Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2001), **21**, 1001–1007
Printed in the United Kingdom

Propriété de Bernoulli pour les extensions naturelles des endomorphismes de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$

JEAN-YVES BRIEND
Laboratoire Analyse, Topologie, Probabilités, UMR 6632, Université de Provence, CMI, 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cédex 13, France
(e-mail: briend@gyptis.univ-mrs.fr)

(*Received* 22 *October* 1999 *and accepted in revised form* 17 *December* 1999)

Résumé. Soient f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$ de degré au moins 2 et μ sa mesure d'équilibre. Nous montrons que l'extension naturelle de (f, μ) possède la propriété de Bernoulli.

Abstract. Let f be a holomorphic self map of $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$ of degree at least 2, and μ its equilibrium measure. It is shown that the natural extension of (f, μ) satisfies the Bernoulli property.

0. *Introduction*

Dans la théorie ergodique des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$, une mesure joue un rôle particulier : la mesure d'équilibre. Si f est un tel endomorphisme, de degré $d \geq 2$, Hubbard–Papadopol dans [**8**] et Fornæss–Sibony dans [**5**] ont introduit la mesure d'équilibre μ de f, qui est mélangeante et d'entropie maximale $k \log d$. Freire–Lopès–Mañé dans [**6**] et Lyubich dans [**11**] ont montré dans le cas des fractions rationnelles ($k = 1$) que μ était l'unique mesure d'entropie maximale et qu'elle reflétait la distribution des points périodiques ainsi que des préimages itérées. Poursuivant des travaux de Mañé (voir [**12**]), Heicklen et Hoffman (voir [**7**]) ont montré qu'alors (f, μ) avait la propriété de Bernoulli, c'est-à-dire était mesurablement conjuguée à un décalage unilatéral sur d symboles. Ornstein et Weiss ont montré (voir [**13**]) que sous des conditions géométriques assez générales dites de *produit local*, les difféomorphismes possèdent la propriété de Bernoulli. En utilisant ce résultat et la théorie de Pesin, Bedford, Lyubich et Smillie (voir [**1**]) ont montré que les applications de Hénon complexes possédaient cette propriété. Le but de cette note est, comme le suggèrent les auteurs de [**13**], d'utiliser leurs méthodes hors du cadre différentiable pour montrer que l'extension naturelle $(\widehat{\mathbb{C}\mathsf{P}^k}, \hat{f}, \hat{\mu})$ de tout endomorphisme de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$ possède la propriété de Bernoulli.

THÉORÈME 0.1. *L'extension naturelle de f est bimesurablement conjuguée à un décalage bilatéral sur d^k symboles.*

C'est en particulier un K-système qui définit une chaîne de Markov vérifiant la loi du 0-1 de Kolmogoroff. Nous ne pouvons cependant en déduire que f elle-même est un décalage unilatéral sur d^k symboles, ni même que f est exacte, mais ce premier résultat indique que c'est sans doute vrai. Cela permet en tout cas de voir que (f, μ) est mélangeante à tout ordre. Pour montrer le théorème, nous utilisons le fait que tous les exposants de Liapounoff de f relativement à μ sont strictement positifs (voir [**3**]) afin d'exhiber une structure hyperbolique produit pour $\hat{f}$.

1. *La méthode d'Ornstein et Weiss*

Commençons, pour la commodité du lecteur, par rappeler brièvement la méthode utilisée par Ornstein et Weiss [**13**] et Ledrappier [**10**] pour montrer, sous certaines conditions géométriques et ergodiques, qu'un automorphisme est de Bernoulli. Soit donc $\widehat{\mathbb{C}\mathsf{P}^k}$ (voir plus bas pour la justification de cette notation) un espace métrique compact, $\hat{f}$ un automorphisme de cet espace et $\hat{\mu}$ une mesure invariante telle que tous les $\hat{f}^n$, $n > 0$, soient ergodiques. Nous supposons qu'il existe des pavés P, dits de Pesin, qui sont des boréliens de mesure strictement positive, sur lesquels $\hat{\mu}$ est isomorphe à une mesure produit $\hat{\mu^s} \otimes \hat{\mu^u}$. On suppose de plus que les fibres de ce produit sont des variétés stables (respectivement instables) locales, i.e. des boréliens le long desquels f^n, $n > 0$ (respectivement $n < 0$) contracte exponentielement vite, de manière uniforme dans le pavé P choisi. Notons $W^s(x)$ ces variétés stables.

