Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2008) **7**(4), 751–792 © Cambridge University Press 751
doi:10.1017/S1474748008000212 Printed in the United Kingdom

GROUPES GÉOMÉTRIQUES DE RANG DE MORLEY FINI

OLIVIER FRÉCON*

Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Poitiers, Téléport 2 – BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France
(olivier.frecon@math.univ-poitiers.fr)

(Reçu le 21 décembre 2006 ; révisé le 7 septembre 2007 ; accepté le 5 novembre 2007)

Résumé Nous considérons un nouveau sous-groupe $\mathrm{In}(G)$ dans tout groupe G de rang de Morley fini. Ce sous-groupe définissablement caractéristique est le plus petit sous-groupe normal de G à partir duquel nous pouvons espérer construire une géométrie sur le groupe quotient $G/\mathrm{In}(G)$. Nous disons que G est un *groupe géométrique* si $\mathrm{In}(G)$ est trivial.

Ce papier est une discussion sur une conjecture qui dit que tout groupe géométrique G de rang de Morley fini est définissablement linéaire sur un anneau $K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$ où $K_1, \ldots, K_n$ sont des corps interprétables. Cette conjecture de linéarité semble généraliser la conjecture de Cherlin–Zil'ber à une très grande classe de groupes de rang de Morley fini.

Nous montrons que, si cette conjecture de linéarité est vraie, alors il y a un théorème de Rosenlicht pour les groupes de rang de Morley fini, dans le sens où le groupe quotient de tout groupe connexe de rang de Morley fini par son hypercentre est définissablement linéaire.

Abstract We consider a new subgroup $\mathrm{In}(G)$ in any group G of finite Morley rank. This definably characteristic subgroup is the smallest normal subgroup of G from which we can hope to build a geometry over the quotient group $G/\mathrm{In}(G)$. We say that G is a *geometric group* if $\mathrm{In}(G)$ is trivial.

This paper is a discussion of a conjecture which states that every geometric group G of finite Morley rank is definably linear over a ring $K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$ where $K_1, \ldots, K_n$ are some interpretable fields. This linearity conjecture seems to generalize the Cherlin–Zil'ber conjecture in a very large class of groups of finite Morley rank.

We show that, if this linearity conjecture is true, then there is a Rosenlicht theorem for groups of finite Morley rank, in the sense that the quotient group of any connected group of finite Morley rank by its hypercentre is definably linear.

Mots clés : groupes de rang de Morley fini ; groupes algébriques ; familles uniformément définissables de sous-groupes ; sous-groupes de Carter

Keywords: groups of finite Morley rank; algebraic groups; uniformly definable families of subgroups; Carter subgroups

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 03C45; 03C60; 20A15

* Une partie de ce travail a été faite alors que j'étais invité à l'Institut Camille Jordan (Lyon) fin juin 2006.

1. Introduction

La conjecture centrale concernant les groupes de rang de Morley fini est la conjecture de Cherlin–Zil'ber qui dit que les groupes simples et infinis de rang de Morley fini seraient tous des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos. Dans les études concernant cette conjecture, les propriétés des groupes de rang de Morley fini non nécessairement simples sont beaucoup utilisées, particulièrement celles de ceux qui sont résolubles ou dans lesquels toutes les sections définissables et simples sont algébriques. Ceci est l'une des motivations pour s'intéresser à l'éventuelle linéarité des groupes de rang de Morley fini non nécessairement simples. A. V. Borovik a d'ailleurs formulé la conjecture 6.1, qui se présente d'une part comme une conjecture de linéarité concernant les groupes résolubles, d'autre part comme une question concernant ce qu'impliquerait la conjecture de Cherlin–Zil'ber si elle s'avérait exacte. D'autres questions et conjectures évoquées dans cet article présentent ce double intérêt.

La classe de groupes qui nous intéresse le plus, et que nous aimerions caractériser à partir des groupes de rang de Morley fini, est celle des *groupes définissablement linéaires*.

Définition 1.1. On dit qu'un groupe G de rang de Morley fini est *définissablement linéaire*, sur un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de corps interprétables $K_1, K_2, \ldots, K_n$, si il a une représentation linéaire fidèle *interprétable* sur l'anneau $K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n$.

Remarque 1.2. En d'autres mots, un groupe G de rang de Morley fini est définissablement linéaire si et seulement si il se plonge définissablement dans un groupe de la forme $\mathrm{GL}_{m_1}(K_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_n}(K_n)$ où n, $m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers naturels et $K_1, \ldots, K_n$ des corps interprétables.

Nous introduisons une nouvelle notion de groupe de rang de Morley fini, celle de *groupe géométrique* (définition 1.10). L'idée est d'approcher au maximum la notion de groupes définissablement linéaires, à partir de propriétés géométriques très faibles, avec l'espoir de *caractériser* ces groupes. L'objet de cet article est de discuter la conjecture suivante.

Conjecture 1.3. *Tout groupe géométrique de rang de Morley fini est définissablement linéaire.*

Cette conjecture a la particularité de dire quelque chose sur les groupes résolubles non nilpotents, mais également sur les groupes qui sont nilpotents, et même abéliens, et ce sans parler d'action d'un groupe sur un autre. En effet, nous verrons que la définition d'un groupe géométrique ne repose que sur la notion de familles uniformément définissables de sous-groupes, et pas sur des propriétés groupes-théoriques.

Notons que la conjecture 1.3 a un intérêt tout particulier puisque, si elle était vraie, alors tout quotient d'un groupe connexe de rang de Morley fini par son *hypercentre* (définition 3.8) serait définissablement linéaire (corollaire 4.20). Autrement dit, on aurait un analogue au théorème de Rosenlicht pour les groupes de rang de Morley fini [**23**, p. 147]. On rappelle que ce dernier théorème dit que, si G est un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos, alors le quotient de G par son centre est linéaire.

Aussi, la notion de groupes géométriques est très large puisque, par exemple, tout groupe définissablement linéaire est définissablement plongé dans un groupe géométrique (proposition 4.2), et c'est cette propriété qui donne l'espoir de caractériser tous les groupes définissablement linéaires à partir de cette notion. Cependant, nous ne formulerons pas véritablement une conjecture de caractérisation. En effet, nous ne savons distinguer un tore décent [**10**] algébrique d'un tore décent non algébrique sans connaître d'action de ce tore sur un autre groupe. Par contre, nous répondrons positivement à la question ci-dessous (corollaire 4.14), laquelle peut-être vue comme une forme de réciproque à la conjecture 1.3.

Question 1.4. Soit G un groupe connexe et sans centre de rang de Morley fini. Si G est définissablement linéaire, est-ce que G est géométrique ?

Nous commençons par définir une « géométrie » sur les groupes de rang de Morley fini, de la façon la plus naturelle possible. L'ensemble des points pour notre géométrie est le groupe G, et l'ensemble des lignes, les classes à gauche de G modulo les éléments d'une famille $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ de sous-groupes définissables et connexes de G, le tout muni de la relation d'incidence naturelle. Pour obtenir une « géométrie » qui soit interprétable, nous imposons à la famille $\mathscr{F}$ d'être uniformément définissable et d'avoir un ensemble d'indices I interprétable. Concernant les propriétés géométriques, nous imposons seulement ceci :

(G1) *il y a un sous-ensemble générique X de $G \times G$ tel que, pour tout $(x, y) \in X$, il y a une unique ligne passant par x et y.*

On arrive à une définition fondamentale pour cet article.

Définition 1.5. Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ une famille uniformément définissable de sous-groupes *connexes* de G telle que l'ensemble I des indices soit interprétable. On dit que $\mathscr{F}$ est une famille *géométrique* de sous-groupes de G si la géométrie induite par $\mathscr{F}$ vérifie (G1).

On peut remarquer que, dans tout groupe G de rang de Morley fini, le singleton $\{G^\circ\}$ est une famille géométrique de sous-groupes de G, où G° désigne la *composante connexe* de G, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe définissable d'indice fini de G (les notations utilisées dans cet article sont celles de [**6**]). Pour obtenir d'autres exemples, on considère la remarque suivante, qui donne une caractérisation pratique d'une famille géométrique.

Remarque 1.6. Pour toute famille uniformément définissable $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ de sous-groupes connexes d'un groupe G de rang de Morley fini, si l'ensemble I est interprétable, alors $\mathscr{F}$ est géométrique si et seulement si

(G1′) $\{g \in G \mid \exists! i \in I,\ g \in F_i\}$ *est un sous-ensemble générique de G.*

En effet, la condition (G1) implique qu'il existe $x \in G$ et un sous-ensemble générique X_x de G tel que, pour tout $y \in X_x$, il passe une unique ligne L_y par x et y. Alors $x^{-1}L_y$ est l'unique ligne passant par 1 et $x^{-1}y$ pour tout $y \in X_x$. Comme on a $1 \in x^{-1}L_y$ pour tout $y \in X_x$, on a $x^{-1}L_y \in \mathscr{F}$ pour tout $y \in X_x$. Ainsi, $x^{-1}X_x$ est un sous-ensemble générique de G contenu dans $\{g \in G \mid \exists! i \in I,\ g \in F_i\}$, et (G1) implique (G1').

Pour la réciproque, il suffit de considérer $X = \{(x, xg) \in G \times G \mid x \in G,\ \exists! i \in I,\ g \in F_i\}$*, puisque c'est un sous-ensemble générique de* $G \times G$ *qui satisfait (G1).*

À l'aide de la remarque ci-dessus, nous pouvons donner des exemples de familles géométriques. Nous rappelons d'abord les définitions de *sous-groupes de Cartan* et de *sous-groupes de Carter*.

Définition 1.7. Dans un groupe algébrique affine G sur un corps algébriquement clos K, les *sous-groupes de Cartan* sont les composantes connexes des centralisateurs des tores maximaux.

Dans un groupe G de rang de Morley fini, les *sous-groupes de Carter* sont les sous-groupes nilpotents, définissables et connexes d'indice fini dans leur normalizateur.

Remarque 1.8. La conjugaison des sous-groupes de Cartan dans tout groupe algébrique affine sur un corps algébriquement clos suit de celle des tores maximaux [**18**, Corollaire A, p. 135].

Dans un groupe algébrique affine G sur un corps algébriquement clos K, un sous-groupe C est de Cartan si et seulement s'il est de Carter.

*En effet, tout sous-groupe de Cartan est de Carter d'après de [**18**, p. 137]. La réciproque suit de la conjugaison des sous-groupes de Carter dans* G*, qui est conséquence de la conjugaison des sous-groupes de Borel de* G *[**18**, Section 21.3] et de celle des sous-groupes de Carter dans les groupes résolubles [**25**].*

Exemple 1.9.

(i) Considérons un pur corps algébriquement clos K et un K-espace vectoriel K^n pour n un entier naturel supèrieur ou égal à deux. Alors l'ensemble $\mathscr{F}$ des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de K^n constitue une famille géométrique de sous-groupes de K^n.

(ii) On considére un corps algébriquement clos K, et le langage des corps éventuellement augmenté d'opérations et relations supplémentaires. Soient G un groupe algébrique affine sur K et C un sous-groupe de Cartan de G. Alors la famille $\mathscr{F}$ des conjugués de C dans G est une famille géométrique de sous-groupes de G.

De plus, C est *génériquement disjoint* de ses conjugués (i.e. C a un sous-ensemble définissable générique C^* tel que, pour tout $x \in C^*$ et tout $g \in G$, l'assertion $x \in C^g$ implique $C^g = C$.)

En effet, la famille $\mathscr{F}$ *peut être indéxée par* $I = G/N_G(C)$ *qui est un ensemble interprétable. De plus, par les résultats de [**10**], les sous-groupes de Cartan recouvrent génériquement* G *et ils sont génériquement disjoints. Alors* $\mathscr{F}$ *satisfait (G1'), d'où le résultat.*

(iii) Plus généralement, si on considère un sous-groupe de Carter C d'un groupe de rang de Morley fini, et qu'on suppose que l'union des conjugués de C est générique (autrement dit, que C est *généreux* selon la terminologie de [**19**]). Alors C est génériquement disjoint de ses conjugués selon le principal théorème de [**19**], et la famille des conjugués de C est donc géométrique.

(iv) Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable et sans torsion de G. Si H est d'indice fini dans son normalizateur, alors soit H admet une famille géométrique de sous-groupes propres, soit la famille des conjugués de H dans G est une famille géométrique de sous-groupes de G.

En effet, soient $\mathscr{F}_0 = \{H \cap (\bigcap_{g\in X} H^g) \mid X \subseteq G\}$ *et*

$$\mathscr{F}_1 = \{F \in \mathscr{F}_0 \mid \exists x \in F,\ \forall g \in G,\ x \in H^g \Rightarrow F \leqslant H^g\}.$$

Alors $\mathscr{F}_1$ *est une famille uniformément définissable de sous-groupes de* H*. Aussi, pour tout* $x \in H$*, si on note* $X_x = \{g \in G \mid x \in H^g\}$ *et* $F_x = \bigcap_{g\in X_x} H^g \in \mathscr{F}_0$*, alors on a* $x \in F_x$ *et* $F_x \in \mathscr{F}_1$*, d'où* $H = \bigcup \mathscr{F}_1$*. En conséquence si, pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, on note* $X_i = \{x \in H \mid \exists F \in \mathscr{F}_1,\ x \in F,\ \mathrm{rk}(F) = i,\ \forall F_0 \in \mathscr{F}_1,\ x \in F_0 \Rightarrow F \leqslant F_0\}$*, alors* $H = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$*. Ceci prouve qu'il existe* $i \in \mathbb{N}$ *tel que* X_i *est générique dans* H*. Maintenant, si on note* $\mathscr{F} = \{F \in \mathscr{F}_1 \mid \mathrm{rk}(F) = i\}$*, alors* $\mathscr{F}$ *est une famille géométrique de sous-groupes de* H*. De plus, si* $\mathscr{F} = \{H\}$*, alors* H *est génériquement disjoint de ses conjugués et la famille des conjugués de* H *dans* G *est une famille géométrique de sous-groupes de* G*.*

Ceci est particulièrement intéressant lorsqu'on considère C un sous-groupe de Carter et G un groupe simple connexe minimal (i.e. dont tous les sous-groupes propres, définissables et connexes sont résolubles). En effet, il est montré dans [**16**] que, si les conjugués de C ne recouvrent pas génériquement G, alors C est sans torsion. Ainsi, par ce qui précède, soit C a une famille géométrique de sous-groupes propres et la proposition 5.7 dit qu'alors C interprète un corps algébriquement clos K, soit la famille des conjugués de C est une famille géométrique de sous-groupes de G.

Notons que c'est ce dernier exemple qui a motivé, au départ, les notions introduites dans cet article.

Maintenant notre principal problème est qu'il ne suffit pas à un groupe G de rang de Morley fini d'avoir une famille géométrique pour que l'on puisse interpréter une géométrie intéressante sur ce groupe, et ce même si on exclu les familles géométriques contenant le singleton $\{G^\circ\}$. En effet, si on considère un groupe H de rang de Morley fini avec une famille géométrique $\mathscr{F}_H$ de sous-groupes et un autre groupe K, infini et connexe, de rang de Morley fini, alors $\mathscr{F} = \{F \times K \mid F \in \mathscr{F}_H\}$ est une famille géométrique de sous-groupes de $G = H \times K$. Ainsi le groupe G admet bien une famille géométrique $\mathscr{F}$, mais la géométrie induite par $\mathscr{F}$ n'est en aucun cas satisfaisante puisqu'elle ne permet pas de « séparer » deux éléments distincts de K : toute ligne contenant un élément de K contient K tout entier.

On remarque qu'on a le même problème avec d'autres types de groupes. Par exemple, si $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$, alors les tores maximaux de G sont ses sous-groupes de Cartan et, par l'un des exemples ci-dessus, ils forment une famille géométrique $\mathscr{F}$ de G. Cependant tous les tores maximaux contiennent le centre $Z(G)$ de G et celui-ci n'est pas trivial. Ainsi le groupe G admet une famille géométrique, mais il existe deux éléments distincts qui ne sont pas séparés par la géométrie induite.

Cet article est basé sur l'idée qu'il suffit d'éliminer ce problème pour que l'on puisse interpréter une géométrie convenable dans les groupes de rang de Morley fini. La notion ci-dessous est donc la notion centrale de cet article.

Définition 1.10. Un groupe G de rang de Morley fini est *géométrique* si, pour tous x et y deux éléments distincts de G, il existe une famille géométrique de sous-groupes de G telle que x et y ne sont pas colinéaires.

Clairement, un groupe de rang de Morley fini est géométrique si et seulement si sa composante connexe est géométrique, en particulier tous les groupes finis sont géométriques.

Notons que, si G est un groupe de rang de Morley fini avec une famille géométrique $\mathscr{F}$ ne contenant pas $\{G^\circ\}$, alors pour tout $(x, y) \in G \times G$ tel qu'il existe une unique ligne uF passant par x et y (avec $F \in \mathscr{F}$), il y a une famille géométrique $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \setminus \{F\}$ telle que x et y ne sont pas colinéaires (relativement à $\mathscr{F}_0$).

Nous donnerons un critère simple permettant de vérifier si un groupe de rang de Morley fini est géométrique ou non (lemme 2.1). Nous verrons par exemple que tous les groupes algébriques simples sont géométriques (on peut le voir soit comme une conséquence du lemme 2.1, soit comme un cas particulier du corollaire 4.14), mais aussi tous les K^*-*groupes simples* (proposition 4.21), c'est-à-dire tous les groupes infinis et simples de rang de Morley fini dont toutes les sections définissables propres et simples sont algébriques. Nous vérifions dès maintenant qu'un produit direct de deux groupes géométriques est géométrique.

Remarque 1.11. Si H et K sont deux sous-groupes définissables et géométriques d'un groupe $G = H \times K$ de rang de Morley fini, alors G est un groupe géométrique.

En effet, pour tous (h_1, k_1) et (h_2, k_2) deux éléments distincts de G, on considère une famille géométrique $\mathscr{F}_H$ de sous-groupes de H et une famille géométrique $\mathscr{F}_K$ de sous-groupes de K. On peut supposer que, si $h_1 \neq h_2$ (respectivement $k_1 \neq k_2$), alors h_1 et h_2 (respectivement k_1 et k_2) ne sont pas colinéaires relativement à $\mathscr{F}_H$ (respectivement $\mathscr{F}_K$). Alors $\mathscr{F} = \mathscr{F}_H \times \mathscr{F}_K$ est une famille géométrique de sous-groupes de G et, par choix de $\mathscr{F}_H$ et de $\mathscr{F}_K$, (h_1, k_1) et (h_2, k_2) ne sont pas colinéaires (relativement à $\mathscr{F}$).

2. Groupes géométriques

Par la remarque 1.6, nous avons obtenu une caractérisation pratique d'une famille géométrique. Nous en cherchons maintenant une pour un groupe géométrique.

Lemme 2.1. *Un groupe G de rang de Morley fini est géométrique si et seulement si, pour tout $x \in G \setminus \{1\}$, il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$.*

Démonstration. Supposons que G soit un groupe géométrique et soit x un élément non trivial de G. Par définition il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle qu'il n'existe aucune ligne passant par 1 et x. Comme les lignes passant par 1 sont les éléments de $\mathscr{F}$, on a bien $x \notin \bigcup \mathscr{F}$.

Réciproquement supposons que, pour tout $x \in G \setminus \{1\}$, il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$. Alors on considère x et y deux éléments

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

distincts de G et on trouve une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $y^{-1}x \notin \bigcup \mathscr{F}$. Maintenant, si L est une ligne passant par y, alors $L = yF$ pour $F \in \mathscr{F}$ et, comme $y^{-1}x \notin \bigcup \mathscr{F}$, on obtient $x \notin L$. Il n'y a donc aucune ligne passant par x et y, ce qui prouve la réciproque. $\square$

Le lemme 2.1 montre en particulier que les éléments x d'un groupe G de rang de Morley fini tels que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$ pour une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G ont un rôle centrale pour la géométricité.

Définition 2.2. Un élément x d'un groupe G de rang de Morley fini G est dit *géométrique* si il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$.

