées sont de degré 2) quotientée par les relations :*

$$x_i^2 = \mu_i x_i - \sum_{j < i} b_{j,i} x_i x_j.$$

Exemple 3.23. *Dans le cas A_2 , on prend $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$. Alors, Γ s’identifie à Y_C où C est définie dans l’Exemple 3.14.*

On a alors les mêmes relations dans $H_T^(\Gamma)$ que dans $H_D^*(Y)$ en remplaçant λ_1 par α_1 , λ_2 par α_2 , et λ_3 par α_1 .*

L’algèbre $H_T^(\Gamma)$ s’identifie donc à l’algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\alpha_1, \alpha_2][x_1, x_2, x_3]$ quotientée par les relations :*

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \alpha_1 x_1, \\ x_2^2 &= \alpha_2 x_2 + x_1 x_2, \\ x_3^2 &= \alpha_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_3. \end{aligned}$$

Exemple 3.24. Dans le cas B_2 , on prend $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$. Alors Γ s'identifie à Y_C où C est définie dans l'Exemple 3.15.

On a les mêmes relations dans $H_T^*(\Gamma)$ que dans $H_D^*(Y)$ en remplaçant λ_1 par α_1 , λ_2 par α_2 , λ_3 par α_1 , et λ_4 par α_2 .

L'algèbre $H_T^*(\Gamma)$ s'identifie donc à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\alpha_1, \alpha_2][x_1, x_2, x_3, x_4]$ quotientée par les relations :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \alpha_1 x_1, \\ x_2^2 &= \alpha_2 x_2 + 2x_1 x_2, \\ x_3^2 &= \alpha_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_3, \\ x_4^2 &= \alpha_2 x_4 + 2x_3 x_4 - 2x_2 x_4 + 2x_1 x_4. \end{aligned}$$

3.4. Cohomologie équivariante des variétés de drapeaux

3.4.1. Lien entre $H_T^*(X)$ et $H_T^*(\Gamma)$

La décomposition $X = \coprod_{w \in W} X_w$ munit X d'une structure de CW -complexe orienté T -équivariant ne comportant aucune cellule de dimension impaire et seulement un nombre fini de cellules en chaque dimension paire. De plus, l'ensemble $X^T \approx W$ des points fixes de T dans X étant discret, on peut à nouveau appliquer la Proposition 3.2 pour obtenir le résultat suivant établi dans [1] et [14].

Proposition 3.25.

- (i) La cohomologie T -équivariante de X^T s'identifie à $F_b(W; S(\mathfrak{h}^*))$.
- (ii) La restriction aux points fixes $i_T^*: H_T^*(X) \rightarrow F_b(W; S(\mathfrak{h}^*))$ est injective.
- (iii) La cohomologie T -équivariante de X est un $S(\mathfrak{h}^*)$ -module libre qui admet comme base la famille $\{\hat{\xi}^w\}_{w \in W}$ d'éléments homogènes de degré $2l(w)$ caractérisés par :

$$\int_{\bar{X}_w} \hat{\xi}^w = \delta_{w', w}.$$

Pour tout $w \in W$, on pose $\xi^w = i_T^*(\hat{\xi}^w)$.

Soit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ une suite quelconque de N racines simples. On pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, et on note g l'application naturelle de Γ dans X :

$$g([g_1, g_2, \dots, g_N]) = g_1 * g_2 * \dots * g_N[B],$$

où $*$ désigne la multiplication dans le groupe G .

La proposition suivante démontrée dans [17] établit le lien entre $H_T^*(X)$ et $H_T^*(\Gamma)$.

Proposition 3.26. Soit $w \in W$, on a :

$$g^*(\hat{\xi}^w) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}, l(\varepsilon)=l(w) \\ \text{et } v(\varepsilon)=w}} \hat{\sigma}_\varepsilon^T.$$

Exemple 3.27. On considère le cas A_2 , $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$ la variété de Bott–Samelson associée à la décomposition $w_0 = s_1 s_2 s_1$ du plus grand élément du groupe de Weyl W . On reprend les notations du Théorème 3.22, et on a alors :

$$\begin{aligned} g^*(\hat{\xi}^{s_1}) &= x_1 + x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_2}) &= x_2, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2}) &= x_1 x_2, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_2 s_1}) &= x_2 x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2 s_1}) &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

On peut vérifier alors facilement, grâce aux relations explicitées dans l'Exemple 3.23, que $g^*(H_T^*(X))$ est bien une sous-algèbre de $H_T^*(\Gamma)$.

Exemple 3.28. On considère le cas B_2 , $\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$ la variété de Bott–Samelson associée à la décomposition $w_0 = s_1 s_2 s_1 s_2$ du plus grand élément du groupe de Weyl W . On reprend les notations du Théorème 3.22, et on a alors :

$$\begin{aligned} g^*(\hat{\xi}^{s_1}) &= x_1 + x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_2}) &= x_2 + x_4, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2}) &= x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_2 s_1}) &= x_2 x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2 s_1}) &= x_1 x_2 x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_2 s_1 s_2}) &= x_2 x_3 x_4, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2 s_1 s_2}) &= x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut vérifier, grâce aux relations explicitées dans l'Exemple 3.24, que $g^*(H_T^*(X))$ est bien une sous-algèbre de $H_T^*(\Gamma)$.