Il faut d'abord montrer que $(\widehat{\mathbb{C}\mathsf{P}^k}, \hat{f}, \hat{\mu})$ est un K-système. On prend pour cela une suite de partitions en ouverts η_n de diamètre tendant vers 0 et dont le bord vérifie que la mesure de son ε-voisinage est un $O(\varepsilon)$. Il nous suffit de démontrer que pour tout n, $(\hat{f}, \eta_n)$ est un K-système. Fixons donc $n \geq 0$ et $\eta_n = \eta$. On dit que $(\hat{f}, \eta)$ est un K-système si les deux partitions (dites de Pinsker)

$$\eta_- = \bigwedge_{n=1}^{+\infty} \bigvee_{j=-\infty}^{-n} \hat{f}^{-j}\eta \quad \text{et} \quad \eta_+ = \bigwedge_{n=1}^{+\infty} \bigvee_{j=n}^{+\infty} \hat{f}^{-j}\eta$$

engendrent la tribu des boréliens de mesure 0 ou 1. Prenons un pavé de Pesin $P = B \times K$ de mesure $c > 0$. Par contraction exponentielle le long des variétés stables et la propriété du bord de η, si A est un borélien mesurable pour η_+ tel que $\hat{\mu}(A \cap P) > 0$, alors il contient entièrement presque toute variété stable qu'il rencontre. En effet, ces propriétés impliquent que pour presque tout $x \in B$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\hat{f}^n(W^s(x))$ est entièrement dans l'intérieur d'un atome de η. Le borélien A est donc feuilleté en variétés stables. Mais le théorème de Pinsker–Rohlin–Sinaĭ affirme que $\eta_- = \eta_+ \mod 0$, donc un raisonnement analogue avec les variétés instables et $\hat{f}^{-1}$ montre que A est également feuilleté en variétés instables. Comme $\hat{\mu}$ admet une structure produit, on en déduit que $A \supset P$. La tribu engendrée par η_+ est donc atomique, et comme pour tout $n \geq 0$ $\hat{f}^n$ est ergodique, on en déduit qu'elle est triviale et donc que $(\hat{f}, \eta)$ est un K-système. Pour finir la preuve et montrer la propriété de Bernoulli, on vérifie que le système est très faiblement de Bernoulli (VWB) comme dans [**13**], en utilisant son caractère K (son algèbre de Pinsker est triviale) et la structure produit. On peut alors affirmer que $\hat{f}$ est bimesurablement conjuguée à un décalage sur g symboles, et $g = d^k$ à cause de la valeur de l'entropie. Comme il est remarqué dans [**13**], le schéma ci-dessus est suffisament général pour s'affranchir du caractère différentiable de l'automorphisme $\hat{f}$. Le résultat que nous obtenons pour les endomorphismes de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ peut donc s'obtenir comme corollaire d'un résultat général sur les endomorphismes des variétés riemanniennes compactes dont les exposants de Liapounoff sont tous strictement positifs. Le fait que le jacobien ne soit plus constant nécessite simplement une bonne dose supplémentaire de technique dans le comptage des préimages.

Example. Le plus simple pour comprendre l'idée de la preuve qui suit est de considérer directement le décalage. Soit $\Sigma = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}}$ l'espace des suites bilatérales sur d symboles, muni de la mesure uniforme $\hat{\mu}$ invariante par le décalage σ. La projection π_0 de Σ dans $\Sigma^+ = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}_-}$ définie par $\pi_0(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x_{-1}, x_0)$ fait de σ l'extension naturelle du décalage unilatéral σ^+ (voir plus bas). Alors les fibres de π_0 sont naturellement des « variétés » stables. En appliquant la même chose à σ^{-1}, on obtient une deuxième projection « transverse » à π_0 dont les fibres sont naturellement des « variétés » instables. Il est alors facile de voir que $\hat{\mu}$ possède une structure produit local par rapport à ces variétés, et donc que le schéma d'Ornstein et Weiss s'applique. C'est bien-sûr un moyen très détourné de montrer une tautologie.