L'ensemble des éléments *non-géométriques* (ou éléments *inévitables*) d'un groupe G de rang de Morley fini sera noté $\mathrm{In}(G)$.

Remarque 2.3. Pour tout groupe G de rang de Morley fini :

- l'élément neutre n'est jamais géométrique (i.e. $1 \in \mathrm{In}(G)$) ;
- d'après le lemme 2.1, le groupe G est géométrique si et seulement si tous ses éléments non neutres sont géométriques (i.e. $\mathrm{In}(G) = 1$).

Le principal objet de cette section est de montrer que, pour tout groupe G de rang de Morley fini, $\mathrm{In}(G)$ est un sous-groupe définissable et normal de G tel que $G/\mathrm{In}(G)$ est un groupe géométrique (corollaire 2.9).

Pour cela, nous introduisons un analogue à $\mathrm{In}(G)$ en partant d'une seule famille géométrique.

Notation 2.4. Soit $\mathscr{F}$ une famille géométrique de sous-groupes d'un groupe G de rang de Morley fini. On note $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ l'ensemble des éléments x de G tels que $x \in \bigcup \mathscr{G}$ pour toute famille géométrique $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ de sous-groupes de G.

Lemme 2.5. *Soit $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ une famille géométrique de sous-groupes d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ est un sous-groupe définissable de G.*

Démonstration. Nous allons prouver que, pour tout $x \in G \setminus \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$, il y a un sous-groupe définissable H_x contenant $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ et pas x. Ainsi nous aurons $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G) = \bigcap_{x \in G \setminus \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)} H_x$ et $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ sera définissable en tant qu'intersection de sous-groupes définissables de G.

Soit $x \in G \setminus \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$. Alors il y a un sous-ensemble définissable J de I tel que $\bigcup\{F_j \mid j \in J\}$ est générique et ne contient pas x. Nous pouvons supposer que, pour chaque sous-ensemble définissable J_0 of J avec $\mathrm{rk}(J_0) < \mathrm{rk}(J)$, le sous-ensemble $\bigcup\{F_j \mid j \in J_0\}$ n'est pas générique dans G, et que le degré de J est 1. On note $\mathscr{F}^* = \{F_j \mid j \in J\}$.

On considère H_x le sous-ensemble des éléments g de G tels que $\bigcup\{F \in \mathscr{F}^* \mid g \in F\}$ est générique dans G. Puisque $x \notin \bigcup \mathscr{F}^*$, nous avons $x \notin H_x$. Aussi H_x est une partie définissable de G puisque $H_x = \{y \in G \mid \mathrm{rk}(\alpha^{-1}(y)) = \mathrm{rk}(J)\}$ où α est la fonction définissable suivante :

$$\begin{aligned} \alpha :\ \{(y, j) \in G \times J \mid y \in F_j\} &\to G \\ (y, j) &\mapsto y. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

De plus, pour tout $y \in \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$, l'union $\bigcup\{F \in \mathscr{F}^* \mid y \notin F\}$ n'est pas générique dans G par définition de $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$, donc $\bigcup\{F \in \mathscr{F}^* \mid y \in F\}$ est générique dans G et H_x contient $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$.

Nous montrons que H_x est un sous-groupe de G. Soient $(u, v) \in H_x \times H_x$, $J_u = \{j \in J \mid u \in F_j\}$ et $J_v = \{j \in J \mid v \in F_j\}$. Alors les ensembles $\bigcup\{F_j \mid j \in J_u\}$ et $\bigcup\{F_j \mid j \in J_v\}$ sont génériques dans G. Par minimalité du rang de Morley de J, nous avons $\mathrm{rk}(J_u) = \mathrm{rk}(J_v) = \mathrm{rk}(J)$ et, comme le degré de J est 1, $J_u \cap J_v$ est un sous-ensemble générique de J et nous avons $\mathrm{rk}(J \setminus (J_u \cap J_v)) < \mathrm{rk}(J)$. Ainsi $\bigcup\{F_j \mid j \in J \setminus (J_u \cap J_v)\}$ n'est pas générique dans G contrairement à $\bigcup\{F_j \mid j \in J_u \cap J_v\}$. Mais pour tout $j \in J_u \cap J_v$, nous avons $u \in F_j$ and $v \in F_j$, d'où $uv^{-1} \in F_j$, et l'ensemble $\{F \in \mathscr{F}^* \mid uv^{-1} \in F\}$ contient $\{F_j \mid j \in J_u \cap J_v\}$. Ceci prouve que uv^{-1} est un élément de H_x, et H_x est un sous-groupe de G. □

On rappelle qu'un sous-groupe définissable H d'un groupe G de rang de Morley fini est dit *définissablement caractéristique* si il est stable par tout automorphisme *définissable* de G.

Proposition 2.6. *Pour tout groupe G de rang de Morley fini,* $\mathrm{In}(G)$ *est un sous-groupe définissable et définissablement caractéristique.*

De plus on a $\mathrm{In}(G) = \bigcap_{\mathscr{F}} \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ *où l'intersection est prise sur toutes les familles géométriques $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G.*

Démonstration. Par définition, le sous-ensemble $\mathrm{In}(G)$ est définissablement caractéristique. Nous considérons l'ensemble $\mathrm{Jn}(G) = \bigcap_{\mathscr{F}} \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ où l'intersection est prise sur toutes les familles géométriques $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G. Par le lemme 2.5, le sous-ensemble $\mathrm{Jn}(G)$ est un sous-groupe définissable de G.

Pour tout $x \in G \setminus \mathrm{In}(G)$, il y a une famille géométrique $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ de sous-groupes de G telle que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$. En particulier, nous avons $x \notin \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ et $x \notin \mathrm{Jn}(G)$, donc $\mathrm{Jn}(G)$ est contenu dans $\mathrm{In}(G)$.

Réciproquement, pour tout $x \in \mathrm{In}(G)$ et toute famille géométrique $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ de sous-groupes de G, nous avons $x \in \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$. En conséquence nous avons $x \in \mathrm{Jn}(G)$, et $\mathrm{In}(G) = \mathrm{Jn}(G)$ est un sous-groupe définissable de G. □

Étant donnés les résultats ci-dessus, il est naturel de se poser la question suivante.

Question 2.7. Est-ce que, pour tout groupe G de rang de Morley fini, il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $\mathrm{In}(G) = \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$?

Proposition 2.8. *Soit $\mathscr{F}$ une famille géométrique de sous-groupes d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors* $\{F \in \mathscr{F} \mid \mathrm{In}(G) \leqslant F\}$ *est une famille géométrique de sous-groupes de G.*

Démonstration. D'après la remarque 1.6, il suffit de montrer que $\bigcup\{F \in \mathscr{F} \mid \mathrm{In}(G) \leqslant F\}$ est générique dans G. Nous le prouvons par induction sur le rang et le degré de l'ensemble interprétable I des indices, où $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$. En particulier on peut supposer que, pour tout sous-ensemble définissable J de I, si on a $\mathrm{rk}(J) < \mathrm{rk}(I)$, alors

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

$\{F_j \mid j \in J\}$ n'est pas une famille géométrique, autrement dit que $\bigcup\{F_j \mid j \in J\}$ n'est pas générique dans G (remarque 1.6). Si le degré de I est différent de 1, l'ensemble I est l'union disjointe de deux sous-ensembles définissables I_1 et I_2 de rang identique à celui de I, et de degré strictement inférieur. De plus, il existe $\alpha \in \{1, 2\}$ tel que $\mathrm{rk}(\bigcup\{F_i \mid i \in I_\alpha\}) = \mathrm{rk}(G)$, et alors la famille $\{F_i \mid i \in I_\alpha\}$ est géométrique (remarque 1.6). Comme l'hypothèse d'induction s'applique à la famille $\{F_i \mid i \in I_\alpha\}$, on peut supposer $\deg(I) = 1$.

Soit L le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes définissables et connexes H de $\mathrm{In}(G)$ pour lesquels $\bigcup\{F \in \mathscr{F} \mid H \leqslant F\}$ est générique dans G. Par le théorème des indécomposables de Zil'ber [**23**, Théorème 2.9, p. 45], L est un sous-groupe définissable et connexe de $\mathrm{In}(G)$ et il y a des sous-groupes définissables et connexes $H_1, \ldots, H_n$ de G tels que $L = \langle H_1, \ldots, H_n\rangle$ et tels que $\bigcup\{F \in \mathscr{F} \mid H_k \leqslant F\}$ soit générique dans G pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $J_k = \{j \in I \mid H_k \leqslant F_j\}$ et $\mathscr{F}_k = \{F_j \in \mathscr{F} \mid j \in J_k\}$. Alors $\bigcup \mathscr{F}_k$ est générique dans G pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et, par minimalité du rang et du degré de Morley de I, $\bigcap_{k=1}^n J_k$ est générique dans I. Comme I est de degré 1, on obtient $\mathrm{rk}(I \setminus \bigcap_{k=1}^n J_k) < \mathrm{rk}(I)$ et la minimalité de $\mathrm{rk}(I)$ montre que $\bigcup\{F_j \mid j \in I \setminus \bigcap_{k=1}^n J_k\}$ n'est pas générique dans G, ainsi $\bigcup\{F_j \mid j \in \bigcap_{k=1}^n J_k\}$ est générique dans G. Mais F_j contient $L = \langle H_1, \ldots, H_n\rangle$ pour tout $j \in \bigcap_{k=1}^n J_k$, ce qui prouve que $\bigcup\{F \in \mathscr{F} \mid L \leqslant F\}$ est générique dans G. En conséquence, nous pouvons supposer $L \leqslant F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$.

Supposons $\mathrm{In}(G)/L$ infini. Soit A/L un sous-groupe définissable infini minimal de $\mathrm{In}(G)/L$. Soient $\mathscr{F}_A = \{F \in \mathscr{F} \mid A \nleqslant F\}$ et $I_A = \{i \in I \mid F_i \in \mathscr{F}_A\}$. D'après le choix de L, l'union $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_A)$ n'est pas générique dans G, donc $\bigcup \mathscr{F}_A$ est générique dans G. Nous considérons la projection suivante :

$$\begin{aligned} \beta:\ \{(\bar{x}, i) \in A/L \times I_A \mid x \in F_i\} &\to I_A \\ (\bar{x}, i) &\mapsto i. \end{aligned}$$

Par minimalité de A, le groupe $(F_i \cap A)/L$ est fini pour tout $i \in I_A$. En conséquence $\beta^{-1}(i)$ est fini pour tout $i \in I_A$ et il y a un entier s tel que, pour tout $i \in I_A$, $\beta^{-1}(i)$ contient au plus s éléments.

Soient $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ des éléments distincts dans A/L. Soit $\mathscr{F}_0 = \{F \in \mathscr{F}_A \mid a_0 \in F\}$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, soit $\mathscr{F}_{i+1} = \{F \in \mathscr{F}_i \mid a_{i+1} \in F\}$. Puisque $\bigcup \mathscr{F}_A$ est générique dans G, soit $\bigcup \mathscr{F}_0$ soit $\bigcup(\mathscr{F}_A \setminus \mathscr{F}_0)$ est générique dans G. Or $\bigcup(\mathscr{F}_A \setminus \mathscr{F}_0)$ ne peut pas être générique, sinon $\mathscr{F}_A \setminus \mathscr{F}_0$ serait une famille géométrique et son union contiendrait $\mathrm{In}(G)$, donc aussi l'élément $a_0 \in \mathrm{In}(G)$, contredisant le choix de $\mathscr{F}_0$. Ceci prouve que $\bigcup \mathscr{F}_0$ est générique dans G. Le même raisonnement appliqué successivement à $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_s$ montre que $\bigcup \mathscr{F}_s$ est générique dans G. En particulier on a montré que $\mathscr{F}_s$ n'est pas vide. Soit $F \in \mathscr{F}_s$. Alors il existe $i \in I_A$ tel que $F = F_i$, et $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ sont $s+1$ éléments distincts de $(F_i \cap A)/L$. Ainsi $\beta^{-1}(i) = (F_i \cap A)/L \times \{i\}$ a au moins $s+1$ éléments, ce qui contredit le choix de s. On a prouvé que $\mathrm{In}(G)/L$ est fini.

On considère des éléments $x_1, \ldots, x_t$ de $\mathrm{In}(G)$ tels que $\mathrm{In}(G) = \langle x_1, \ldots, x_t\rangle L$. Soit $\mathscr{L}_0 = \mathscr{F}$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, t-1\}$, soit $\mathscr{L}_{i+1} = \{F \in \mathscr{L}_i \mid x_{i+1} \in F\}$. Puisque $\bigcup \mathscr{L}_0 = \bigcup \mathscr{F}$ est générique dans G, soit $\bigcup \mathscr{L}_1$ soit $\bigcup(\mathscr{L}_0 \setminus \mathscr{L}_1)$ est générique dans G. Or $\bigcup(\mathscr{L}_0 \setminus \mathscr{L}_1)$ ne peut pas être générique, sinon $\mathscr{L}_0 \setminus \mathscr{L}_1$ serait une famille géométrique et son union contiendrait $\mathrm{In}(G)$, donc aussi l'élément $x_1 \in \mathrm{In}(G)$, contredisant le choix de $\mathscr{L}_1$. Ceci prouve que $\bigcup \mathscr{L}_1$ est générique dans G. Le même raisonnement appliqué successivement à $\mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_t$ montre que $\bigcup \mathscr{L}_t$ est générique dans G. Comme $\mathscr{L}_t = \{F \in \mathscr{F} \mid \mathrm{In}(G) \leqslant F\}$, on a fini la preuve. □

Corollaire 2.9. *Pour tout groupe G de rang de Morley fini, le groupe $G/\mathrm{In}(G)$ est géométrique.*

Démonstration. Supposons $G \neq \mathrm{In}(G)$. Soit $\bar{g}$ un élément non trivial de $G/\mathrm{In}(G)$. Alors il y a une famille géométrique $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ de sous-groupes de G telle que $g \notin \bigcup \mathscr{F}$. Soient $\mathscr{F}^* = \{F \in \mathscr{F} \mid \mathrm{In}(G) \leqslant F\}$ et $\bar{\mathscr{F}}^* = \{F/\mathrm{In}(G) \mid F \in \mathscr{F}^*\}$. D'après la proposition 2.8, la famille $\mathscr{F}^*$ est géométrique, donc $\bar{\mathscr{F}}^*$ est une famille géométrique de sous-groupes de $G/\mathrm{In}(G)$ dont l'union ne contient pas $\bar{g}$. Ceci prouve que $\bar{g}$ est un élément géométrique de $G/\mathrm{In}(G)$, et $\mathrm{In}(G/\mathrm{In}(G))$ est par conséquent trivial. □

Par contre il n'est pas clair que $\mathrm{In}(G)$ est bien le plus petit sous-groupe définissable normal de G tel que $G/\mathrm{In}(G)$ soit géométrique.

Question 2.10. Soit G un groupe de rang de Morley fini avec un sous-groupe définissable et normal A tel que $\mathrm{In}(G/A) = 1$. Est-ce que A contient $\mathrm{In}(G)$?

La difficulté de cette question est qu'elle est fortement liée à la question ouverte ci-dessous.

Question 2.11 (Borovik et Nesin [6, Question B.68]). Soient $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ une famille uniformément définissable de sous-groupes d'un groupe G de rang de Morley fini et $\mathscr{F}^\circ = \{F_i^\circ \mid i \in I\}$ l'ensemble des composantes connexes des sous-groupes de $\mathscr{F}$. Est-ce que $\mathscr{F}^\circ$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes ?

Cependant, on peut répondre partiellement à la question 2.10, dans le cas où A est connexe (lemme 2.13). Nous prouvons d'abord un premier lemme concernant les quotients.

Lemme 2.12. *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors $\mathrm{In}(G/A)$ est contenu dans $\mathrm{In}(G)/A$ pour tout sous-groupe définissable et normal A de G contenu dans $\mathrm{In}(G)$.*

Démonstration. Soient $g \in G \setminus \mathrm{In}(G)$ et $\bar{g} = gA$. Alors il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $g \notin \bigcup \mathscr{F}$. Par la proposition 2.8, on peut supposer $\mathrm{In}(G) \leqslant F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Soit $\bar{\mathscr{F}} = \{F/A \mid F \in \mathscr{F}\}$. Comme $\mathscr{F}$ est une famille géométrique de sous-groupes de G, $\bar{\mathscr{F}}$ est une famille géométrique de sous-groupes de G/A. Comme $\bar{g} \notin \bigcup \bar{\mathscr{F}}$, on obtient $\bar{g} \notin \mathrm{In}(G/A)$, d'où $\mathrm{In}(G/A) \leqslant \mathrm{In}(G)/A$. □

Lemme 2.13. *Soit G un groupe de rang de Morley fini avec un sous-groupe A définissable, connexe et normal. Alors $\mathrm{In}(G)A/A$ est contenu dans $\mathrm{In}(G/A)$, en particulier $\mathrm{In}(G/A) = 1$ implique $\mathrm{In}(G) \leqslant A$.*

De plus, si A est contenu dans $\mathrm{In}(G)$, alors $\mathrm{In}(G)/A = \mathrm{In}(G/A)$.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On peut supposer $G/A \neq \mathrm{In}(G/A)$. Soient $g \in G$ tel que $\bar{g} = gA \in G/A \setminus \mathrm{In}(G/A)$. Alors il existe une famille géométrique $\bar{\mathscr{F}}$ de sous-groupes de G/A telle que $\bar{g} \notin \bigcup \bar{\mathscr{F}}$. Mais la famille $\mathscr{F} = \{F \mid A \leqslant F,\ F/A \in \bar{\mathscr{F}}\}$ n'est constituée que de groupes connexes puisque A est connexe et, $\bar{\mathscr{F}}$ étant une famille géométrique de sous-groupes de G/A, $\mathscr{F}$ est une famille géométrique de G. Ceci prouve que g est un élément géométrique de G, et on a donc bien $\mathrm{In}(G)A/A \leqslant \mathrm{In}(G/A)$.

Enfin, si on suppose $A \leqslant \mathrm{In}(G)$, alors le lemme 2.12 donne $\mathrm{In}(G)/A = \mathrm{In}(G/A)$. □

Maintenant que nous avons décrit les principales propriétés de $\mathrm{In}(G)$ pour un groupe G de rang de Morley fini, nous allons définir un autre sous-groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$.

La raison est que si on considère K un pur corps algébriquement clos, alors K est de rang de Morley 1, et toutes les familles géométriques du groupe additif K contiennent donc $\{K\}$. On a donc $\mathrm{In}(K) = K$ et K n'est pas un groupe géométrique. Cependant, nous avons $\mathrm{In}(L) = 1$ pour tout produit direct $L = K \times \cdots \times K$ d'au moins deux copies de K. Par contre, si on considère un *pur groupe* G de rang de Morley 1, alors nous avons $\mathrm{In}(L) = L$ pour tout produit direct $L = G \times \cdots \times G$ de copies de G. Autrement dit, considérer les produits directs d'un groupe permet de considérer, d'une façon discrète, bien plus que la pure structure du groupe. C'est cette remarque qui motive la définition suivante.

Définition 2.14. Soit G un groupe de rang de Morley fini et, pour tout entier naturel non nul i, soient L_i le produit direct de i copies de G et

$$\begin{aligned} \rho_i :\ & G \to L_i \\ & g \mapsto (g, 1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

On note $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ l'intersection $\bigcap_i \rho_i^{-1}(\mathrm{In}(L_i))$.

Les propriétés du sous-groupe défini ci-dessus se déduisent alors rapidement de celles de $\mathrm{In}(\cdot)$.

Proposition 2.15. *Pour tout groupe G de rang de Morley fini, le sous-groupe* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ *est définissable, définissablement caractéristique dans G, contenu dans* $\mathrm{In}(G)$ *et vérifie* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G/\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)) = 1$.

Aussi, avec les notations de la définition 2.14, la suite $(\rho_i^{-1}(\mathrm{In}(L_i)))_i$ est décroissante.

