Fifth Meeting, March 9th, 1894.

Dr C. G. KNOTT, President, in the Chair.

Coordonnées Tangentielles.

By M. PAUL AUBERT.

Cette note a pour objet de familiariser les élèves avec l'emploi des coordonnées tangentielles, en appliquant ces coordonnées, concurremment avec les coordonnées ponctuelles, à la résolution d'un certain nombre de questions, d'ordre très général, concernant les surfaces du second ordre.

I. FOYERS ET FOCALES.

DÉFINITION :—Soit $f(x, y, z) = 0$
l'équation d'une surface du second ordre. On dit qu'un point α, β, γ est foyer de cette surface si l'on peut trouver deux expressions L et M linéaires en x, y, z satisfaisant à l'identité

$$(1) \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + eL^2 + e'M^2 = \lambda f(x, y, z)$$

où l'on a $e = \pm 1$, $e' = \pm 1$, λ étant une constante. La droite qui a pour équations $L = 0$, $M = 0$, est la directrice correspondante.

L'identité (1) conduit à considérer un foyer comme le centre d'une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface.

Nous ramènerons l'étude des foyers d'une surface à un autre problème en établissant les deux propositions suivantes :

I°. *Tout sommet d'un cône de révolution circonscrit à la surface est un foyer de celle-ci.*

En effet l'équation d'un cône de révolution ayant pour sommet le point (α, β, γ) est de la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - P^2 = 0,$$

$P = 0$ étant l'équation d'un plan passant par le point α, β, γ. Si ce cône est circonscrit à la surface considérée, on a l'identité

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - P^2 = \lambda f(x, y, z) + Q^2$$

où Q est linéaire en x, y, z. On peut donc écrire

$$\lambda f(x, y, z) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - P^2 - Q^2$$

et le point (α, β, γ) est foyer de la surface.

II°. *Tout foyer de la surface est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à cette surface.*

Prenons en effet le point (α, β, γ) donné comme foyer de la surface, pour origine de coordonnées ; l'équation de la surface deviendra de la forme

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + e\mathrm{L}^2 + e'\mathrm{M}^2 = 0.$$

Or le cône circonscrit ayant pour sommet l'origine est

$$4f(x, y, z)f(x_1, y_1, z_1) - (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1})^2 = 0$$

où l'on fait $\quad x_1 = y_1 = z_1 = 0 \quad$ et $\; t = t_1 = 1$.

Si donc nous posons

$$\sqrt{e}\,\mathrm{L} = a\,x + b\,y + c\,z + d\,t = \mathrm{L}_1$$

$$\sqrt{e'}\mathrm{M} = a'x + b'y + c'z + d't = \mathrm{M}_1$$

l'équation du cône sera

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \mathrm{L}_1^2 + \mathrm{M}_1^2) - (\mathrm{L}_1 d + \mathrm{M}_1 d')^2 = 0$$

ou $(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\mathrm{L}_1 d + \mathrm{M}_1 d')^2 + \mathrm{L}_1^2(d^2 + d'^2) + \mathrm{M}_1^2(d^2 + d'^2) = 0$

c'est à dire $\qquad (d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2) + (\mathrm{L}_1 d' - \mathrm{M}_1 d)^2 = 0$

équation d'une surface de révolution ; le cône est donc de révolution.

Cela posé, nous allons chercher les directions principales d'un cône circonscrit à la surface donnée par le point (α, β, γ), puis nous écrirons que ce cône est de révolution.

Problème :—*Déterminer les axes d'un cône de sommet donné circonscrit à une quadrique donnée.*

Supposons la quadrique définie par son équation tangentielle

$$\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2 - h^2 = 0,$$

l'équation du point donné, $\quad (\alpha, \beta, \gamma) \quad$ etant

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + h = 0 \tag{2}$$

https://doi.org/10.1017/S001309150000167X Published online by Cambridge University Press

nous avons immédiatement l'équation tangentielle du cône circonscrit par ce point à la surface

$$\mathrm{A}u^2+\mathrm{B}v^2+\mathrm{C}w^2-(u\alpha+v\beta+w\gamma)^2=0. \tag{3}$$

Or le cône réciproque a mêmes directions d'axes que celui-ci, et, son équation en coordonnées ponctuelles étant

$$\phi(x, y, z)=\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0$$

il nous suffit de déterminer les directions principales de ce cône.