On peut utiliser ce plongement de $H_T^*(X)$ dans $H_T^*(\Gamma)$ pour calculer des produits. Calculons par exemple $\hat{\xi}^{s_1 s_2} \hat{\xi}^{s_2 s_1}$:

$$\begin{aligned} g^*(\hat{\xi}^{s_1 s_2} \hat{\xi}^{s_2 s_1}) &= (x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_3 x_4) x_2 x_3 \\ &= x_1 x_3 (\alpha_2 x_2 + 2x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 (\alpha_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_3) x_4 \\ &= (2\alpha_1 + \alpha_2) x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \alpha_1 x_2 x_3 x_4 + (\alpha_2 x_2 + 2x_1 x_2) x_3 x_4 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= (2\alpha_1 + \alpha_2) x_1 x_2 x_3 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

et donc

$$\hat{\xi}^{s_1 s_2} \hat{\xi}^{s_2 s_1} = (2\alpha_1 + \alpha_2) \hat{\xi}^{s_1 s_2 s_1} + (\alpha_1 + \alpha_2) \hat{\xi}^{s_2 s_1 s_2} + \hat{\xi}^{s_1 s_2 s_1 s_2}.$$

On généralisera cette méthode dans la § 4.

3.4.2. Les opérateurs \mathcal{A}_i

Soit $1 \leq i \leq r$. On note Π_i la projection de G/B sur G/P_{α_i} . Dans [1], Arabia définit alors l'opérateur $\mathcal{A}_i : H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(X)$ par :

$$\mathcal{A}_i = \Pi_i^* \circ \Pi_{i*}.$$

C'est un morphisme de $S(\mathfrak{h}^*)$ -modules de degré -2 .

On note $Q(\mathfrak{h}^*)$ le corps des fractions de $S(\mathfrak{h}^*)$ et $F(W; Q(\mathfrak{h}^*))$ la $Q(\mathfrak{h}^*)$ -algèbre des fonctions de W à valeurs dans $Q(\mathfrak{h}^*)$ munie de l'addition et de la multiplication point par point. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on définit un opérateur $A_i : F(W; Q(\mathfrak{h}^*)) \rightarrow F(W; Q(\mathfrak{h}^*))$ par :

$$\forall u \in W, \quad A_i(f)(u) = \frac{f(us_i) - f(u)}{u\alpha_i}.$$

De plus, on définit l'opérateur $s_i : F(W; Q(\mathfrak{h}^*)) \rightarrow F(W; Q(\mathfrak{h}^*))$ par :

$$\forall u \in W, \quad s_i(f)(u) = f(us_i).$$

On note $I : F_b(W; S(\mathfrak{h}^*)) \rightarrow F(W; Q(\mathfrak{h}^*))$ l'application induite par l'inclusion de $S(\mathfrak{h}^*)$ dans $Q(\mathfrak{h}^*)$.

La relation fondamentale suivante est prouvée dans [1] :

$$I \circ i_T^* \circ \mathcal{A}_i = A_i \circ I \circ i_T^*.$$

Les classes de cohomologie $\{\hat{\xi}^w\}_{w \in W}$ vérifient alors les relations suivantes (voir [1]) :

$$\mathcal{A}_i \hat{\xi}^w = \begin{cases} \hat{\xi}^{ws_i} & \text{si } ws_i < w, \\ 0 & \text{si } ws_i > w. \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $k_{\mu_i} \in K_{\mu_i}$ un représentant de la réflexion de $N_{K_{\mu_i}}(T)/T \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La multiplication à droite par k_{μ_i} induit une application S_i de $X = K/T$ dans lui-même. Cette application étant T -équivariante, elle induit un morphisme :

$$S_i : H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(X),$$

et on a $i_T^* \circ S_i = s_i \circ i_T^*$.

On vérifie facilement que pour $(f, g) \in (F(W; Q(\mathfrak{h}^*)))^2$, on a la formule de Leibniz :

$$A_i(fg) = A_i(f)g + s_i(f)A_i(g).$$

Le morphisme i_T^* étant injectif, on en déduit que pour tout couple $(\hat{\xi}^1, \hat{\xi}^2) \in H_T^*(X)^2$:

$$\mathcal{A}_i(\hat{\xi}^1 \hat{\xi}^2) = \mathcal{A}_i(\hat{\xi}^1) \hat{\xi}^2 + S_i(\hat{\xi}^1) \mathcal{A}_i(\hat{\xi}^2).$$

Remarque 3.29. Dans [1], Arabia montre que l'image de $i_T^* : H_T^*(X) \rightarrow F_b(W; S(\mathfrak{h}^*))$ est la plus grande sous-algèbre de $F_b(W; S(\mathfrak{h}^*))$ stable par les opérateurs A_i .