De plus, pour tout i, le sous-groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(L_i)$ *est le produit direct de i copies de* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$.

Démonstration. On reprend les notations de la définition 2.14. En tant qu'intersection de sous-groupes définissables, le sous-groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est définissable. Aussi, par définition, il est définissablement caractéristique et contenu dans $\mathrm{In}(G) = \rho_1^{-1}(\mathrm{In}(L_1))$. Comme, pour tout i et toute famille géométrique $\mathscr{F}_i$ de sous-groupes de L_i, la famille $\{F \times G^\circ \mid F \in \mathscr{F}_i\}$ est une famille géométrique de sous-groupes de L_{i+1}, la suite $(\rho_i^{-1}(\mathrm{In}(L_i)))_i$ est décroissante et il existe k tel que $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G) = \rho_k^{-1}(\mathrm{In}(L_k))$. Comme $\mathrm{In}(L_k)$ est définissablement caractéristique dans L_k, en considérant les automorphismes de L_k qui permutent les copies de G, on montre que le produit direct I_k de k copies de $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

contenu dans $\mathrm{In}(L_k)$. Le lemme 2.12 donne alors $\mathrm{In}(L_k/I_k) \leqslant \mathrm{In}(L_k)/I_k$. Puisque L_k/I_k s'identifie au produit direct de k copies de $G/\mathrm{In_P}(G)$, on peut considérer l'application

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_k^{-1}:\ G/\mathrm{In_P}(G) &\to L_k/I_k\\ \bar{g} &\mapsto (\bar{g}, \bar{1}, \ldots, \bar{1}) = \overline{\rho_k(g)}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{In_P}(G/\mathrm{In_P}(G))$ est contenu dans :

$$\bar{\rho}_k^{-1}(\mathrm{In}(L_k/I_k)) \leqslant \bar{\rho}_k^{-1}(\mathrm{In}(L_k)/I_k) = \rho_k^{-1}(\mathrm{In}(L_k))/\mathrm{In_P}(G) = 1.$$

Il reste à montrer que $\mathrm{In_P}(L_i) = I_i$ pour tout i. Si $i = 1$, on a bien $\mathrm{In_P}(L_i) = \mathrm{In_P}(G) = I_i$, donc on peut supposer $i > 1$. Pour tout entier naturel non nul n, comme L_{in} s'identifie au produit direct de n copies de L_i, on peut considérer l'application :

$$\begin{aligned}\tau_n:\ L_i &\to L_{in}\\ g &\mapsto (g, 1, \ldots, 1).\end{aligned}$$

Si $\mathrm{In_P}(L_i)$ ne contient pas I_i, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\tau_n(I_i)$ n'est pas contenu dans $\mathrm{In}(L_{in})$. Par permutation des copies de G dans L_i, on obtient $\rho_{in}(\mathrm{In_P}(G))$ non contenu dans $\mathrm{In}(L_{in})$, ce qui est contradictoire avec la définition de $\mathrm{In_P}(G)$. On en déduit que $\mathrm{In_P}(L_i)$ contient I_i.

Maintenant supposons $\mathrm{In_P}(L_i) \neq I_i$. Par permutation des copies de G dans L_i, il existe $(x_1, \ldots, x_i) \in \mathrm{In_P}(L_i)$ avec $x_1 \notin \mathrm{In_P}(G)$. Par ce qui précède, avec k comme dans le premier paragraphe, le produit de k copies de $\mathrm{In_P}(L_i)$ est contenu dans $\mathrm{In_P}(L_{ki}) \leqslant \mathrm{In}(L_{ki})$. Par permutation des copies de G dans L_{ki}, on en déduit qu'il existe $(y_1, \ldots, y_{ki}) \in \mathrm{In}(L_{ki})$ avec $y_1 = \cdots = y_k = x_1$. On a donc

$$x_1 \in \rho_{ki}^{-1}(\mathrm{In}(L_{ki})) = \rho_k^{-1}(\mathrm{In}(L_k)) = \mathrm{In_P}(G).$$

Ceci contredit le choix de x_1, d'où $\mathrm{In_P}(L_i) = I_i$. □

Corollaire 2.16. *Soit G un groupe de rang de Morley fini tel que $\mathrm{In_P}(G) = 1$. Alors il y a un monomorphisme définissable de G dans un groupe géométrique $\bar{L}$.*

Plus précisément, il y a un produit direct L d'un nombre fini non nul de copies de G tel que, si on considère

$$\begin{aligned}\rho:\ G &\to L\\ g &\mapsto (g, 1, \ldots, 1),\end{aligned}$$

alors $\rho(G) \cap \mathrm{In}(L) = 1$ et on peut donc prendre $\bar{L} = L/\mathrm{In}(L)$.

Nous finissons cette section par une question.

Question 2.17. Si G est un groupe de rang de Morley fini tel que $\mathrm{In_P}(G) = 1$, existe-t-il un produit direct L d'un nombre fini non nul de copies de G tel que $\mathrm{In}(L) = 1$?

3. Groupes algébriques géométriques

L'objet de cette section est de vérifier la conjecture 1.3 pour les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos. Plus généralement nous allons essayer de caractériser les groupes algébriques géométriques en étudiant la question suivante.

Question 3.1. Est-ce que, parmi les groupes algébriques G sur un corps algébriquement clos, ceux qui sont affines et sans tore non trivial normal sont ceux tels que $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est fini ?

Si nous vérifierons effectivement la conjecture 1.3 pour les groupes algébriques (corollaire 3.4), nous ne répondrons entièrement à la question 3.1 qu'en caractéristique nulle (proposition 3.6) et dans un cas particulier en caractéristique non nulle (proposition 3.7). En effet, en caractéristique non nulle, nous sommes heurtés à des questions plus délicates.

Le langage est ici celui du corps de base K du groupe, augmenté éventuellement d'opérations et relations supplémentaires. En particulier, tous les sous-groupes fermés du groupe sont définissables et un groupe connexe au sens algébrique est aussi connexe au sens modèle-théorique [**21**, Lemme 1.1]. Aussi, si K est de caractéristique nulle, alors son groupe additif K_+ n'a pas de sous-groupe définissable propre non trivial [**23**, Corollaire 3.3, p. 76]. Nous commençons par une remarque concernant la linéarité des groupes algébriques.

Proposition 3.2. *On considère G un groupe algébrique, sur un corps algébriquement clos K, et sans sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial. Alors G est affine (donc définissablement linéaire).*

Démonstration. D'après de [**23**, p. 148], G a un unique plus grand sous-groupe L fermé, connexe et linéaire. Si $L = G^\circ$, alors G est linéaire [**23**, p. 145], donc on peut supposer $L \neq G^\circ$. D'après le théorème de Rosenlicht [**23**, p. 147] $G^\circ/Z(G^\circ)$ est linéaire, et $G^\circ/LZ(G^\circ)$ aussi d'après de [**23**, p. 148] (ou théorème 11.5 de [**18**]). Ainsi, comme G°/L est une variété abélienne [**23**, p. 148], $G^\circ/LZ(G^\circ)$ est une variété à la fois abélienne et affine, donc finie [**23**, p. 136]. On en déduit que $G^\circ = LZ(G^\circ)$. Aussi, puisque G°/L est une variété abélienne infinie, $Z(G^\circ)/(L \cap Z(G^\circ))$ est une variété abélienne infinie. D'après de [**12**, p. 167], ce dernier groupe a un p-sous-groupe divisible non trivial pour tout entier premier p différent de la caractéristique de K. On en déduit que $Z(G^\circ)$ a un p-sous-groupe divisible non trivial pour un certain entier premier p, ce qui contredit l'hypothèse. □

Nous pouvons maintenant facilement vérifier la conjecture 1.3 pour les groupes algébriques, ainsi que la réciproque de la question 3.1 (corollaire 3.4).

Lemme 3.3. *Si G est un groupe de rang de Morley fini tel que $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est fini, alors G n'a pas sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial.*

Démonstration. On note $\bar{G} = G/\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$. Comme $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est fini, il suffit de montrer que $\bar{G}$ n'a pas de sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial. D'après la

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

proposition 2.15, on a $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(\bar{G}) = 1$ et le corollaire 2.16 dit qu'il existe un produit direct L d'un nombre fini de copies de $\bar{G}$ tel que, si on considère

$$\begin{aligned} \rho :\ \bar{G} &\to L \\ \bar{g} &\mapsto (\bar{g}, \bar{1}, \dots, \bar{1}), \end{aligned}$$

alors $\rho(\bar{G}) \cap \mathrm{In}(L) = 1$. Soit T le plus grand tore décent normal de $\bar{G}$. Par rigidité des tores décents [**10**], le tore $\rho(T)$ est central dans L° et alors, pour toute famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de L, on a $\rho(T) \leqslant \mathrm{In}_{\mathscr{F}}(L)$ [**10**, Extended Nongenericity]. Ceci prouve que $\rho(T)$ est contenu dans $\rho(\bar{G}) \cap \mathrm{In}(L) = 1$ (proposition 2.6), d'où $T = 1$, ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 3.4. *Tout groupe algébrique géométrique est affine (donc définissablement linéaire).*

Plus généralement, si $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est fini pour un groupe algébrique G sur un corps algébriquement clos, alors G est affine et sans tore non trivial normal.

Démonstration. Le lemme 3.3 et la proposition 3.2 donnent le résultat. □

Ici, de la même façon que dans [**18**], pour tout groupe algébrique linéaire G, on note $R_u(G)$ le plus grand sous-groupe unipotent connexe et normal de G.

Le lemme ci-dessous montre que la première implication de la question 3.1 se ramène à une étude de sous-groupes unipotents.

Lemme 3.5. *Soit G un groupe algébrique affine sans tore non trivial normal. Alors $\mathrm{In}(G)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments semi-simples et $\mathrm{In}(G)^\circ$ est unipotent.*

Démonstration. D'après l'exemple 1.9 (ii) et par conjugaison des sous-groupes de Cartan dans G (remarque 1.8), la famille $\mathscr{F}$ des sous-groupes de Cartan de G est une famille géométrique de sous-groupes de G. D'après la proposition 2.8, il y a un sous-groupe de Cartan C de G qui contient $\mathrm{In}(G)$ et, par conjugaison des sous-groupes de Cartan de G [**18**, Corollaire A, p. 135], tous les sous-groupes de Cartan contiennent $\mathrm{In}(G)$. Aussi, par de [**18**, p. 123], si T désigne le tore maximal de C, alors $C = T \times R_u(C)$. D'après la proposition 1.11 (iii) de [**21**], on a $\mathrm{In}(G) = (T \cap \mathrm{In}(G)) \times (R_u(C) \cap \mathrm{In}(G))$. De plus, $T \cap \mathrm{In}(G)$ est constitué de l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathrm{In}(G)$ et $R_u(C) \cap \mathrm{In}(G)$ est constitué de ses éléments unipotents.

Supposons que $\mathrm{In}(G)$ contienne une infinité d'éléments semi-simples. Alors $T \cap \mathrm{In}(G)$ est infini et, par conjugaison des tores maximaux de G, tous les tores maximaux de G contiennent $T \cap \mathrm{In}(G)$, et leur intersection H est en particulier infinie. Or H est un sous-groupe fermé et abélien de G et H° est un tore non trivial de G, ce qui contredit l'hypothèse. □

Nous apportons maintenant une réponse positive à la question 3.1 pour les groupes algébriques sur un corps de caractéristique nulle.

Proposition 3.6. *On considère un groupe algébrique affine G sur un corps algébriquement clos K de caractéristique nulle. Si G n'a pas de tore non trivial normal, alors* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ *est fini.*

De plus, s'il existe un sous-groupe de Cartan C tel que soit $R_u(C) \nleqslant Z(G^\circ)$ soit $\dim(R_u(C)) \neq 1$, *alors* $\mathrm{In}(G)$ *est fini.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on peut supposer G sous-groupe fermé connexe et non trivial de $\mathrm{GL}(n, K)$ pour un entier $n > 1$. Remarquons aussi que la seconde partie de la proposition implique la première partie. En effet, supposons la seconde partie vraie. Alors soit $\mathrm{In}(G)$ est fini, soit $R_u(C) \leqslant Z(G)$ et $\dim(R_u(C)) = 1$ pour tout sous-groupe de Cartan C de G. Dans le premier cas, comme $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est contenu dans $\mathrm{In}(G)$ (proposition 2.15), le sous-groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est fini. Dans le second cas, on considère le groupe $G \times G$, qui n'a pas de tore non trivial normal puisque G n'en a pas. Comme les tores maximaux de $G \times G$ sont les produits directs de deux tores maximaux de G, les sous-groupes de Cartan de $G \times G$ sont les produits directs de deux sous-groupes de Cartan de G. Ainsi on a $\dim(R_u(C_1)) = 2$ pour tout sous-groupe de Cartan C_1 de $G \times G$, et on peut donc appliquer la seconde partie de la proposition à $G \times G$. Ceci montre que $\mathrm{In}(G \times G)$ est fini, donc $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G \times G)$ est fini puisque $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G \times G)$ est contenu dans $\mathrm{In}(G \times G)$ (proposition 2.15). Maintenant on applique la dernière partie de la proposition 2.15, et on obtient $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G \times G) = \mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G) \times \mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$, ce qui prouve la finitude $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$. Il reste donc à prouver la seconde partie de la proposition, et on peut donc supposer qu'il existe un sous-groupe de Cartan C tel que soit $R_u(C) \nleqslant Z(G)$ soit $\dim(R_u(C)) \neq 1$.

Dans la suite de la preuve nous supposons $\mathrm{In}(G)$ infini, et nous montrons que ceci est contradictoire avec nos hypothèses. On note $U = R_u(G)$. D'après le lemme 3.5, le sous-groupe $\mathrm{In}(G)^\circ$ est constitué d'éléments unipotents, d'où $\mathrm{In}(G)^\circ \leqslant U$. Comme il y a 2^{n-1} décompositions de Jordan possibles pour les éléments unipotents de $\mathrm{GL}(n, K)$, il y a 2^{n-1} classes de conjugaison d'éléments unipotents dans $\mathrm{GL}(n, K)$. On note $m+1$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments unipotents ayant une intersection non vide avec U, et on fixe $x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_m$ des représentants de chacune de ces classes de conjugaison. On considère $V_1, \ldots, V_m$ les plus petits sous-groupes fermés de U contenant $x_1, \ldots, x_m$ respectivement. Alors $V_1, \ldots, V_m$ sont des sous-groupes unipotents et abéliens, et ils sont donc tous définissablement isomorphes à des K-espace vectoriels de dimension non nulle. Comme tout K-espace vectoriel de dimension non nulle est recouvert par ses K-sous-espaces vectoriels de dimension 1, la minimalité de $V_1, \ldots, V_m$ implique que $V_1, \ldots, V_m$ sont tous définissablement isomorphes à des K-sous-espaces vectoriels de dimension 1, c'est-à-dire à K_+. En particulier $V_1, \ldots, V_m$ n'ont aucun sous-groupe fermé propre et non-trivial, ce qui montre que la famille uniformément définissable $\mathscr{F}_0 = \{V_i^g \leqslant U \mid i = 1, \ldots, m;\ g \in \mathrm{GL}(n, K)\}$ est constituée de sous-groupes s'intersectant trivialement deux à deux. De plus, comme tout élément non-trivial de U est conjugué à l'un des éléments $x_1, \ldots, x_m$, on a $\bigcup \mathscr{F}_0 = U$, ce qui montre que la famille $\mathscr{F}_0$ est une famille géométrique de sous-groupes de U (remarque 1.6). Ceci prouve aussi que tout élément non-trivial de U appartient à un unique élément de $\mathscr{F}_0$.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

Soient T le tore maximal de G tel que $C = C_G(T)$ [**18**, Corollaire A, p. 140], $x \in \mathrm{In}(G)^\circ \setminus \{1\}$ et V_x l'unique élément de $\mathscr{F}_0$ contenant x. On considère la famille

$$\mathscr{F} = \{T^g \times V \mid g \in G,\ V \in \mathscr{F}_0 \setminus \{V_x\},\ V \leqslant C_U(T^g)\}.$$

Alors $\mathscr{F}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes connexes de G et on a $x \notin \bigcup \mathscr{F}$.

D'après l'exemple 1.9 (ii), la famille des conjugués de C est une famille géométrique de sous-groupes de G et, d'après la proposition 2.8, il existe un conjugué de C contenant $\mathrm{In}(G)$. Comme $\mathrm{In}(G)$ est normal dans G, tous les conjugués de C contiennent $\mathrm{In}(G)$ et, en particulier, C contient $\mathrm{In}(G)$ d'où $x \in C \cap U$. On en déduit que $C \cap U$ contient V_x, et on a donc soit $C \cap U = V_x$, soit $(C \cap U) \setminus V_x$ générique dans $C \cap U$. Dans le premier cas, on a $C \cap U \in \mathscr{F}_0$ d'où $\dim(C \cap U) = 1$. Dans le second cas, comme $U = \bigcup \mathscr{F}_0$, l'ensemble $C \cap U$ est génériquement recouvert par les éléments de $\mathscr{F}_0 \setminus \{V_x\}$. De plus, comme on a $C = R_u(C) \times T$ et $R_u(C) = C_U(T) = C \cap U$ [**18**, Exercice 1, p. 161], le sous-groupe C est génériquement recouvert par $\bigcup \mathscr{F}$.

Supposons $\dim(C \cap U) \neq 1$. D'après le paragraphe précédent, $C \cap (\bigcup \mathscr{F})$ est générique dans C. Comme les conjugués de C sont génériquement disjoints (exemple 1.9 (ii)), l'ensemble $X = \{c \in C \mid \forall g \notin N_G(C),\ c \notin C^g\}$ est générique dans C, donc $X \cap (\bigcup \mathscr{F})$ est générique dans C. Maintenant, comme $C \neq T$ puisque $C = (C \cap U) \times T$ et $x \in (C \cap U) \setminus \{1\}$, l'ensemble $Y = (X \cap (\bigcup \mathscr{F})) \setminus T$ est aussi générique dans C. Soit $y \in Y$. Comme $y \in Y \subseteq X$ est contenu dans un unique conjugué de $C = C_G(T)$, tout $\mathscr{F}$-sous-groupe contenant y est contenu dans C. Comme $C = (C \cap U) \times T$ et comme $y \notin T$, il existe un unique élément V de $\mathscr{F}_0$ tel que $y \in T \times V$. Il y a donc au plus un $\mathscr{F}$-sous-groupe contenant y et, s'il existe, c'est $T \times V$. Comme $y \in Y \subseteq \bigcup \mathscr{F}$, on obtient $T \times V \in \mathscr{F}$, ce qui prouve que tout élément de Y est contenu dans un unique $\mathscr{F}$-sous-groupe de G, lequel est contenu dans C. On considère alors la famille $\mathscr{F}_1$ des $\mathscr{F}$-sous-groupes de G contenus dans un unique conjugué de C. C'est une famille uniformément définissable de sous-groupes connexes de G et ce qui précède montre que $\bigcup \mathscr{F}_1$ recouvre génériquement tous les conjugués de C. Comme les conjugués de C recouvrent génériquement G (exemple 1.9 (ii)), le lemme 2.4 de [**19**] dit que $\bigcup \mathscr{F}_1$ est générique dans G et la remarque 1.6 montre alors que $\mathscr{F}_1$ est une famille géométrique de sous-groupes de G. La proposition 2.8 donne alors $x \in \bigcup \mathscr{F}_1 \subseteq \bigcup \mathscr{F}$, ce qui contredit $x \notin \bigcup \mathscr{F}$. On en déduit que $C \cap U$ est de dimension 1.

