

SUR L'ÉTUDE DE L'ENTROPIE DES APPLICATIONS MÉROMORPHES

HENRY DE THÉLIN

*Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), F-93430,
Villetaneuse, France (dethelin@math.univ-paris13.fr)*

(Reçu le 14 novembre 2016 ; révisé le 4 octobre 2017 ; accepté le 6 octobre 2017 ;
première publication en ligne le 2 novembre 2017)

Résumé Nous construisons un espace adapté à l'étude de l'entropie des applications méromorphes en utilisant des limites projectives. Nous en déduisons un principe variationnel pour ces applications.

Abstract We construct a space which is useful in order to study the entropy of meromorphic maps by using projective limits. We deduce a variational principle for meromorphic maps.

Keywords: dynamique complexe; entropie

2010 *Mathematics subject classification:* 32H50 ; 32Qxx

Introduction

Soit X une variété complexe compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ une application méromorphe dominante. C'est la donnée d'un sous-ensemble analytique $\Gamma(f)$ irréductible de dimension k dans $X \times X$ (le graphe de f) avec $p_{1|\Gamma(f)} : \Gamma(f) \rightarrow X$ la restriction à $\Gamma(f)$ de la projection sur la première coordonnée holomorphe, surjective et dont les fibres génériques sont réduites à un point, et $p_{2|\Gamma(f)} : \Gamma(f) \rightarrow X$ la restriction à $\Gamma(f)$ de la projection sur la seconde coordonnée holomorphe et surjective.

L'application f est holomorphe en dehors d'un sous-ensemble analytique $I = I(f)$ de X qui est l'ensemble des points x avec $\{p_1^{-1}(x)\} \cap \Gamma(f)$ de dimension supérieure ou égale à 1. L'ensemble $I = I(f)$ est de codimension au moins 2 et il est appelé ensemble d'indétermination de f .

Un enjeu majeur en dynamique méromorphe est le calcul de l'entropie topologique $h_{\text{top}}(f)$ de f (voir le paragraphe 2 pour sa définition). En effet, cette question est liée à l'existence de mesures hyperboliques pour f (voir [5]).

Si (X, ω) est une variété kählérienne compacte, des outils qui permettent d'étudier cette entropie existent : ce sont les degrés dynamiques. Voici leur construction : pour $l = 0, \dots, k$, si l'on note $[\Gamma(f)]$ le courant d'intégration sur $\Gamma(f)$, la forme $f^*(\omega^l) =$

$(p_1)_*(p_2^*(\omega^l) \wedge [\Gamma(f)])$ est à coefficients L^1 . On peut donc considérer

$$\delta_l(f) = \int f^*(\omega^l) \wedge \omega^{k-l},$$

et le l -ième degré dynamique est défini par $d_l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta_l(f^n))^{1/n}$. L'existence de cette limite a été obtenue par A. Russakovskii et B. Shiffman dans le cas où $X = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ (voir [14]) et par T.-C. Dinh et N. Sibony quand (X, ω) est une variété kählérienne compacte (voir [7] et [8]).

Dans ce contexte, M. Gromov (voir [9]), pour le cas où f est holomorphe, et T.-C. Dinh et N. Sibony (voir [7] et [8]), pour le cas méromorphe, ont montré que l'entropie topologique de f est toujours majorée par $\max_{l=0, \dots, k} \log d_l$.

Il y a de nombreux travaux qui portent sur la minoration de cette entropie topologique, ainsi que sur la construction de mesures avec une entropie métrique maximale. La situation est beaucoup plus délicate que pour les applications lisses : par exemple, il existe des applications méromorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec $d_1 = d_2 = 2$ (le degré topologique vaut donc 2) qui sont d'entropie nulle (voir [10]). V. Guedj conjecture dans [10] que lorsqu'il y a un degré dynamique qui domine strictement tous les autres, alors $h_{\text{top}}(f) = \max_{l=0, \dots, k} \log d_l$.

L'idée dans cet article va être de considérer des éclatements de X dans le lieu d'indétermination de f et de relever f en une application méromorphe dans cet espace. Ensuite, nous recommencerons avec la nouvelle application et nous produirons donc une suite d'espaces X_n et des applications méromorphes $F_n : X_n \rightarrow X_n$ qui relèvent f . Enfin, il s'agira de prendre une limite projective sur les (X_n) . Nous obtiendrons ainsi un espace particulièrement bien adapté à l'étude de la dynamique de f . Signalons qu'une telle construction a été réalisée dans [12] pour un cas particulier et notons aussi le lien avec [2] et [3], où les auteurs considèrent l'espace constitué de tous les éclatements de la variété.

Nous détaillerons le procédé d'éclatements dans le paragraphe 1. Nous aboutirons à une situation qui peut être formalisée de la façon plus générale suivante.

Notons $X_0 = X$ et $F_0 = f$, et admettons que l'on ait une suite (X_n) de variétés complexes compactes de dimension k et $F_n : X_n \rightarrow X_n$ une suite d'applications méromorphes dominantes telles que, pour tout $n \geq 1$, on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{F_n} & X_n \\ \pi_n \downarrow & \searrow \tau_n & \downarrow \pi_n \\ X_{n-1} & \xrightarrow{F_{n-1}} & X_{n-1} \end{array}$$

où $\pi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ est holomorphe, surjective et avec ses fibres génériques réduites à un point, et $\tau_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ holomorphe et surjective. Nous supposons aussi que

$$\{x \in X_{n-1}, \dim(\pi_n^{-1}(x)) \geq 1\} \subset I(F_{n-1})$$

où $I(F_{n-1})$ est l'ensemble d'indétermination de F_{n-1} .

On considère alors la limite projective $X_\infty = \varprojlim X_n$ qui est simplement ici

$$X_\infty = \left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 0} X_n, \pi_n(x_n) = x_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \right\}.$$

Nous munissons X_n d'une métrique dist_n compatible avec sa topologie (pour tout $n \geq 0$) et sur X_∞ , on définit la métrique

$$\delta(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_n(x_n, y_n)}{\alpha_n \text{diam}(X_n)}$$

avec $\widehat{x} = (x_n)$ et $\widehat{y} = (y_n)$ dans X_∞ , $\text{diam}(X_n)$ le diamètre de X_n pour dist_n et (α_n) une suite de réels strictement positifs avec $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\alpha_n} < +\infty$.

X_∞ muni de cette métrique est compact.

Nous allons maintenant définir une application $F_\infty : X_\infty \rightarrow X_\infty$ qui va relever f .

Pour $\widehat{x} = (x_n) \in X_\infty$, on pose

$$F_\infty(\widehat{x}) = (\tau_n(x_n))_{n \geq 1} \in X_\infty.$$

L'application F_∞ résout l'indétermination de f . En effet, on a la proposition suivante.

Proposition 1. F_∞ est continue.

Nous avons plusieurs systèmes dynamiques : les $F_n : X_n \rightarrow X_n$ (dont le système initial $f : X \rightarrow X$) et $F_\infty : X_\infty \rightarrow X_\infty$. Le premier objectif de cet article est de donner un lien entre les entropies topologiques associées à ces systèmes dynamiques. On va en effet montrer le théorème suivant.

Théorème 2. La suite $(h_{\text{top}}(F_n))_n$ est croissante et

$$h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n).$$

Ce type de résultat est connu lorsque les applications F_n sont continues (voir [17]).

Pour l'exemple de V. Guedj énoncé plus haut, nous verrons que $h_{\text{top}}(F_\infty) = \log 2 = \max \log d_i$. Cela renforce l'idée que F_∞ résout l'indétermination de f .

Remarquons que l'espace X_∞ et l'application F_∞ dépendent de la suite (X_n) considérée. Nous donnerons au paragraphe 1 un exemple de construction, mais il peut très bien y en avoir d'autres. Par ailleurs, nous verrons que les quantités ci-dessus ne dépendent pas du choix des distances dist_n ou de la suite (α_n) .

