

## SUR LA PRÉSERVATION DE LA COHÉRENCE PAR IMAGE INVERSE EXTRAORDINAIRE D'UNE IMMERSION FERMÉE

DANIEL CARO

**Abstract.** Let  $\mathcal{V}$  be a complete discrete valuation ring of unequal characteristic with perfect residue field,  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  be a closed immersion of smooth, quasi-compact, separated formal schemes over  $\mathcal{V}$ ,  $T$  be a divisor of  $X$  such that  $U := T \cap Z$  is a divisor of  $Z$ , and  $\mathfrak{D}$  a strict normal crossing divisor of  $\mathfrak{X}$  such that  $u^{-1}(\mathfrak{D})$  is a strict normal crossing divisor of  $\mathcal{Z}$ . We pose  $\mathfrak{X}^\sharp := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ ,  $\mathcal{Z}^\sharp := (\mathcal{Z}, u^{-1}\mathfrak{D})$  and  $u^\sharp: \mathcal{Z}^\sharp \hookrightarrow \mathfrak{X}^\sharp$  the exact closed immersion of smooth logarithmic formal schemes over  $\mathcal{V}$ . In Berthelot's theory of arithmetic  $\mathcal{D}$ -modules, we work with the inductive system of sheaves of rings  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet)}(T) := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$ , where  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}$  is the  $p$ -adic completion of the ring of differential operators of level  $m$  over  $\mathfrak{X}^\sharp$  and where  $T$  means that we add overconvergent singularities along the divisor  $T$ . Moreover, Berthelot introduced the sheaf  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  of differential operators over  $\mathfrak{X}^\sharp$  of finite level with overconvergent singularities along  $T$ . Let  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet)}(T))$  and  $\mathcal{E} := \varinjlim_{\bullet} (\mathcal{E}^{(\bullet)})$  be the corresponding object of  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . In this paper, we study sufficient conditions on  $\mathcal{E}$  so that if  $u^{\sharp!}(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$  then  $u^{\sharp(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(\bullet)}(U))$ . For instance, we check that this is the case when  $\mathcal{E}$  is a coherent  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module such that the cohomological spaces of  $u^{\sharp!}(\mathcal{E})$  are isocrystals on  $\mathcal{Z}^\sharp$  overconvergent along  $U$ .

### Table des matières

1	Préliminaires topologiques	129
1.1	Espaces de type $LB$	129
1.2	Topologie projective d'un produit tensoriel sur une $K$ -algèbre	131
1.3	Complétions de produit tensoriel de modules localement convexes	134

---

Received March 12, 2016. Revised May 10, 2019. Accepted May 17, 2019.  
 2010 Mathematics subject classification. 14F30.

© 2019 Foundation Nagoya Mathematical Journal

- 2 Espaces de type  $LB$  en théorie des  $D$ -modules arithmétiques 137
  - 2.1 Topologies canoniques 137
  - 2.2 Cas des isocristaux surconvergens 140
  - 2.3 Cas du faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes 142
- 3 Préservation de la cohérence par foncteur cohomologique local 144
  - 3.1 Images inverses par une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses 144
  - 3.2 Image directe de niveau  $m$  : exactitude 146
  - 3.3 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré zéro 150
  - 3.4 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré maximal 152
  - 3.5 Applications aux log-isocristaux surconvergens 166
- Références 169

**Introduction**

Soit  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , de corps résiduel parfait et de corps des fractions  $K$ . Soit  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés, quasi compacts et lisses,  $T$  un diviseur de  $X$  tel que  $U := T \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . Soit  $\mathfrak{D}$  un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathfrak{X}$  tel que  $u^{-1}(\mathfrak{D})$  soit un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathcal{Z}$ . On pose  $\mathfrak{X}^\sharp := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ ,  $\mathcal{Z}^\sharp := (\mathcal{Z}, u^{-1}\mathfrak{D})$  et  $u^\sharp: \mathcal{Z}^\sharp \hookrightarrow \mathfrak{X}^\sharp$  l'immersion fermée exacte de schémas formels logarithmiques lisses sur  $\mathcal{V}$ . Pour simplifier la présentation de cette introduction, supposons que  $u$  soit de codimension pure égale à 1. Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}$ , où  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)$  désigne les faisceaux d'anneaux construits par Berthelot dans [Ber96, 4.2.3] et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}$  est le faisceau des opérateurs différentiels de niveau  $m$  sur  $\mathfrak{X}$  (voir [Ber96, 2.2], puis sa version logarithmique dans [Mon02]), le chapeau signifiant la complétion  $p$ -adique. On dispose de plus des morphismes canoniques de changement de niveaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m+1)}(T)$  (voir [Mon02] ou, pour sa version non logarithmique, [Ber96]), ce qui donne le système inductif d'anneaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet)}(T) := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$ . Berthelot construit le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini en posant  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \lim_{\substack{\rightarrow \\ m}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Par tensorisation par  $\mathbb{Q}$  et passage à la limite sur le niveau, on