3.4.3. *Dualité de Poincaré dans le cas fini*

On se place dans le cas fini. On rappelle qu'on note w_0 le plus grand élément du groupe de Weyl W . On note $\{\hat{P}^w\}_{w \in W}$ la base de $H_T^*(X)$ donnée par la Proposition 3.6. Cette base est uniquement déterminée par les relations :

$$\int_X \hat{\xi}^v \hat{P}^w = \delta_{v,w}. \tag{3.5}$$

On cherche à exprimer les classes \hat{P}^w dans la base des $\{\hat{\xi}^v\}_{v \in W}$, i.e. à déterminer les polynômes $c_w^v \in S(\mathfrak{h}^*)$ qui vérifient les relations :

$$\hat{P}^w = \sum_{v \in W} c_w^v \hat{\xi}^v.$$

Pour cela, on se ramène au calcul de c_1^v grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.30. *Pour tout couple $(v, w) \in W^2$:*

$$c_w^v = \begin{cases} (-1)^{l(w)} c_1^{vw^{-1}} & \text{si } l(vw^{-1}) = l(v) + l(w), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On va démontrer les relations suivantes :

$$\mathcal{A}_i \hat{P}^w = \begin{cases} 0 & \text{si } ws_i < w, \\ -\hat{P}^{ws_i} & \text{si } ws_i > w. \end{cases} \tag{3.6}$$

Comme la variété G/P_i est de dimension strictement plus petite que X ,

$$\text{pour tout } \hat{\xi} \in H_T^*(X), \quad \int_X \mathcal{A}_i \hat{\xi} = 0.$$

On en déduit que pour tout couple $(u_1, u_2) \in W^2$, $\int_X \mathcal{A}_i(\hat{\xi}^{u_1} \hat{P}^{u_2}) = 0$.

Supposons tout d'abord $u_1 s_i > u_1$. En utilisant la relation de Leibniz (avec $\hat{\xi}^1 = \hat{\xi}^{u_1}$ et $\hat{\xi}^2 = \hat{P}^{u_2}$) et les relations (3.4), on obtient :

$$\int_X \hat{\xi}^{u_1} \mathcal{A}_i \hat{P}^{u_2} = 0. \tag{3.7}$$

Si on suppose $u_1 s_i < u_1$, la relation de Leibniz (avec $\hat{\xi}^1 = \hat{P}^{u_2}$ et $\hat{\xi}^2 = \hat{\xi}^{u_1}$) et les relations (3.4) nous donnent $\int_X \mathcal{A}_i \hat{P}^{u_2} \hat{\xi}^{u_1} + \int_X \mathcal{S}_i \hat{P}^{u_2} \hat{\xi}^{u_1 s_i} = 0$.

Or

$$\int_X \mathcal{S}_i \hat{P}^{u_2} \hat{\xi}^{u_1 s_i} = \int_X \mathcal{S}_i(\hat{P}^{u_2} \mathcal{S}_i \hat{\xi}^{u_1 s_i}) = \int_X \hat{P}^{u_2} \mathcal{S}_i \hat{\xi}^{u_1 s_i} = \int_X \hat{P}^{u_2} \hat{\xi}^{u_1 s_i}.$$

La première égalité provient de l'identité $\mathcal{S}_i^2 = \text{Id}_{H_T^*(X)}$, la deuxième du fait que \mathcal{S}_i est un isomorphisme de X sur X , et la troisième est une conséquence des relations (3.4). On obtient ainsi :

$$\int_X \hat{\xi}^{u_1} (-\mathcal{A}_i \hat{P}^{u_2}) = \int_X \hat{\xi}^{u_1 s_i} \hat{P}^{u_2} = \delta_{u_1 s_i, u_2}. \tag{3.8}$$

On déduit alors facilement les relations (3.6) des formules (3.7) et (3.8) et des relations (3.5) qui caractérisent la base $\{\hat{P}^w\}_{w \in W}$.

Soit $w \in W$ et soit i tel que $ws_i > w$. Appliquons alors l'opérateur \mathcal{A}_i à l'égalité $\hat{P}^w = \sum_{v \in W} c_w^v \hat{\xi}^v$. On obtient :

$$\hat{P}^{ws_i} = - \sum_{v \in W, vs_i < v} c_w^v \hat{\xi}^{vs_i} = \sum_{u \in W} c_{ws_i}^u \hat{\xi}^u.$$

On a donc :

$$c_{ws_i}^u = \begin{cases} 0 & \text{si } us_i < u, \\ -c_w^{us_i} & \text{si } us_i > u, \end{cases}$$

et on en déduit alors les relations de la proposition. □

Pour calculer les coefficients c_1^v , rappelons la caractérisation des fonctions ξ^w . Ces fonctions sont uniquement déterminées par les relations (voir [14]) :

$$\left. \begin{aligned} \xi^{w_0}(w_0) &= \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha, \\ \xi^{w_0}(u) &= 0 \quad \text{si } u \neq w_0, \\ A_i \xi^w &= \xi^{ws_i} \quad \text{si } ws_i < w. \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \xi^v(v') &= 0 \quad \text{si } v \not\leq v', \\ \xi^v(v) &= \prod_{\beta \in \Delta(v^{-1})} \beta. \end{aligned}$$