Posons $$\rho=\alpha x+\beta y+\gamma z.$$

Nous savons que les coordonnées du point directeur d'une direction principale sont les solutions communes aux équations

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}-s)x-\alpha\rho&=0\\ (\mathrm{B}-s)y-\beta\rho&=0\\ (\mathrm{C}-s)z-\gamma\rho&=0\\ \alpha x+\beta y+\gamma z-\rho&=0\end{aligned}$$

s étant une inconnue auxiliaire assujettie à vérifier par cela même la condition

$$\begin{vmatrix}\mathrm{A}-s & 0 & 0 & \alpha\\ 0 & \mathrm{B}-s & 0 & \beta\\ 0 & 0 & \mathrm{C}-s & \gamma\\ \alpha & \beta & \gamma & 1\end{vmatrix}=0$$

ou bien

$$(\mathrm{A}-s)(\mathrm{B}-s)(\mathrm{C}-s)\left[\frac{\alpha^2}{\mathrm{A}-s}+\frac{\beta^2}{\mathrm{B}-s}+\frac{\gamma^2}{\mathrm{C}-s}-1\right]=0 \tag{4}$$

Toute racine de cette équation substituée à s dans les équations qui précédent donnera une direction principale.

Condition pour que le cône soit de révolution :—Il faut et il suffit que le cône réciproque soit de révolution, et pour cela, que l'équation (4) ait une racine double.

Je dis qu' une racine double de cette équation ne peut être que l'une des valeurs A, B, ou C, c'est à dire, une racine de l'équation en s relative à la forme

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2.$$

En effet, si s est une racine double de l'équation (4) la forme $\phi(x, y, z) - s(x^2 + y^2 + z^2)$ est carré parfait.
On a donc

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - s(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = Q^2$$

ou
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - s(x^2 + y^2 + z^2) = P^2 + Q^2$$

P et Q étant linéaires et homogènes par rapport à x, y, z. Donc s est une racine de l'équation en s relative à la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2.$$

Cherchons alors la condition pour que l'une de ces racines, C par exemple soit racine de l'équation (4). Le terme ne contenant pas en facteur $(s - C)$ dans cette équation est

$$\gamma^2(A - C)(B - C)$$

Si donc on suppose $(A - C)(B - C) \gtrless 0$ on doit avoir $\gamma = 0$ et il reste

$$(A - s)(B - s)\left[\frac{\alpha^2}{A - s} + \frac{\beta^2}{B - s} - 1\right] = 0.$$

Cette équation doit encore admettre la racine $s = C$ qui était racine double de la première. On doit donc avoir

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} - 1 = 0.$$

Ainsi le point (α, β, γ) est déterminé par les conditions

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si l'on avait pris $s = A$ on aurait trouvé de même

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \frac{\beta^2}{B - A} + \frac{\gamma^2}{C - A} - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

et pour $s = B$ on aurait eu

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \frac{\gamma^2}{C - B} + \frac{\alpha^2}{A - B} - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

On obtient ainsi trois courbes situées dans les plans principaux de la surface donnée, et lieux des sommets de cônes de révolution circonscrits à cette surface. Tous ces points sont, nous l'avons vu, des foyers de la surface. Aussi a-t-on donné á ces trois courbes le nom de *focales* de la surface considérée.

Remarque —Le calcul précédent s'applique au problème suivant. Trouver les directions principales d'un cône de sommet donné et passant par une conique donnée,

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-1=0.$$

Il suffit de faire $C=0$ dans les résultats obtenus.

Ainsi considérons la conique

$$Au^2+Bv^2-h^2=0.$$

La trace d'un plan tangent au cône de sommet (α, β, γ) et dont la directrice est cette conique, sur le plan de cette courbe sera tangente à la conique. On aura donc

$$\begin{aligned} u\alpha+v\beta+w\gamma+h &= 0 \\ Au^2+Bv^2-h^2 &= 0 \end{aligned}$$

L'élimination de h donnera l'equation du cône, et on achèvera comme précédemment, en introduisant le cône réciproque.

II. Surfaces Homofocales.

On dit que deux quadriques sont homofocales si elles admettent les mêmes focales.