Le second objectif de cet article est de donner une application de la construction de l'espace X_∞ .

Pour $A \subset X$, on définit $f^{-1}(A)$ comme étant la transformée totale de A par f , c'est-à-dire $f^{-1}(A) = p_1(p_2^{-1}(A) \cap \Gamma(f))$ et

$$\widetilde{f^{-n}(A)} = f^{-1}(\dots(f^{-1}(A))\dots)$$

où le f^{-1} apparaît n fois (pour $n \in \mathbb{N}$). Remarquons que $\widetilde{f^{-n}(A)}$ peut être plus grand que $f^{-n}(A)$, en particulier quand f n'est pas algébriquement stable (voir [15]).

Le deuxième théorème de cet article est le principe variationnel suivant.

Théorème 3. On suppose tous les $\widetilde{f^{-n}(I)}$ disjoints pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$h_{\text{top}}(F_\infty) = h_{\text{top}}(f) = \sup\{h_v(f) \mid v \text{ ergodique et } v(I) = 0\}.$$

Nous verrons que l’hypothèse sur l’ensemble d’indétermination est générique en dimension 2. Par ailleurs, le principe variationnel n’est pas vrai en toute généralité (voir l’exemple 3.1 de [10]), il est donc nécessaire de poser une hypothèse sur l’ensemble d’indétermination.

Notons aussi que ce théorème est plus fort que le principe variationnel classique, qui est

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\{h_\nu(f) \text{ , } \nu \text{ ergodique et } \nu(I) = 0\}$$

car on obtient de plus que $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(F_\infty)$ (alors qu’a priori $h_{\text{top}}(F_\infty)$ est supérieur ou égal à $h_{\text{top}}(f)$).

Voici le plan de cet article. Dans un premier paragraphe, nous donnons une construction possible des espaces X_n et des diagrammes précédents. Dans le deuxième, nous prouvons la proposition 1 et le théorème 2. Ensuite, nous détaillerons le calcul de $h_{\text{top}}(F_\infty)$ sur trois exemples (dont celui de Guedj). Dans le dernier paragraphe, nous démontrerons le principe variationnel et nous terminerons par une remarque sur la généricité de l’hypothèse en dimension 2.

Remerciements. Je remercie Tien-Cuong Dinh pour les discussions que nous avons eues au sujet de cet article, de même que la referee pour ses questions et remarques qui m’ont permis d’améliorer cet article, ainsi que pour le deuxième et troisième exemples du paragraphe 3.

1. Construction des suites d’éclatements

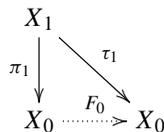
Dans ce paragraphe, nous produisons une suite de variétés complexes compactes (X_n) et d’applications méromorphes $F_n : X_n \rightarrow X_n$ qui vérifient le formalisme général donné dans l’introduction.

On part de la variété complexe compacte $X_0 = X$ de dimension k , munie d’une distance dist_0 et de $F_0 = f$ méromorphe dominante de X dans X .

Les singularités de $\Gamma(f)$ sont dans $p_1^{-1}(I) \cap \Gamma(f)$. D’après le théorème de désingularisation d’Hironaka (voir [11]), il existe une variété complexe compacte $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$, une sous-variété lisse $\widetilde{\Gamma}(f)$ de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ et une application holomorphe $\pi : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \rightarrow X \times X$ (qui est une composée d’éclatements) telles que π soit un biholomorphisme de $\widetilde{\Gamma}(f) \setminus (\pi^{-1}(p_1^{-1}(I) \cap \Gamma(f)))$ dans $\Gamma(f) \setminus (p_1^{-1}(I) \cap \Gamma(f))$. On a $\pi(\widetilde{\Gamma}(f)) = \Gamma(f)$.

Remarquons que lorsque X est kählérienne, $X \times X$ l’est aussi. En particulier, sous cette hypothèse, $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ est une variété kählérienne par un théorème de Blanchard (voir [1]) et $\widetilde{\Gamma}(f)$ aussi en tant que sous-variété de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$.

Notons $X_1 = \widetilde{\Gamma}(f)$, $\pi_1 = p_1 \circ \pi$ et $\tau_1 = p_2 \circ \pi$. On a π_1 holomorphe, surjective avec ses fibres génériques réduites à un point, et τ_1 holomorphe et surjective. Ainsi on obtient le diagramme



L'application π_1 est biméromorphe. On peut donc considérer $F_1 = \pi_1^{-1} \circ F_0 \circ \pi_1$ qui est bien définie en dehors d'un sous-ensemble analytique de X_1 . En prenant l'adhérence du graphe de F_1 dans $X_1 \times X_1$, on obtient ainsi une nouvelle application méromorphe $F_1 : X_1 \rightarrow X_1$. Comme F_0 est dominante, F_1 l'est aussi. On a bien obtenu le diagramme voulu dans l'introduction avec $n = 1$. Remarquons aussi que par construction

$$\{x \in X_0, \dim(\pi_1^{-1}(x)) \geq 1\} \subset I(F_0) = I.$$

On peut maintenant recommencer tout ce que l'on vient de faire avec X_1 à la place de X_0 et F_1 au lieu de F_0 . En itérant le procédé, on obtient ainsi une suite de variétés complexes compactes (X_n) de dimension k et des applications méromorphes $F_n : X_n \rightarrow X_n$ qui vérifient les conditions demandées dans l'introduction.

Remarquons que lorsque $X = X_0$ est kählérienne, tous les X_n le sont aussi. Comme Dinh et Sibony ont montré que les degrés dynamiques sont des invariants biméromorphes (voir [7, p. 961]), on en déduit par récurrence le lemme suivant.

Lemme 4. *Lorsque X est kählérienne, on a*

$$d_l(F_n) = d_l(F_0) = d_l(f)$$

pour tout $l = 0, \dots, k$ et $n \geq 0$.

Signalons aussi que ce résultat est vrai pour les variétés projectives sur n'importe quel corps algébriquement clos par un résultat récent de Dang (voir [4]). Voir aussi l'article de Truong [16].

2. Démonstration de la proposition 1 et du théorème 2

Commençons par rappeler la définition de $h_{\text{top}}(F_n)$ pour $F_n : X_n \rightarrow X_n$, une application méromorphe dominante. On note $I(F_n)$ son ensemble d'indétermination et

$$\Omega_n = X_n \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_n^{-m}(I(F_n)).$$

L'ensemble Ω_n est dense dans X_n car F_n est dominante et il est invariant par F_n . Alors, on définit (voir [10])

$$h_{\text{top}}(F_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max(\#G, G \text{ ensemble } (m, \epsilon)\text{-séparé dans } \Omega_n \text{ pour } F_n).$$

Dans la suite, nous allons montrer la continuité de F_∞ (proposition 1), la croissance de la suite $(h_{\text{top}}(F_n))_n$ et enfin l'égalité

$$h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n).$$

Ces résultats sont bien connus lorsque les F_n sont continues (voir la proposition 3.1.6 de [13] et le théorème 3.1 de [17]). Il s'agit ici de prendre en compte la présence de l'ensemble d'indétermination des F_n . C'est pourquoi notre approche utilise la définition d'entropie topologique ci-dessus plutôt que celle (comme dans [17]) avec les préimages (qui ne sont pas bien définies) de recouvrements par des ouverts.

Avant de prouver ces résultats, montrons que ceux-là ne dépendent pas des distances dist_n sur X_n et de la suite (α_n) choisies : cela permettra de donner une construction de distances spéciales qui simplifieront les preuves.

2.1. Indépendance des résultats aux métriques

Tout d’abord, comme X_n est compacte, l’entropie topologique $h_{\text{top}}(F_n)$ ne dépend pas de la métrique dist_n (qui définit sa topologie) que l’on a choisie (voir la proposition 3.1.2 de [13]). Cela provient du fait que deux métriques topologiquement équivalentes sont uniformément équivalentes.