Théorème 3.31. Soit $v = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_l}$ une décomposition réduite de v . Pour tout sous-ensemble I de $\{1, \dots, l\}$ et tout entier $1 \leq i \leq l$, on pose

$$\beta_i(I) = \left(\prod_{j \in I, j \leq i} s_{\mu_j} \right) \mu_i$$

($\beta_i(I) = \mu_i$ si $I \cap \{1, \dots, i\} = \emptyset$). Alors

$$\sum_{k=1}^l \sum \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}{\prod_{i=1}^l -\beta_i(\{j_1, \dots, j_k\})},$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble des indices $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l$ tels que $s_{\mu_{j_1}} \cdots s_{\mu_{j_k}} = 1$, est un élément de $S(\mathfrak{h}^*)$ qui ne dépend pas du choix d'une décomposition réduite de v . Si on note b^v cet élément, alors $c_1^v = b^v$.

Preuve. Pour faire ce calcul, on a besoin des valeurs de la fonction $P^1 = i_T^*(\hat{P}^1)$:

$$\begin{aligned} P^1(1) &= \prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha, \\ P^1(u) &= 0 \quad \text{si } u \neq 1. \end{aligned}$$

Pour $u \neq 1$, on a en effet les relations $\int_X \hat{P}^1 \hat{\xi}^u = 0$. En appliquant la Proposition 3.3 à la variété X et le fait que $\xi^u(u') = 0$ si $u \not\leq u'$, on obtient :

$$\sum_{u \leq u'} \frac{P^1(u') \xi^u(u')}{\prod \alpha_i^{u'}} = 0.$$

On en déduit facilement par récurrence descendante sur la longueur de u que $P^1(u) = 0$ pour $u \neq 1$ (car $\xi^u(u) \neq 0$).

De même, la relation $\int_X \hat{P}^1 \hat{\xi}^1 = 1$ et la formule de localisation nous donnent alors $P^1(1)/(\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha) = 1$, d'où la valeur de $P^1(1)$.

Soit $v = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_l}$ une décomposition réduite de v . On pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \dots, \mu_l)$ et on note g l'application naturelle de Γ dans X . Pour tout $\hat{\xi} \in H_T^*(X)$, on a alors $\int_{\bar{X}_v} \hat{\xi} = \int_{\Gamma} g^* \hat{\xi}$ (voir [17]). On a donc :

$$c_1^v = \int_{\bar{X}_v} \hat{P}^1 = \int_{\Gamma} g^* \hat{P}^1.$$

Grâce à la formule (3.1) 'restreinte' à l'action de T (ce qui revient à remplacer λ_i par μ_i) et aux valeurs de P^1 , on obtient alors :

$$c_1^v = \sum_{k=1}^l \sum \frac{\prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha}{\prod_{i=1}^l -\beta_i(\{j_1, \dots, j_k\})},$$

où la deuxième somme porte sur l'ensemble des indices $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l$ tels que $s_{\mu_{j_1}} \cdots s_{\mu_{j_k}} = 1$, car on a :

$$i_T^*(g^* \hat{P}^1)(\varepsilon) = \begin{cases} \prod_{\alpha \in \Delta_+} -\alpha & \text{si } v(\varepsilon) = 1, \\ 0 & \text{si } v(\varepsilon) \neq 1. \end{cases}$$

□

Remarque 3.32. Grâce aux relations (3.6) et au calcul de P^1 , on voit facilement que les fonctions $v \mapsto (-1)^{l(w)} P^{w_0 w}(w_0 v)$ vérifient les relations (3.9) qui caractérisent la fonction ξ^w . On en déduit que pour tout couple $(v, w) \in W^2$, $P^w(v) = (-1)^{l(w_0) - l(w)} \xi^{w_0 w}(w_0 v)$. Grâce à la Proposition 3.26 et au Théorème 3.19, on peut alors retrouver les valeurs explicites de ces fonctions démontrées initialement dans [4] (voir [17] pour plus de détails).

4. Calcul de Schubert équivariant

On reprend les notations de la §3.4. Le calcul de Schubert équivariant cherche à comprendre la structure multiplicative de $H_T^*(X)$ en calculant les polynômes $p_{u,v}^w \in S(\mathfrak{h}^*)$ qui vérifient :

$$\hat{\xi}^u \hat{\xi}^v = \sum_{w \in W} p_{u,v}^w \hat{\xi}^w.$$

On voit facilement, par récurrence sur $l(w)$ et grâce aux relations $\xi^u(w) = 0$ si $w \not\geq u$, que $p_{u,v}^w = 0$ sauf si $w \geq u$ et $w \geq v$.

Dans le cas où $u = s_i$ est une réflexion simple, la formule de Pieri–Chevalley (voir [14]) donne les valeurs de $p_{s_i,v}^w$:

$$\hat{\xi}^{s_i} \hat{\xi}^v = \xi^{s_i}(v) \hat{\xi}^v + \sum_{v \rightarrow w} \rho_i(\beta^\vee(v, w)) \hat{\xi}^w.$$

Dans [16], Robinson généralise cette formule pour le type A dans le cas où $u = \prod_{i \leq k \leq j} s_k$ (pour $i \leq j$) est un produit de réflexions simples successives.