Soit $$f(u, v, w, h)=0$$

l'équation tangentielle d'une surface, et

$$u\alpha+v\beta+w\gamma+h=0$$

l'équation du point α, β, γ. Le cône circonscrit par ce point s'obtient en éliminant h entre ces deux equations, ce qui donne $\psi(u, v, w)=0$, et le point (α, β, γ) est foyer si ce cône

https://doi.org/10.1017/S001309150000167X Published online by Cambridge University Press

est de révolution. Or les calculs nous ont montré que dans ce cas la forme

$$\psi(u, v, w) - s(u^2 + v^2 + w^2)$$

est carré parfait. *

Il est clair que si on considère une surface dont l'équation est

$$f(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

le cône circonscrit correspondant sera

$$\psi(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

et il sera de révolution en même temps que le cône $\psi(u, v, w)$. On peut le voir en prenant le cône réciproque.

Ainsi, toutes les surfaces de la famille représentée par l'équation

$$f(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

où λ désigne un paramètre arbitraire ont les mêmes focales.

Pour interpréter ce résultat, remarquons que toutes ces surfaces sont inscrites dans une même surface développable, circonscrite à la

fois à $$f(u, v, w, h) = 0$$

et à $$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

puisque les coordonnées (u, v, w, h) de tout plan tangent à la fois à ces deux surfaces vérifient l'équation précédente.

Cherchons si parmi toutes les surfaces qui constituent la famille considérée il peut y avoir des coniques.

Pour cela rapportons la quadrique $f(u, v, w, h)$ à ses plans principaux, et soit

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2 = 0$$

son équation. L'équation

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

représentera une conique si le discriminant de la forme premier membre est nul. On retrouve ainsi les trois focales. L'équation

* On doit exprimer en effet que la trace de la surface sur le plan de l'infini est bitangente au cercle de l'infini. Le calcul est le même qu'en coordonnées ponctuelles, ce qui s'explique en remarquant que par la transformation réciproque, à deux coniques bitangentes correspondent deux coniques bitangentes.

donne, il est vrai, pour λ une quatrième racine, de valeur infinie à laquelle correspond le cercle de l'infini.

Ces trois coniques sont entièrement situées sur la développable dont nous avons parlé, dont elles constituent des lignes de points doubles. Chacun de leurs points en effet, étant sommet d'un cône isotrope bitangent à la quadrique, est l'intersection de deux génératrices de la développable tangentes à la quadrique.

Ainsi : *Pour obtenir les trois focales d'une quadrique, on égale à zéro le discriminant de la forme* $f(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$. *L'équation ainsi obtenue donne trois valeurs finies de* λ *pour chacune desquelles on obtient une conique focale d'équation*

$$f(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Reprenons l'équation d'une quadrique à centre rapportée à ses plans principaux

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2 = 0 \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (1)$$

L'équation d'une surface homofocale pourra s'écrire

$$(A - s)u^2 + (B - s)v^2 + (C - s)w^2 - h^2 = 0. \qquad \ldots \quad (2)$$

La condition pour qu'elle passe par un point α, β, γ est

$$\frac{\alpha^2}{A - s} + \frac{\beta^2}{B - s} + \frac{\gamma^2}{C - s} - h^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (3)$$

d'où l'on déduit trois valeurs réelles de s donnant trois surfaces homofocales à la première et passant par le point.

Nous avons vu que les directions principales du cône circonscrit à la quadrique (1) par le point (α, β, γ) sont données par

$$(A - s)x + \rho\alpha = 0$$
$$(B - s)y + \rho\beta = 0$$
$$(C - s)z + \rho\gamma = 0$$

où s est racine précisément de l'équation (3).

Les cosinus directeurs qui définissent les axes du cône sont proportionnels à

$$\frac{\alpha}{A - s}, \ \frac{\beta}{B - s}, \ \frac{\gamma}{C - s}.$$

Or ces quantités sont aussi proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la quadrique (2) au point α, β, γ. On reconnait ainsi que

Les axes du cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux trois surfaces homofocales à cette quadrique qui passent par le sommet du cône. On en déduit que ces trois surfaces *se coupent orthogonalement.*

Quand une surface est définie par son équation ponctuelle

$$F(x, y, z, t) = 0$$

on dit que deux points (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) sont conjugués par rapport à cette surface si on a

$$x_1 F'_{x_2} + y_1 F'_{y_2} + z_1 F'_{z_2} + t_1 F'_{t_2} = 0.$$

Pareillement nous dirons que deux plans (u_1, v_1, w_1, h_1) et (u_2, v_2, w_2, h_2) sont conjugués par rapport à la surface dont l'équation tangentielle est

$$F(u, v, w, h) = 0$$

si l'on a

$$u_1 F'_{u_2} + v_1 F'_{v_2} + w_1 F'_{w_2} + h_1 F'_{h_2} = 0.$$

Théorème :—*Si deux plans sont conjugués par rapport à deux surfaces homofocales ils sont rectangulaires.*