2. *Rappels et notations*

Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ de degré $d \geq 2$. La mesure d'équilibre μ de f est une mesure d'entropie maximale et de jacobien constant d^k, pour laquelle f (ainsi que tous les f^n) est mélangeante (voir [**4**]). On sait de plus que tous les exposants de Liapounoff de f relativement à μ sont strictement positifs (voir [**3**]). Afin d'appliquer les méthodes connues pour les difféomorphismes (voir [**10, 13**]), nous considérons $\hat{f}$ *l'extension naturelle de* f : on note $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}$ l'ensemble des histoires possibles de points de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ sous l'action de f, c'est-à-dire

$$\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k} = \{\hat{x} = (x_0, x_{-1}, \ldots) \in (\mathbb{C}\mathrm{P}^k)^{\mathbb{Z}_-},\ \ f(x_{-n}) = x_{-n+1}\};$$

on définit alors

$$\hat{f}(\hat{x}) = (f(x_0), x_0, x_{-1}, \ldots).$$

Pour tout $\lambda > 1$ fixé, la distance

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} d(x_{-n}, y_{-n}),$$

(où d est la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ normalisée pour que $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ soit de diamètre unité) fait de $\hat{f}$ un homéomorphisme du métrique compact $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}$. D'après Rohlin (voir [**14**]), il existe une unique mesure de probabilité $\hat{\mu}$ sur $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}$ qui soit $\hat{f}$-invariante et vérifie $(\pi_0)_*\hat{\mu} = \mu$, où π_0 est la projection canonique $\pi_0(\hat{x}) = x_0$.

Du fait que tous les exposants de Liapounoff sont positifs, la théorie de Pesin (voir [**2**]) fournit, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, un borélien invariant $\hat{X}_0 \subset \widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}$ de mesure 1, et des

https://doi.org/10.1017/S014338570100147X Published online by Cambridge University Press

fonctions mesurables r_0 et c de $\hat{X}_0$ dans $]0,+\infty[$ et $]1,+\infty[$ respectivement, telles que pour tout $\hat{z}=(z_0,z_{-1},\dots)\in\hat{X}_0$, on puisse définir sur $B(z_0,r_0(z_0))$ les branches inverses holomorphes $f_{\hat{z}}^{-n}$ de f^n vérifiant $f_{\hat{z}}^{-n}(z_0)=z_{-n}$. On a de plus

$$\mathrm{diam}(f_{\hat{z}}^{-n}(B(z_0,r_0(z_0))))\leq c(\hat{z})\lambda^{-n},$$

avec un $\lambda>1$. On peut enfin demander à r_0 et c d'être à variation lente le long des orbites, c'est-à-dire d'avoir

$$r_0(\hat{z})e^{-|n|\varepsilon}\leq r_0(\hat{f}^n(\hat{z}))\leq r_0(\hat{z})e^{|n|\varepsilon},\quad n\in\mathbb{Z},$$

et une estimée analogue pour c. Notons PC le lieu postcritique de f, c'est-à-dire $PC=\bigcup_{n\geq 0}f^n(\mathrm{Crit}(f))$, où $\mathrm{Crit}(g)$ est le lieu critique de g, et $X=\mathbb{C}\mathrm{P}^k-\bigcup_{n\geq 0}f^{-n}(PC)$. C'est un ensemble totalement invariant de mesure 1 auquel nous nous restreindrons par la suite : les points considérés seront ou bien dans X, ou bien dans $\hat{X}$. Nous noterons enfin $\{\hat{\mu}_{\pi_0}(x),x\in X\}$ la famille des mesures conditionnelles de $\hat{\mu}$ sur les fibres de π_0.

3. *Pavés de Pesin*

Soit $\hat{E}$ un borélien de $\hat{X}$ de mesure strictement positive tel que $r_0(\hat{z})\geq r>0$ et $c(\hat{z})\leq c_0<+\infty$ sur $\hat{E}$. Fixons $x_0\in X$ un point tel que $\hat{\mu}_{\pi_0}(x_0)(\hat{E}\cap\pi_0^{-1}(x_0))>0$, et notons $K_{x_0}=\hat{E}\cap\pi_0^{-1}(x_0)$. Pour tout $\hat{z}\in K_{x_0}$, il existe une famille de branches inverses $f_{\hat{z}}^{-n}$ définies sur $B:=B(x_0,r)$. Pour tout $y_0\in B$, on note

$$\varphi_{\hat{z}}(y_0)=(y_0,f_{\hat{z}}^{-1}(y_0),\dots,f_{\hat{z}}^{-n}(y_0),\dots).$$