Dans [14], Kostant et Kumar donnent une formule générale pour ces coefficients $p_{u,v}^w$. Soit $w \in W$ et soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ une décomposition réduite de w . Alors, pour tout couple $(u, v) \in W^2$, les polynômes $p_{u,v}^w$ sont donnés par la formule suivante :

$$p_{u,v}^w = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \\ \text{tels que } s_{i_{j_1}} \cdots s_{i_{j_m}} = u}} A_{i_1} \circ \dots \circ \hat{A}_{i_{j_1}} \circ \dots \circ \hat{A}_{i_{j_m}} \circ \dots \circ A_{i_n}(\xi^v)(1), \quad (4.1)$$

où $m = l(u)$, et où la notation $\hat{A}_{i_{j_1}}$ signifie qu'on remplace l'opérateur $A_{i_{j_1}}$ par l'opérateur $s_{i_{j_1}}$.

On va donner une formule un peu plus explicite pour calculer ces coefficients. Cette formule généralise celle donnée par Duan pour la cohomologie ordinaire [6]. Pour trouver cette formule, il faut mieux comprendre la structure multiplicative de la cohomologie équivariante des variétés de Bott–Samelson.

4.1. Généralités

Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit $N \geq 1$ un entier naturel. On considère une liste $D = \{d_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$ d'éléments de A . Pour $1 \leq k \leq N$, on définit le polynôme $Q_k \in A[X_1, \dots, X_N]$ par

$$Q_k = X_k^2 - d_{k,k} X_k - \sum_{l < k} d_{l,k} X_k X_l,$$

et on définit alors la A -algèbre \mathcal{A}_D par

$$\mathcal{A}_D = A[X_1, \dots, X_N] / \langle Q_1, \dots, Q_N \rangle,$$

où $\langle Q_1, \dots, Q_N \rangle$ désigne l'idéal de $A[X_1, \dots, X_N]$ engendré par Q_1, \dots, Q_N . On note $x_i \in \mathcal{A}_D$ l'image de X_i dans \mathcal{A}_D et pour $\varepsilon \in \mathcal{E} = \{0, 1\}^N$, on pose $x^\varepsilon = \prod_{i \in \pi_+(\varepsilon)} x_i$.

Proposition 4.1. *La famille $\{x^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ est une base du A -module \mathcal{A}_D qui est donc un A -module libre de rang 2^N .*

Preuve. On procède par récurrence sur $N \geq 1$. Pour $N = 1$, le résultat est immédiat.

Supposons le résultat vérifié au rang $N - 1$, et soit $D = \{d_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j \leq N}$ une liste d'éléments de A . Alors, comme pour $1 \leq k \leq N - 1$, $Q_k \in A[X_1, \dots, X_{N-1}]$:

$$\mathcal{A}_D \simeq (A[X_1, \dots, X_{N-1}] / \langle Q_1, \dots, Q_{N-1} \rangle)[X_N] / \bar{Q}_N,$$

où \bar{Q}_N désigne l'image de Q_N dans $(A[X_1, \dots, X_{N-1}] / \langle Q_1, \dots, Q_{N-1} \rangle)[X_N]$.

On conclut alors en utilisant le cas $N - 1$ pour l'anneau A , puis le cas $N = 1$ pour l'anneau $A[X_1, \dots, X_{N-1}]/\langle Q_1, \dots, Q_{N-1} \rangle$. \square

On va expliciter la structure multiplicative de \mathcal{A}_D . On note $q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^\varepsilon$ les éléments de A définis par :

$$x^{\varepsilon_1} x^{\varepsilon_2} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^\varepsilon x^\varepsilon.$$

Plus généralement, pour tout polynôme $P \in A[x_1, \dots, x_N]$, on note P^ε les éléments de A définis par :

$$P = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} P^\varepsilon x^\varepsilon,$$

où on continue à noter P l'élément de \mathcal{A}_D défini par P .

Définition 4.2. Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ de longueur $l > 0$. On note $\{i_1 < \dots < i_l\}$ les éléments de $\pi_+(\varepsilon)$. On définit alors l'application $T^\varepsilon : A[x_1, x_2, \dots, x_N] \rightarrow A$ de la manière suivante :

- (i) T^ε est A -linéaire,
- (ii) si P est un monôme qui n'est pas dans $A[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}]$, alors $T^\varepsilon(P) = 0$,
- (iii) si $P \in A[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}]$, alors $T^\varepsilon(P) = 0$,
- (iv) $T^{(i_1)}(x_{i_1}^s) = d_{i_1, i_1}^{s-1}$,
- (v) si $Q \in A[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}]$, alors, pour $s \geq 1$,

$$T^\varepsilon(Qx_{i_l}^s) = T^{\varepsilon - (i_l)} \left[Q \left(d_{i_l, i_l} + \sum_{j < l} d_{i_j, i_l} x_{i_j} \right)^{s-1} \right].$$

Ces cinq relations définissent complètement (récursivement) les applications T^ε .