obtient le foncteur noté  $\varinjlim: D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ . Afin d'obtenir un foncteur pleinement fidèle qui factorise ce foncteur  $\varinjlim$ , Berthelot a introduit la catégorie  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$  qui est une localisation de  $D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$ . Il a défini la sous-catégorie pleine des complexes cohérents de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$  qu'il note  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$ . Il a établi alors que le foncteur  $\varinjlim$  induit l'équivalence de catégories

$$(*) \quad \varinjlim: \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}).$$

Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un objet de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$  et  $\mathcal{E} := \varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  l'objet de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  correspondant. On dispose de  $u^{\#(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  l'image inverse extraordinaire de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  par  $u$  et de  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  le foncteur cohomologique local à support strict dans  $Z$  de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ . Ces foncteurs s'étendent naturellement à  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  et sont compatibles à l'équivalence de catégories  $(*)$  ci-dessus, *i.e.* on bénéficie des isomorphismes canoniques fonctoriels en  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  de la forme :  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})$  et  $u^{\#!}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ u^{\#(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ . Comme conséquence immédiate de [Car16], on vérifie que les trois propriétés  $u^{\#(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{z}^\#}^{(\bullet)}(U))$ ,  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}^\#}^{(\bullet)}(T))$  et  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(T)_{\mathbb{Q}})$  sont équivalentes (voir la preuve de 3.4.8). De plus, si  $u^{\#(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{z}^\#}^{(\bullet)}(U))$  alors  $u^{\#!}(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{z}^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$ . La réciproque est loin d'être claire. La raison est que pour tout objet  $\mathcal{F}^{(\bullet)}$  de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{z}^\#}^{(\bullet)}(U))$ , la propriété selon laquelle  $\varinjlim(\mathcal{F}^{(\bullet)}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{z}^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$  n'implique pas en général que  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{z}^\#}^{(\bullet)}(U))$ . Lorsque  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, nous nous intéressons dans ce papier à cette réciproque. Nous prouvons en particulier que si les espaces de cohomologies de  $u^{\#!}(\mathcal{E})$  sont des isocristaux sur  $Z$  surconvergeant le long d'un diviseur de  $U$ , alors  $u^{\#(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{z}^\#}^{(\bullet)}(U))$ .

Précisons à présent le contenu de ce papier. Dans le premier chapitre, nous donnons quelques préliminaires topologiques concernant les  $K$ -espaces topologiques localement convexes. Nous rappelons notamment la définition

des espaces de type LB et nous reprenons quelques points sur les produits tensoriels complétés de modules localement convexes dans le contexte qui nous sera utile dans la suite de ce travail. Dans le deuxième chapitre, nous munissons naturellement les isocristaux surconvergentes et le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes d'une structure canonique d'espace de type LB. Après quelques propriétés topologiques sur les foncteurs images directes et images inverses extraordinaires par une immersion fermée, nous établissons dans le dernier chapitre le résultat principal décrit en début d'introduction de ce papier. Nous finissons par des applications du théorème principal aux log-isocristaux surconvergentes satisfaisant certaines propriétés de type non Liouville. Les résultats que l'on déduit généralisent les propositions [CT12, 1.3.13, 2.2.9, 2.3.4] et nous obtenons en réalité des preuves plus simples (on utilise néanmoins [CT12, 1.3.13] et l'on démontre le reste). L'une de ces généralisations est, grâce à une remarque apparue dans un travail en commun avec Tomoyuki Abe (plus précisément, voir la remarque 3.5.4), de ne pas supposer que l'on dispose d'une rétraction lisse  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Z}$  de  $u$  (hypothèse qui apparaît par exemple dans le théorème [CT12, 1.3.13]).