En particulier, on a montré que $C \cap U$ est abélien et, comme $C = (C \cap U) \times T$, le sous-groupe C est abélien. Comme C contient $\mathrm{In}(G)$ et comme $\mathrm{In}(G)^\circ \leqslant U$, on en déduit que $\mathrm{In}(G)^\circ \leqslant C \cap U$ est centralisé par C. Ceci prouve que $C_G(\mathrm{In}(G)^\circ)$ contient C et, comme $C_G(\mathrm{In}(G)^\circ)$ est normal dans G, il contient tous les conjugués de C. Comme les conjugués de C recouvrent génériquement G (exemple 1.9 (ii)), on a prouvé que $C_G(\mathrm{In}(G)^\circ)$ est générique dans le groupe connexe G, d'où $G = C_G(\mathrm{In}(G)^\circ)$ et $\mathrm{In}(G)^\circ \leqslant Z(G)$. Ainsi $x \in \mathrm{In}(G)^\circ$ est central dans G. Or $C \cap U$ est un sous-groupe fermé de dimension 1 contenant $x \neq 1$, donc $C \cap U$ est le plus petit sous-groupe fermé contenant x, et on en déduit $C \cap U \leqslant Z(G)$. Comme $R_u(C) = C \cap U$, on a montré que $R_u(C) \leqslant Z(G)$ et $\dim(R_u(C)) = 1$, ce qui contredit nos hypothèses. $\square$

En caractéristique non nulle, le problème est nettement plus compliqué, et la preuve du résultat ci-dessus ne s'applique pas. La principale raison est qu'un élément d'un groupe unipotent connexe n'est pas nécessairement contenu dans un unique sous-groupe fermé connexe minimal. Notons aussi que ce constat ne semble pas fournir non plus de contre-exemple. D'ailleurs nous avons le résultat assez général suivant, qui semble en particulier dire que le problème se situe au niveau des groupes unipotents non abéliens.

Proposition 3.7. *On considère un groupe algébrique affine G sur un corps algébriquement clos K* quelconque. *On suppose que G n'a pas de tore non trivial normal. S'il existe un sous-groupe de Cartan C de G tel que $R_u(C) \leqslant Z(G^\circ)$, alors* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ *est fini.*

Démonstration. On peut supposer G connexe et $\mathrm{In}(G \times G)$ infini. Comme G n'a pas de tore non trivial normal, $G \times G$ n'en a pas non plus et, d'après le lemme 3.5, le groupe $\mathrm{In}(G \times G)^\circ$ est constitué d'éléments unipotents. Notons aussi que les sous-groupes de Cartan de $G \times G$ sont les produits directs de deux sous-groupes de Cartan de G. Aussi, par conjugaison des sous-groupes de Cartan de $G \times G$ (remarque 1.8), les sous-groupes de Cartan de $G \times G$ forment une famille géométrique de sous-groupes de $G \times G$ (exemple 1.9 (ii)), donc $\mathrm{In}(G \times G)$ est contenu dans un sous-groupe de Cartan de $G \times G$ (proposition 2.8), et on obtient $\mathrm{In}(G \times G) \leqslant C \times C$ par conjugaison des sous-groupes de Cartan, d'où

$$\mathrm{In}(G \times G)^\circ \leqslant R_u(C \times C) = R_u(C) \times R_u(C) \leqslant Z(G \times G).$$

En particulier, $R_u(C \times C)$ est muni définissablement d'une structure d'espace vectoriel de dimension paire [**18**, pp. 127, 130], et la famille $\mathscr{F}_0$ de ses sous-espaces vectoriels de dimension 1 est une famille géométrique. Soient $x \in \mathrm{In}(G \times G)^\circ \setminus \{1\}$ et $\mathscr{F}_1 = \{F \in \mathscr{F}_0 \mid x \notin F\}$. Alors $\mathscr{F}_1$ est une famille géométrique de sous-groupes de $R_u(C \times C)$. On note T le tore maximal de C. Soit $\mathscr{F} = \{(T^g \times T^h)F \mid (g,h) \in G \times G,\ F \in \mathscr{F}_1\}$. Comme $x \in \mathrm{In}(G \times G)$ et $x \notin \bigcup \mathscr{F}$, la famille $\mathscr{F}$ n'est pas géométrique.

Comme $(C \times C) \cap (\bigcup \mathscr{F})$ est générique dans $C \times C$ et comme la famille des conjugués de $C \times C$ est une famille géométrique, le lemme 2.4 de [**19**] montre que $\mathscr{F}$ est une famille géométrique, ce qui est contredictoire. □

Nous pouvons maintenant nous demander ce qui se passe si nous nous plaçons dans le langage d'un pur corps algébriquement clos K. On considère alors un groupe algébrique connexe G sur K. Comme $\mathrm{In}(G)$ est alors définissable dans le pur corps K, c'est un fermé de G, le quotient $G/\mathrm{In}(G)$ est un groupe géométrique algébrique sur K et $G/\mathrm{In}(G)$ est donc affine d'après le corollaire 3.4. Par la proposition 2.15 et le corollaire 2.16, on a les mêmes propriétés pour $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$. Comme nous montrerons dans la section suivante que $\mathrm{In}(G)$, donc aussi $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$, est *hypercentral* (corollaire 4.15), nous obtiendrons la proposition 3.10. Avant de l'énoncer, nous rappelons la définition de l'*hypercentre*.

Définition 3.8. Dans tout groupe G on note $Z_0(G) = 1$, pour tout ordinal j, $Z_{j+1}(G)/Z_j(G) = Z(G/Z_j(G))$ et, pour tout ordinal limite μ, $Z_\mu(G) = \bigcup_{j<\mu} Z_j(G)$. La famille de sous-groupes ainsi formée est la *série centrale ascendante* de G. Alors il

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

existe un plus petit ordinal α tel que $Z_{\alpha+1}(G) = Z_\alpha(G)$, et on note $Z_\infty(G) = Z_\alpha(G)$ l'*hypercentre* de G.

Un sous-groupe H de G est dit *hypercentral*, s'il est contenu dans l'hypercentre de G.

Remarque 3.9. Dans tout groupe G de rang de Morley fini et pour tout entier naturel n, le sous-groupe $Z_n(G)$ est définissable.

De plus, le corollaire 3.15 de [**23**, p. 89] dit que, si G est un groupe connexe de rang de Morley fini, alors son hypercentre est égal à $Z_n(G)$ pour un entier n, et donc que $Z_\infty(G)$ est définissable et nilpotent.

Proposition 3.10. *Soit G un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos K.* Si K est un pur corps, *alors* $\mathrm{In}(G)$ *et* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ *sont des sous-groupes fermés et hypercentraux de G. De plus, les quotients $G/\mathrm{In}(G)$ et $G/\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ sont affines.*

Maintenant, si K est de caractéristique nulle, alors on obtient un résultat analogue au théorème de Rosenlicht [**23**, p. 147].

Théorème 3.11. *Soit G un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos K de caractéristique nulle. Alors* $\mathrm{In}(G)$ *et* $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ *sont contenus dans le centre de G.*

Démonstration. Supposons d'abord que le langage est celui du pur corps K, et prouvons le résultat par induction sur la dimension de G. Comme $\mathrm{In}(G)$ contient $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$, il suffit de montrer que $\mathrm{In}(G)$ est central dans G. Comme $G/\mathrm{In}(G)$ est un groupe géométrique (corollaire 2.9), le groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G/\mathrm{In}(G))$ est trivial et le lemme 3.3 dit que $G/\mathrm{In}(G)$ n'a pas de sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial. Ainsi, si T désigne le plus petit sous-groupe fermé de G contenant la torsion normale divisible abélienne T_0 de G, alors on a $T \leqslant \mathrm{In}(G)$. Comme T_0 est un sous-groupe abélien divisible, T est aussi abélien divisible, donc T est connexe, et le lemme 2.13 donne $\mathrm{In}(G)/T = \mathrm{In}(G/T)$.

Montrons que, pour tout sous-groupe normal fini F/T de G/T, le sous-groupe F est central dans G. Comme G est connexe, G centralise ses sous-groupes de torsion normaux et divisibles abéliens [**6**, Théorème 6.16, p. 104], et on obtient $T_0 \leqslant Z(G)$. Comme T est le plus petit sous-groupe fermé contenant T_0, on en déduit que T est central dans G. Pour tout $g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \tau_g :\ & F \to T \\ & x \mapsto [g, x]. \end{aligned}$$

Pour tout $g \in G$, comme $T \leqslant Z(G)$, l'application τ_g est un morphisme et son image I_g est un sous-groupe isomorphe à $F/C_F(g)$. Comme T est central dans G, on en déduit que I_g est un sous-groupe fini de cardinal au plus $|F|$ pour tout $g \in G$. Comme T_0 est un sous-groupe abélien divisible, le plus petit sous-groupe fermé T contenant T_0 est aussi divisible et abélien, et la torsion de T est un sous-groupe abélien divisible. Ainsi l'ensemble T_1 des éléments T d'ordre au plus $|F|$ est fini [**6**, Exercice 9, p. 93]. Comme T est abélien, T_1 est un sous-groupe de T. D'après ce qui précède, T_1 contient I_g pour tout $g \in G$, donc T_1 contient $[G, F]$, et $[G, F]$ est un sous-groupe fini. Or, comme G est connexe, $[G, F]$ est connexe, ce qui prouve que $[G, F] = 1$, d'où $F \leqslant Z(G)$. En particulier on peut désormais supposer $\mathrm{In}(G)/T$ infini.

Montrons que G/T n'a pas de sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial. Soit R_0/T un sous-groupe de torsion normal divisible abélien de G/T. Comme G est connexe, R_0/T est central dans G/T [**6**, Théorème 6.16, p. 104], et ses sous-groupes sont donc tous normaux dans G/T. Comme R_0/T est de torsion, le paragraphe précédent donne $R_0 \leqslant Z(G)$, en particulier R_0 est abélien. Comme T et R_0/T sont divisibles, on en déduit que R_0 est divisible et abélien. Soit R_1 la partie de torsion de R_0. Comme R_0 est divisible et abélien, R_1 est un sous-groupe caractéristique divisible et abélien de R_0, et R_1 est donc normal dans G, d'où $R_1 \leqslant T_0 \leqslant T$. D'autre part, comme R_0/T est de torsion, on a $R_0 = R_1T$, d'où $R_0/T = 1$. Ceci montre que G/T n'a pas de sous-groupe de torsion normal divisible abélien non trivial, en particulier G/T est un groupe affine (proposition 3.2) et G/T n'a pas de tore non trivial normal.

Maintenant la proposition 3.6 appliquée à G/T montre qu'il existe un sous-groupe de Cartan C/T de G/T tel que $R_u(C/T)$ est un sous-groupe central de dimension 1 de G/T. D'autre part, d'après l'exemple 1.9 (ii), la famille des conjugués de C/T est une famille géométrique de sous-groupes de G/T et, d'après la proposition 2.8, il existe un conjugué de C/T contenant $\mathrm{In}(G/T)$. Comme $\mathrm{In}(G/T)$ est normal dans G/T, tous les conjugués de C/T contiennent $\mathrm{In}(G/T)$ et, en particulier, C/T contient $\mathrm{In}(G/T)$. Comme $\mathrm{In}(G/T)^\circ$ est unipotent d'après le lemme 3.5, on obtient $\mathrm{In}(G/T)^\circ \leqslant R_u(C/T) \leqslant Z(G/T)$. Comme $\mathrm{In}(G/T) = \mathrm{In}(G)/T$ est infini et comme $\dim(R_u(C/T)) = 1$, on en déduit $\mathrm{In}(G/T)^\circ = R_u(C/T)$.

Montrons que $\mathrm{In}(G/T)$ est central dans G/T. Si $T \neq 1$, l'hypothèse d'induction appliquée à G/T donne le résultat. Si $T = 1$, le paragraphe précèdent dit que $\mathrm{In}(G)^\circ$ est central et unipotent, en particulier $\mathrm{In}(G)^\circ$ est sans torsion. Aussi, comme G est connexe, G centralise $\mathrm{In}(G)/\mathrm{In}(G)^\circ$. Pour tout $g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \gamma_g :\ \mathrm{In}(G) &\to \mathrm{In}(G)^\circ \\ x &\mapsto [g, x]. \end{aligned}$$

Pour tout $g \in G$, comme $\mathrm{In}(G)^\circ \leqslant Z(G)$, l'application γ_g est un morphisme et son image J_g est un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{In}(G)/C_{\mathrm{In}(G)}(g)$. Comme $\mathrm{In}(G)^\circ$ est central dans G, on en déduit que J_g est un sous-groupe fini de $\mathrm{In}(G)^\circ$ pour tout $g \in G$. Or $\mathrm{In}(G)^\circ$ est sans torsion, donc on obtient $[g, \mathrm{In}(G)] = J_g = 1$ pour tout $g \in G$, ce qui prouve que $\mathrm{In}(G)$ est central dans G.

D'après le paragraphe précédent, on a $\mathrm{In}(G/T) \leqslant Z(G/T)$. On note $U/T = \mathrm{In}(G/T)^\circ = R_u(C/T)$. Comme U/T est unipotent, U/T est sans torsion et, comme $\mathrm{In}(G/T) \leqslant Z(G/T)$ est abélien, il y a un unique sous-groupe fini F/T dans $\mathrm{In}(G/T)$ tel que $\mathrm{In}(G/T) = U/T \times F/T$. Comme $\mathrm{In}(G/T)$ est central dans G/T, le sous-groupe F/T est normal dans G/T, et le second paragraphe de la preuve donne $F \leqslant Z(G)$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que U est central dans G. Pour tout $g \in G$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \mu_g :\ U &\to T \\ u &\mapsto [g, u]. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

Pour tout $g \in G$, comme T est central dans G, l'application μ_g est un morphisme et son image L_g est un sous-groupe isomorphe à $U/C_U(g)$. Comme T est central dans G et comme U/T est unipotent, on en déduit que $L_g = [g, U]$ est un sous-groupe unipotent de T pour tout $g \in G$. Ceci prouve que $[G, U]$ est contenu dans $R_u(T)$ et est donc unipotent. Pour tout $u \in U$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \omega_u : \ G &\to R_u(T) \\ g &\mapsto [g, u]. \end{aligned}$$

Pour tout $u \in U$, comme T est central dans G, l'application ω_u est un morphisme et son image M_u est un sous-groupe fermé de $R_u(T)$ isomorphe à $G/C_G(u)$. En particulier, pour tout $u \in U$, $M_u \leqslant R_u(T)$ est unipotent et $G/C_G(u) \cong M_u$ aussi. Or C/T est un sous-groupe de Cartan de G/T et $U/T = R_u(C/T)$, donc il y a un tore maximal T_C/T de G/T tel que $C/T = U/T \times T_C/T$ [**18**, p. 142].

Montrons que u centralise U pour tout $u \in U$. Comme $T \leqslant Z(G)$, il suffit de le prouver pour tout $u \in U \setminus T$. Soit $u \in U \setminus T$. Comme $T \leqslant Z(G)$, on a $T \leqslant C_U(u)$. Aussi, comme on a $u \in C_U(u) \setminus T$, le quotient $C_U(u)/T$ est un sous-groupe fermé non trivial du groupe unipotent U/T dont la dimension est $\dim(U/T) = \dim(R_u(C/T)) = 1$, ce qui prouve que $C_U(u)/T = U/T$, d'où $U \leqslant C_G(u)$.

Ce qui précède montre que, pour tout $u \in U$, on a $CC_G(u)/C_G(u) = T_C C_G(u)/C_G(u)$. Comme $G/C_G(u)$ est unipotent pour tout $u \in U$ et comme T_C/T est un tore, on en déduit que C centralise u pour tout $u \in U$, d'où $U \leqslant C_G(C)$. On a prouvé que $C_G(U)$ est un sous-groupe fermé normal de G contenant C, donc contenant tous les conjugués de C. Comme l'union des conjugués de C recouvre génériquement G (exemple 1.9 (ii)) et comme G est connexe, on en déduit que $G = C_G(U)$, et U est central dans G.

Traitons maintenant le cas général, autrement dit sans supposer que le langage est celui du pur corps K. Comme $\mathrm{In}(G)$ contient $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$, il suffit de montrer que $\mathrm{In}(G)$ est central dans G. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des familles géométriques $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G qui sont aussi des familles géométriques de sous-groupes de G dans le pur langage du corps K. Par ce qui précède, l'intersection des sous-groupes $\mathrm{In}_{\mathscr{F}}(G)$ lorsque $\mathscr{F}$ parcourt $\mathscr{E}$ est centrale. Comme cette intersection contient $\mathrm{In}(G)$, on en déduit le résultat. □

En caractéristique non nulle, le sous-groupe $\mathrm{In}(G)$ n'est pas toujours central puisque tout groupe unipotent connexe G d'exposant borné de dimension 2 et non abélien vérifie $\mathrm{In}(G) = G$. Par contre, pour un tel groupe G, le sous-groupe $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ reste central.

Nous finissons cette section par une conjecture, de nature purement algébrique puisque le dernier paragraphe de la preuve précédente la restreint à un problème de pur corps. Elle est à relier au théorème de Rosenlicht et à la proposition 3.10, qui dit que, si le langage est celui d'un pur corps, alors $G/\,\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est affine.

Conjecture 3.12. *Si G est un groupe algébrique connexe sur un (pur) corps algébriquement clos, alors $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ est central dans G.*

4. Groupes définissablement linéaires

Nous rassemblons ici divers résultats sur les groupes définissablement linéaires. Ces résultats vont de la simple remarque (comme le premier que nous énonçons), à des résultats pouvant avoir un intérêt dans d'autres contextes (comme la proposition 4.3 et le théorème 4.13). En effet, pour comprendre la conjecture 1.3, il est indispensable de mieux connaître la structure des groupes définissablement linéaires. Surtout, nous étudions la conjecture suivante, laquelle est évidemment à rapprocher de la conjecture 3.12.

Conjecture 4.1. *Dans tout groupe connexe de rang de Morley fini, le sous-groupe* $\mathrm{In}(G)$ *est hypercentral.*

Autrement dit, cette conjecture prétend qu'il y a, pour le groupes de rang de Morley fini, un analogue au théorème de Rosenlicht [**23**, p. 147], lequel dit que $G/Z(G)$ est linéaire pour tout groupe algébrique G. Nous montrerons que la conjecture 4.1 est vraie dans un contexte assez général. En particulier nous prouverons que, si la conjecture de Cherlin–Zil'ber est vraie, alors c'est aussi le cas de la conjecture 4.1 (corollaire 4.15). Le résultat final de cette section (théorème 4.18) dit que, de même, si la conjecture 1.3 est vraie, alors c'est aussi le cas de la conjecture 4.1.

Notons aussi que, sans pouvoir le montrer, nous pensons qu'il est fort peu probable que $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$ soit un sous-groupe central de tout groupe connexe G de rang de Morley fini. En effet, le groupe construit par Baudisch [**3**], lequel est connexe non abélien de rang deux et n'interprète pas de corps infini, fournirait alors un contre-exemple à la conjecture 1.3 (en considérant un produit direct de plusieurs tels groupes).

Notre premier résultat est une forme de réciproque à la conjecture 1.3.

Proposition 4.2. *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Si G est définissablement linéaire, alors G est définissablement plongé dans un groupe géométrique.*

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour $G = \mathrm{GL}_n(K)$ où $n \geqslant 2$ est un entier quelconque et K un corps algébriquement clos. Comme $\mathrm{GL}_n(K)$ est définissablement plongé dans $\mathrm{SL}_{n+1}(K)$ et comme $\mathrm{SL}_{n+1}(K)$ est définissablement plongé dans $\mathrm{PSL}_{n+2}(K)$, il suffit de montrer que tout groupe algébrique simple H est géométrique.

Pour cela on considère la famille $\mathscr{F}$ des sous-groupes de Cartan de H. D'après l'exemple 1.9 (ii) et par conjugaison des sous-groupes de Cartan (remarque 1.8), il s'agit d'une famille géométrique de sous-groupes de H. D'après la proposition 2.8, la famille $\{F \in \mathscr{F} \mid \mathrm{In}(H) \leqslant F\}$ est géométrique, en particulier il existe un sous-groupe de Cartan C de H contenant $\mathrm{In}(H)$. Comme $\mathrm{In}(H)$ est normal dans H (proposition 2.6) et comme H est simple, on a $\mathrm{In}(H) = 1$ ou $\mathrm{In}(H) = H$. Si $\mathrm{In}(H) = H$, alors $H = C$ est nilpotent [**18**, p. 137], ce qui contredit la simplicité de H. On a donc $\mathrm{In}(H) = 1$ et H est géométrique. □

Le résultat ci-dessous, dû à Borovik et à Cherlin, a le grand intérêt de ramener la conjecture 1.3 à une étude de groupes *connexes*.