Exemple 4.3. Prenons $N = 2$, $d_{1,2} = 1$ et $\varepsilon = (1) = (1, 1)$. Alors :

$$T^{(1)}(x_1^s) = 0 \quad \text{pour tout } s, \quad T^{(1)}(x_2) = 0,$$

$$\text{si } t \geq 1 \text{ et } s \geq 1, \quad T^{(1)}(x_1^s x_2^t) = T^{(1,0)}(x_1^s (d_{2,2} + x_1)^{t-1}) = d_{1,1}^{s-1} (d_{1,1} + d_{2,2})^{t-1},$$

$$\text{et si } t \geq 2, \quad T^{(1)}(x_2^t) = T^{(1,0)}((d_{2,2} + x_1)^{t-1}) = \sum_{k=0}^{t-2} C_{t-1}^k d_{2,2}^k d_{1,1}^{t-2-k}.$$

Proposition 4.4. Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et tout polynôme $P \in A[x_1, x_2, \dots, x_N]$:

$$P_\varepsilon = T^\varepsilon(P).$$

En particulier, pour tout couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{E}^2$:

$$q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^\varepsilon = T^\varepsilon(x^{\varepsilon_1} x^{\varepsilon_2}).$$

Preuve. Il faut vérifier les cinq relations qui définissent les opérateurs T^ε .

La première est immédiate.

Pour tout $1 \leq k \leq N$, on a la formule suivante :

$$x_k^2 = d_{k,k}x_k + \sum_{l < k} d_{l,k}x_lx_k. \tag{4.2}$$

Les relations (ii) et (iii) se déduisent de l'équation (4.2).

De plus, on démontre par récurrence sur $s \geq 1$, grâce à la formule (4.2), que pour tout $1 \leq k \leq N$, et tout $s \geq 1$:

$$x_k^s = \left(\sum_{i=0}^{s-1} C_{s-1}^i d_{k,k}^i \left(\sum_{l < k} d_{l,k}x_l \right)^{s-1-i} \right) x_k = \left(d_{k,k} + \sum_{l < k} d_{l,k}x_l \right)^{s-1} x_k.$$

Cette formule nous permet alors de montrer les relations (iv) et (v). □

4.2. Structure multiplicative de $H_T^*(\Gamma)$

Soit μ_1, \dots, μ_N une suite de N racines simples non nécessairement distinctes. On pose $\Gamma = \Gamma(\mu_1, \dots, \mu_N)$. On peut appliquer les résultats de la section précédente à $H_T^*(\Gamma)$ (plus généralement à $H_D^*(Y)$, où Y est une tour de Bott).

En effet, si on pose pour $1 \leq l < k \leq N$, $d_{l,k} = -\mu_k(\mu_l^\vee)$, et $d_{k,k} = \mu_k$, alors, d'après le Théorème 3.22, $H_T^*(\Gamma)$ s'identifie à l'algèbre \mathcal{A}_D , où on prend pour A l'anneau $S(\mathfrak{h}^*)$. De plus, pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^T$ s'identifie à x^ε .

Définition 4.5. Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ de longueur $l > 0$. On note $\{i_1 < \dots < i_l\}$ les éléments de $\pi_+(\varepsilon)$. On définit alors l'application $T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon : S(\mathfrak{h}^*)[x_1, x_2, \dots, x_N] \rightarrow S(\mathfrak{h}^*)$ de la manière suivante :

- (i) $T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon$ est $S(\mathfrak{h}^*)$ -linéaire,
- (ii) si P est un monôme qui n'est pas dans $S(\mathfrak{h}^*)[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}]$, alors $T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon(P) = 0$,
- (iii) si $P \in S(\mathfrak{h}^*)[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}]$, alors $T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon(P) = 0$,
- (iv) $T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon(x_{i_1}^s) = \mu_{i_1}^{s-1}$,
- (v) si $Q \in S(\mathfrak{h}^*)[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}]$, alors, pour $s \geq 1$,

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon(Qx_{i_l}^s) = T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\varepsilon - (i_l)} \left[Q \left(\mu_{i_l} - \sum_{j < l} \mu_{i_l}(\mu_{i_j}^\vee)x_{i_j} \right)^{s-1} \right].$$

De plus, on pose $T_{\mu_1, \dots, \mu_N} = T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{(1)}$.

Remarque 4.6. Cette définition est inspirée de celle des opérateurs T_A donnée par Duan dans [7]. On retrouve ces opérateurs T_A en évaluant en 0 les opérateurs T_{μ_1, \dots, μ_N} (i.e. en prenant les termes constants des polynômes de $S(\mathfrak{h}^*)$).

D'après la Proposition 4.4, la structure multiplicative de $H_T^*(\Gamma)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.7. *Pour tout couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{E}^2$:*

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^T \hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^T = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} T_{\mu_1, \dots, \mu_N}^\varepsilon (x^{\varepsilon_1} x^{\varepsilon_2}) \hat{\sigma}_\varepsilon^T.$$

4.3. Calcul de Schubert équivariant

Soit $w \in W$ et soit $w = s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_N}$ une décomposition quelconque de w . La Proposition 3.26 et le Théorème 4.7 nous donnent la formule suivante.

