ZUR ISOPERIMETRISCHEN UNGLEICHUNG FÜR k-DIMENSIONALE KONVEXE POLYEDER

H. HADWIGER

Für ein eigentliches konvexes Polyeder P des k-dimensionalen euklidischen Raumes gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$F^k / V^{k-1} \geqq \omega_k k^k, \tag{1}$$

wobei V das Volumen und F die Oberfläche von P bedeuten; die Grösse ω_k bezeichnet das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, also

$$\omega_k = \pi^{\frac{k}{2}} / \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right). \tag{2}$$

Ist nun n die Anzahl der Seitenflächen von P, so lässt sich (1) verschärfen zu

$$F^k / V^{k-1} \geqq n k^{k-1} \chi\left[\frac{k\omega_k}{n}\right], \tag{3}$$

wo die Hilfsfunktion χ durch den Ansatz

$$\chi(\sigma) = \omega_{k-1} \operatorname{tg}^{k-1} \tau \tag{4}$$

gegeben und $\tau = \tau(\sigma)$ durch die Relation

$$\int_0^\tau \sin^{k-2} \alpha \, d\alpha = \sigma / (k-1) \omega_{k-1} \tag{5}$$

festgelegt ist. Im Falle $k = 2$, d.h. für ein konvexes Polygon mit Umfang F und Flächeninhalt V, ergibt sich die bekannte klassische Ungleichung

$$F^2 / V \geqq 4 n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \tag{6}$$

wo das Gleichheitszeichen für das reguläre n-Eck gilt. Im Falle $k = 3$ erhält man für ein konvexes Polyeder mit Oberfläche F und Rauminhalt V die schon von *M. Goldberg*[1] angegebene Ungleichung

$$F^3 / V^2 > 36 \pi \frac{n(n-1)}{(n-2)^2}. \tag{7}$$

Hier sind allerdings schärfere Ungleichungen bekannt. Nach *M. Goldberg* und

Received February 21, 1952.

[1] *M. Goldberg,* The isoperimetric Problem for Polyhedra. Tôhoku Math. J. **40** (1935), 226–236.

L. Fejes-Tóth[2] gilt

(8) $$F^3/V^2 \geqq 54\,(n-2)T_n(3\,T_n^2-1)/(T_n^2+1) \qquad \left(T_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{6\,n-12}\right),$$

wo das Gleichheitszeichen bei $n=4$ für das reguläre Tetraeder, bei $n=6$ für den Würfel und bei $n=12$ für das reguläre Dodekaeder beansprucht wird. Diese Polyeder sind bezüglich des isoperimetrischen Quotienten F^3/V^2 extremal.

Eine entsprechende Ungleichung, die so scharf ist, dass sie gewisse Extremalpolyeder zu bezeichnen vermag, ist für $k>3$ u.W. bisher nicht gefunden worden und die Verallgemeinerung der sich auf den gewöhnlichen Raum beziehenden Ergebnisse scheint schwierig zu sein.

In der vorliegenden Note soll ein einfacher Nachweis für die weniger leistungsfähige Ungleichung (3) gegeben werden, die andererseits aber doch eine wesentliche Verschärfung der klassichen Ungleichung (1) darstellt.[3]

I.

Es sei T ein konvexer[4] Bereich auf der $(k-1)$-dimensionalen Einheitssphäre S (Oberfläche der k-dimensionalen Einheitskugel). Punkte von S wollen wir durch die im Mittelpunkt Z von S angreifenden Einheitsvektoren s bezeichnen. Es gibt einen Punkt s^0, sodass T ganz im Innern der durch $(s, s^0)>0$ charakterisierten Halbeinheitssphäre S^0 liegt, wenn wir zusätzlich noch voraussetzen, dass der sphärische Durchmesser von T kleiner als π ausfällt. Weiter bedeute E die $(k-1)$-dimensionale Tangentialebene an S im Punkte s^0. Projiziert man den sphärischen konvexen Bereich T vom Zentrum Z aus auf die Tangentialebene E, so entsteht dort der euklidische konvexe Bereich $\overline{T}$. Nun gilt

Lemma 1. *Bezeichnet σ bzw. $\bar{\sigma}$ den $(k-1)$-dimensionalen sphärischen bzw. euklidischen Flächeninhalt des Bereiches T bzw. seiner Zentralprojektion $\overline{T}$ auf die Tangentialebene E, so ist $\bar{\sigma}\geqq\chi(\sigma)$, wobei χ die mit* (4) *und* (5) *eingeführte Hilfsfunktion ist.*

Beweis: Durch die Bedingung $(s, s^0)=\cos\alpha$ wird auf S eine $(k-2)$-dimensionale Sphäre vom Radius $\sin\alpha$ fixiert. Ihr Durchschnitt mit T ist ein $(k-2)$-dimensionaler Bereich T_α. Machen wir für den $(k-2)$-dimensionalen sphärischen Flächeninhalt von T_α den Ansatz (9) $(k-1)\omega_{k-1}\sin^{k-2}\alpha\, p(\alpha)$, so wird dadurch eine Funktion $p(\alpha)$ festgelegt, für welche (10) $0\leqq p(\alpha)\leqq 1$ gilt; ausserdem gibt es ein τ_0 $(0<\tau_0<\pi/2)$, sodass (11) $p(\alpha)=0$ für alle $\tau_0<\alpha<\pi/2$

[2] *M. Goldberg* loc. cit.; *L. Fejes-Tóth*, The isepiphan problem for n-hedra. Amer. J. Math. **70** (1948), 174-180.