Proposition 4.3 (Borovik–Cherlin (communication personnelle)). *Soit G un groupe de rang de Morley fini dont la composante connexe est définissablement* *linéaire sur un nombre fini non nul n de corps interprétables $K_1, \ldots, K_n$. Alors G est définissablement linéaire sur ces mêmes corps $K_1, \ldots, K_n$.*

Démonstration. Si G° est définissablement linéaire sur $K_1, \ldots, K_n$, alors il en est de même du produit en couronne W de G° par G/G°. Maintenant G se plonge dans ce produit en couronne et il reste à vérifier que ce plongement est définissable. Notre preuve de ce fait suit les lignes de celle du théorème 18.9 [**13**, p. 68].

On considère des représentants $g_1, \ldots, g_r$ de chaque classe à droite de G modulo G° et, pour tout $x \in G$ et tout i dans $\{1, \ldots, r\}$, on note $n_i(x)$ l'unique élément de G° tel que $n_i(x)g_ix \in \{g_1, \ldots, g_n\}$. Ensuite, pour tout $x \in G$, on note $\mu(x) = ((n_1(x), \ldots, n_r(x)), xG^\circ)$. Ainsi, μ définit une application *définissable* de G dans W. On vérifie ensuite que μ est bien un morphisme (argument est identique à celui du théorème 18.9 de [**13**, p. 68]). De plus, si x est dans le noyau de μ, alors la dernière coordonnée de $\mu(x)$ montre que $x \in G^\circ$. Comme $g_1x \in \{g_1, \ldots, g_n\}$, on obtient $g_1x = g_1$ et $x = 1$, d'où l'injectivité de μ. On a donc obtenu un plongement définissable de G dans W. □

Le résultat suivant montre en particulier que, s'il existe un groupe simple et définissablement linéaire qui n'est pas algébrique, alors il existe un *mauvais groupe* définissablement linéaire (on rappelle qu'un mauvais groupe est un groupe connexe non résoluble de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres définissables et connexes sont nilpotents).

Fait 4.4 (Poizat [24]). *Soient K un corps de rang de Morley fini et G un sous-groupe simple et définissable de $\mathrm{GL}_n(K)$ pour un entier naturel n. Si G n'est pas définissablement isomorphe à un groupe algébrique, alors la caractéristique de K est nulle, G ne contient que des éléments semi-simples, et tous ses sous-groupes résolubles sont commutatifs-par-finis.*

Signalons aussi qu'il est montré dans [**22**] que $\mathrm{PSL}_2(K)$ et $\mathrm{GL}_2(K)$ ne contiennent pas de mauvais groupe (sans hypothèse de définissabilité), quel que soit le corps algébriquement clos K.

Remarque 4.5. Dire qu'un groupe simple G de rang de Morley fini est définissablement linéaire est équivalent à dire qu'il est définissablement isomorphe à un sous-groupe définissable de $\mathrm{GL}_n(K)$ pour un entier naturel n et un corps K interprétable.

En effet, si G est définissablement linéaire, alors il est définissablement isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n_1}(K_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(K_k)$ pour des corps interprétables $K_1, \ldots, K_k$ et des entiers naturels $n_1, \ldots, n_k$. Comme G est simple, il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que la projection canonique p_i de G sur $\mathrm{GL}_{n_i}(K_i)$ est un isomorphisme, ce qui prouve la première implication. La réciproque est vraie par définition d'un groupe définissablement linéaire.

L'analyse des *K-groupes*, c'est-à-dire des groupes de rang de Morley fini dont toutes les sections infinies définissables et simples sont des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos, est naturelle et cruciale pour la conjecture de Cherlin–Zil'ber. Dans notre contexte, il serait très intéressant d'avoir un analogue aux K-groupes. Le problème est qu'un groupe de rang de Morley fini dans lequel toutes les sections définissables et géométriques sont définissablement linéaires pourrait admettre, *a priori*, une section définissable simple et non géométrique, sur laquelle il semble très difficile de dire quoi que ce soit.

En fait, pour obtenir des informations, la façon la plus intéressante d'aborder la conjecture 1.3 est de la considérer avec la conjecture 4.1. En s'y prenant ainsi, nous montrons que la conjecture 1.3 est plus forte que la conjecture 4.1. Ensuite nous obtenons des informations concernant la structure d'un analogue à un K-groupe dans le contexte de la conjecture 1.3 (corollaire 4.20).

Nous prouvons d'abord le résultat de structure ci-dessous, pour lequel des formes analogues sont connues dans le contexte des K-groupes [**1**] ainsi que dans celui des groupes définissablement linéaires sur un seul corps [**21**, Théorèmes 2.6 et 2.9]. Tenant compte des résultats de [**15**], nous apportons toutefois une précision par rapport aux résultats antérieurs.

On rappelle que, pour tout groupe G de rang de Morley fini, la *radical résoluble* $\sigma(G)$ de G, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par ses sous-groupes normaux et résolubles, est résoluble et définissable [**5**] (voir aussi [**6**, Theorem 7.3, p. 112]). Aussi, on rappelle la définition des *U-groupes*, lesquels sont définis et étudiés dans [**15**]. Il s'agit d'un analogue aux groupes algébriques unipotents. Leur définition nécessite les notions de groupes *indécomposables* et de *$U_{0,r}$-groupes*, introduites dans [**8**].

Définition 4.6. Un groupe connexe et abélien A de rang de Morley fini est *indécomposable* s'il n'est pas la somme de deux sous-groupes définissables propres A_1 et A_2 (avec $A_1 \cap A_2$ pas nécessairement trivial). Si $A \neq 1$, alors A a un unique sous-groupe propre définissable connexe maximal $J(A)$. Si $A = 1$, on note $J(1) = 1$.

Pour tout entier $r > 0$, on dit qu'un groupe G de rang de Morley fini est un *$U_{0,r}$-groupe* s'il est engendré par ses sous-groupes indécomposables A tels que $A/J(A)$ est un groupe sans torsion de rang de Morley r. De plus, on dit que le $U_{0,r}$-groupe G est *homogène* si ses sous-groupes définissables et connexes sont tous des $U_{0,r}$-groupes.

Un groupe G de rang de Morley fini est un *U-groupe* s'il est engendré par ses $U_{0,r}$-sous-groupes homogènes normaux, où r parcourt les entiers strictement positifs, et par ses sous-groupes normaux définissables connexes d'exposant borné.

Notons que, d'après la proposition 5.3 de [**15**], tout U-groupe résoluble est nilpotent.

Proposition 4.7. *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors $G = LR$ pour deux sous-groupes caractéristiques définissables connexes L et R de G tels que :*

- *$\sigma(L)^\circ$ est un U-groupe et L est un K-groupe parfait ;*
- *tout sous-groupe normal définissable connexe et non résoluble de R a une section définissable simple normale non algébrique.*

De plus, cette décomposition est unique et $L \cap R$ est résoluble.

Démonstration. On peut supposer G non résoluble. Alors, par les lemmes 7.9 et 7.10 et le théorème 7.13 de [**6**, pp. 117–120], si $\bar{S} = S/\sigma(G)$ est le sous-groupe de $\bar{G} = G/\sigma(G)$

engendré par les sous-groupes simples normaux, ce sous-groupe $\bar{S}$ est un produit direct de sous-groupes simples définissables infinis, et son centralisateur est trivial. On note $\bar{A} = A/\sigma(G)$ le produit direct des sous-groupes de $\bar{S}$ normaux dans $\bar{G}$, qui sont définissables, simples, infinis et algébriques sur un corps algébriquement clos. Comme G est connexe, le théorème 8.4 de [**6**] montre que les automorphismes de $\bar{A}$ induits par les éléments de $\bar{G}$ sont les automorphismes intérieurs de $\bar{A}$, donc $\bar{G} = \bar{A} \times C_{\bar{G}}(\bar{A})$. On note alors $L = A^{(\infty)}$, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe parfait de A, et R la composante connexe du sous-groupe C de G tel que $C/\sigma(G) = C_{\bar{G}}(\bar{A})$. Ainsi, on a bien $G = LR$ avec L et R caractéristiques et définissables dans G. De plus L est bien un K-groupe parfait et R est bien connexe. Aussi L est connexe puisque G, qui est connexe, centralise A/A° et A/A° est donc abélien, d'où $L = (A^\circ)^{(\infty)}$ et la connexité de L.

Soit N un sous-groupe normal définissable connexe et non résoluble de R. Montrons que N a une section définissable simple normale non algébrique. Par les lemmes 7.9 et 7.10 de [**6**, pp. 117–118], on peut supposer $N/\sigma(N)$ simple et, alors, $N\sigma(R)/\sigma(R)$ est un des membres de la famille finie des sous-groupes normaux définissable simples et infinis de $R/\sigma(R)$. On en déduit que $N\sigma(R)$ est normal dans G et que $N\sigma(G)/\sigma(G)$ est un sous-groupe simple définissable normal et infini de $G/\sigma(G)$. Comme on a $N \leqslant R$, on a $N \nleqslant A$ et $N/(N \cap \sigma(G))$ n'est donc pas algébrique.

Comme l'unicité de la décomposition $G = LR$ et la résolubilité de $L \cap R$ sont réalisées par construction, il ne reste plus qu'à montrer que $\sigma(L)^\circ$ est un U-groupe. Pour cela on note $U = [L, \sigma(L)^\circ]$, qui est un U-groupe d'après le théorème 6.10 de [**15**]. Alors, comme L centralise $\sigma(L)/\sigma(L)^\circ$ puisque L est connexe, on en déduit que L centralise $\sigma(L)/U$. Comme L/U est parfait et comme $L/\sigma(L) \cong \bar{A}$ est un produit direct de sous-groupes définissables, infinis, simples et algébriques sur un corps algébriquement clos, le groupe L/U est un produit central de K-groupes quasi-simples. Le théorème principal de [**2**] montre qu'alors L/U est un produit central de groupes quasi-simples ayant un centre fini, donc L/U a un centre fini et $\sigma(L)^\circ = U$ est bien un U-groupe. □

Question 4.8. Si G est un groupe connexe et parfait de rang de Morley fini, dans lequel toutes les sections simples et définissables sont définissablement linéaires, est-ce que $\sigma(G)^\circ$ est abélien ?

Nous devons maintenant étudier les *sous-groupes de Carter* (définition 1.7). En effet, ces sous-groupes correspondent aux sous-groupes de Cartan des groupes algébriques affines (remarque 1.8), et nous avons vu l'utilité de ces derniers pour l'étude des groupes algébriques géométriques.

Remarque 4.9. La proposition 4.11 est énoncée pour les groupes G de rang de Morley fini tels que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. Notons que cette hypothèse est notamment vérifiée :

(i) par les K-groupes [**1**] ;

(ii) par les groupes définissablement linéaires (le lemme 2.4 de [**21**] donne le résultat pour G définissablement linéaire sur un seul corps K, mais le raisonnement s'étend facilement au cas général).

Le lemme ci-dessous complète la remarque précédente.

Lemme 4.10. *Si H est un sous-groupe définissable d'un groupe G de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors $H/\sigma(H)$ est aussi définissablement linéaire.*

Démonstration. En effet, $H/(H \cap \sigma(G))$ est définissablement linéaire, et on peut supposer que c'est un sous-groupe définissable de $\bigtimes_{i=1}^{n} GL_i(K_i)$ pour des corps interprétables $K_1, \ldots, K_n$. En notant $p_1, \ldots, p_n$ les projections canoniques de $H/(H \cap \sigma(G))$ sur $\mathrm{GL}_1(K_1), \ldots, \mathrm{GL}_n(K_n)$ respectivement, et $\sigma_i = \sigma(\operatorname{Im} p_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on obtient un plongement définissable de $H/\sigma(H)$ dans le groupe $\bigtimes_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i/\sigma_i$, et le quotient $H/\sigma(H)$ est donc définissablement linéaire. $\square$

Proposition 4.11. *Dans tout groupe G de rang de Morley fini, si $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors les sous-groupes de Carter sont conjugués et ils constituent une famille géométrique de sous-groupes de G.*

Démonstration. D'après le théorème principal de [**19**], il suffit de montrer que, si C est un sous-groupe de Carter quelconque de G, alors l'union des conjugués de C est générique dans G. On le prouve par induction sur le rang de G. On peut supposer G connexe. Si G est résoluble, alors le lemme 3.5 de [**11**] montre que l'union des conjugués de C est générique dans G, donc on peut supposer G non résoluble.

Par hypothèse d'induction, l'union des conjugués de C dans $C\sigma(G)$ est générique dans $C\sigma(G)$, donc l'union des conjugués de C dans $C\sigma(G)^\circ$ est générique dans $C\sigma(G)^\circ$. Le théorème principal de [**19**] et un argument de Frattini montrent que $C\sigma(G)/\sigma(G)$ est un sous-groupe de Carter de $G/\sigma(G)$. Si l'union des conjugués de $C\sigma(G)/\sigma(G)$ est générique dans $G/\sigma(G)$, alors l'union des conjugués de $C\sigma(G)^\circ/\sigma(G)^\circ$ l'est aussi dans $G/\sigma(G)^\circ$, et le lemme 3.4 de [**19**] montre que l'union des conjugués de C est générique dans G. On peut donc supposer que l'union des conjugués de $C\sigma(G)/\sigma(G)$ dans $G/\sigma(G)$ n'est pas générique dans $G/\sigma(G)$. Ceci permet de supposer $\sigma(G) = 1$ et G définissablement linéaire.

Alors on peut supposer que G est un sous-groupe d'un produit direct de groupes de la forme $\mathrm{GL}_n(K)$ pour des entiers naturels n non nuls et des corps algébriquement clos interprétables K. Il existe donc une famille finie $p_1, \ldots, p_m$ de projections de G sur ces groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ telle que $\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(p_i)$ est triviale. On note $G_1, \ldots, G_m$ les images des projections p_i. Comme G est connexe, les groupes $G_1, \ldots, G_m$ sont tous connexes. Aussi, comme G n'est pas résoluble, il existe j tel que G_j n'est pas résoluble. On note $H = G \cap (\bigtimes_{i \neq j} G_i)$. Alors G/H est définissablement isomorphe à G_j, en particulier on a $\mathrm{rk}(G) > \mathrm{rk}(CH)$. L'argument du paragraphe précédent appliqué à G/H au lieu de $G/\sigma(G)$ permet de supposer $H = 1$. Comme $G/H \cong G_j$, ceci signifie qu'on peut supposer $G = G_j$ définissablement linéaire sur un seul corps K.

Maintenant, si K est de caractéristique non nulle, le théorème 2.6 de [**21**] montre que G est un groupe algébrique affine sur K donc, d'après la remarque 1.8, ses sous-groupes de Carter sont de Cartan et ils sont conjugués. Alors l'exemple 1.9 (ii) donne le résultat. Si K est de caractéristique nulle, le théorème 2.9 de [**21**] permet de décomposer $G = L \times A$

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

sous la forme d'un produit direct d'un groupe L définissable et sans unipotent et d'un groupe algébrique affine A. Alors C est le produit direct d'un sous-groupe de Carter D de L et d'un sous-groupe de Carter E de A. Or la remarque 1.8 montre que E est un sous-groupe de Cartan de A et l'exemple 1.9 (ii) dit que l'union des conjugués de E est générique dans A. De plus l'argument de la proposition 2.10 de [**21**] donne le même résultat pour D dans L, d'où la généricité de l'union des conjugués de C dans G, ce qui finit la preuve. □

Dans les groupes algébriques affines connexes, les sous-groupes de Cartan sont des sous-groupes nilpotents maximaux [**18**, Exercice 6, p. 142]. Nous généralisons ici ce résultat aux sous-groupes de Carter de certains groupes connexes de rang de Morley fini.

Corollaire 4.12. *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $G/\sigma(G)$ est déflinissablement linéaire, alors les sous-groupes de Carter de G sont des sous-groupes nilpotents maximaux de G.*

Démonstration. Nous le prouvons par induction sur le rang de Morley de G. Soient C un sous-groupe de Carter de G, N un sous-groupe nilpotent contenant C et A un sous-groupe G-minimal de G. Montrons que C contient N. La proposition 4.11 et un argument de Frattini montre que CA/A est un sous-groupe de Carter de G/A. Par hypothèse d'induction appliquée à G/A, N est contenu dans CA. Si $G \neq CA$, l'hypothèse d'induction appliquée à CA montre que C est un sous-groupe nilpotent maximal de CA. Comme N est un sous-groupe nilpotent de CA contenant C, on obtient $N = C$, donc on peut supposer $G = CA$. Si A est abélien, alors CA est résoluble et connexe et le théorème 1.2 de [**14**] montre que C est autonormalizant dans CA. On a donc $N \leqslant C$, ce qui permet supposer que G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien. En particulier $\sigma(G)$ est supposé fini et la proposition 7.7 de [**6**, p. 114] dit que A est quasi-simple et $A/Z(A)$ est simple.

Si $A/Z(A)$ est algébrique, le théorème 8.4 de [**6**] dit que G est le produit central de $C_G(A/Z(A))$ par A. Comme $G = CA$, le centralisateur de $A/Z(A)$ dans G est nilpotent. Comme G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien et comme $C_G(A/Z(A))$ est normal dans G, on en déduit que $C_G(A/Z(A))$ est fini, d'où $G = A$ et G est un groupe algébrique d'après [**2**]. On en déduit que C est autonormalizant dans G [**18**, Exercice 6, p. 142] et que C contient N. Ainsi on peut supposer $A/Z(A)$ non algébrique.

Comme $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire et comme A est quasi-simple, il existe un corps interprétable K, un entier n et un morphisme définissable ρ de G dans $\mathrm{GL}_n(K)$ tel que A ne soit pas contenu dans $\operatorname{Ker}\rho$. Comme $A/Z(A)$ est simple, ce groupe $A/Z(A)$ est définissablement linéaire sur K, et comme $A/Z(A)$ n'est pas algébrique, le fait 4.4 dit que la caractéristique de K est nulle. En particulier, $G/\operatorname{Ker}\rho$ n'a pas de sous-groupe de torsion infini d'exposant borné. Si $\operatorname{Ker}\rho$ était infini, alors il contiendrait un sous-groupe G-minimal $A_1 \neq A$ car $A \nleqslant \operatorname{Ker}\rho$, et A_1 serait abélien puisque G/A est nilpotent. Comme G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien, on en déduit que $\operatorname{Ker}\rho$ est fini. Par conséquent G n'a pas de sous-groupe de torsion infini d'exposant borné.

Soient p un entier premier et x un p-élément de N. Par le paragraphe précédent et le théorème 3 de [**9**], l'élément x est contenu dans un tore décent maximal T de G. Aussi, d'après le corollaire 6.12 de [**6**], le tore décent maximal R de C est centralisé par x. D'après [**17**] et par conjugaison des sous-groupes de Carter de G (proposition 4.11), le tore décent R est maximal dans G. On en déduit que T et R sont des tores décents maximaux de $C_G(x)$, et ils sont donc conjugués dans $C_G(x)$ d'après [**10**]. Comme $x \in T$, on en déduit $x \in R \leqslant C$. Ceci prouve que C contient tous les éléments d'ordre fini de N.

Supposons $C \neq N$. Alors, comme N est nilpotent, on a $C < N_N(C)$. Or le paragraphe précédent dit que C contient tous les éléments d'ordre fini de N, donc $N_N(C)/C$ est sans torsion. Comme $C < N_N(C)$, on en déduit que C est d'indice infini dans N, ce qui contredit $C = N_G(C)^\circ$. Ceci prouve que $C = N$. □

Le prochain résultat concerne l'hypercentre. Il est très naturel, et la preuve n'est pourtant pas trivial. La première raison est que, s'il est facile de voir que la composante connexe de l'hypercentre est contenu dans tous les sous-groupes de Carter, il est moins trivial de voir que l'hypercentre est entièrement contenu dans tous les sous-groupes de Carter. La seconde raison est que, dans un groupe connexe G de rang de Morley fini, si on considère un sous-groupe G-minimal A contenu dans tous les sous-groupes de Carter de G, alors ce sous-groupe A n'a, a priori, aucune raison d'être central dans les sous-groupes de Carter de G.