Considérons maintenant deux métriques sur X_∞ construites comme dans l’introduction :

$$\delta(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_n(x_n, y_n)}{\alpha_n \text{diam}(X_n)} \text{ et } \delta'(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}'_n(x_n, y_n)}{\beta_n \text{diam}'(X_n)}$$

avec $\widehat{x} = (x_n)$ et $\widehat{y} = (y_n)$ dans X_∞ , dist_n et dist'_n des métriques sur X_n qui définissent sa topologie, $\text{diam}(X_n)$ le diamètre de X_n pour dist_n , $\text{diam}'(X_n)$ celui pour dist'_n , (α_n) et (β_n) des suites de réels strictement positifs avec $\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\alpha_n} < +\infty$ et $\beta = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\beta_n} < +\infty$.

Montrons qu’elles sont topologiquement équivalentes. Comme X_∞ est compact, il en découle comme précédemment que l’entropie topologique de F_∞ pour δ sera la même que l’entropie topologique de F_∞ pour δ' .

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\alpha_n} < \frac{\epsilon}{2}$.

Fixons n compris entre 0 et $n_0 - 1$. L’application $\text{Id} : (X_n, \text{dist}'_n) \longrightarrow (X_n, \text{dist}_n)$ est uniformément continue. Il existe donc $\eta_n > 0$ tel que pour tous $x, y \in X_n$ avec $\text{dist}'_n(x, y) < \eta_n$, on ait $\text{dist}_n(x, y) < \frac{\epsilon}{2\alpha} \text{diam}(X_n)$.

Soit

$$\eta = \min_{n=0, \dots, n_0-1} \left(\frac{\eta_n}{\beta_n \text{diam}'(X_n)} \right).$$

Pour $\widehat{x} = (x_n)$ et $\widehat{y} = (y_n)$ dans X_∞ avec

$$\delta'(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}'_n(x_n, y_n)}{\beta_n \text{diam}'(X_n)} < \eta$$

on a $\text{dist}'_n(x_n, y_n) < \eta_n$ pour $n = 0, \dots, n_0 - 1$. D’où

$$\begin{aligned} \delta(\widehat{x}, \widehat{y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_n(x_n, y_n)}{\alpha_n \text{diam}(X_n)} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_n(x_n, y_n)}{\alpha_n \text{diam}(X_n)} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\epsilon \text{diam}(X_n)}{2\alpha \alpha_n \text{diam}(X_n)} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

L’application $\text{Id} : (X_\infty, \delta') \longrightarrow (X_\infty, \delta)$ est donc uniformément continue. Par le même raisonnement, on montre que $\text{Id} : (X_\infty, \delta) \longrightarrow (X_\infty, \delta')$ l’est aussi, d’où l’équivalence des métriques δ et δ' .

L’entropie topologique $h_{\text{top}}(F_\infty)$ et la continuité de F_∞ sont donc indépendantes du choix des métriques dist_n sur X_n et de la suite (α_n) .

Nous allons maintenant construire une suite de distances dist_n sur X_n , qui aura une propriété de croissance qui permettra de simplifier les démonstrations.

Pour cela, on part de métriques dist'_n (pour $n \in \mathbb{N}$) qui définissent la topologie de X_n . En particulier, les applications $\pi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ sont holomorphes donc continues. Notons $\text{dist}_0 = \text{dist}'_0$ et $\text{dist}_1(x, y) = \text{dist}'_1(x, y) + \text{dist}_0(\pi_1(x), \pi_1(y))$ (pour $x, y \in X_1$). On a dist_1 et dist'_1 topologiquement équivalentes car π_1 est continue. En recommençant le procédé, on obtient une suite de distances dist_n qui vérifient que pour tout $n \geq 1$ et tous $x, y \in X_n$, on a $\text{dist}_n(x, y) \geq \text{dist}_{n-1}(\pi_1(x), \pi_1(y))$.

Comme on a vu que les résultats ne dépendent pas du choix des distances dist_n sur X_n ainsi que de la suite (α_n) , dans toute la suite de l'article, nous prendrons la suite de distances dist_n que nous venons de construire et $(\alpha_n) = (2^n)$. On pourra supposer aussi que le diamètre de X_0 vaut 1.

On a

$$\delta(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_n(x_n, y_n)}{2^n \text{diam}(X_n)}.$$

2.2. Continuité de F_∞

Fixons $\widehat{x} = (x_n) \in X_\infty$ et $\epsilon > 0$. Soit (\widehat{x}_m) une suite de X_∞ qui converge vers \widehat{x} .

On écrit $\widehat{x}_m = (x_{m,n})$ avec $x_{m,n} \in X_n$ pour tout $n \geq 0$. En particulier, par définition de F_∞ , on a $F_\infty(\widehat{x}_m) = (\tau_n(x_{m,n}))_{n \geq 1}$ et $F_\infty(\widehat{x}) = (\tau_n(x_n))_{n \geq 1}$.

Pour n_0 assez grand, on a $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ et alors

$$\begin{aligned} \delta(F_\infty(\widehat{x}_m), F_\infty(\widehat{x})) &= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_n(\tau_{n+1}(x_{m,n+1}), \tau_{n+1}(x_{n+1}))}{2^n \text{diam}(X_n)} \\ &\quad + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_n(\tau_{n+1}(x_{m,n+1}), \tau_{n+1}(x_{n+1}))}{2^n \text{diam}(X_n)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_n(\tau_{n+1}(x_{m,n+1}), \tau_{n+1}(x_{n+1}))}{2^n \text{diam}(X_n)} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme on a (\widehat{x}_m) qui converge vers \widehat{x} quand $m \rightarrow +\infty$, la suite $(x_{m,n})_m$ converge vers x_n quand $m \rightarrow +\infty$ pour dist_n (pour tout $n \geq 0$). Les applications τ_n sont holomorphes donc $(\tau_n(x_{m,n}))_m$ converge vers $\tau_n(x_n)$ quand m tend vers l'infini pour la métrique dist_{n-1} pour tout $n \geq 1$.

En particulier, $\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_n(\tau_{n+1}(x_{m,n+1}), \tau_{n+1}(x_{n+1}))}{2^n \text{diam}(X_n)}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$ car il n'y a qu'un nombre fini de termes dans la somme : cette quantité est donc plus petite que $\frac{\epsilon}{2}$ pour m assez grand et la proposition 1 est démontrée.

2.3. Croissance de $(h_{\text{top}}(F_n))_n$

Montrons que la suite $(h_{\text{top}}(F_n))_n$ est croissante.

On fixe $n \geq 1$. Soit $\gamma > 0$. Pour ϵ assez petit, on a

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max(\#G, G \text{ ens. } (m, \epsilon)\text{-séparé dans } \Omega_{n-1} \text{ pour } F_{n-1}) \geq h_{\text{top}}(F_{n-1}) - \gamma.$$

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$. On peut trouver $m \geq m_0$ et $\{x_1, \dots, x_N\}$ un ensemble (m, ϵ) -séparé dans Ω_{n-1} pour F_{n-1} avec $N \geq e^{(h_{\text{top}}(F_{n-1})-2\gamma)m}$.

Si l'on fixe une forme volume sur X_{n-1} , on voit que l'ensemble $\pi_n(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_n^{-m}(I(F_n)))$ est de volume nul car F_n est dominante et π_n holomorphe. Il en est de même du complémentaire de Ω_{n-1} . En particulier, quitte à bouger un peu les x_i , on peut produire des points x'_1, \dots, x'_N qui sont $(m, \frac{\epsilon}{2})$ -séparés pour F_{n-1} et dans $\Omega_{n-1} \setminus \pi_n(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_n^{-m}(I(F_n)))$. En effet, comme les points x_i sont dans Ω_{n-1} , les itérées de F_{n-1} sont continues en ces points-là.

L'application π_n est surjective, on peut donc trouver y_1, \dots, y_N dans X_n avec $\pi_n(y_i) = x'_i$ pour $i = 1, \dots, N$. Par construction, les y_i sont dans Ω_n .