[3] Betrachten wir bei pielsweise den Fall $k=3$, $n=4$, so erhalten wir (1) $F^3/V^2\geqq 113{,}09\ldots$; (3) $F^3/V^2\geqq 339{,}29\ldots$; (8) $F^3/V^2\geqq 374{,}12\ldots$.

[4] Die Bedingung der Konvexität ist hier nicht wesentich.

wird. Für die Flächeninhalte σ und $\bar{\sigma}$ gewinnt man leicht die Integrale

$$\sigma=(k-1)\omega_{k-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}\alpha\, p(\alpha)\, d\alpha\,; \tag{12}$$

$$\bar{\sigma}=(k-1)\omega_{k-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}\alpha\, p(\alpha)\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}. \tag{13}$$

Die Konvergenz des Integrals (13) ergibt sich nach Bemerkung (11).

Wir wählen jetzt τ so, dass die Relation (5) erfüllt ist. Offendar gilt dann $0<\tau\leqq\tau_0$. Nun zerlegen wir das Integral (13), indem wir

$$\bar{\sigma}=(k-1)\omega_{k-1}[\xi-\eta+\zeta] \tag{14}$$

und

$$\xi=\int_0^{\tau}\sin^{k-2}\alpha\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^{k-1}\tau}{k-1}\,; \tag{15}$$

$$\eta=\int_0^{\tau}\sin^{k-2}\alpha[1-p(\alpha)]\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}\,; \tag{16}$$

$$\zeta=\int_{\tau}^{\pi/2}\sin^{k-2}\alpha\, p(\alpha)\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}\,; \tag{17}$$

setzen. Anschliessend schätzen wir

$$\eta\leqq\frac{1}{\cos^k\tau}\int_0^{\tau}\sin^{k-2}\alpha[1-p(\alpha)]d\alpha\,; \tag{18}$$

$$\zeta\geqq\frac{1}{\cos^k\tau}\int_{\tau}^{\pi/2}\sin^{k-2}\alpha\, p(\alpha)\, d\alpha \tag{19}$$

und gewinnen mit Berücksichtigung von (5) sodann

$$-\eta+\zeta\geqq 0, \tag{20}$$

sodass sich nun mit (14) und (15)

$$\bar{\sigma}\geqq\omega_{k-1}\,\mathrm{tg}^{k-1}\tau \tag{21}$$

ergibt. Vergleicht man (4) und (5) mit (21), so bemerkt man, dass die Behauptung von Lemma 1 bewiesen ist.

II.

Es sei jetzt P_0 ein Tangentialpolyeder der Einheitskugel mit n Seitenflächen. F_0 bezeichne seine Oberfläche und V_0 sein Volumen; der isoperimetrische Quotient ist F_0^k/V_0^{k-1}. Es gilt dann

LEMMA 2. *Der isoperimetrische Quotient eines Tangentialpolyeders erfüllt die Ungleichung* $F_0^k/V_0^{k-1}\geqq nk^{k-1}\chi\left[\frac{k\omega_k}{n}\right]$, *wobei* χ *die mit* (4) *und* (5) *einge-*

https://doi.org/10.1017/S0027763000015427 Published online by Cambridge University Press

führte Hilfsfunktion ist.

Beweis: Mit $\overline{T}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) wollen wir die ($k-1$)-dimensionalen Seitenflächen von P_0 bezeichnen. Projizieren wir diese gegen das Zentrum Z der dem Polyeder P_0 eingeschriebenen Einheitskugel auf die entsprechende ($k-1$)-dimensionale Einheitssphäre, so entstehen die sphärischen konvexen Bereiche T_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), deren Durchmesser kleiner als π sind. Sind jetzt $\bar{\sigma}_\nu$ bzw. σ_ν die Flächeninhalte von $\overline{T}_\nu$ bzw. T_ν, so gilt nach Lemma 1

$$\bar{\sigma}_\nu \geqq \chi(\sigma_\nu), \quad \text{also} \quad F_0 = \sum_1^n \bar{\sigma}_\mu \geqq \sum_1^n \chi(\sigma_\nu). \tag{22}$$

Wie man auf Grund (4) und (5) leicht verifiziert, gilt

$$\chi'(\sigma) = 1/\cos^k \tau \tag{23}$$

und weiter

$$\chi''(\sigma) = k/(k-1)\omega_{k-1} \cos^{k+1}\tau \sin^{k-3}\tau \geqq \sigma, \tag{24}$$

woraus erhellt, dass die Funktion χ konvex ist. Demzufolge lässt sich auf

$$\sum_1^n \chi(\sigma_\nu) \geqq n\chi\left[\frac{1}{n}\sum_1^n \sigma_\nu\right] = n\chi\left[\frac{k\omega_k}{n}\right] \tag{25}$$

schliessen, wenn man weiter bedenkt, dass die sphärischen Bereiche T_ν in ihrer Gesamtheit die ganze ($k-1$)-dimensionale Einheitssphäre ausmachen. Mit (22) ergibt sieh zunächst

$$F_0 \geqq n\chi\left[\frac{k\omega_k}{n}\right] \tag{26}$$

und dann mit Rücksicht auf die für Tangentialpolyeder gültige Relation

$$F_0 = kV_0 \tag{27}$$

die Behauptung von Lemma 2.