On a bien sûr $\pi_0(\varphi_{\hat{z}}(y_0))=y_0$, et l'on note $W^{u'}(\hat{z})=\varphi_{\hat{z}}(B)$, ainsi que

$$P'=\bigcup_{\hat{z}\in K_{x_0}}W^{u'}(\hat{z})\subset\pi_0^{-1}(B).$$

Les $W^{u'}(\hat{z})$ forment une partition de P' et π_0 en restriction à $W^{u'}(\hat{z})$ est une bijection sur B. Si $\hat{y}\in P'$, il existe un unique $\hat{z}\in K_{x_0}$, noté $\tilde{\pi}(\hat{y})$ tel que $\varphi_{\hat{z}}(\hat{y})=\hat{y}$. On définit alors deux applications naturelles

$$\Psi:\begin{pmatrix}B\times K_{x_0} & \longrightarrow & P'\\ (y_0,\hat{z}) & \longmapsto & \varphi_{\hat{z}}(\hat{y})\end{pmatrix}$$

et

$$\Theta:\begin{pmatrix}P' & \longrightarrow & B\times K_{x_0}\\ \hat{y} & \longmapsto & (\pi_0(\hat{y}),\tilde{\pi}(\hat{y}))\end{pmatrix}.$$

Les applications Ψ et Θ sont des bijections mesurables inverses l'une de l'autre. Remarquons que l'on peut considérer P' comme une structure produit en variétés stables et instables. C'est clair pour $W^{u'}(\hat{z})$, puisque que si $\hat{y},\hat{y'}\in W^{u'}(\hat{z})$, alors pour tout $n\geq 0$, on a

$$d(\hat{f}^{-n}(\hat{y}),\hat{f}^{-n}(\hat{y}))\leq c_0\lambda^{-n}.$$

Pour les « variétés stables », on prend les fibres de π_0. On a en effet, pour tout $\hat{y}$ et $\hat{y}'$ tels que $\pi_0(\hat{y})=\pi_0(\hat{y}')$, et tout $n\geq 0$,

$$d(\hat{f}^n(\hat{y}),\hat{f}^n(\hat{y}'))\leq\lambda^{-n},$$

https://doi.org/10.1017/S014338570100147X Published online by Cambridge University Press

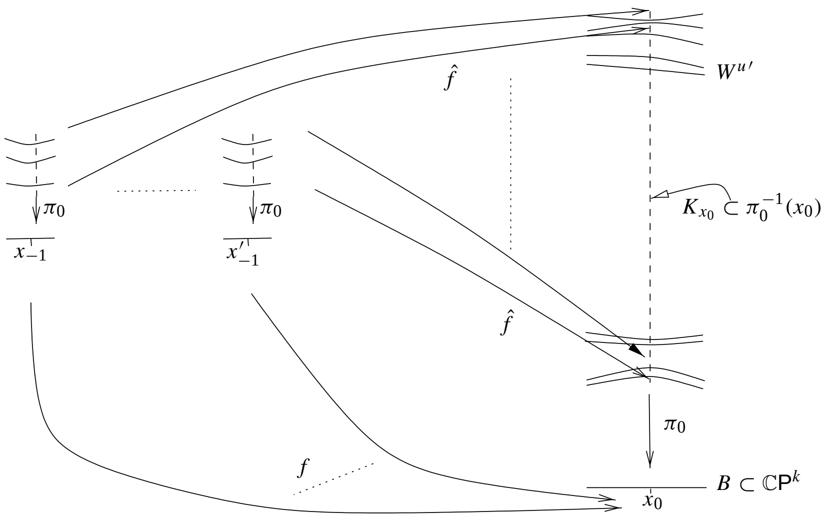

FIGURE 1. Pavés de Pesin dans $\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}$.

du fait de l'expression de d. Remarquons pour finir que si $A = \psi(A_0 \times A_1) \subset P'$ est un borélien de diamètre plus petit que $r_0/(C_0\lambda)$, alors $f(A)$ est dans un pavé du type $P'' = \Psi''(B(f(x_0), e^{-\varepsilon}r) \times K_{f(x_0)})$, et $\hat{f}_{|A}$ se décompose en une application produit $f \times \hat{f}_{|K_{x_0}}$. Nous appellerons $P = \Psi((B(x_0, (2C_0\lambda)^{-1}r) \cap X) \times K_{x_0})$ un *pavé de Pesin*. Dans un tel pavé, la dynamique contracte (respectivement dilate) uniformément le long des variétés stables $W^s(\hat{y}) = \pi_0^{-1}(\pi_0(\hat{y})) \cap P$ (respectivement des variétés instables $W^u(\hat{y}) = P \cap W^{u\prime}(\tilde{\pi}(\hat{y})))$. La Figure 1 éclaire la situation.