## Notations

Dans ce papier, on désigne par  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ ,  $k$  son corps résiduel supposé parfait,  $K$  son corps des fractions et  $\pi$  une uniformisante. Les faisceaux seront notés par des lettres calligraphiques, leurs sections globales par la lettre droite associée. Les modules sont par défaut à gauche. On notera avec des chapeaux les complétions  $p$ -adiques et si  $\mathcal{E}$  est un faisceau en groupes abéliens, alors on posera  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Soit  $\mathcal{A}$  un faisceau d'anneaux sur un espace topologique  $X$ . Si  $*$  est l'un des symboles  $+$ ,  $-$  ou  $b$ ,  $D^*(\mathcal{A})$  désigne la catégorie dérivée des complexes de  $\mathcal{A}$ -modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaite préciser entre droite et gauche, on précise alors comme suit  $D^*({}^g\mathcal{A})$  ou  $D^*(\mathcal{A}^d)$ . On note  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  des complexes à cohomologie cohérente et bornée. On suppose (sans nuire à la généralité) que tous les  $k$ -schémas sont réduits et on pourra confondre les diviseurs avec leur support. Les  $\mathcal{V}$ -schémas formels seront indiqués par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par la lettre droite correspondante.

## §1. Préliminaires topologiques

Notons  $\mathfrak{C}$  la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels topologiques localement convexes. Notons  $\mathfrak{D}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{C}$  des  $K$ -espaces séparés et complets. On remarque qu'un morphisme surjectif  $V \rightarrow V''$  de  $\mathfrak{C}$  est le conoyau de son noyau dans  $\mathfrak{C}$  si et seulement si  $V''$  est muni de la topologie quotient.

### 1.1 Espaces de type $LB$

Nous agglomérons ce dont nous aurons besoin sur les  $K$ -espaces de type  $LB$ , surtout du lemme 1.1.7 mais aussi de sa preuve (voir l'étape 2 de la preuve de 3.4.6).

1.1.1. Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $\mathfrak{C}$ . Posons  $V := \varinjlim_i V_i$  la limite inductive calculée dans  $\mathfrak{C}$ . En tant que  $K$ -espace vectoriel,  $V$  est la limite inductive de  $(V_i)_{i \in I}$  calculée dans la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels. La topologie localement convexe sur  $V$  est la plus fine rendant continu tous les morphismes canoniques  $V_i \rightarrow V$ .

*Remarque 1.1.2.* Soit  $(V_i)_{i \in I}$  et  $(W_i)_{i \in I}$  deux systèmes inductifs filtrants de  $\mathfrak{C}$ ,  $f_i: V_i \rightarrow W_i$  une famille compatible de morphismes de  $\mathfrak{C}$  et  $f: \varinjlim_i V_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$  le morphisme de  $\mathfrak{C}$  induit par passage à la limite inductive. Si pour tout  $i$  l'image de  $f_i$  est dense dans  $W_i$ , alors l'image de  $f$  est dense.

En effet, si  $F$  est un fermé de  $\varinjlim_i W_i$  contenant l'image de  $f$ , alors l'image inverse de  $F$  sur  $W_i$  est un fermé contenant l'image de  $f_i$  qui est dense dans  $W_i$ . La flèche canonique  $W_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$  se factorise donc toujours *via*  $W_i \rightarrow F$ . D'où  $F = \varinjlim_i W_i$ .

LEMME 1.1.3. Soit  $(V_i)_{i \in I}$  et  $(W_i)_{i \in I}$  deux systèmes inductifs filtrants de  $\mathfrak{C}$ ,  $f_i: V_i \rightarrow W_i$  une famille compatible de morphismes surjectifs, stricts de  $\mathfrak{C}$  et  $f: \varinjlim_i V_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$  le morphisme de  $\mathfrak{C}$  induit par passage à la limite inductive. Alors  $f$  est un morphisme surjectif strict.

*Démonstration.* La surjectivité de  $f$  est déjà connue. Posons  $W := \varinjlim_i W_i$ . Comme le morphisme  $f$  est continu et surjectif, la propriété énonçant que  $f$  est strict est alors équivalente à la propriété suivante : tout morphisme  $g: W \rightarrow W'$  tel que  $g \circ f$  soit continu est lui-même continu. Soit  $g: W \rightarrow W'$  tel que  $g \circ f$  soit continu. Notons  $g_i: W_i \rightarrow W'$  le composé du

morphisme canonique  $W_i \rightarrow W$  avec  $g$ . Comme  $f_i$  est surjectif et strict, et comme  $g_i \circ f_i: V_i \rightarrow W'$  est continu (car composé de  $V_i \rightarrow V$  avec  $g \circ f$ ), les morphismes  $g_i$  sont alors continus. D'après la propriété universelle de la limite inductive,  $g$  est donc aussi continu.