Montrons maintenant que les points y_i sont $(m, \frac{\epsilon}{2})$ -séparés pour F_n .

Si $i \neq j$ avec $1 \leq i, j \leq N$, les points x'_i et x'_j sont $(m, \frac{\epsilon}{2})$ -séparés pour F_{n-1} . Il existe donc $0 \leq l \leq m - 1$ avec $\text{dist}_{n-1}(F_{n-1}^l(x'_i), F_{n-1}^l(x'_j)) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Par l'hypothèse faite sur les distances, on a

$$\text{dist}_n(F_n^l(y_i), F_n^l(y_j)) \geq \text{dist}_{n-1}(\pi_n(F_n^l(y_i)), \pi_n(F_n^l(y_j))).$$

Par définition, on a $\pi_n \circ F_n^l = F_{n-1}^l \circ \pi_n$ en dehors d'un sous-ensemble analytique de X_n . Comme y_i est dans Ω_n , on a F_n^l continue en y_i et puisque $x'_i = \pi_n(y_i)$ est dans Ω_{n-1} , on a F_{n-1}^l continue en $\pi_n(y_i)$. On a donc $\pi_n(F_n^l(y_i)) = F_{n-1}^l(\pi_n(y_i))$. Il en est de même pour y_j . En combinant cela avec l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\text{dist}_n(F_n^l(y_i), F_n^l(y_j)) \geq \text{dist}_{n-1}(F_{n-1}^l(x'_i), F_{n-1}^l(x'_j)) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a donc montré que pour tout m_0 , il existe $m \geq m_0$ et un ensemble G de Ω_n qui est $(m, \frac{\epsilon}{2})$ -séparé pour F_n avec $\#G \geq e^{(h_{\text{top}}(F_{n-1})-2\gamma)m}$.

En particulier,

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max \left(\#G, G \text{ ensemble } \left(m, \frac{\epsilon}{2} \right)\text{-séparé dans } \Omega_n \text{ pour } F_n \right) \geq h_{\text{top}}(F_{n-1}) - 2\gamma.$$

En faisant tendre ϵ puis γ vers 0, on obtient $h_{\text{top}}(F_n) \geq h_{\text{top}}(F_{n-1})$. C'est ce que l'on voulait démontrer.

2.4. Démonstration de l'égalité $h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n)$

Nous commençons par montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $h_{\text{top}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_n)$, puis que $h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n)$.

2.4.1. Preuve de $h_{\text{top}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_n)$. Soit $\gamma > 0$. Pour ϵ assez petit, on a

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max(\#G, G \text{ ensemble } (m, \epsilon)\text{-séparé dans } \Omega_n \text{ pour } F_n) \geq h_{\text{top}}(F_n) - \gamma.$$

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$. On peut trouver $m \geq m_0$ et $\{x_1, \dots, x_N\}$ un ensemble (m, ϵ) -séparé dans Ω_n pour F_n avec $N \geq e^{(h_{\text{top}}(F_n)-2\gamma)m}$.

Les applications π_l sont surjectives, il existe donc $\hat{x}_i \in X_\infty$ avec

$$\hat{x}_i = (\pi_1(\dots(\pi_n(x_i))), \dots, \pi_n(x_i), x_i, \dots)$$

pour $i = 1, \dots, N$.

Montrons que les points \widehat{x}_i sont $(m, \frac{\epsilon}{2^n \text{diam}(X_n)})$ -séparés dans X_∞ pour F_∞ .
 Soit $1 \leq i, j \leq N$ avec $i \neq j$. On a l'existence de $0 \leq l \leq m - 1$ avec

$$\text{dist}_n(F_n^l(x_i), F_n^l(x_j)) \geq \epsilon.$$

Maintenant,

$$\delta(F_\infty^l(\widehat{x}_i), F_\infty^l(\widehat{x}_j)) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)}$$

où $F_\infty^l(\widehat{x}_i) = ((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_0, \dots, (F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, \dots)$.

Calculons $(F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p$.

Notons $\widehat{x}_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,p}, \dots)$ (avec $x_{i,n} = x_i$). On a

$$F_\infty(\widehat{x}_i) = (\tau_1(x_{i,1}), \dots, \tau_{p+1}(x_{i,p+1}), \dots)$$

et en recommençant l fois

$$F_\infty^l(\widehat{x}_i) = (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_l(x_{i,l}), \dots, \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x_{i,p+l}), \dots).$$

Ainsi $(F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p = \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x_{i,p+l})$ pour $p \geq 0$. Mais, par commutativité des diagrammes, on a pour tout $l \geq 1$ et $p \geq 0$,

$$F_p^l \circ \pi_{p+1} \circ \dots \circ \pi_{p+l} = \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}.$$

En effet, deux applications méromorphes dominantes sont égales si elles ont même graphe, ou, ce qui revient au même, si elles coïncident sur un ouvert où elles sont toutes les deux holomorphes.

Comme le point $\pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{n+l}(x_{i,n+l}) = x_{i,n} = x_i \in \Omega_n$ (là où les F_n^l sont holomorphes), on obtient

$$(F_\infty^l(\widehat{x}_i))_n = F_n^l \circ \pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{n+l}(x_{i,n+l}) = F_n^l(x_i).$$

De même, $(F_\infty^l(\widehat{x}_j))_n = F_n^l(x_j)$. Finalement,

$$\begin{aligned} \delta(F_\infty^l(\widehat{x}_i), F_\infty^l(\widehat{x}_j)) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} \\ &\geq \frac{\text{dist}_n((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_n, (F_\infty^l(\widehat{x}_j))_n)}{2^n \text{diam}(X_n)} \\ &= \frac{\text{dist}_n(F_n^l(x_i), F_n^l(x_j))}{2^n \text{diam}(X_n)} \geq \frac{\epsilon}{2^n \text{diam}(X_n)}. \end{aligned}$$

Les points \widehat{x}_i sont donc bien $(m, \frac{\epsilon}{2^n \text{diam}(X_n)})$ -séparés.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max \left(\#G, G \text{ ensemble } \left(m, \frac{\epsilon}{2^n \text{diam}(X_n)} \right) \text{-séparé dans } X_\infty \text{ pour } F_\infty \right) \\ \geq h_{\text{top}}(F_n) - 2\gamma. \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ puis γ vers 0, on obtient

$$h_{\text{top}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_n)$$

pour tout $n \geq 0$.

2.4.2. Fin de la preuve de $h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n)$. Soit $\gamma > 0$. Pour ϵ assez petit, on a

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max(\#G, G \text{ ensemble } (m, \epsilon)\text{-séparé dans } X_\infty \text{ pour } F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4}$. On fixe $m \geq 1$ et l'on considère $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_N$, un ensemble maximal (m, ϵ) -séparé dans X_∞ pour l'application F_∞ et la métrique δ .

Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \bigcup_{q \geq 0} F_{m+n_0}^{-q}(I(F_{m+n_0})) \cup \pi_{m+n_0}^{-1} \left(\bigcup_{q \geq 0} F_{m+n_0-1}^{-q}(I(F_{m+n_0-1})) \right) \\ & \cup \dots \cup (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m+n_0})^{-1} \left(\bigcup_{q \geq 0} F_0^{-q}(I(F_0)) \right). \end{aligned}$$

Chaque \widehat{x}_i s'écrit $\widehat{x}_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,p}, \dots)$.

Si l'on met une forme volume sur X_{m+n_0} , on a \mathcal{I} de mesure nulle (car les F_p et les π_p sont dominantes). En particulier, on peut trouver $x'_{i,m+n_0} \in X_{m+n_0} \setminus \mathcal{I}$ suffisamment proche de $x_{i,m+n_0}$ pour que

$$\begin{aligned} \text{dist}_{q-1}(\tau_q \circ \dots \circ \tau_p \circ \pi_{p+1} \circ \dots \circ \pi_{m+n_0}(x_{i,m+n_0}), \tau_q \circ \dots \circ \tau_p \circ \pi_{p+1} \circ \dots \circ \pi_{m+n_0}(x'_{i,m+n_0})) \\ < \frac{\epsilon}{8} \end{aligned}$$

pour tout $p = 0, \dots, m+n_0$ et tout $q = 1, \dots, p+1$. En effet, toutes les applications $\tau_q \circ \dots \circ \tau_p \circ \pi_{p+1} \circ \dots \circ \pi_{m+n_0}$ sont holomorphes donc continues.