En effet soient
$$f(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$
$$f(u, v, w, h) + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

les deux surfaces considérées. On a par hypothèse

$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} + h_1 f'_{h_2} + \lambda(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) = 0$$
$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} + h_1 f'_{h_2} + \mu(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) = 0.$$

On en déduit immédiatement

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0$$

ce qui établit la proposition.

Théorème : *Les pôles d'un plan fixe par rapport à toutes les surfaces homofocales d'une même famille sont situés sur la normale à celle de ces surfaces qui touche le plan donné, au point de contact.*

En effet, le pôle d'un plan u_1, v_1, w_1, h_1 a pour coordonnées

$$x = \frac{f'_{u_1} + 2\lambda u_1}{f'_{h_1}}, \quad y = \frac{f'_{v_1} + 2\lambda v_1}{f'_{h_1}}, \quad z = \frac{f'_{w_1} + 2\lambda w_1}{f'_{h_1}}$$

Or en remarquant que le point de contact du plan (u_1, v_1, w_1, h_1) avec la surface λ_1 est

$$x_1 = \frac{f'_{u_1} + 2\lambda_1 u_1}{f'_{h_1}}, \quad y_1 = \frac{f'_{v_1} + 2\lambda_1 v_1}{f'_{h_1}}, \quad z = \frac{f'_{w_1} + 2\lambda_1 w_1}{f'_{h_1}}$$

et en posant
$$2(\lambda - \lambda_1) = \kappa \times f_{h_1}$$
on peut écrire

$$x = x_1 + \kappa u_1, \quad y = y_1 + \kappa v_1, \quad z = z_1 + \kappa w_1 .$$

Il en résulte bien que le point x, y, z est sur la normale au plan donné au point x_1, y_1, z_1 puisque les cosinus directeurs de cette normale sont, on le sait, proportionnels aux coordonnées u_1, v_1, w_1 de ce plan.

Remarque.—A une famille de surfaces homofocales correspond en vertu du principe du dualité, une famille de surfaces

$$f(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

passant par la courbe d'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

Aux propriétés établies plus haut correspondent les propriétés corrélatives suivantes.

I. *Il existe trois surfaces de la famille* (4) *tangentes à un plan donné, et les droites qui joignent l'origine, centre du cône isotrope, aux trois points de contact sont rectangulaires.*

https://doi.org/10.1017/S001309150000167X Published online by Cambridge University Press

En effet, soit (u, v, w, h) un plan tangent à (4) on aura

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x + \lambda x &= \rho u \\ \tfrac{1}{2} f'_y + \lambda y &= \rho v \\ \tfrac{1}{2} f'_z + \lambda z &= \rho w \\ \tfrac{1}{2} f'_t \qquad &= \rho h \end{aligned}$$

$$ux + vy + wz = ht = 0.$$

Les points de contact s'obtiendront en remplacant λ par les trois racines de l'équation qui exprime que ce système a une solution en x, y, z, t, ρ.

Désignons par (x_1, y_1, z_1, t_1) une des solutions du système, correspondant à la racine λ_1, le point (x, y, z, t) correspondant à la valeur λ. On peut écrire

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_{x_1} + \lambda_1 x_1 &= \rho_1 u \\ \tfrac{1}{2} f'_{y_1} + \lambda_1 y_1 &= \rho_1 v \\ \tfrac{1}{2} f'_{z_1} + \lambda_1 z_1 &= \rho_1 w \\ \tfrac{1}{2} f'_{t_1} \qquad &= \rho_1 h \end{aligned}$$

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + ht_1 = 0.$$

Multiplions respectivement par (x_1, y_1, z_1, t_1) les quatre premières relations du premier système, puis ajoutons, en tenant compte de la dernière relation du second système, il vient

$$\tfrac{1}{2}(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z + t_1 f'_t) + \lambda\,(xx_1 + yy_1 + zz_1) = 0.$$

En opérant de même sur le second système on a

$$\tfrac{1}{2}(x\, f'_{x_1} + y\, f'_{y_1} + z\, f'_{z_1} + t\, f'_{t_1}) + \lambda_1(x_1 x + y_1 y + z_1 z) = 0.$$

En retranchant ces deux relations membre à membre, il vient puisque $(\lambda - \lambda_1) \gtreqless 0$

$$x\, x_1 + y\, y_1 + z\, z_1 = 0.$$

On démontrerait de même,

$$\begin{aligned} x\, x_2 + y\, y_2 + z\, z_2 &= 0 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition.