4. *Structure produit pour* $\hat{\mu}$

Pour appliquer les idées d'Ornstein et Weiss, nous allons montrer que $\hat{\mu}$ admet une structure produit dans les pavés de Pesin. Nous allons commencer par identifier les mesures conditionnelles de $\hat{\mu}$ sur les fibres de π_0. Remarquons tout d'abord que tout $x_0 \in X$ a exactement d^k préimages, et qu'ainsi l'arbre des passés possibles de x_0, noté $\mathcal{T}_{x_0}$, est un arbre homogène dont chaque sommet a d^k parents. Pour tout $n \geq 0$, nous noterons $\mathbb{P}_n(\mathcal{T}_{x_0})$ l'espace des segments injectifs de longueur n issus de x_0. Il s'identifie de manière naturelle avec $f^{-n}(x_0)$, et il est de cardinal d^{kn}. On munit $\mathbb{P}_n(\mathcal{T}_{x_0})$ de la distance

$$d_n([x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}], [x_0, x'_{-1}, \ldots, x'_{-n}]) = \sum_{l=0}^{n} \lambda^{-n} d(x_{-l}, x'_{-l})$$

et de la tribu associée $\mathcal{M}_n$, qui n'est autre que la tribu discrète. On munit ensuite $\mathbb{P}_n(\mathcal{T}_{x_0})$ de la probabilité uniforme $\mu_n^{x_0}$

$$\mu_n^{x_0} = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{s \in \mathbb{P}_n} \delta_s.$$

Comme pour tout $n \geq m$ on a une application naturelle de $(\mathbb{P}_n, \mathcal{M}_n, \mu_n^{x_0})$ dans $(\mathbb{P}_m, \mathcal{M}_m, \mu_m^{x_0})$ (qui « oublie » le passé au delà du temps n), le théorème de Kolmogoroff

https://doi.org/10.1017/S014338570100147X Published online by Cambridge University Press

nous donne de manière naturelle une mesure μ^{x_0} sur $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{x_0}) = \lim_{\leftarrow} \mathbb{P}_n(\mathcal{T}_{x_0})$; il existe de plus une isométrie canonique φ^{x_0} entre $(\mathbb{P}(\mathcal{T}_{x_0}), d_\infty)$ et $\pi_0^{-1}(x_0)$ muni de la distance d. On pose alors $\hat{\mu}_{x_0} = (\varphi^{x_0})_* \mu^{x_0}$. C'est la mesure uniformément distribuée sur les passés de x_0.

Chaque $\mathbb{P}_n(\mathcal{T}_{x_0})$ définit une partition mesurable finie $\eta_n^{x_0}$ de $\pi_0^{-1}(x_0)$ en d^{kn} atomes, correspondant aux fibres de $\hat{x} \mapsto x_{-n}$. Donnons-nous $x_0 \in X$ et notons C l'atome de $\eta_1^{f(x_0)}$ correspondant aux $\hat{y} = (f(x_0), y_{-1}, y_{-2}, \dots)$ tels que $y_{-1} = x_0$. Alors $\hat{f}$ induit une application bi-mesurable $H_i^{x_0}$ entre $\pi_0^{-1}(x_0)$ et C, et on a l'équation fonctionnelle $(H_i^{x_0})_* \hat{\mu}_{x_0} = d^k (\hat{\mu}_{f(x_0)})_{|C_i}$. Il en découle alors, du fait que μ est de jacobien constant d^k, que si A est un borélien produit assez petit inclus dans un pavé de Pesin et $\hat{\nu}$ la mesure

$$\hat{\nu} = \int_X \hat{\mu}_{x_0} \, d\mu(x_0),$$

alors $\hat{\nu}(A) = \hat{\nu}(\hat{f}(A))$. Comme ces boréliens engendrent la tribu de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$ et que pour tout borélien B de $\mathbb{C}\mathsf{P}^k$ on a clairement $\hat{\nu}(\pi_0^{-1}(B)) = \mu(B)$, on en déduit par unicité de l'extension naturelle que $\hat{\nu} = \hat{\mu}$. On a donc en particulier les mesures conditionnelles de $\hat{\mu}$ sur les fibres de π_0 : $\hat{\mu}_{\pi_0}(x_0) = \hat{\mu}_{x_0}$. Un raisonnement analogue nous permet d'identifier les mesures conditionnelles sur les variétés instables dans chaque pavé de Pesin: pour tout pavé de Pesin $P = K_x \times B(x, r)$ et tout $\hat{x} \in K$, la projection π_0 restreinte à $W^u(\hat{x})$ est bimesurable et permet de considérer la mesure $\hat{\mu}_{\hat{x}}^u = ((\pi_0)_{|W^u(\hat{x})})^{-1})_* \mu_{|B(x,r)}$. Le même argument que plus haut permet de montrer que l'on a