Comme les π_q sont surjectives, on peut compléter $x'_{i,m+n_0}$ pour obtenir un point $\widehat{x}'_i \in X_\infty$

$$\widehat{x}'_i = (\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m+n_0}(x'_{i,m+n_0}), \dots, \pi_{m+n_0}(x'_{i,m+n_0}), x'_{i,m+n_0}, \dots).$$

Par construction, si l'on écrit $\widehat{x}'_i = (x'_{i,0}, \dots, x'_{i,p}, \dots)$, on a

$$x'_{i,n} \in \Omega_n = X_n \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{N}} F_n^{-q}(I(F_n))$$

pour $n = 0, \dots, m+n_0$.

Montrons que les points $x'_{1,n_0}, \dots, x'_{N,n_0}$ sont $(m, \frac{\epsilon}{8})$ -séparés pour F_{n_0} .

Soit $1 \leq i, j \leq N$ avec $i \neq j$. Il existe $1 \leq l \leq m-1$ avec

$$\begin{aligned} \epsilon \leq \delta(F_\infty^l(\widehat{x}_i), F_\infty^l(\widehat{x}_j)) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} \\ &\leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} + \frac{\epsilon}{4} \\ &\leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}'_i))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i'))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j'))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} \\
 &+ \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_j'))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_i'))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} + \frac{\epsilon}{4}.
 \end{aligned}$$

Mais on a vu précédemment que

$$(F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p = \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x_{i,p+l}) = \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l} \circ \pi_{p+l+1} \circ \dots \circ \pi_{m+n_0}(x_{i,m+n_0})$$

pour $p \geq 0$ (et de même pour \widehat{x}_i' , \widehat{x}_j et \widehat{x}_j').

En particulier,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_i'))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} \\
 &= \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p(\tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x_{i,p+l}), \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x'_{i,p+l}))}{2^p \text{diam}(X_p)} \\
 &\leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\epsilon/8}{2^p \text{diam}(X_p)} \leq \frac{\epsilon}{4}
 \end{aligned}$$

(pour la dernière inégalité, on utilise le fait que $\text{diam}(X_p) \geq \text{diam}(X_0) = 1$ grâce aux hypothèses sur les distances).

Il en est de même en remplaçant i par j .

Ainsi

$$\epsilon \leq \delta(F_\infty^l(\widehat{x}_i), F_\infty^l(\widehat{x}_j)) \leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p((F_\infty^l(\widehat{x}_i'))_p, (F_\infty^l(\widehat{x}_j'))_p)}{2^p \text{diam}(X_p)} + \frac{3\epsilon}{4}.$$

Mais

$$(F_\infty^l(\widehat{x}_i'))_p = \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x'_{i,p+l}) = F_p^l \circ \pi_{p+1} \circ \dots \circ \pi_{p+l}(x'_{i,p+l}) = F_p^l(x'_{i,p})$$

pour $p = 0, \dots, n_0 - 1$ et $l = 0, \dots, m - 1$ car $x'_{i,n} \in \Omega_n$ pour $n = 0, \dots, m + n_0$, ce qui implique

$$\frac{\epsilon}{4} \leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_p(F_p^l(x'_{i,p}), F_p^l(x'_{j,p}))}{2^p \text{diam}(X_p)}.$$

Maintenant, pour $p = 1, \dots, n_0$, on a

$$\begin{aligned}
 \text{dist}_p(F_p^l(x'_{i,p}), F_p^l(x'_{j,p})) &\geq \text{dist}_{p-1}(\pi_p(F_p^l(x'_{i,p})), \pi_p(F_p^l(x'_{j,p}))) \\
 &= \text{dist}_{p-1}(F_{p-1}^l(\pi_p(x'_{i,p})), F_{p-1}^l(\pi_p(x'_{j,p}))) \\
 &= \text{dist}_{p-1}(F_{p-1}^l(x'_{i,p-1}), F_{p-1}^l(x'_{j,p-1}))
 \end{aligned}$$

toujours parce que les $x'_{i,n}$ sont dans Ω_n pour $n = 0, \dots, m + n_0$ et $i = 1, \dots, N$.

En itérant cette inégalité, on obtient ainsi

$$\frac{\epsilon}{4} \leq \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{\text{dist}_{n_0}(F_{n_0}^l(x'_{i,n_0}), F_{n_0}^l(x'_{j,n_0}))}{2^p \text{diam}(X_p)} \leq 2 \text{dist}_{n_0}(F_{n_0}^l(x'_{i,n_0}), F_{n_0}^l(x'_{j,n_0})).$$

On a bien montré que les points x'_{i,n_0} sont $(m, \frac{\epsilon}{8})$ -séparés pour F_{n_0} . Comme cette propriété est vraie pour tout $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max \left(\#G, G \text{ ensemble } \left(m, \frac{\epsilon}{8} \right)\text{-séparé dans } X_{n_0} \text{ pour } F_{n_0} \right) \\ \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max(\#G, G \text{ ensemble } (m, \epsilon)\text{-séparé dans } X_\infty \text{ pour } F_\infty) \\ \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme

$$h_{\text{top}}(F_{n_0}) \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \max \left(\#G, G \text{ ensemble } \left(m, \frac{\epsilon}{8} \right)\text{-séparé dans } X_{n_0} \text{ pour } F_{n_0} \right),$$

on a $h_{\text{top}}(F_{n_0}) \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma$ et ainsi

$$\sup_{n \geq 0} h_{\text{top}}(F_n) \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma.$$

Cela termine la démonstration du théorème.

3. Exemples de calcul de l'entropie $h_{\text{top}}(F_\infty)$

3.1. Premier exemple

Considérons tout d'abord un exemple dû à V. Guedj (voir l'exemple 1.4 dans [10]). Il s'agit de l'application $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2, y + 1)$. Elle se prolonge en une application méromorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec

$$f([x : y : z]) = [x^2 : yz + z^2 : z^2].$$

L'ensemble d'indétermination est $I = [0 : 1 : 0]$, les degrés dynamiques d_1 et d_2 sont égaux à 2 et $h_{\text{top}}(f) = 0$ (voir [10]). En effet, les orbites de points partent à l'infini (*i.e.* vers la droite ($z = 0$)) et cette droite est contractée en un point invariant.

Maintenant, si l'on fait un éclatement e_1 de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en I , on peut voir que l'application $f \circ e_1$ a encore un point d'indétermination et c'est après un second éclatement e_2 que l'on obtient X_1 . Autrement dit, on a $\pi_1 = e_1 \circ e_2$ et $\tau_1 = f \circ e_1 \circ e_2$ avec τ_1 holomorphe. Si l'on note $F_1 : X_1 \rightarrow X_1$ définie par $F_1 = e_2^{-1} \circ e_1^{-1} \circ f \circ e_1 \circ e_2$, on a $h_{\text{top}}(F_1) = \log 2$.

En effet, par T.-C. Dinh et N. Sibony (voir [7] et [8]), les degrés dynamiques sont des invariants biméromorphes (en particulier, les degrés dynamiques de F_1 sont égaux à ceux de F_0) et

$$h_{\text{top}}(F_1) \leq \max_{i=0,1,2} \log d_i(F_1).$$

On a donc $h_{\text{top}}(F_1) \leq \log 2$. Maintenant, la même démonstration qu'au paragraphe 2.3 implique que $h_{\text{top}}(F_1) \geq h_{\text{top}}(e_1^{-1} \circ f \circ e_1)$ et un calcul simple laissé au lecteur montre que

sur le diviseur exceptionnel de e_1 , l'application $e_1^{-1} \circ f \circ e_1$ possède un cercle invariant avec dynamique $\alpha \rightarrow \alpha^2$.