Interprétation géométrique.—Une surface (4) tangente au plan (u, v, w, h) est coupée par ce plan suivant deux droites formant l'un des couples de sécantes communes aux coniques sections du plan donné par les deux surfaces (5) et (6). Le point de contact est donc un sommet du triangle conjugué commun à ces deux coniques. Le tétraèdre formé par les droites joignant les trois points de contact du même plan et des trois surfaces (4), à l'origine, est donc conjugué par rapport au cône isotrope. Par suite les trois arêtes issues du sommet du cône sont rectangulaires.

On établirait aussi simplement la seconde propriété corrélative à savoir: *Les deux droites qui joignent l'origine à deux points conjugués par rapport à deux surfaces de la famille* (4) *sont rectangulaires.*

La troisième propriété peut s'énoncer ainsi. *Les plans polaires d'un point fixe par rapport à toutes les surfaces de la famille* (4) *passent par une droite fixe, intersection du plan tangent à la surface particulière qui passe au point donné, en ce point par le plan mené par l'origine perpendiculairement à la droite joignant le point donnè à l'origine.*

On montre en effet que les coordonnées de l'un quelconque de ces plans ont la forme

$$\begin{aligned} x &= u_1 + kx_1 \\ y &= v_1 + ky_1 \\ z &= w_1 + kz_1 \\ h &= h_1 \end{aligned}$$

où u_1, v_1, w_1, h_1 sont les coordonnées du plan tangent à la surface λ_1 qui passe par le point donné (x_1, y_1, z_1, t_1).

II. Sections Circulaires; sommets d'une quadrique en coordonnées tangentielles.

Problème:—*Une surface du second ordre étant définie par son équation tangentielle, exprimer qu'un plan u, v, w, h la coupe suivant un cercle.*

Il suffit évidemment de considérer ici le cône asymptote de la surface donnée. Supposons l'origine des coordonnées au sommet de ce cône, et désignons par p, q, r les coordonnées d'un plan tangent quelconque à ce cône, en sorte que son équation tangentielle soit

$$f(p, q, r) = 0.$$

Le point de contact du plan (p, q, r) situé dans le plan de l'infini a pour coordonnées ponctuelles

$$t=0,\ x=f'_p,\ y=f'_q,\ z=f'_r.$$

Ce point sera dans le plan (u, v, w, h) si on a

$$uf'_p+vf'_q+wf'_r=0. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

En y joignant

$$f(p, q, r)=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

on obtient les valeurs de (p, q, r) définissant une génératrice passant par le point de contact considéré. La section plane (u, v, w, h) sera un cercle si le point de contact en question est sur la surface

$$x^2+y^2+z^2=0$$

c'est à dire, si l'on a

$$(f'_p)^2+(f'_q)^2+(f'_r)^2=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

Il faudra donc écrire que les équations (1), (2), et (3) ont un système de solutions communes en p, q, r.

On peut interpréter cette condition en remarquant que si (p, q, r) représentaient les coordonnées d'un point, ce serait exprimer que le plan (1) contient les génératrices communes aux deux cônes (2) et (3).

Le calcul peut être dirigé ainsi : on a

$$pf'_p+qf'_q+rf'_r=0$$

et aussi

$$uf'_p+vf'_q+wf'_r=0$$

d'où

$$\frac{f'_p}{wq-vr}=\frac{f'_q}{ur-wp}=\frac{f'_r}{vp-uq}$$

On est donc ramené à écrire que les équations

$$f(p, q, r)=0$$
$$uf'_p+vf'_q+wf'_r=0$$
$$(wq-vr)^2+(ur-wp)^2+(vp-uq)^2=0,$$

ont un système de solutions communes en p, q, r.