Théorème 4.13. *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors l'intersection des sous-groupes de Carter de G est égale à l'hypercentre de G.*

Démonstration. On note U l'intersection des sous-groupes de Carter de G et Z l'hypercentre de G.

Montrons que U contient Z. Soit C un sous-groupe de Carter de G. Pour tout ordinal γ, si C contient $Z_\gamma(G)$, alors $CZ_{\gamma+1}(G)$ est un groupe nilpotent contenant C. Le corollaire 4.12 donne $Z_{\gamma+1}(G) \leqslant C$. Ceci prouve que C contient tous les termes de la série centrale ascendante de G. Ainsi C, et par conséquent aussi U, contient Z.

Montrons maintenant que Z contient U. On suppose le contraire. D'après le corollaire 3.15 de [**23**, p. 89], il existe un entier n tel que $Z = Z_n(G)$, en particulier Z est définissable. Ainsi, comme U contient Z, quitte à quotienter G par Z, on peut supposer Z trivial. Comme G est connexe, on en déduit que G n'a pas de sous-groupe fini non trivial normal. En particulier U est infini et U contient un sous-groupe G-minimal A, lequel est nécessairement abélien puisque contenu dans tout sous-groupe de Carter. Comme $Z = 1$, le sous-groupe A n'est pas central dans G et $G/C_G(A)$ a un sous-groupe G-minimal $\bar{B} = B/C_G(A)$. Supposons d'abord $\bar{B}$ abélien. Soient C un sous-groupe de Carter de G et $\bar{H} = A \rtimes CB/C_G(A)$. La proposition 4.11 et un argument de Frattini montrent que $CC_G(A)/C_G(A)$ est un sous-groupe de Carter de $CB/C_G(A)$, donc comme A est contenu dans C, le sous-groupe $\overline{AC} = A \rtimes CC_G(A)/C_G(A)$ est un sous-groupe de Carter de $\bar{H}$. Or $\bar{H}$ est résoluble, donc $\bar{H}/F(\bar{H})$ est abélien [**6**, Théorème 9.21, p. 155] et $\bar{H} = F(\bar{H})\overline{AC}$ [**14**, Corollaire 5.20]. Ainsi, si A_0 est un sous-groupe $\bar{H}$-minimal de A, alors A_0 est central dans $F(\bar{H})$ et c'est un sous-groupe normal, et central par $\bar{H}$-minimalité, de $\overline{AC}$, donc A_0 est central dans $\bar{H}$. Ceci montre que $C_A(B)$ est infini, donc B centralise

A par G-minimalité de A, ce qui contredit le fait que $\bar{B}$ soit infini. La proposition 7.7 de [**6**, p. 114] dit qu'alors $\bar{B}$ a un centre fini et que $\bar{B}/Z(\bar{B})$ est simple.

Si T est un sous-groupe abélien divisible de torsion de G, alors T est contenu dans un sous-groupe de Carter C de G d'après [**17**] et T est central dans C [**6**, corollaire 6.12, p. 102], en particulier T centralise A. Ceci prouve que $G/C_G(A)$ n'a pas de sous-groupe de torsion divisible abélien non trivial. En conséquence A n'est pas d'exposant borné. En effet, supposons A d'exposant borné et fixons $\bar{W}$ un sous-groupe infini définissable minimal de $\bar{B}$. Alors, d'après le théorème 6.4 de [**6**], $\bar{W}$ est abélien et il est soit divisible, soit d'exposant borné. Si $\bar{A}_1$ est une section $\bar{W}$-minimal de A alors, d'après [**26**] et comme $G/C_G(A)$ n'a pas de sous-groupe de torsion divisible abélien non trivial, $\bar{W}$ centralise $\bar{A}_1$, en particulier le groupe $A \rtimes \bar{W}$ est nilpotent (où $\bar{W}$ agit sur A par conjugaison). Ainsi, si $\bar{W}$ est divisible, alors $\bar{W}$ centralise A ce qui contredit le choix de $\bar{W}$, donc $\bar{W}$ est d'exposant borné. On a montré que $\bar{B}/Z(\bar{B})$ est un groupe simple, et définissablement linéaire sur un seul corps K (remarque 4.5 et lemme 4.10), avec un sous-groupe abélien infini d'exposant borné, donc le corps de base K est de caractéristique non nulle et $\bar{B}/Z(\bar{B})$ est algébrique (fait 4.4). Ceci contredit le fait que $G/C_G(A)$ n'a pas de sous-groupe de torsion divisible abélien non trivial, et on a prouvé que A n'est pas d'exposant borné.

Comme A n'est pas d'exposant borné, alors A est divisible et, d'après le théorème A.20 de [**6**, p. 343] (c'est-à-dire le théorème principal de [**20**]), il y a un corps interprétable K, de caractéristique nulle, tel que $G/C_G(A)$ est définissablement linéaire sur K, en particulier $G/C_G(A)$ n'a pas de sous-groupe infini d'exposant borné. Comme $G/C_G(A)$ n'a pas de sous-groupe de torsion divisible abélien non trivial, ses p-sous-groupes sont finis pour tout entier premier p et le théorème 3 de [**7**] dit que $G/C_G(A)$ est sans torsion. Comme le paragraphe précédent montre en particulier que $\sigma(G/C_G(A))$ est fini, on en déduit que $\sigma(G/C_G(A))$ est trivial. Soit $L = A \rtimes G/C_G(A)$ où $G/C_G(A)$ agit par conjugaison sur A. Le théorème principal de [**20**] permet de supposer que L est un sous-groupe définissable de $K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$, pour un entier n tel que $A \cong K^n$. On fixe C un sous-groupe de Carter de G et on note $\bar{C} = A \rtimes CC_G(A)/C_G(A)$ son image dans L. Si $\bar{C}_s$ désigne l'ensemble des éléments semi-simples de $\bar{C}$, alors $\bar{C}_s$ centralise A et intersecte trivialement A, donc $\bar{C}_s$ est trivial et $\bar{C}$ est unipotent. Le théorème 2.9 de [**21**] dit que, comme $G/C_G(A)$ est sans torsion et comme $\sigma(G/C_G(A))$ est trivial, $G/C_G(A)$ est sans unipotents, donc $\bar{C} = A$. Comme $N_L(\bar{C})^\circ = \bar{C}$, on en déduit que $L = A$ et G centralise A, d'où $A \leqslant Z$, ce qui contredit $Z = 1$ et finit la preuve. □

Corollaire 4.14. *Si G est un groupe de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors l'hypercentre de G° contient* $\mathrm{In}(G)$.

En particulier, tout groupe de rang de Morley fini connexe, sans centre et tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, est géométrique.

Démonstration. D'aprés la proposition 4.11, les sous-groupes de Carter forment une famille géométrique de sous-groupes de G. On en déduit qu'il existe un sous-groupe de Carter contenant $\mathrm{In}(G)$ (proposition 2.8). Par conjugaison des sous-groupes de Carter

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

dans G (proposition 4.11) et comme $\mathrm{In}(G)$ est normal dans G (proposition 2.6), tous les sous-groupes de Carter contiennent $\mathrm{In}(G)$, et le théorème 4.13 permet de conclure. $\square$

D'après la remarque 4.9 (i), on peut appliquer le corollaire 4.14 aux K-groupes, d'où le résultat ci-dessous.

Corollaire 4.15. *Tout K-groupe connexe sans centre est géométrique.*

Le résultat final de cette section montre que la conjecture 1.3 est plus forte que la conjecture 4.1. Sa preuve nécessite deux lemmes.

Lemme 4.16. *Si G est un groupe de rang de Morley fini résiduellement définissablement linéaire, alors G est définissablement linéaire.*

Démonstration. Le groupe G étant résiduellement définissablement linéaire, G a une famille de sous-groupes définissables normaux $(A_i)_i$ telle que G/A_i est définissablement linéaire pour tout i et $\bigcap_i A_i = 1$. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G de [**6**, Théorème 5.2, p. 70], on peut supposer la famille $(A_i)_i$ finie. Alors les surjections canoniques de G dans G/A_i pour chaque i fournissent un morphisme définissable injectif ρ de G dans le produit direct $\bigtimes_i G/A_i$. Comme $\bigtimes_i G/A_i$ est définissablement linéaire, G est aussi définissablement linéaire. $\square$

Lemme 4.17. *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. On suppose $G/\sigma(G)$ définissablement linéaire et G sans tore décent non trivial. Alors l'ensemble B des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe normal nilpotent définissable connexe et d'exposant borné, et $G = BC_G(B)$.*

En particulier, pour tout entier premier p, G a un unique p-sous-groupe de Sylow S_p, qui est unipotent. De plus, si S_p est infini, alors $Z(G) \cap S_p$ est infini.

Démonstration. Montrons que $G/\sigma(G)$ est sans torsion et que $\sigma(G)$ est connexe. On peut supposer $G \neq \sigma(G)$. Comme $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, la remarque 1.2 donne l'existence d'un entier naturel $n \geqslant 1$, qu'on suppose minimal, d'entiers naturels $m_1, \ldots, m_n$, de corps interprétables $K_1, \ldots, K_n$ et d'un isomorphisme définissable f entre $G/\sigma(G)$ et un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{m_1}(K_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_n}(K_n)$. Par minimalité de n, il n'existe aucun $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la projection canonique ρ_j de $f(G/\sigma(G))$ sur $\bigtimes_{i \neq j} \mathrm{GL}_{m_i}(K_i)$ soit un isomorphisme, autrement dit le sous-groupe $f(G/\sigma(G)) \cap \mathrm{GL}_{m_j}(K_j)$ est non trivial pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Montrons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la caractéristique de K_i est nulle. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On note $L_i/\sigma(G) = f^{-1}(f(G/\sigma(G)) \cap \mathrm{GL}_{m_i}(K_i))$ et $\bar{L}_i = (L_i/\sigma(G))^\circ$. Alors $L_i/\sigma(G)$ et $\bar{L}_i$ sont des sous-groupes définissables et normaux de $G/\sigma(G)$. Si $L_i/\sigma(G)$ est fini, alors il est centralisé par G puisque G est connexe et normalize L_i, en particulier $L_i/\sigma(G)$ est abélien et L_i est résoluble. Comme L_i est normal dans G, ceci donne $L_i \leqslant \sigma(G)$ et $L_i/\sigma(G) = 1$, et contredit $f(G/\sigma(G)) \cap \mathrm{GL}_{m_i}(K_i) \neq 1$. Ainsi $L_i/\sigma(G)$ est infini et $\bar{L}_i$ est donc non trivial. Considérons $V/\sigma(G) = \sigma(\bar{L}_i)$. Comme c'est un sous-groupe résoluble et comme $\sigma(G)$ est résoluble, V est résoluble. De plus, comme $\sigma(\bar{L}_i)$ est un sous-groupe résoluble et caractéristique de $\bar{L}_i$ et comme $\bar{L}_i$ est normal dans $G/\sigma(G)$,

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

le sous-groupe V est normal dans G, d'où $V \leqslant \sigma(G)$ et $\sigma(\bar{L}_i) = 1$. Maintenant, si la caractéristique de K_i est non nulle, alors le théorème 2.6 de [**21**] dit que $\bar{L}_i$ est isomorphe à un produit de groupes simples algébriques sur K_i, en particulier $\bar{L}_i$ contient un tore décent non trivial, donc L_i et G aussi, ce qui contredit l'hypothèse sur G. On en déduit que la caractéristique de K_i est nulle pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Soient p un entier premier et $R/\sigma(G)$ un p-sous-groupe de Sylow de $G/\sigma(G)$. Comme G n'a pas de tore décent non trivial, les résultats 6.18 et 6.19 de [**6**, p. 105] montrent que $R/\sigma(G)$ est d'exposant borné. Comme la caractéristique de K_i est nulle pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'existence de l'isomorphisme f implique que $G/\sigma(G)$ n'a pas de sous-groupe infini d'exposant borné, ce qui implique que $R/\sigma(G)$ est fini. Ceci prouve que tous les p-sous-groupes de Sylow de $G/\sigma(G)$ sont finis, et le théorème 3 de [**7**] montre que $G/\sigma(G)$ n'a pas de p-élément non trivial. Comme ceci est vrai pour tous les entiers premiers, $G/\sigma(G)$ est sans torsion. En particulier tous les éléments d'ordre fini de $G/\sigma(G)^\circ$ sont contenus dans $\sigma(G)/\sigma(G)^\circ$, et ils sont donc en nombre fini, et $G/\sigma(G)^\circ$ est sans torsion [**7**, Théorème 3]. Ceci prouve que $\sigma(G)/\sigma(G)^\circ = 1$, d'où la connexité de $\sigma(G)$.

D'après le théorème 9.21 de [**6**], $\sigma(G)$ a un sous-groupe normal nilpotent définissable et connexe F tel que $\sigma(G)/F$ est divisible et abélien. Ainsi, si $\sigma(G)/F$ a un élément non trivial d'ordre fini, alors $\sigma(G)/F$ a un tore décent non trivial, donc $\sigma(G)$ et G aussi, ce qui contredit l'hypothèse. On a montré que $\sigma(G)/F$ est sans torsion, donc F contient toute la torsion de G. Comme G n'a pas de tore décent non trivial et comme F est connexe, le corollaire 6.12 de [**6**] dit que B est un sous-groupe définissable connexe et d'exposant borné. Comme $B \leqslant F$ et comme F est nilpotent, B est nilpotent. De plus, comme B est l'ensemble des éléments d'ordre fini de G, le sous-groupe B est normal dans G.

Pour tout entier premier p, comme B est un sous-groupe connexe définissable et nilpotent, G a un unique p-sous-groupe de Sylow S_p, qui est unipotent.

Il reste à montrer que $G = BC_G(B)$ et que $Z(G) \cap S_p$ est infini pour tout entier premier p tel que S_p est infini. Soit $x \in G \setminus B$. Comme G/B est sans torsion, il y a un sous-groupe abélien définissable et sans torsion W/B de G/B tel que $x \in W$. Alors W est un sous-groupe résoluble définissable et connexe. Soit U/V une section W-minimale de B. Le théorème 9.1 de [**6**, p. 141] et le principal résultat de [**26**] montrent que $W/C_W(U/V)$ est un tore décent. Comme G n'a pas de tore décent non trivial, on obtient $W/C_W(U/V) = 1$ et U/V est centralisée par W. Maintenant, on considère un entier k et une suite croissante $(B_i)_{i=0,\ldots,k}$ de sous-groupes de B normaux dans W, telle que $B_0 = 1$, $B_k = B$, et B_{i+1}/B_i est W-minimale pour tout i. Ce qui précède prouve que W centralise B_{i+1}/B_i pour tout i, donc B est contenu dans $Z_k(W)$, et comme W/B est abélien, on obtient la nilpotence de W. Désormais, le théorème 6.8 de [**6**, p. 99] donne $W = BC_W(B)$ et $x \in BC_G(B)$, d'où $G = BC_G(B)$. En particulier, pour tout entier premier p tel que S_p est infini, on obtient $Z(S_p) \leqslant Z(G) \cap S_p$ et, comme $Z(S_p)$ est infini [**6**, Corollaire 6.20 (iii), p. 106], on a le résultat. □

Théorème 4.18. *Si la conjecture 1.3 est vraie, alors la conjecture 4.1 est aussi vraie.*

Plus précisément, si G est un groupe connexe de rang de Morley fini tel que $\mathrm{In}(G)$ *n'est pas hypercentral, alors G a une section définissable et géométrique H/K telle que :*

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

- *$(H/K)/\sigma(H/K)$ n'est pas définissablement linéaire ;*
- *pour toute section définissable et connexe $\bar{L}$ de H/K, le sous-groupe $\mathrm{In}(\bar{L})$ est hypercentral dans $\bar{L}$.*

Démonstration. On procède par contradiction, et on considère un contre-exemple G de rang minimal. En particulier, G est un groupe connexe de rang de Morley fini, dans lequel $\mathrm{In}(G)$ n'est pas hypercentral, et tel que, pour toute section définissable et connexe $\bar{G}_1$ de G telle que $\mathrm{rk}(\bar{G}_1) < \mathrm{rk}(G)$, on a $\mathrm{In}(\bar{G}_1)$ hypercentral dans $\bar{G}_1$.

Montrons que,

pour toute section définissable et connexe U/V de G,
si $\mathrm{rk}(U/V) < \mathrm{rk}(G)$, alors $(U/V)/\sigma(U/V)$ est définissablement linéaire. $(*)$

Comme on a $\mathrm{rk}(U/V) < \mathrm{rk}(G)$, alors, pour toute section définissable et connexe $\bar{L}$ de U/V on a $\mathrm{rk}(\bar{L}) < \mathrm{rk}(G)$, et $\mathrm{In}(\bar{L})$ est hypercentral dans $\bar{L}$ d'après le paragraphe précédent. On considère $I/V = \mathrm{In}(U/V)$. Alors la section $U/I \cong (U/V)/\mathrm{In}(U/V)$ est géométrique (corollaire 2.9) donc, si $(U/I)/\sigma(U/I)$ n'est pas définissablement linéaire, $H/K = U/I$ contredit le choix de G. Ainsi $(U/I)/\sigma(U/I)$ est définissablement linéaire. Or, d'après le paragraphe précédent, $I/V = \mathrm{In}(U/V)$ est hypercentral dans U/V donc, comme la remarque 3.9 dit que $Z_\infty(U/V)$ est nilpotent, on en déduit que I/V est contenu dans $\sigma(U/V)$. Par conséquent on obtient $\sigma((U/V)/(I/V)) = \sigma(U/V)/(I/V)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}(U/I)/\sigma(U/I) &\cong ((U/V)/(I/V))/\sigma((U/V)/(I/V)) \\ &= ((U/V)/(I/V))/(\sigma(U/V)/(I/V)) \\ &\cong (U/V)/\sigma(U/V).\end{aligned}$$

Ainsi $(U/V)/\sigma(U/V)$ est définissablement linéaire.

Supposons que G a un sous-groupe G-minimal A abélien. On considère $J/A = \mathrm{In}(G/A)$, Comme le premier paragraphe dit que $J/A = \mathrm{In}(G/A)$ est hypercentral dans G/A, la remarque 3.9 dit que J/A est nilpotent et, comme A est abélien, J est résoluble. On a montré que J est contenu dans $\sigma(G)$, donc $G/\sigma(G)$ est définissablement isomorphe à $(G/J)/\sigma(G/J)$. Or, d'après $(*)$, la section $(G/J)/\sigma(G/J)$ est définissablement linéaire, donc $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. Maintenant le corollaire 4.14 dit que $\mathrm{In}(G)$ est hypercentral dans G, ce qui contredit notre hypothèse sur G. Ceci prouve que G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien. En particulier $\sigma(G)$ est fini, donc $Z_2(G)$ est fini et central dans G puisque G est connexe, ce qui montre que $Z(G)$ est fini et que $Z(G/Z(G)) = 1$.

Supposons que $G/Z(G)$ est géométrique et que $(G/Z(G))/\sigma(G/Z(G))$ n'est pas définissablement linéaire. Alors on a $\mathrm{In}(G/Z(G)) = 1$, en particulier $\mathrm{In}(G/Z(G))$ est hypercentral dans $G/Z(G)$. Aussi, comme $Z(G/Z(G)) = 1$ et comme G est connexe, $G/Z(G)$ n'a pas de sous-groupe normal fini, et toutes ses sections définissables connexes et propres U/V sont donc de rang strictement infèrieur à $\mathrm{rk}(G/Z(G))$ et, d'après le premier paragraphe, on a $\mathrm{In}(U/V) \leqslant Z_\infty(U/V)$. Ceci montre qu'en prenant $H/K = G/Z(G)$,

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

on obtient une contradiction. Ainsi, soit $G/Z(G)$ n'est pas géométrique, soit $G/Z(G)$ est géométrique et $(G/Z(G))/\sigma(G/Z(G))$ définissablement linéaire.