III.

Es sei nun endlich P ein beliebiges konvexes Polyeder mit n Seitenflächen. Diesem lässt sich ein Tangentialpolyeder P_0 der Einheitskugel mit ebenfalls n Seitenflächen, die zu den entprechenden von P parallel sind, zuordnen. Hier gilt nun das bekannte von *H. Minkowski*[5] bewiesene

LEMMA 3. (Theorem von *L. Lindelöf*[6]) *Vergleicht man den isoperimetrischen Quotienten eines konvexen Rolyeders P mit demjenigen des zugeord-*

[5] *H. Minkowski*, Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder. Ges. Abh. Bd. 2, 122–127, 103–121 (Leipzig und Berlin 1911).

[6] *L. Lindelöf*, Propriétés générales des polyedres. St. Petersburg Bull. Ac. Sc. **14** (1869), 258–269.

neten Tangentialpolyeders P_0, *so ergibt sich* $F^k/V^{k-1} \geqq F_0^k/V_0^{k-1}$.

Beweis: Dieser ergibt sich als einfache Folgerung aus dem *Brunn-Minkowski*'sche Lehrsatz in der folgenden Weise:[7] Es bezeichne $V(\rho)$ das Volumen des äusseren Parallelpolyeders von P im Abstand ρ.[8] Bildet man die Funkion

$$f(\rho) = \sqrt[k]{V(\rho)}, \tag{28}$$

deren Ableitung[9] durch

$$f'(\rho) = \frac{1}{k}\sqrt[k]{F^k(\rho)/V^{k-1}(\rho)} \tag{29}$$

gegeben ist, so steht nach dem *Brunn-Minkowski*'schen Satz fest, dass $f(\rho)$ konkav, $f'(\rho)$ demnach monoton fallend ist. Also hat man

$$f'(\sigma) \geqq \lim_{\rho\to\infty} f'(\rho), \tag{30}$$

und hieraus folgt leicht die Behauptung von Lemma 3, wenn man bedenkt, dass das im Verhältnis $\rho : 1$ ähnlich verkleinerte äussere Parallelpolyeder von P im Abstand ρ gegen das Tangential-Polyeder P_0 konvergiert, wenn ρ gegen ∞ strebt.

IV.

Die Richtigkeit der Ungleichung (3) folgt nun unmittelbar aus den Aussagen von Lemma 2 und Lemma 3.

Überprüfen wir die Beweiskonstruktionen und insbesondere die Möglichkeiten geometrischer Interpretationen, so erkennen wir, dass sich die abgeleitete Ungleichung (3) auf ein "fiktives Tangentialpolyeder" bezieht, dessen Seitenflächen kongruente $(k-1)$-dimensionale Kugeln sind.[10] Nur im Falle $k=2$ stellt dieses fiktive Gebilde ein existentes Polyeder dar und nur hier kann in der Ungleichung das Gleichheitszeichen zur Geltung gebracht werden.

V.

Für die konvexe Funktion χ gilt nach (23) $\chi'(\sigma) \geqq 1$ und demnach ist $\chi(\sigma)$

---

[7] Vgl auch Hinweis in *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. (Berlin 1934) § 12, Seite 111.

[8] Das Polyeder P wird als Durchschnitt von n Halbräumen aufgefasst. Dann lässt sich das äussere Parallelpolyeder i.A. als Durchschnitt von n parallelen Halbräumen interpretieren, die um den Betrag ρ in den Richtungen der nach aussen gerichteten Normalvektoren verschoben sind. Das gleiche Polyeder lässt sich auch durch die Minkowskische Summe $P \times \rho P^0$ darstellen.

[9] Bekanntlich ist die Volumfunktion $V(\rho)$ für $\rho > 0$ differenzierbar und es gilt $V'(\rho) = F(\rho)$. Für $\rho = 0$ ist die rechtsseitige Ableitung vorhanden; zu beachten ist weiter, dass $F(\rho)$ stetig ist.

[10] Es handelt sich hier um das k-dimensionale Analogon zum "Circle Ideal" von *M. Goldberg* (loc. cit. 227).

$\geqq \sigma$ für $\sigma \geqq 0$. Hieraus resultiert insbesondere

(31) $$nk^{k-1}\chi\left[\frac{k\omega_k}{n}\right] \geqq k^k\omega_k,$$

wodurch gezeigt ist, dass Ungleichung (3) eine Verschärfung von (1) dar stellt.

Bern, Schweiz