Dans certains cas il est plus simple, pour exprimer que le plan u, v, w, h est un plan cyclique du cône, de considérer le cône

https://doi.org/10.1017/S001309150000167X Published online by Cambridge University Press

réciproque. Le plan donné coupant le premier cône suivant deux droites isotropes, les plans tangents au second cône par la droite perpendiculaire au plan donné passeront par une des focales de ce cône. Chacun de ces plans touche en effet le premier cône le long d'une des génératrices isotropes. On aura donc à exprimer que la droite perpendiculaire au plan (u, v, w, h) est une focale du cône réciproque du cône donné ; ce qui peut être plus simple que le calcul précédent.

PROBLÈME :—*Une surface du second ordre étant définie par son équation tangentielle, exprimer qu'un plan* (u, v, w, h) *la coupe suivant une hyperbole équilatère.*

On prendra l'équation ponctuelle du cône réciproque du cône asymptote de la surface donnée, soit

$$f(x, y, z) = 0$$

et il suffira d'écrire que les plans tangents menés à ce cône par la droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à u, v, w, sont rectangulaires. On est ramené à une question bien connue.

PROBLÈME :—*Une surface du second ordre étant définie par son équation tangentielle, trouver les sommets de cette surface.*

Ecrivons l'équation donnée sous la forme

$$f(u, v, w, h) = \phi(u, v, w) + 2Ph + h^2 = 0$$

où l'on a posé

$$\phi(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv$$
$$P = cu + c'v + c''w.$$

Le centre de la surface est le pôle du plan de l'infini. Ses coordonnées ponctuelles sont donc c, c', et c''.

Le point de contact du plan u, v, w, h a pour coordonnées ponctuelles

$$\frac{\phi'_u + 2ch}{2P + 2h}, \quad \frac{\phi'_v + 2c'h}{2P + 2h}, \quad \frac{\phi'_w + 2c''h}{2P + 2h}.$$

Les paramètres directeurs de la droite qui joint le centre au point de contact, c'est à dire, du diamètre conjugué du plan u, v, w sont donc

$$\frac{\phi'_u + 2ch}{2P + 2h} - c, \quad \frac{\phi'_v + 2c'h}{2P + 2h} - c', \quad \frac{\phi'_w + 2c''h}{2P + 2h} - c''$$

quantités proportionnelles à

$$\phi'_u - 2cP, \quad \phi'_v - 2c'P, \quad \phi'_w - 2c''P.$$

Ce sera un axe de la surface si on a

$$\frac{\phi'_u - 2cP}{u} = \frac{\phi'_v - 2c'P}{v} = \frac{\phi'_w - 2c''P}{w}$$

Désignons par $2s$ la valeur de ces rapports, et développons les expressions ϕ'_u, ϕ'_v. ϕ'_w, nous obtenons les équations

$$(a - c^2 - s)u + (b'' - cc')v + (b' - cc'')w = 0$$
$$(b'' - cc')u + (a' - c'^2 - s)v + (b - c'c'')w = 0$$
$$(b' - cc'')u + (b - c'c'')v + (a'' - c''^2 - s)w = 0.$$

La forme de ces équations conduit à considérer la fonction homogène

$$\begin{aligned} F(u, v, w) = {} & (a - c^2)u^2 + (a' - c'^2)v^2 + (a'' - c''^2)w^2 + \\ & 2(b - c'c'')wv + 2(b' - c''c)uw + 2(b'' - cc')uv. \end{aligned}$$

Les premiers membres des équations précédentes sont les trois derivées partielles de la forme

$$F(u, v, w) - s(u^2 + v^2 + w^2).$$

La question est donc identique à celle qui concerne l'équation en s d'une quadrique en coordonnées ponctuelles. On remarquera toutefois qu'ici l'équation contient les coefficients c, c', c'' des termes qui correspondent aux termes du premier degré dans l'équation ponctuelle d'une quadrique.

Ayant déterminé les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - c^2 - s & b'' - cc' & b' - cc'' \\ b'' - cc' & a' - c'^2 - s & b - c'c'' \\ b' - cc'' & b - c'c'' & a'' - c''^2 - s \end{vmatrix} = 0$$

on les portera dans le système des équations précédentes, qui fournira les valeurs de u, v, w correspondant aux plans principaux de la surface. L'équation

$$\phi(u, v, w) + 2Ph + h^2 = 0$$

où l'on portera ces valeurs de u, v, w donnera deux valeurs de h qui feront connaître les deux plans tangents parallèles au plan principal et par suite détermineront les points de contact ou sommets correspondants de la surface.

https://doi.org/10.1017/S001309150000167X Published online by Cambridge University Press