Théorème 4.8. *Pour tout couple $(u, v) \in W^2$:*

$$p_{u,v}^w = T_{\mu_1, \dots, \mu_N} \left[\left(\sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}, l(\varepsilon)=l(u) \\ \text{et } v(\varepsilon)=u}} x^\varepsilon \right) \left(\sum_{\substack{\varepsilon' \in \mathcal{E}, l(\varepsilon')=l(v) \\ \text{et } v(\varepsilon')=v}} x^{\varepsilon'} \right) \right]. \tag{4.3}$$

Dans cette formule, on somme *a priori* sur plus de termes que dans la formule (4.1), mais chaque terme est beaucoup plus facile à calculer. De plus, cette formule exprime directement les polynômes $p_{u,v}^w$ en fonction des racines simples et des nombres de Cartan.

Exemple 4.9. *On prend le cas A_5 , $u = s_5 s_2$, $v = s_4 s_5 s_3 s_4$ et $w = s_4 s_5 s_2 s_3 s_4$. Alors :*

$$\begin{aligned} p_{u,v}^w &= T_{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} [(x_2 x_3)(x_1 x_2 x_4 x_5)] \\ &= T_{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} (x_1 x_2^2 x_3 x_4 x_5) \\ &= T_{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}^{(1,1,0,0,0)} (x_1 x_2^2) \\ &= \alpha_4 + \alpha_5. \end{aligned}$$

Exemple 4.10. *On considère le cas G_2 , et on prend $u = s_2 s_1 s_2$, $v = s_1 s_2 s_1$, et $w = s_1 s_2 s_1 s_2$. Alors :*

$$\begin{aligned} p_{u,v}^w &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2} [(x_2 x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3)] \\ &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2} (x_1 x_2^2 x_3^2 x_4) \\ &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}^{(1,1,0,0)} [x_1 x_2^2 (\alpha_1 + 3x_2 - 2x_1)] \\ &= \alpha_1 T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}^{(1,0,0,0)} [x_1 (\alpha_2 + x_1)] + 3T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}^{(1,0,0,0)} [x_1 (\alpha_2 + x_1)^2] \\ &\hspace{15em} - 2T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}^{(1,0,0,0)} [x_1^2 (\alpha_2 + x_1)] \\ &= \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_1) + 3(\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2) - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2) \\ &= 2\alpha_1^2 + 5\alpha_1 \alpha_2 + 3\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Exemple 4.11. *Pour calculer un produit dans le cas fini, au lieu de calculer chaque coefficient $p_{u,v}^w$ avec la formule (4.3), on peut aussi utiliser le plongement $g^* : H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(\Gamma)$, où Γ est la variété de Bott–Samelson associée à une suite de racines simples*

correspondant à une décomposition réduite de w_0 , le plus grand élément du groupe de Weyl.

On se place par exemple dans le cas A_3 , et on prend $w_0 = s_3s_2s_1s_3s_2s_3$ pour décomposition réduite de w_0 .

Alors $H_T^*(\Gamma)$ est l'algèbre de polynômes $S(\mathfrak{h}^*)[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ quotientée par les relations :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \alpha_3x_1, \\ x_2^2 &= \alpha_2x_2 + x_1x_2, \\ x_3^2 &= \alpha_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ x_4^2 &= \alpha_3x_4 + x_2x_4 - 2x_1x_4, \\ x_5^2 &= \alpha_2x_5 + x_4x_5 + x_3x_5 - 2x_2x_5 + x_1x_5, \\ x_6^2 &= \alpha_3x_6 + x_5x_6 - 2x_4x_6 + x_2x_6 - 2x_1x_6. \end{aligned}$$

De plus, on a en particulier :

$$\begin{aligned} g^*(\hat{\xi}^{s_3s_2s_1}) &= x_1x_2x_3, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_3s_2}) &= x_1x_2 + x_1x_5 + x_4x_5, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_3s_2s_1s_2}) &= x_1x_2x_3x_5, \\ g^*(\hat{\xi}^{s_3s_2s_1s_3s_2}) &= x_1x_2x_3x_4x_5. \end{aligned}$$

Si on veut calculer $\hat{\xi}^{s_3s_2s_1}\hat{\xi}^{s_3s_2}$, on utilise g^* :

$$\begin{aligned} g^*(\hat{\xi}^{s_3s_2s_1}\hat{\xi}^{s_3s_2}) &= x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_5 + x_4x_5) \\ &= \alpha_3x_1(\alpha_2x_2 + x_1x_2)x_3 + \alpha_3x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5 \\ &= (\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3)x_1x_2x_3 + \alpha_3x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5, \end{aligned}$$

et donc :

$$\hat{\xi}^{s_3s_2s_1}\hat{\xi}^{s_3s_2} = (\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3)\hat{\xi}^{s_3s_2s_1} + \alpha_3\hat{\xi}^{s_3s_2s_1s_2} + \hat{\xi}^{s_3s_2s_1s_3s_2}.$$

Remarque 4.12. En évaluant ces polynômes $p_{u,v}^w$ en 0, on retrouve la formule donnée par Duan dans [6] pour la cohomologie ordinaire. Cette formule est utilisée par Duan et Zhao dans [8] pour proposer un algorithme de calcul de Schubert ordinaire.