Considérons une suite de diagramme comme dans l'introduction que l'on construit à partir de X_1 et F_1 . On a vu que $h_{\text{top}}(F_\infty) = \sup_n h_{\text{top}}(F_n)$, ce qui implique que $h_{\text{top}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_1) \geq \log 2$. Mais comme les degrés dynamiques des F_n sont égaux à ceux de F_0 , par [7] et [8], on a $\sup_n h_{\text{top}}(F_n) \leq \log 2$, c'est-à-dire $h_{\text{top}}(F_\infty) = \log 2$.

3.2. Deuxième exemple

Considérons $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f(x, y) = (\gamma x, \frac{x^4}{y^2})$ avec $|\gamma| < 1$. Si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on a $f^n(x, y)$ qui converge vers la droite ($x = 0$) et cette droite est contractée sur le point $(0, 0)$. Par ailleurs, si l'on compactifie la dynamique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, l'application f s'étend en

$$f([x : y : z]) = [\gamma xzy^2 : x^4 : z^2y^2]$$

et la droite à l'infini ($z = 0$) se contracte aussi en un point. Remarquons que cette application n'est pas algébriquement stable.

On fait l'éclatement e_1 au point d'indétermination $(0, 0)$: dans l'une des cartes, on a $e_1(x, \beta) = (x, x\beta)$ et $f \circ e_1(x, \beta) = (\gamma x, \frac{x^2}{\beta^2})$.

On considère maintenant l'éclatement e_2 au point $(0, 0)$ (que l'on écrit dans une carte $e_2(\beta, \Lambda) = (\Lambda\beta, \beta)$) et l'on obtient $f \circ e_1 \circ e_2(\beta, \Lambda) = (\gamma\Lambda\beta, \Lambda^2)$ qui est holomorphe.

Si l'on compose au but par e_1^{-1} et e_2^{-1} , on a

$$e_1^{-1} \circ f \circ e_1 \circ e_2(\beta, \Lambda) = \left(\gamma\Lambda\beta, \frac{\Lambda}{\gamma\beta} \right)$$

puis

$$F_1(\beta, \Lambda) = e_2^{-1} \circ e_1^{-1} \circ f \circ e_1 \circ e_2(\beta, \Lambda) = \left(\frac{\Lambda}{\gamma\beta}, \gamma^2\beta^2 \right).$$

Le point $(0, 0)$ est d'indétermination pour F_1 et si l'on considère l'éclatement e_3 en ce point, on a dans une carte $e_3(\beta, \epsilon) = (\beta, \epsilon\beta)$ et donc $F_1 \circ e_3(\beta, \epsilon) = (\frac{\epsilon}{\gamma}, \gamma^2\beta^2)$. On obtient

$$F_2(\beta, \epsilon) = e_3^{-1} \circ F_1 \circ e_3(\beta, \epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{\gamma}, \frac{\gamma^3\beta^2}{\epsilon} \right).$$

Le point $(0, 0)$ est encore d'indétermination pour F_2 et l'on considère e_4 , l'éclatement en ce point. On a $e_4(\epsilon, \Gamma) = (\Gamma\epsilon, \epsilon)$ et $F_2 \circ e_4(\epsilon, \Gamma) = (\frac{\epsilon}{\gamma}, \gamma^3\Gamma^2\epsilon)$.

Enfin, on a

$$e_4^{-1} \circ F_2 \circ e_4(\epsilon, \Gamma) = \left(\gamma^3\Gamma^2\epsilon, \frac{1}{\gamma^4\Gamma^2} \right).$$

Pour cette application, la droite ($\epsilon = 0$) est invariante et la dynamique est de degré 2 dessus : on a donc une entropie topologique supérieure ou égale à $\log(2)$ pour $e_4^{-1} \circ F_2 \circ e_4$ (et donc pour F_3 aussi).

3.3. Troisième exemple

Considérons $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $f(x, y) = (\gamma x, x \frac{y^2}{y+1})$ avec $|\gamma| < 1$. Si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on a $f^n(x, y)$ qui converge vers la droite $(x = 0)$ et cette droite est contractée sur le point invariant $(0, 0)$. Par ailleurs, si l'on compactifie la dynamique dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, l'application f s'étend en

$$f([x : y : z]) = [\gamma xz(y + z) : xy^2 : z^2(y + z)]$$

et la droite à l'infini $(z = 0)$ se contracte aussi en un point.

Parmi les points d'indétermination, il y a $I = [1 : 0 : 0]$. On fait l'éclatement e_1 en ce point : dans l'une des cartes, on a $e_1(z, \alpha) = (z\alpha, z)$ (c'est-à-dire le point $[1 : z\alpha : z]$), d'où

$$f \circ e_1(z, \alpha) = [\gamma z(\alpha z + z) : \alpha^2 z^2 : z^2(\alpha z + z)] = [\gamma(\alpha + 1) : \alpha^2 : z(1 + \alpha)].$$

Si l'on compose au but par e_1^{-1} , on obtient

$$F_1(z, \alpha) = e_1^{-1} \circ f \circ e_1(z, \alpha) = \left(\frac{z}{\gamma}, \frac{\alpha^2}{z(\alpha + 1)} \right).$$

On considère maintenant l'éclatement e_2 au point $(0, 0)$ (que l'on écrit dans une carte $e_2(z, \Gamma) = (z, z\Gamma)$) et l'on a

$$F_1 \circ e_2(z, \Gamma) = \left(\frac{z}{\gamma}, \frac{z^2 \Gamma^2}{z(z\Gamma + 1)} \right) = \left(\frac{z}{\gamma}, \frac{z\Gamma^2}{z\Gamma + 1} \right).$$

Si l'on compose au but par e_2^{-1} , on obtient

$$e_2^{-1} \circ F_1 \circ e_2(z, \Gamma) = \left(\frac{z}{\gamma}, \frac{\gamma \Gamma^2}{z\Gamma + 1} \right).$$

Pour cette application, la droite $(z = 0)$ est invariante et la dynamique est de degré 2 dessus : on a donc une entropie topologique supérieure ou égale à $\log(2)$ pour $e_2^{-1} \circ F_1 \circ e_2$ (et donc pour F_2 aussi).

A travers ces trois exemples, on voit que *via* des éclatements successifs, on aboutit à des applications qui relèvent l'application initiale f et qui possèdent de l'entropie. En particulier, on peut faire la conjecture suivante.

Conjecture 5. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension k et $f : X \rightarrow X$ une application méromorphe dominante. Notons d_0, \dots, d_k ses degrés dynamiques. Alors $h_{top}(F_\infty) = \max_{l=0, \dots, k} \log d_l$.*

Remarquons que par le théorème 2, le lemme 4 et [7], [8], on a toujours $h_{top}(F_\infty) \leq \max_{l=0, \dots, k} \log d_l$.

Maintenant, si cette conjecture est vraie, comme F_∞ est continue, on peut construire par le principe variationnel des mesures de X_∞ , invariantes par F_∞ et d'entropie métrique aussi proche que l'on veut de $\max_{l=0, \dots, k} \log d_l$. La question est de savoir si l'on peut descendre ces mesures sur X tout en conservant de l'entropie. Dans le paragraphe suivant, nous donnons une condition suffisante pour réaliser cette opération (qui n'est pas possible en toute généralité par les exemples précédents).