Si $G/Z(G)$ est géométrique et $(G/Z(G))/\sigma(G/Z(G))$ définissablement linéaire, alors $G/\sigma(G) \cong (G/Z(G))/\sigma(G/Z(G))$ est aussi définissablement linéaire, et le corollaire 4.14 donne une contradiction. Ainsi $G/Z(G)$ n'est pas géométrique et, puisque $Z(G/Z(G)) = 1$, l'hypercentre de $G/Z(G)$ ne contient pas $\mathrm{In}(G/Z(G))$. De plus, si $G/Z(G)$ avait un sous-groupe $G/Z(G)$-minimal abélien, ce serait aussi le cas de G. Ceci montre que, quitte à remplacer G par $G/Z(G)$, on peut supposer $Z(G) = 1$.

Montrons que G a un unique sous-groupe G-minimal. Si G a deux sous-groupes G-minimaux A et B distincts, alors $A \cap B$ est fini, donc central dans G puisque G est connexe, d'où $A \cap B = 1$. On note R_A et R_B les préimages de $\sigma(G/A)$ et de $\sigma(G/B)$ respectivement. Comme $G/R_A \cong (G/A)/\sigma(G/A)$ et $G/R_B \cong (G/B)/\sigma(G/B)$ sont des sections définissablement linéaire d'après $(*)$, le lemme 4.16 dit que $G/(R_A \cap R_B)$ est définissablement linéaire. Comme B n'est pas abélien puisque G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien, B est simple [**6**, Proposition 7.7, p. 114], donc $BA/A \cong B$ est un groupe simple. Or $R_A/A = \sigma(G/A)$ est résoluble, donc $(R_A \cap B)A/A = 1$ et $R_A \cap B$ est contenu dans A. Comme $A \cap B = 1$, on obtient $R_A \cap B = 1$, en particulier $R_A \cap R_B$ est isomorphe à $(R_A \cap R_B)B/B \leqslant R_B/B = \sigma(G/B)$, ce qui prouve que $R_A \cap R_B$ est résoluble. Comme G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien, on en déduit que $R_A \cap R_B$ est fini, donc central puisque G est connexe, d'où $R_A \cap R_B = 1$. On a démontré que G est définissablement linéaire. Maintenant la remarque 4.9 (ii) et le corollaire 4.14 disent que $\mathrm{In}(G)$ est hypercentral dans G, ce qui contredit notre hypothèse sur G. Ceci prouve que G a un unique sous-groupe G-minimal A.

D'après la proposition 7.7 de [**6**, p. 114], A est simple. Aussi, $C_G(A)$ ne peut pas être infini, puisque sinon il y aurait un sous-groupe G-minimal $B \neq A$ dans $C_G(A)$. Par conséquent $C_G(A)$ est fini et puisque $Z(G) = 1$, on obtient

$$C_G(A) = 1. \tag{$**$}$$

Comme G n'est pas géométrique, le sous-groupe $\mathrm{In}(G)$ est non trivial. Il ne peut pas être fini puisque $Z(G) = 1$, donc il contient l'unique sous-groupe G-minimal A de G.

Supposons G sans torsion. Pour tout entier i, on considère la famille $\mathscr{F}_i = \{C_G(X) \mid X \subseteq G,\ \mathrm{rk}(C_G(X)) = i\}$. Pour tout i, la famille $\mathscr{F}_i$ est uniformément définissable [**6**, Théorème 5.14, p. 80] et l'ensemble des indices peut-être choisi interprétable. Comme $\mathscr{F}_{\mathrm{rk}(G)} = \{G\}$, il existe un plus petit entier j tel que $\mathrm{rk}(\bigcup \mathscr{F}_j) = \mathrm{rk}(G)$. Cet entier j est non nul puisque G est sans torsion, et toute intersection de $\mathscr{F}_j$-sous-groupes distincts est dans l'une des familles $\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_{j-1}$. Comme, pour tout $i < j$, l'union $\bigcup \mathscr{F}_i$ n'est pas générique dans G par minimalité de j, l'ensemble $\{g \in G \mid \exists! F \in \mathscr{F}_j,\ g \in F\}$ est générique dans G et la remarque 1.6 dit que $\mathscr{F}_j$ est une famille géométrique de sous-groupes de G. Comme $Z(G) = 1$, la famille $\mathscr{G} = \{C_G(x) \mid x \in G \setminus \{1\}\}$ est contenu dans $\bigcup_{i=1}^{\mathrm{rk}(G)-1} \mathscr{F}_i$ et, comme $\bigcup \mathscr{G} = G$, il existe $i \in \{1, \dots, \mathrm{rk}(G)\}$ tel que $\bigcup \mathscr{F}_i$ est générique dans G, d'où $j < \mathrm{rk}(G)$. Or la proposition 2.8 dit qu'il existe un $\mathscr{F}_j$-sous-groupe F contenant $\mathrm{In}(G)$ et on a $F = C_G(X)$ pour une partie X de G. Comme A est contenu dans $\mathrm{In}(G)$, la partie X centralise A, d'où $X \subseteq \{1\}$ et $F = C_G(X) = G$. Ceci contredit $\mathrm{rk}(F) = j < \mathrm{rk}(G)$, donc G n'est pas sans torsion.

Montrons que G n'a pas de tore décent non trivial. Soit T un tore décent maximal de G. On note $C = C_G(T)^\circ$ et $\mathscr{F}$ la famille des conjugués de C. D'après [**10**], la famille $\mathscr{F}$ est géométrique et la proposition 2.8 montre qu'un conjugué de T centralise $\mathrm{In}(G)$. Comme $\mathrm{In}(G)$ contient A et comme $C_G(A) = 1$, on a montré que T est trivial et que G n'a pas de tore décent non trivial.

D'après le théorème 3 de [**7**], il existe un entier premier p tel que G a un p-sous-groupe de Sylow infini. Comme G n'a pas de tore décent non trivial, la proposition 6.18 de [**6**, p. 105] montre que G a un p-sous-groupe unipotent maximal $B \neq 1$. Alors, si on note $M = N_G(B)^\circ$, le sous-groupe B contient un sous-groupe M-minimal abélien, ce qui prouve que $M \neq G$, en particulier $(*)$ dit que $M/\sigma(M)$ est définissablement linéaire. Aussi, le lemme 4.17 montre que B est l'unique p-sous-groupe de Sylow de M.

Montrons que, si B_1 et B_2 sont deux p-sous-groupes unipotents maximaux distincts, alors $B_1 \cap B_2 = 1$. Supposons qu'il existe deux p-sous-groupes unipotents maximaux distincts B_1 et B_2 tels que $B_1 \cap B_2 \neq 1$. On suppose que l'intersection $B_1 \cap B_2$ est de rang maximal. Soit $N = N_G(B_1 \cap B_2)^\circ$. Si $B_1 \cap B_2$ est fini, alors N centralise $B_1 \cap B_2 \neq 1$ et, donc, on a $N < G$ puisque $Z(G) = 1$. Sinon $B_1 \cap B_2$ est infini et il y a un sous-groupe N-minimal U dans $B_1 \cap B_2$, et U est donc abélien, ce qui donne $N \neq G$ puisque G n'a pas de sous-groupe G-minimal abélien. Ainsi, dans tous les cas, on a $N < G$, et $(*)$ dit que $N/\sigma(N)$ est définissablement linéaire. Le lemme 4.17 dit qu'alors N a un unique p-sous-groupe de Sylow S_p, et que S_p est unipotent. Soit B_3 un p-sous-groupe unipotent maximal de G contenant S_p. Pour $i = 1, 2$, par condition de normalizateur dans B_i, on obtient

$$\mathrm{rk}(B_1 \cap B_2) < \mathrm{rk}(N_{B_i}(B_1 \cap B_2)) = \mathrm{rk}(N_{B_i}(B_1 \cap B_2)^\circ) \leqslant \mathrm{rk}(B_i \cap B_3).$$

Par maximalité de $\mathrm{rk}(B_1 \cap B_2)$, on en déduit que $B_i = B_3$ pour $i = 1, 2$, ce qui contredit $B_1 \neq B_2$. Ceci prouve, en particulier, que $B \cap B^g = 1$ pour tout $g \in G \setminus N_G(B)$.

Montrons que $\{M^g \mid g \in G\}$ est une famille géométrique de sous-groupes de G. Supposons $M \cap M^g \neq 1$ pour $g \notin N_G(M)$. Soit x un élément non trivial de cette intersection. Comme $M/\sigma(M)$ est définissablement linéaire et comme B est l'unique p-sous-groupe de Sylow de M, le lemme 4.17 montre que x centralise un sous-groupe infini de B et un sous-groupe infini de B^g. Comme $x \neq 1$ et comme $Z(G) = 1$, on a $C_G(x)^\circ \neq G$, et $(*)$ dit que $C_G(x)^\circ/\sigma(C_G(x)^\circ)$ est définissablement linéaire. Alors le lemme 4.17 dit que $C_G(x)^\circ$ a un unique p-sous-groupe de Sylow R_p, et que R_p est unipotent. On déduit du paragraphe précédent que R_p est contenu dans $B \cap B^g$, et le paragraphe précédent donne $B = B^g$ et $g \in N_G(B) \leqslant N_G(M)$, ce qui contredit $g \notin N_G(M)$. Ainsi on a $M \cap (\bigcup_{g \notin N_G(M)} M^g) = 1$, d'où $\mathrm{rk}(\bigcup_{g \in G} M^g) = \mathrm{rk}(M) + \mathrm{rk}(G/N_G(M))$. Or, comme B est l'unique p-sous-groupe de Sylow de M, on a $N_G(M) \leqslant N_G(B)$, ce qui prouve que $M = N_G(M)^\circ$, et que $\mathrm{rk}(\bigcup_{g \in G} M^g) = \mathrm{rk}(G)$. Ceci démontre que $\{M^g \mid g \in G\}$ est une famille géométrique de sous-groupes de G. La proposition 2.8 donne alors l'existence de $g \in G$ tel que $\mathrm{In}(G) \leqslant M^g$, en particulier on obtient $A \leqslant M^g$. Comme le lemme 4.17 dit que $Z(M) \geqslant Z(M) \cap B$ est infini, on a montré que $C_G(A) \geqslant Z(M)^g$ est infini, ce qui contredit $(**)$. Ceci finit la preuve. $\square$

On obtient alors une information concernant la structure des groupes de rang de Morley fini dans lesquels toutes les sections définissables et géométriques sont définissablement linéaires (i.e. les analogues aux K-groupes pour la conjecture 1.3). Nous devons d'abord prouver le lemme suivant.

Lemme 4.19. *Soit H un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur un corps interprétable K. Alors, pour tout entier naturel n, le quotient $H/Z_n(H)$ est définissablement linéaire sur K.*

Démonstration. Montrons d'abord que $H/Z(H)$ est définissablement linéaire sur K. On peut supposer que H est un sous-groupe définissable de $\mathrm{GL}_m(K)$ pour un entier naturel m. Soit $\overline{Z(H)}$ le plus petit sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_m(K)$ contenant $Z(H)$. Alors on a $Z(H) = \overline{Z(H)} \cap H$, et le lemme 1.2 de [**21**] dit que $H/Z(H)$ est définissablement linéaire sur K.

Maintenant on prouve le lemme par induction sur n. On peut supposer $n > 0$. Par hypothèse d'induction, $H/Z_{n-1}(H)$ est définissablement linéaire sur K, donc $(H/Z_{n-1}(H))/Z(H/Z_{n-1}(H))$ est définissablement linéaire sur K d'après le paragraphe ci-dessus. Comme ce groupe est définissablement isomorphe à $H/Z_n(H)$, on a fini la preuve. □

Corollaire 4.20. *Soit G un groupe de rang de Morley fini. On suppose que toute section définissable et géométrique de G est définissablement linéaire. Alors $G/Z_\infty(G^\circ)$ est définissablement linéaire.*

Démonstration. D'après la proposition 4.3, on peut supposer G connexe. Si $\mathrm{In}(G)$ n'est pas hypercentral dans G, alors le théorème 4.18 fournit une section définissable et géométrique H/K de G telle que $(H/K)/\sigma(H/K)$ n'est pas définissablement linéaire. Alors, d'après la remarque 4.9 (ii), le quotient H/K n'est pas définissablement linéaire. Comme ceci contredit l'hypothèse sur G, on en déduit que $\mathrm{In}(G)$ est contenu dans $Z_\infty(G)$.

Par conséquent le groupe $G/Z_\infty(G)$ est définissablement isomorphe à

$$(G/\mathrm{In}(G))/Z_\infty(G/\mathrm{In}(G)) = (G/\mathrm{In}(G))/(Z_\infty(G)/\mathrm{In}(G)),$$

et le corollaire 2.9 permet donc de supposer que G est géométrique. On peut alors supposer que G est un sous-groupe définissable d'un produit direct de la forme $\bigtimes_{i=1}^n GL_{n_i}(K_i)$ pour des entiers naturels $n, n_1, \ldots, n_n$ et des corps interprétables $K_1, \ldots, K_n$. On note $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les projections canoniques sur $\mathrm{GL}_{n_1}(K_1), \ldots, \mathrm{GL}_{n_n}(K_n)$ respectivement. Alors l'hypercentre de G est $G \cap (\bigtimes_{i=1}^n Z_\infty(\rho_i(G)))$ et $G/Z_\infty(G)$ est donc définissablement isomorphe à un sous-groupe du produit direct $\bigtimes_{i=1}^n \rho_i(G)/Z_\infty(\rho_i(G))$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\rho_i(G)/Z_\infty(\rho_i(G))$ est définissablement linéaire pour tout i.

On fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$. Comme G est connexe, $\rho_i(G)$ est aussi connexe et, d'après la remarque 3.9, il existe un entier n tel que $Z_\infty(\rho_i(G)) = Z_n(\rho_i(G))$. Ainsi, comme $\rho_i(G)$ est définissablement linéaire sur K_i. le lemme 4.19 dit que $\rho_i(G)/Z_\infty(\rho_i(G))$ est définissablement linéaire sur K_i, ce qui finit la preuve. □

https://doi.org/10.1017/S1474748008000212 Published online by Cambridge University Press

Dans les études de la conjecture de Cherlin–Zil'ber, une autre notion centrale est celle des *K^*-groupes simples*, qui sont les groupes simples et infinis de rang de Morley fini dont toutes les sections simples définissables infinies et propres sont algébriques. Concernant ces groupes, le théorème 4.18 dit en particulier ceci.

Corollaire 4.21. *Tout K^*-groupe simple de rang de Morley fini est un groupe géométrique.*

Démonstration. Soit G un K^*-groupe simple. Comme $\mathrm{In}(G)$ est un sous-groupe normal de G (proposition 2.6), on a soit $\mathrm{In}(G) = 1$, soit $\mathrm{In}(G) = G$. Si $\mathrm{In}(G) = 1$, alors G est un groupe géométrique, donc on peut supposer $\mathrm{In}(G) = G$, en particulier $\mathrm{In}(G)$ n'est pas hypercentral. Alors le théorème 4.18 dit que G a une section géométrique H/K telle que $(H/K)/\sigma(H/K)$ n'est pas définissablement linéaire. En particulier H/K n'est pas un K-groupe (remarque 4.9 (i)), d'où $H/K = G$ puisque G est un K^*-groupe. Ainsi G est géométrique, ce qui contredit $\mathrm{In}(G) = G$. Ceci prouve le résultat. □

Aussi, nous obtenons un analogue à la notion de K^*-groupes simples pour notre contexte. En effet, la proposition 4.3, la remarque 4.9 (ii) et le théorème 4.18 disent qu'on peut restreindre l'étude de la conjecture 1.3 aux groupes connexes et géométriques G tels que, pour toute section définissable et connexe H/K de G :

- si H/K est géométrique et si $\mathrm{rk}(H/K) < \mathrm{rk}(G)$, alors H/K est définissablement linéaire ;
- le sous-groupe $\mathrm{In}(H/K)$ est hypercentral dans H/K.

5. Petits groupes géométriques

Cette section concerne la question suivante.

Question 5.1. Soit G un groupe géométrique de rang de Morley au plus 3. Si G n'est pas un mauvais groupe de rang 3, est-ce que G est définissablement linéaire sur un corps interprétable K ?

Nous répondons partiellement à cette question, pour les groupes de rang au plus deux, en prouvant le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Soit G un groupe géométrique de rang de Morley au plus deux. Alors G est soit fini, soit de rang de Morley deux. De plus, si G n'a pas un exposant borné, alors G interprète un corps algébriquement clos K et G° est soit isomorphe à un K-espace vectoriel de dimension deux, soit isomorphe à $K_+ \rtimes K^*$ où K^* agit sur K_+ par multiplication.*

Remarque 5.3. Si G a un rang de Morley un, alors les deux seules familles géométriques de G sont $\{G^\circ\}$ et $\{G^\circ, \{1\}\}$, et G n'est donc pas un groupe géométrique. Ainsi un groupe géométrique de rang de Morley au plus deux est soit fini, soit de rang de Morley deux.

Nous remarquons aussi qu'il n'est pas clair que le théorème 5.2 puisse s'étendre aux groupes géométriques d'exposant borné, en effet il existe un corps K de rang de Morley deux avec un sous-groupe additif définissable infini et propre [**4**]. Surtout, nous ne connaissons pas d'analogue au fait 5.6 pour les groupes d'exposant borné. Cela dit, [**4**] ne semble pas non plus fournir de contre-exemple à la question 5.1, mais elle la rend difficile.

Pour prouver le théorème 5.2, nous devons d'abord établir plusieurs autres résultats, et donner certains faits.

Le premier de ces résultats concerne le *sous-groupe de Frattini* $\Phi(G)$ d'un groupe G de rang de Morley fini, lequel est défini comme l'intersection des sous-groupes propres définissables et connexes maximaux de G.

Lemme 5.4. *Soient G un groupe nilpotent de rang de Morley fini et A un sous-groupe normal définissable de G. Si $\Phi(G)$ est fini, alors $\Phi(G/A)$ est aussi fini.*

Démonstration. On suppose qu'il existe un groupe nilpotent G de rang de Morley fini avec un sous-groupe normal et définissable A tel que $\Phi(G)$ est fini mais pas $\Phi(G/A)$. On peut supposer G et A de rang et degré minimal. Si G n'est pas connexe, alors $\Phi(G) = G^\circ$ et G est donc fini, ce qui contredit le fait que $\Phi(G/A)$ est infini. Ainsi G est connexe, donc G' l'est aussi. Comme G' est contenu dans $\Phi(G)$ d'après le lemme 5.12 de [**14**], on en déduit que G est abélien.

On note Φ le sous-groupe de G tel que $\Phi/A = \Phi(G/A)$. Alors Φ est infini et il existe donc un sous-groupe propre définissable et connexe maximal M de G ne contenant pas Φ°. Nous avons soit $G = MA$, soit MA/A sous-groupe propre définissable et connexe maximal de G/A, ce qui prouve que MA contient Φ. Or $G = M\Phi$ par maximalité de M, d'où $G = MA$ et $M/(M \cap A)$ est ainsi définissablement isomorphe à G/A. En particulier on a prouvé que $\Phi(M/(M \cap A))$ est infini et, par minimalité du rang de G, le sous-groupe $\Phi(M)$ est infini.

Maintenant on considère un sous-groupe N propre définissable et connexe maximal de G ne contenant pas $\Phi(M)$. Comme G est abélien, N est normal dans G. Alors $G = NM$, et G/N est définissablement isomorphe à $M/(M \cap N)$. Par maximalité de N dans G, on obtient la maximalité de $(M \cap N)^\circ$ dans M en tant que sous-groupe propre définissable et connexe. On a donc $\Phi(M) \leqslant (M \cap N)^\circ \leqslant N$, ce qui contredit $\Phi(M) \nleqslant N$, et finit la preuve. □

Remarque 5.5. Par contre, la trivialité de $\Phi(G)$ pour un groupe nilpotent G de rang de Morley fini n'implique pas la trivialité de $\Phi(G/A)$ pour tout quotient définissable G/A de G.