LEMME 1.1.4. *Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $\mathfrak{C}$  et  $J$  une partie cofinale de  $I$ . On dispose de l'homéomorphisme canonique  $\varinjlim_{j \in J} V_j \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} V_i$  dont la bijection sous-jacente est la bijection canonique.*

*Démonstration.* Standard.

DÉFINITION 1.1.5. Un  $K$ -espace de type  $LB$  est un  $K$ -espace localement convexe séparé  $V$  tel qu'il existe, pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , des morphismes continus de  $K$ -espaces de Banach  $V_m \rightarrow V_{m+1}$  et un homéomorphisme de la forme  $\varinjlim_m V_m \xrightarrow{\sim} V$ .

Remarque 1.1.6. Dans la définition de  $K$ -espace de type  $LB$  de 1.1.5 et avec ses notations, il n'est pas restrictif de supposer que les morphismes  $V_m \rightarrow V_{m+1}$  soient injectifs. En effet, si l'on note  $j_m: V_m \rightarrow V$ ,  $W_m := V_m / \ker j_m$  muni de la topologie quotient, topologie qui en fait un  $K$ -espace de Banach (car  $V$  est séparé donc  $W_m$  est un quotient séparé d'un  $K$ -espace de Banach), on vérifie par propriété universelle que les morphismes  $K$ -linéaires canoniques réciproques  $\varinjlim_m V_m \rightarrow \varinjlim_m W_m$  et  $\varinjlim_m W_m \rightarrow \varinjlim_m V_m$  sont continus.

LEMME 1.1.7. *Un quotient séparé d'un espace de type  $LB$  est un espace de type  $LB$ .*

*Démonstration.* Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , donnons-nous des monomorphismes continus de  $K$ -espaces de Banach  $V_m \rightarrow V_{m+1}$ . On note  $V := \varinjlim_m V_m$  et  $i_m: V_m \hookrightarrow V$  les monomorphismes continus canoniques. Soit  $G := V/W$  un quotient de  $V$  qui est séparé. Notons  $G^{(m)} := V_m / i_m^{-1}(W)$  muni de la topologie quotient, *i.e.* telle que la surjection canonique  $\pi_m: V_m \twoheadrightarrow G^{(m)}$  soit stricte. Notons  $j_m: G^{(m)} \rightarrow G$  l'injection canonique. Comme  $j_m \circ \pi_m$  est continu et comme  $\pi_m$  est strict,  $j_m$  est donc continu. Comme  $G$  est séparé, il en est alors de même de  $G^{(m)}$ . Ainsi  $G^{(m)}$  est un  $K$ -espace de Banach. Il découle de 1.1.3 que le morphisme de gauche du

diagramme canonique

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \varinjlim_m G^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varinjlim_m V_m & \xrightarrow{\sim} & V \end{array}$$

est un épimorphisme strict. Comme il en est de même du morphisme de droite et comme l'isomorphisme du bas est un homéomorphisme, il en est donc de même de l'isomorphisme du haut.

### 1.2 Topologie projective d'un produit tensoriel sur une $K$ -algèbre

Soit  $D$  une  $K$ -algèbre (sans topologie et non nécessairement commutative) telle que  $K$  soit dans le centre de  $D$ . Notons  $\mathfrak{C}_{D,g}$  (resp.  $\mathfrak{C}_{D,d}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{C}$  des objets de  $\mathfrak{C}$  tels que la structure de  $K$ -espace vectoriel se prolonge en une structure de  $D$ -module à gauche (resp. à droite).

1.2.1. (Application  $D$ -balancée continue et complétion.) Soit  $V$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,d}$ ,  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$  et  $U$  un objet de  $\mathfrak{C}$ . On munit  $V \times W$  de la topologie produit, *i.e.*  $V \times W$  est le produit calculé dans  $\mathfrak{C}$ . Soit  $\beta: V \times W \rightarrow U$  une application  $D$ -balancée, *i.e.* une application  $K$ -bilinéaire telle que pour tout  $v \in V$ , tout  $w \in W$  et tout  $d \in D$ , on ait  $\beta(vd, w) = \beta(v, dw)$ . Par  $K$ -bilinéarité de  $\beta$ , si  $L$  est un sous- $\mathcal{V}$ -module (resp. un réseau de  $U$  au sens de [Sch02, 2.1]) de  $U$ , alors  $\beta^{-1}(L)$  est un sous- $\mathcal{V}$ -module (resp. un réseau) de  $V \times W$ . De plus, d'après [Sch02, 17.1], comme  $\beta$  est  $K$ -bilinéaire, l'application  $\beta$  est continue si et seulement si elle l'est en zéro, *i.e.* pour tout sous- $\mathcal{V}$ -module ouvert de  $L$  de  $U$ , il existe des sous- $\mathcal{V}$ -modules ouverts respectivement  $M$  de  $V$  et  $N$  de  $W$  tels que  $\beta(M \times N) \subset L$ .