4. Démonstration du principe variationnel

Dans ce paragraphe, on suppose que les $\widetilde{f^{-m}(I)}$ sont disjoints (pour $m \in \mathbb{N}$). Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons l'application $F_n : X_n \rightarrow X_n$ comme dans l'introduction. Son ensemble d'indétermination sera encore noté $I(F_n)$. Dans un premier temps, nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 6. *Pour $m \in \mathbb{N}$, les ensembles $\widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$ sont disjoints.*

Preuve. Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse car $\widetilde{F_0} = f$. On suppose maintenant la propriété vraie au rang $n - 1$ avec $n \geq 1$. Si les $\widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$ ne sont pas disjoints, soit

$$x \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))} \cap \widetilde{F_n^{-q}(I(F_n))}$$

avec $q > m$. Les entiers m et q sont choisis minimaux, c'est-à-dire que l'on prend le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $\widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$ rencontre un autre $\widetilde{F_n^{-q}(I(F_n))}$, puis le plus petit entier q qui vérifie cette propriété (on a donc $q > m$).

Soit Γ_{F_n} le graphe de F_n dans $X_n \times X_n$. Par récurrence, on voit que pour $m \geq 1$, $x \in \widetilde{F_n^{-m}(A)}$ est équivalent à l'existence de points x_0, \dots, x_m avec $(x_i, x_{i+1}) \in \Gamma_{F_n}$ pour $i = 0, \dots, m - 1$ (nous appellerons **chaîne** de F_n une telle suite), $x_0 = x$ et $x_m \in A$.

Ici, on a $x \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))} \cap \widetilde{F_n^{-q}(I(F_n))}$. Il existe donc deux chaînes x_0, \dots, x_m et x'_0, \dots, x'_q avec $x_0 = x'_0 = x$, $x_m \in I(F_n)$ et $x'_q \in I(F_n)$.

Comme le m est minimal, les points x_0, \dots, x_{m-1} ne sont pas dans $I(F_n)$. Par ailleurs, si $y \in X_n \setminus I(F_n)$, il existe un unique $z \in X_n$ avec $(y, z) \in \Gamma_{F_n}$. De là, on en déduit que

$$x_0 = x'_0, \dots, x_m = x'_m.$$

En particulier, dans la chaîne x'_0, \dots, x'_q , on a x'_m et x'_q qui sont dans $I(F_n)$.

Remarquons que pour $y, z \in X_n$ avec $(y, z) \in \Gamma_{F_n}$, on a $(\pi_n(y), \pi_n(z)) \in \Gamma_{F_{n-1}}$. C'est évident si y n'est pas dans $I(F_n) \cup \pi_n^{-1}(I(F_{n-1}))$ car $F_{n-1} \circ \pi_n(y) = \pi_n \circ F_n(y)$ et il suffit d'approcher y sinon.

En utilisant cette remarque, on obtient que $\pi_n(x'_0), \dots, \pi_n(x'_q)$ est une chaîne pour F_{n-1} .

Maintenant, montrons le fait suivant.

Fait. On a $I(F_n) \subset \pi_n^{-1}(F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1})))$.

Soit $y \in X_n \setminus \pi_n^{-1}(F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1})))$. Il y a deux possibilités :

- si $\pi_n(y) \in I(F_{n-1})$, alors $\tau_n(y) \notin I(F_{n-1})$, sinon, comme $\pi_n(y), \tau_n(y)$ est une chaîne pour F_{n-1} , on aurait $I(F_{n-1}) \cap F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1})) \neq \emptyset$, ce qui contredirait l'hypothèse de récurrence. Ainsi $\tau_n(y) \notin I(F_{n-1})$ et alors $\pi_n^{-1} \circ \tau_n$ est holomorphe en y car

$$\{x \in X_{n-1}, \dim(\pi_n^{-1}(x)) \geq 1\} \subset I(F_{n-1}).$$

Cela implique que $y \notin I(F_n)$

– si $\pi_n(y) \notin I(F_{n-1})$, alors $F_{n-1} \circ \pi_n(y)$ est bien défini et ne se trouve pas dans $I(F_{n-1})$. En particulier, $\pi_n^{-1} \circ F_{n-1} \circ \pi_n$ est holomorphe en y et donc $y \notin I(F_n)$.

En utilisant ce fait, il en découle que $\pi_n(x'_0), \dots, \pi_n(x'_q)$ forme une chaîne pour F_{n-1} avec $\pi_n(x'_m) \in F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1}))$ et $\pi_n(x'_q) \in F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1}))$. Autrement dit,

$$F_{n-1}^{-1}(I(F_{n-1})) \cap \widetilde{F_{n-1}^{-q+m-1}(I(F_{n-1}))} \neq \emptyset.$$

Cela contredit l’hypothèse de récurrence et termine ainsi la preuve du lemme.

Passons maintenant à la démonstration du principe variationnel (le théorème 3).

Soit $\gamma > 0$. Comme X_∞ est un espace métrique compact et que F_∞ est continue, on peut appliquer le principe variationnel à ce système dynamique, c’est-à-dire qu’il existe une probabilité ergodique $\widehat{\nu}$, invariante par F_∞ , telle que

$$h_{\widehat{\nu}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma.$$

Soit

$$\widehat{\Omega} = \left\{ \widehat{x} = (x_n) \in X_\infty, x_n \notin \bigcup_{m \geq 0} \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 7. $\widehat{\nu}(\widehat{\Omega}) = 1$.

Preuve. Si $\widehat{\nu}(\widehat{\Omega}^c) > 0$, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ avec

$$\widehat{\nu}(\{\widehat{x} = (x_n) \in X_\infty, x_n \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}\}) > 0.$$

On note \widehat{B} cet ensemble $\{\widehat{x} = (x_n) \in X_\infty, x_n \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}\}$. Par le théorème de récurrence de Poincaré, il existe $l \geq 1$ avec $F_\infty^{-l}(\widehat{B}) \cap \widehat{B} \neq \emptyset$. Soit $\widehat{x} \in F_\infty^{-l}(\widehat{B}) \cap \widehat{B}$. Si l’on écrit $\widehat{x} = (x_n)$, on a déjà vu que

$$F_\infty^l(\widehat{x}) = (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_l(x_l), \dots, \tau_{p+1} \circ \dots \circ \tau_{p+l}(x_{p+l}), \dots).$$

On a donc $x_n \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$ et $(F_\infty^l(\widehat{x}))_n = \tau_{n+1} \circ \dots \circ \tau_{n+l}(x_{n+l}) \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$.

Mais on peut voir facilement que

$$\pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{n+l}(x_{n+l}), \pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{n+l-1} \circ \tau_{n+l}(x_{n+l}), \dots, \tau_{n+1} \circ \dots \circ \tau_{n+l}(x_{n+l})$$

forme une chaîne pour F_n .

Comme $\pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{n+l}(x_{n+l}) = x_n$, on a donc obtenu une chaîne pour F_n qui part de $x_n \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$ et va jusqu’à $\tau_{n+1} \circ \dots \circ \tau_{n+l}(x_{n+l}) \in \widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))}$. Cela implique que

$$\widetilde{F_n^{-m}(I(F_n))} \cap \widetilde{F_n^{-m-l}(I(F_n))} \neq \emptyset$$

et l’on obtient ainsi une contradiction.

Nous avons donc montré que $\widehat{\nu}(\widehat{\Omega}) = 1$.

Considérons maintenant $p : X_\infty \rightarrow X_0 = X$ qui à $\hat{x} = (x_n)$ associe $p(\hat{x}) = x_0$.

Tout d'abord, par définition de $\widehat{\Omega}$, on a $p(\widehat{\Omega}) \subset \Omega = X \setminus \cup_{n \geq 0} f^{-n}(I)$. Ensuite, p est injective sur $\widehat{\Omega}$. On a même une propriété un peu plus forte : si $p(\hat{x}) = x_0 = p(\hat{x}')$ avec $\hat{x} = (x_n) \in \widehat{\Omega}$ et $\hat{x}' = (x'_n)$ un point quelconque de X_∞ , alors $\hat{x} = \hat{x}'$. En effet, si ce n'est pas le cas, on considère $l \geq 1$ le plus entier tel que $x_l \neq x'_l$. Mais $x_{l-1} = \pi_l(x_l) = \pi_l(x'_l)$ n'est pas dans $I(F_{l-1})$ car $\hat{x} \in \widehat{\Omega}$ et par hypothèse

$$\{x \in X_{l-1}, \dim(\pi_l^{-1}(x)) \geq 1\} \subset I(F_{l-1}).$$

Autrement dit, $\pi_l(x_l)$ et $\pi_l(x'_l)$ vivent là où π_l^{-1} est holomorphe : on a donc $x_l = x'_l$, ce qui est une contradiction.