En effet, considérons p un nombre premier et H et K deux p-groupes connexes infinis de rang de Morley un avec H et K de cardinal différents. On fixe x et y deux éléments non triviaux de H et K respectivement. On note alors $G = H \times K$ et $A = \langle xy \rangle$. Comme H et K sont les deux seuls sous-groupes propres définissables et connexes de G, on obtient $\Phi(G) = 1$ et $\Phi(G/A) = \langle x, y \rangle / A \neq 1$.

Le fait suivant généralise partiellement un théorème bien connu de Zil'ber concernant les groupes abéliens T-minimaux de rang de Morley fini admettant un *groupe abélien* infini interprétable T d'automorphismes [**6**, Théorème 9.1].

Fait 5.6 (Loveys et Wagner [20]). *Soit A un groupe abélien sans torsion de rang de Morley fini. Supposons que A ait une famille uniformément définissable infinie S d'automorphismes telle que A soit S-minimal. Alors il y a un sous-groupe A_1 de A et un corps interprétable K tel que A_1 est définissablement isomorphe à K_+. De plus, S se plonge définissablement dans un anneau de matrices sur K.*

La proposition 5.7 permet d'interpréter un corps algébriquement clos dans tout groupe géométrique nilpotent divisible non trivial.

Proposition 5.7. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout groupe nilpotent divisible G de rang de Morley fini :*

(i) *G a une famille uniformément définissable $\mathscr{F}$ de sous-groupes propres dont l'union est générique dans G ;*

(ii) *G interprète un corps algébriquement clos K tel que G a un quotient définissablement isomorphe à un K-espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration. Montrons d'abord que (ii) implique (i). Soit H un sous-groupe définissable et normal de G tel que G/H est définissablement isomorphe à un K-espace vectoriel E de dimension 2. Soit $\mathscr{F}$ la famille des préimages dans G des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de E. Alors $\mathscr{F}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes propres de G. De plus, chaque élément de $G\setminus H$ est contenu dans un élément de $\mathscr{F}$, donc $\bigcup\mathscr{F}$ est générique dans G, ce qui prouve (i).

Nous prouvons maintenant que (i) implique (ii) par induction sur le rang de Morley de G. Nous pouvons supposer que $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ pour un ensemble interprétable I. Soient T le tore décent maximal de G et $\mathscr{F}^T = \{F \in \mathscr{F} \mid T \nleqslant F\}$. D'après [**10**, Extended Nongenericity], l'union $\bigcup\mathscr{F}^T$ n'est pas générique dans G. En conséquence, nous pouvons supposer $T \leqslant F$ pour chaque $F \in \mathscr{F}$. Alors, si $T \neq 1$, l'hypothèse d'induction donne le résultat dans G/T, ce qui permet de supposer $T = 1$ et G sans torsion.

Pour tout sous-groupe G-minimal A de G, on note $\mathscr{F}_A = \{F \in \mathscr{F} \mid FA \neq G\}$. S'il existe un sous-groupe G-minimal A de G tel que l'union $\bigcup\mathscr{F}_A$ est générique dans G, alors l'hypothèse d'induction donne le résultat dans G/A. Nous pouvons donc supposer $\bigcup\mathscr{F}_A$ non générique dans G quel que soit le sous-groupe G-minimal A de G.

On fixe A un sous-groupe G-minimal de G et on note $\mathscr{F}_0 = \{F \in \mathscr{F} \mid FA = G\}$. Alors, par ce qui précède, l'union $\bigcup\mathscr{F}_0$ est un sous-ensemble générique de G et nous pouvons donc supposer $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0$. Comme A est G-minimal et comme G est nilpotent et sans torsion, tous les $\mathscr{F}$-sous-groupes de G sont des sous-groupes propres définissables et maximaux de G et ils contiennent donc tous $\Phi(G)$. Or, si $\Phi(G) \neq 1$, alors $\Phi(G)$ est infini puisque G est sans torsion, donc $\Phi(G)$ contient un sous-groupe G-minimal A_1, et ce qui précède donne $A_1 \leqslant \Phi(G) \leqslant F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. En particulier on obtient $\mathscr{F}_{A_1} = \{F \in \mathscr{F} \mid F \neq G\} = \mathscr{F}$, et le paragraphe précédent dit que $\bigcup\mathscr{F}_{A_1} = \bigcup\mathscr{F}$ n'est pas générique dans G, ce qui contredit l'hypothèse sur $\mathscr{F}$. Ainsi $\Phi(G) = 1$, en particulier G est abélien [**14**, Lemme 5.12].

D'après le paragraphe précédent, les éléments de $\mathscr{F}$ sont des sous-groupes propres définissables maximaux de G. Par conséquent, si l'un d'entre eux est trivial, alors ils sont tous triviaux et, comme $\bigcup\mathscr{F}$ est générique dans G, on obtient $G = 1$, et $\mathscr{F} = \emptyset$ puisque tout $\mathscr{F}$-sous-groupe est propre, ce qui contredit la généricité de $\bigcup\mathscr{F}$ dans G. On en déduit que $\mathscr{F}$ est non vide et que ses éléments sont tous non triviaux. De plus, comme G est sans torsion, tous les éléments de $\mathscr{F}$ sont infinis.

Soit $L \in \mathscr{F}$. Comme G est abélien, L est normal dans G et, comme L est infini, il contient un sous-groupe G-minimal B. Comme $L \in \mathscr{F}$, on a $LA = G$ et $L < G$, d'où $A \nleqslant L$ et $B \neq A$. Puisque $\bigcup\mathscr{F}_B$ n'est pas générique dans G et puisque $\bigcup\mathscr{F}$ l'est, l'union $\bigcup(\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_B)$ est générique dans G. Soit $\mathscr{G} = \{F \cap AB \mid F \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_B\}$. Alors $\mathscr{G}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes de AB. Soit $U \in \mathscr{G}$. Alors il existe $F_U \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_B$ tel que $U = F_U \cap AB$. Aussi on a $F_U A = G$ puisque $F_U \in \mathscr{F}$, donc UA/A est définissablement isomorphe à BA/A. Comme $A \nleqslant F_U$ puisque $F_U \in \mathscr{F}$, on a $A \nleqslant U$ et $A \cap U < A$. Aussi, comme A et B sont deux sous-groupes G-minimaux distincts, on a $A \cap B < A$. Comme G est abélien et sans torsion, on obtient $A \cap U = A \cap B = 1$ par G-minimalité de A. Ceci implique que, U et UA/A d'une part, et B et BA/A d'autre part, sont définissablement isomorphes. Comme UA/A et BA/A sont définissablement isomorphes, on en déduit que U et B sont définissablement isomorphes. Aussi, comme B est un sous-groupe G-minimal du groupe abélien G, c'est un sous-groupe définissable non trivial minimal de G, et $U \cong B$ est donc aussi un sous-groupe définissable non trivial minimal. En particulier U est G-minimal puisque G est abélien. On a montré que les éléments de $\mathscr{G}$ sont des sous-groupes G-minimaux définissablement isomorphes à B. Si la famille $\mathscr{G}$ est finie, alors il y a $B_1 \in \mathscr{G}$ tel que $\bigcup\{F \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_B \mid B_1 \leqslant F\}$ est générique dans G, ce qui contredit le fait que $\bigcup\mathscr{F}_{B_1}$ n'est pas générique dans G. En conséquence $\mathscr{G}$ est infini.

Comme tout élément de $\mathscr{G}$ est le graphe d'un isomorphisme de A dans B, la famille $\mathscr{G}$ fournit une famille uniformément définissable infinie d'automorphismes de A. D'après le fait 5.6, il y a un corps interprétable K tel que A est définissablement isomorphe à K_+, et K est algébriquement clos d'après le théorème 8.1 de [**6**, p. 122]. Aussi, comme B est définissablement isomorphe à A et comme $A \cap B = 1$, on a prouvé que AB est définissablement isomorphe à un K-espace vectoriel de dimension 2, et on peut considére AB comme un K-espace vectoriel.

Montrons que tout sous-groupe définissable U de AB est un sous-espaces vectoriel de AB. On peut supposer que U est un sous-groupe propre et non trivial. On considère un sous-espace vectoriel E de AB de dimension 1 tel que $E \cap U$ est non trivial. Comme G est sans torsion, K est de caractéristique nulle, et le corollaire 3.3 de [**23**, p. 76] dit que K_+ n'a pas de sous-groupe définissable propre et non trivial. Or E est de dimension 1, donc E est définissablement isomorphe à K_+. Comme $E \cap U$ est non trivial, on en déduit que U contient E. Comme AB/E est aussi définissablement isomorphe à K_+, et comme $U < AB$, on obtient $U = E$, ce qui prouve que tout sous-groupe définissable de AB est un sous-espace vectoriel.

Comme $\Phi(G) = 1$, le lemme 5.4 dit que $\Phi(G/A)$ est fini, et comme G est sans torsion, on obtient $\Phi(G/A) = 1$. Aussi, tout $F \in \mathscr{F}$ intersecte trivialement A puisque $G = FA$ et $F < G$, donc F est définissablement isomorphe à G/A et $\Phi(F) = 1$. Soient $F \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_B$ et M un sous-groupe propre définissable et connexe maximal de F ne contenant pas

$F \cap AB$. On obtient $M \cap AB = M \cap (F \cap AB) < F \cap AB < AB$. Comme, d'après le paragraphe précédent, $M \cap AB$ et $F \cap AB$ sont des sous-espaces vectoriels de AB, on peut écrire, $\dim(M \cap AB) < \dim(F \cap AB) < \dim(AB) = 2$, d'où $M \cap AB = 1$. Or, par maximalité de M dans F, nous avons $F = M(F \cap AB)$ et $G = FA = M(AB)$, en conséquence G/M est définissablement isomorphe à AB, ce qui finit la preuve. $\square$

Nous prouvons maintenant le théorème 5.2.

Preuve du théorème 5.2. D'après la proposition 4.3 et la remarque 5.3, nous pouvons supposer G connexe de rang deux. Supposons d'abord G non nilpotent. D'après le théorème 9.19 de [**6**, p. 153], le centre de G est fini et $G/Z(G)$ est définissablement isomorphe à $K_+ \rtimes K^*$ pour un corps interprétable K, et on peut donc supposer $G/Z(G) = K_+ \rtimes K^*$. En particulier, si A est un sous-groupe définissable et connexe de G, alors $AZ(G)/Z(G)$ est soit trivial, soit égal à K_+, soit égal à un conjugué de K^*, soit égal à G. Ainsi, si $\mathscr{F}$ est une famille géométrique de sous-groupes propres de G, alors il existe $A \in \mathscr{F}$ tel que $AZ(G)/Z(G)$ soit l'un des conjugués de K^* et $AZ(G)/Z(G)$ est donc l'un des sous-groupes de Carter de $G/Z(G)$. Ceci montre que $A = (AZ(G))^\circ$ contient un sous-groupe de Carter de G, et comme $AZ(G)$ est abélien, le sous-groupe A est un sous-groupe de Carter de G. D'après le théorème 1.2 de [**14**], A est autonormalizant et, donc, A contient $Z(G)$. Ceci prouve que $Z(G)$ est contenu dans $\mathrm{In}(G)$. Comme G est géométrique, on en déduit que $Z(G) = 1$ et $G = K_+ \rtimes K^*$.

Supposons maintenant G nilpotent. Comme G n'est pas d'exposant borné, le théorème 6.15 de [**6**] montre que G est abélien. Si G n'est pas divisible, alors le théorème 6.7 de [**6**] montre que $G = DC$ pour des sous-groupes définissables connexes, et de rang un, D et C de G avec D divisible et C d'exposant borné. En particulier les seuls sous-groupes définissables et connexes de G sont $\{1\}$, D, C et G. Ceci contredit le fait que G est géométrique, et G est donc divisible.

Soit $x \in G \setminus \{1\}$. Comme G est géométrique, il existe une famille géométrique $\mathscr{F}$ de sous-groupes de G telle que $x \notin \bigcup \mathscr{F}$. En particulier $\mathscr{F}$ est une famille uniformément définissable de sous-groupes propres de G, et $\bigcup \mathscr{F}$ est générique dans G. La proposition 5.7 donne alors un sous-groupe normal et définissable H de G tel que G/H est définissablement isomorphe à un K-espace vectoriel de dimension deux pour un corps interprétable et algébriquement clos K. En particulier, on a $\mathrm{rk}(K) \geqslant 1$ et $\mathrm{rk}(G/H) = 2\,\mathrm{rk}(K) \geqslant 2$, donc H est fini. Comme G n'est pas d'exposant borné, K est de caractéristique nulle et G/H est sans torsion. Comme G est divisible, on en déduit que H est trivial, ce qui finit la preuve. $\square$

6. Questions

Dans cette section nous mentionnons des questions et conjectures en rapport avec la conjecture 1.3.

Nous commençons par la conjecture de linéarité de Borovik. Ses liens avec la conjecture 1.3 ne sont pas clairs, car nous ne connaissons pas assez les groupes définissablement linéaires. Une étude des questions 6.2 semble donc indispensable pour mettre en évidence les liens entre les deux conjectures de linéarité 1.3 et 6.1. Ici nous désignons par $F(G)$ le *sous-groupe de Fitting* d'un groupe quelconque G, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes nilpotents normaux. Aussi, on rappelle qu'un groupe H est une *extension centrale* d'un groupe G si H a un sous-groupe central Z tel que H/Z est isomorphe à G.

Conjecture 6.1 (Borovik 2004). *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $F(G) \leqslant [G,G]$, alors G a une extension centrale définissable et définissablement linéaire.*

Question 6.2. Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini.

- Si G a une extension centrale définissable et définissablement linéaire, est-ce que les quotients définissables de G en ont également une ?
- Si G/G' a une extension centrale définissable et définissablement linéaire, est-ce aussi le cas de G ?

Nous mentionnons aussi une sous-conjecture importante de la conjecture 1.3.

Conjecture 6.3. *Tout groupe géométrique infini interprète un corps infini.*

Notons que la conjecture 1.3 et les propriétés des sous-groupes $\mathrm{In}(\cdot)$ et $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(\cdot)$ induisent la question suivante.

Question 6.4. Si G est un groupe de rang de Morley fini, est-ce que G admet un plus petit sous-groupe normal définissable N tel que G/N est définissablement plongé dans un groupe géométrique ?

Lorsque ce sous-groupe N existe, il n'est pas forcément égal à $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G)$, puisque si G est un tore d'un groupe algébrique, on a $N = 1$ et, pourtant, $\mathrm{In}_{\mathrm{P}}(G) = G$. Aussi, on peut noter que si la conjecture 1.3 est vraie, alors le lemme 4.16 donne une réponse positive à la question précédente.

Le sous-groupe dérivé d'un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos est linéaire (de [**23**, p. 148]). Par analogie, B. Poizat a demandé ce qui se passe pour les groupes de rang de Morley fini par rapport aux groupes géométriques.

Question 6.5. Si G est un groupe connexe de rang de Morley fini, est-ce que l'un des membres de sa série centrale descendante est un groupe géométrique ?

Maintenant, on peut se demander quels sont les liens entre la conjecture de Cherlin–Zil'ber, et les conjectures de linéarité 1.3 et 6.1.

D'abord, même s'il est exclu que la conjecture 1.3 (ou 6.1), soit prouvée avant la conjecture de Cherlin–Zil'ber, on peut remarquer que, dans ce cas, il ne resterait plus qu'à vérifier la conjecture de Cherlin–Zil'ber pour les groupes simples définissablement linéaires sur un corps K de caractéristique nulle (fait 4.4 et corollaire 4.21).

Inversement, une réponse positive à la conjecture de Cherlin–Zil'ber ne suffit pas pour obtenir une réponse positive aux deux conjectures de linéarité. En effet, d'une part ces deux conjectures doivent être étudiées au niveau des groupes résolubles (ce qui est peut-être le plus intéressant), mais il faudrait aussi étudier la linéarité des K-groupes parfaits.

Question 6.6.

- Est-ce qu'un K-groupe parfait admet toujours une extension centrale définissable et définissablement linéaire ?
- Est-ce que les K-groupes géométriques parfaits sont définissablement linéaires ?

De plus il n'est pas clair que la définissable linéarité de K et de R dans la proposition 4.7 implique celle de G, en particulier parce qu'un quotient définissable d'un groupe définissablement linéaire n'est pas forcément définissablement linéaire. Plus généralement, et contrairement à un produit direct, un produit central de deux groupes quasi-simples algébriques n'est pas forcément définissablement linéaire. Il suffit de considérer $(H \times K)/\langle ij \rangle$ avec H et K deux groupes quasi-simples algébriques sur des corps algébriquement clos distincts, et i et j des involutions centrales de H et K respectivement.

Remerciements. Je remercie les organisateurs de *Logicum Lugdunensis* pour leur invitation au congrès à Lyon en juin 2006. Merci particulièrement à Tuna Altınel et à Bruno Poizat pour leurs commentaires et suggestions concernant ce travail.

Références

1. T. Altinel, Groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups, *J. Alg.* **180** (1996), 778–807.
2. T. Altinel et G. Cherlin, On central extensions of algebraic groups, *J. Symb. Logic* **64** (1999), 68–74.
3. A. Baudisch, A new uncountably categorical group, *Trans. Am. Math. Soc.* **348** (1996), 3889–3940.
4. A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler, Red fields, *J. Symb. Logic* **72** (2007), 207–225.
5. O. V. Belegradek, On groups of finite Morley rank, dans *Abstracts of the Eighth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, LMPS '87, Moscow, USSR, 17–22 August 1987*, pp. 100–102.
6. A. V. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank* (Oxford University Press, 1994).
7. A. V. Borovik, J. Burdges et G. Cherlin, Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate type, *Selecta Math.* **13** (2007), 1–22.
8. J. Burdges, A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank, *J. Alg.* **274** (2003), 215–229.
9. J. Burdges et G. Cherlin, On semisimple torsion in groups of finite Morley rank, soumis.
10. G. Cherlin, Good tori in groups of finite Morley rank, *J. Group Theory* **8**(5) (2005), 613–622.
11. G. Cherlin et E. Jaligot, Tame minimal simple groups of finite Morley rank, *J. Alg.* **276** (2004), 13–79
12. J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique* (Presses Universitaires de France, Paris, 1974).
13. K. Doerk et T. Hawkes, *Finite soluble groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics, volume 4 (Walter de Gruyter, Berlin, 1992).
14. O. Frécon, Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles, *J. Alg.* **229** (2000), 118–152.

15. O. Frécon, Around unipotence in groups of finite Morley rank, *J. Group Theory* **9** (2006), 341–359.
16. O. Frécon, Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank, *J. Math. Logic*, soumis.
17. O. Frécon et E. Jaligot, The existence of Carter subgroups in groups of finite Morley rank, *J. Group Theory* **8** (2005), 623–633.
18. J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, 2nd edn (Springer, 1981).
19. E. Jaligot, Generix never gives up, *J. Symb. Logic* **71**(2) (2006), 599–610.
20. J. Loveys et F. O. Wagner, Le Canada semi-dry, *Proc. Am. Math. Soc.* **118**(1) (1993), 217–221.
21. Y. Mustafin, Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini, *J. Alg.* **281** (2004), 753–773.
22. Y. Mustafin et B. Poizat, Sous-groupes superstables de $\mathrm{SL}_2(K)$ et de $\mathrm{PSL}_2(K)$, *J. Alg.* **297** (2006), 155–167.
23. B. Poizat, *Groupes stables: une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique* (Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987).
24. B. Poizat, Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner, *J. Symb. Logic* **66** (2001), 1637–1646.
25. F. O. Wagner, Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathfrak{R}$-groups, *Arch. Math. Logic* **33** (1994), 23–34.
26. F. O. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symb. Logic* **66** (2001), 703–706.