Le nombre de termes à calculer dans la formule (4.3) dépend du choix de la décomposition de w , et il arrive que certains termes s'annulent. En effet, un théorème de Graham [10] affirme que les polynômes $p_{u,v}^w$ sont 'positifs' dans le sens où ils sont combinaisons linéaires à coefficients positifs de termes de la forme $\alpha_I = \prod_{1 \leq i \leq r} \alpha_i^{n_i}$ pour $I \in \mathbb{N}^r$. Or, la formule (4.3) peut comporter des termes 'négatifs'.

Donnons un exemple très simple pour illustrer ce problème : on se place dans le cas A_2 , et on veut calculer $p_{s_2, s_1s_2}^w$ où $w = s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ est le plus grand élément de W .

Si on prend la première décomposition de w , on voit immédiatement que $p_{s_2, s_1 s_2}^w = 0$. En revanche, si on prend la deuxième décomposition, on doit faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} p_{s_2, s_1 s_2}^{s_2 s_1 s_2} &= T_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}[(x_1 + x_3)x_2 x_3] \\ &= 1 + T_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}(x_2 x_3^2) \\ &= 1 + T_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2}^{(1, 1, 0)}[x_2(\alpha_2 + x_2 - 2x_1)] \\ &= 1 + 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Exemple 4.13. Donnons un dernier exemple de calcul. On considère le cas A_6 , et on prend $u = s_1 s_3 s_5 s_6$, $v = s_2 s_5 s_6$ et $w = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$. Alors :

$$\begin{aligned} p_{u, v}^w &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}[(x_1 x_3 x_5 x_6)(x_2 x_5 x_6)] \\ &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}(x_1 x_2 x_3 x_5^2 x_6^2) \\ &= T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}^{(1, 1, 1, 1, 0)}[x_1 x_2 x_3 x_5^2(\alpha_6 + x_5)] \\ &= \alpha_6 + T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}^{(1, 1, 1, 1, 0, 0)}[x_1 x_2 x_3(\alpha_5 + x_4)^2] \\ &= \alpha_6 + 2\alpha_5 + T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}^{(1, 1, 1, 1, 0, 0)}(x_1 x_2 x_3 x_4^2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6. \end{aligned}$$

References

1. A. ARABIA, Cohomologie T -équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac–Moody, *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), 129–165.
2. M. AUDIN, *The topology of torus actions on symplectic manifolds* (transl. from the French by the author), Progress in Mathematics, Vol. 93 (Birkhäuser, Basel, 1991).
3. N. BERLINE AND M. VERGNE, Classes caractéristiques équivariantes, Formule de localisation en cohomologie équivariante, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **295** (1982), 539–541.
4. S. BILLEY, Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B , *Duke Math. J.* **96** (1999), 205–224.
5. D. A. COX, The homogeneous coordinate ring of a toric variety, *J. Alg. Geom.* **4**(1) (1995), 17–50.
6. H. DUAN, Multiplicative rule of Schubert class, *Invent. Math.* **159**(2) (2005), 407–436.
7. H. DUAN, The degree of a Schubert variety, *Adv. Math.* **180**(1) (2003), 112–133.
8. H. DUAN AND X. ZHAO, Algorithm for multiplying Schubert classes, preprint arXiv: Math.AG/0309158 (2003).
9. S. GAUSSENT, The fibre of the Bott–Samelson resolution, *Indagationes Math.* **12** (2001), 453–468.
10. W. GRAHAM, Positivity in equivariant Schubert calculus, *Duke Math. J.* **109** (2001), 599–614.
11. M. GROSSBERG AND Y. KARSHON, Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations, *Duke Math. J.* **76** (1994), 23–58.
12. V. G. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, 2nd edn (Cambridge University Press, 1985).
13. V. G. KAC AND D. H. PETERSON, Regular functions on certain infinite-dimensional groups, in *Arithmetic and geometry*, Vol. II, Progress in Mathematics, Vol. 36, pp. 141–166 (Birkhäuser, Boston, MA, 1983).

14. B. KOSTANT AND S. KUMAR, The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac–Moody group G , *Adv. Math.* **62** (1986), 187–237.
15. S. KUMAR, *Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Progress in Mathematics, Vol. 204 (Birkhäuser, Boston, MA, 2002).
16. S. ROBINSON, A Pieri-type formula for $H_T^*(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B)$, *J. Alg.* **249**(1) (2002), 38–58.
17. M. WILLEMS, Cohomologie et K -théorie équivariantes des variétés de Bott–Samelson et des variétés de drapeaux, *Bull. Soc. Math. France* **132** (2004), 569–589.