Montrons que p est un homéomorphisme de $\widehat{\Omega}$ sur son image. Tout d'abord, par définition de δ ,

$$\delta(\hat{x}, \hat{x}') \geq \frac{\text{dist}_0(x_0, x'_0)}{\text{diam}(X_0)} = \frac{\text{dist}_0(p(\hat{x}), p(\hat{x}'))}{\text{diam}(X_0)}$$

donc p est continue (sur tout X_∞). Ensuite, soit $x_0 \in p(\widehat{\Omega})$ et (y_n) une suite de $p(\widehat{\Omega})$ qui converge vers x_0 . Si la suite $(p^{-1}(y_n))$ ne converge pas vers $p^{-1}(x_0)$, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $(p^{-1}(y_{\psi(n)}))$ qui reste à distance au moins ϵ de $p^{-1}(x_0)$ pour la métrique δ . Comme X_∞ est compact, on peut trouver une sous-suite $(p^{-1}(y_{\varphi(n)}))$ de $(p^{-1}(y_{\psi(n)}))$ qui converge vers $\hat{z} \in X_\infty$. On a déjà $\delta(\hat{z}, p^{-1}(x_0)) \geq \epsilon$. Ensuite, la continuité de p sur tout X_∞ implique que $(p(p^{-1}(y_{\varphi(n)})))$ converge vers $p(\hat{z})$, autrement dit, $p(\hat{z}) = x_0$. Comme $x_0 \in p(\widehat{\Omega})$, la propriété plus forte que l'injectivité que l'on a montrée implique que $\hat{z} = p^{-1}(x_0)$. Cela contredit $\delta(\hat{z}, p^{-1}(x_0)) \geq \epsilon$. L'application p est donc un homéomorphisme de $\widehat{\Omega}$ sur $p(\widehat{\Omega})$. Enfin, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega} & \xrightarrow{F_\infty} & \widehat{\Omega} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ p(\widehat{\Omega}) & \xrightarrow{f} & p(\widehat{\Omega}) \end{array}$$

En effet, soit $\hat{x} = (x_n) \in \widehat{\Omega}$, on a $F_\infty(\hat{x}) = (\tau_n(x_n))_{n \geq 1}$, d'où $p(F_\infty(\hat{x})) = \tau_1(x_1)$. Le point $x_0 = \pi_1(x_1)$ n'est pas dans $I(F_0) = I$ car $\hat{x} \in \widehat{\Omega}$. On a donc

$$p(F_\infty(\hat{x})) = \tau_1(x_1) = f \circ \pi_1(x_1) = f(x_0) = f \circ p(F_\infty(\hat{x})).$$

De là, on obtient que la mesure $\nu = p_*(\widehat{\nu})$ est invariante par f , vit dans Ω et son entropie est égale à celle de $\widehat{\nu}$.

En particulier,

$$\sup\{h_\mu(f), \mu \text{ ergodique et } \mu(I) = 0\} \geq h_\nu(f) = h_{\widehat{\nu}}(F_\infty) \geq h_{\text{top}}(F_\infty) - \gamma.$$

Quand on a une probabilité invariante μ avec $\mu(I) = 0$, alors $\mu(\Omega) = 1$ par invariance. Comme on a toujours $\sup\{h_\mu(f), \mu \text{ ergodique et } \mu(\Omega) = 1\} \leq h_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(F_\infty)$ (voir [10] pour la première inégalité et le théorème 2 pour la seconde), le principe variationnel est démontré.

Remarque. Montrons que l'hypothèse faite sur l'ensemble d'indétermination dans le principe variationnel est générique pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Par la preuve du lemme 6, il suffit de montrer que si f est générique, on a $f^{n-1}(f(I)) \cap I = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Ici, I désigne l'ensemble d'indétermination de f , $f(I)$ est défini *via* son graphe et les $f^{n-1}(f(I))$ se définissent par récurrence étant donné qu'ils ne rencontrent pas I .

Soit $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une application méromorphe dominante de degré algébrique $d \geq 2$. On choisit les coordonnées $[x : y : z]$ de sorte que $I \cap (x = 0) = \emptyset$ et $[1 : 0 : 0]$ ne soit ni dans $f(I)$ ni dans $f((x = 0))$. Soit V un voisinage de $(x = 0)$ tel que $\overline{V} \cap I = \emptyset$ et $f(V)$ ne contient pas $[1 : 0 : 0]$.

On considère alors (comme dans le paragraphe 3.3 de [6]) l'application A_0 de $PGL(3, \mathbb{C})$ définie par $A_0([x : y : z]) = [\lambda x : y : z]$ avec $\lambda > 0$. Si λ est assez petit, on a $A_0(f(I)) \subset V$ et $A_0(f(V)) \subset V$. L'application $g = A_0 \circ f$ a pour ensemble d'indétermination I et $g^{n-1}(g(I))$ est dans V pour tout $n \geq 1$. En particulier, l'ensemble $g^{n-1}(g(I))$ ne rencontre pas I pour tout $n \geq 1$. Les ensembles $\{A \in PGL(3, \mathbb{C}), (A \circ f)^{n-1}(A \circ f(I)) \cap I \neq \emptyset\}$ sont algébriques (pour $n \geq 1$) et différents de $PGL(3, \mathbb{C})$ grâce à l'application g trouvée. On en déduit qu'en dehors d'une union dénombrable de sous-ensembles algébriques de $PGL(3, \mathbb{C})$, les applications $A \circ f$ vérifient l'hypothèse du principe variationnel.

Références

1. A. BLANCHARD, Sur les variétés analytiques complexes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **73** (1956), 157–202.
2. S. BOUCKSOM, C. FAVRE ET M. JONSSON, Degree growth of meromorphic surface maps, *Duke Math. J.* **141** (2008), 519–538.
3. S. CANTAT, Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), 299–340.
4. N.-B. DANG, Degrees of iterates of rational maps on normal projective varieties, preprint, 2017, <https://arxiv.org/abs/1701.07760>.
5. H. DE THÉLIN, Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes, *Invent. Math.* **172** (2008), 89–116.
6. H. DE THÉLIN ET G. VIGNY, Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps, *Mém. Soc. Math. Fr.* 122 (2010).
7. T.-C. DINH ET N. SIBONY, Regularization of currents and entropy, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **37** (2004), 959–971.
8. T.-C. DINH ET N. SIBONY, Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle, *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), 1637–1644.
9. M. GROMOV, On the entropy of holomorphic maps, *Enseign. Math.* **49** (2003), 217–235.
10. V. GUEDJ, Entropie topologique des applications méromorphes, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **25** (2005), 1847–1855.
11. H. HIRONAKA, Desingularization of complex-analytic varieties, *Actes Congrès Intern. Math., Tome 2* (1970), 627–631.
12. J. H. HUBBARD ET P. PAPADOPOUL, Newton's method applied to two quadratic equations in \mathbb{C}^2 viewed as a global dynamical system, *Mem. Amer. Math. Soc.* **191** (2008), 891.
13. A. KATOK ET B. HASSELBLATT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 54 (Cambridge University Press, 1995).

14. A. RUSSAKOVSKII ET B. SHIFFMAN, Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), 897–932.
15. N. SIBONY, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , *Panor. Synthèses* **8** (1999), 97–185.
16. T.-T. TRUONG, (Relative) dynamical degrees of rational maps over an algebraic closed field, preprint, 2015, <https://arxiv.org/pdf/1501.01523.pdf>.
17. X. YE, Topological entropy of the induced maps of the inverse limits with bonding maps, *Topology Appl.* **67** (1995), 113–118.