$$\hat{\mu}|P = \int_K \hat{\mu}_{\hat{x}}^u \, d\hat{\mu}_x(\hat{x}).$$

Remarquons pour finir que par construction même des variétés instables, les partitions η_n sont invariantes dans chaque pavé par l'holonomie le long de ces variétés, ainsi que les mesures quotient $\mu_n^{x_0} = \hat{\mu}_{x_0}/\eta_n$. On peut donc conclure ce paragraphe par le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. *Dans les pavés de Pesin P, la mesure $\hat{\mu}$ est équivalente à une mesure produit:*

$$\Theta_*(\hat{\mu}_{|P}) = \mu_{|B} \otimes (\hat{\mu}_x)_{|K_x}.$$

Notre système s'apparente donc à un difféomorphisme non uniformément hyperbolique dont la mesure admet une structure de produit local, comme c'est par exemple le cas avec les mesures de Sinaĭ–Bowen–Ruelle (voir [**10**]), ou les applications de Hénon complexes (voir [**1**]). On peut alors appliquer directement les méthodes ébauchées dans la section 1, et conclure que $\hat{f}$ est de Bernoulli.

Le théorème 0.1 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.1. *La mesure μ est mélangeante à tout ordre pour f.*

En effet, tout facteur d'un système r-mélangeant est lui-même r-mélangeant. Soient $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ des fonctions de $L^1(\mathbb{C}\mathsf{P}^k)$. On pose $\hat{\varphi}_i = \varphi_i \circ \pi_0$, et on obtient, par les propriétés fonctorielles de l'extension naturelle et le fait que $\hat{\mu}$ est mélangeante à tout

https://doi.org/10.1017/S014338570100147X Published online by Cambridge University Press

ordre (car vérifiant la propriété K) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{k_1,\dots,k_r\to+\infty}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}\varphi_0(x)\varphi_1(f^{k_1}(x))\dots\varphi_r(f^{k_r}(x))\,d\mu(x)\\
&\quad=\lim_{k_1,\dots,k_r\to+\infty}\int_{\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}}\hat{\varphi}_0(\hat{x})\hat{\varphi}_1(\hat{f}^{k_1}(\hat{x}))\dots\hat{\varphi}_r(\hat{f}^{k_r}(\hat{x}))\,d\hat{\mu}(\hat{x})\\
&\quad=\prod_{i=0}^{r}\int_{\widehat{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}}\hat{\varphi}_i\,d\hat{\mu}\\
&\quad=\prod_{i=0}^{r}\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^k}\varphi_i\,d\mu.
\end{aligned}$$

Pour finir, citons le travail de Koss [**9**], qui montre de manière directe que certains endomorphismes de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sont de Bernoulli.

Reconnaissance. Je remercie enfin Julien Duval pour sa patience et de nombreuses discussions.

Références

[1] E. Bedford, M. Y. Lyubich et J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ IV: the measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.* **112** (1993), 77–125.

[2] J.-Y. Briend. Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$. *Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier*, Toulouse, 1997.

[3] J.-Y. Briend et J. Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$. *Acta Math.* **182** (1999), 143–157.

[4] J. E. Fornæss et N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension. *Complex Potential Theory*. Eds. P. Gauthier et G. Sabidussi. Kluwer Academic Press, 1994, pp. 131–186.

[5] J. E. Fornæss et N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension I. *Astérisque* **222** (1994), 201–231.

[6] A. Freire, A. Lopes et R. Mañé. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil Mat.* **14** (1983), 45–62.

[7] D. Heicklen et C. Hoffman. Rational maps are d-adic Bernoulli. *Preprint*, July 1999. *Ann. Math.* to appear.

[8] J. H. Hubbard et P. Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 321–365.

[9] L. Koss. Ergodic and Bernoulli properties of analytic maps of complex projective space. *Preprint*, 1999.

[10] F. Ledrappier. Quelques propriétés ergodiques des mesures de Sinaĭ. *Publ. Math. IHES* **59** (1984), 163–188.

[11] M. Y. Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **3** (1983), 351–385.

[12] R. Mañé. On the Bernoulli property for rational maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 71–88.

[13] D. Ornstein et B. Weiss. On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), 441–456.

[14] V. A. Rohlin. Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations. *Russian Math. Surveys* **22** (1967), 1–52.