Supposons  $\beta$  continue. On dispose alors du morphisme  $K$ -bilinéaire  $\varprojlim_{M,N} V \times W/M \times N \rightarrow \varprojlim_L V/L$ , où  $L$  (resp.  $M$ , resp.  $N$ ) parcourt les réseaux ouverts de  $U$  (resp.  $V$ , resp.  $W$ ). On note  $\widehat{\beta}: \widehat{V} \times \widehat{W} \rightarrow \widehat{U}$  cette application. Comme les réseaux ouverts de  $\widehat{U}$  sont de la forme  $\varprojlim_L L_0/L$  où  $L_0$  est un réseau ouvert de  $U$  et  $L$  parcourt les réseaux ouverts de  $U$  inclus dans  $L_0$  (et de même pour  $\widehat{V} \times \widehat{W}$ ), on vérifie alors que  $\widehat{\beta}$  est continue. Comme l'image de  $V \times W$  dans  $\widehat{V} \times \widehat{W}$  est dense, on vérifie que  $\widehat{\beta}$  est l'unique application

$K$ -bilinéaire continue induisant le carré commutatif :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{V} \times \widehat{W} & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & \widehat{U} \\ \uparrow & & \uparrow \\ V \times W & \xrightarrow{\beta} & U. \end{array}$$

En revanche, pour que  $\widehat{\beta}$  soit  $D$ -balancée, il faut des hypothèses topologiques sur  $D$  (voir 1.3.4).

1.2.2. Soit  $V$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  et  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ . En munissant  $V \times W$  de la topologie produit, la topologie projective sur le produit tensoriel  $V \otimes_D W$  est la topologie  $K$ -localement convexe la plus fine telle que le morphisme  $K$ -bilinéaire canonique  $\rho_{V,W} : V \times W \rightarrow V \otimes_D W$  soit continu. Ainsi, un réseau  $L \subset V \otimes_D W$  est ouvert si et seulement si  $\rho_{V,W}^{-1}(L)$  est ouvert. Comme nous ne considérerons que des topologies de type projectif sur les produits tensoriels, nous pourrions omettre d'indiquer le qualificatif « projectif ».

L'objet  $V \otimes_D W$  vérifie la propriété universelle : pour toute application  $D$ -balancée et continue de la forme  $\phi : V \times W \rightarrow U$ , il existe un unique morphisme dans  $\mathfrak{C}$  de la forme  $\theta : V \otimes_D W \rightarrow U$  tel que  $\theta \circ \rho_{V,W} = \phi$ .

On en déduit que l'on obtient en réalité le bifoncteur canonique

$$-\otimes_D - : \mathfrak{C}_{D,d} \times \mathfrak{C}_{D,g} \rightarrow \mathfrak{C}.$$

LEMME 1.2.3. Soit  $V$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  et  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ . On suppose qu'il existe un sous- $\mathcal{V}$ -module  $V_0$  de  $V$  (resp.  $W_0$  de  $W$ ) tel qu'une base de voisinages de zéro de  $V$  (resp.  $W$ ) soit donnée par la famille  $(p^n V_0)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(p^n W_0)_{n \in \mathbb{N}}$ ). Notons  $U_0 := \langle \rho_{V,W}(V_0 \times W_0) \rangle$ , où  $\langle ? \rangle$  désigne le « sous- $\mathcal{V}$ -module de  $V \otimes_D W$  engendré par ? ». Alors une base de voisinages sur  $V \otimes_D W$  muni de sa topologie canonique (voir 1.2.2) est donnée par  $(p^n U_0)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Démonstration. Comme  $V_0$  et  $W_0$  sont des réseaux respectifs de  $V$  et  $W$ ,  $U_0$  est un réseau de  $U$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $\rho_{V,W}^{-1}(p^n U_0) \supset p^n(V_0 \times W_0)$ , les  $p^n U_0$  sont donc des ouverts de  $V \otimes_D W$ . Réciproquement, soit  $L$  un sous- $\mathcal{V}$ -module ouvert de  $V \otimes_D W$ . Il existe alors un entier  $n$  assez grand tel que  $\rho_{V,W}^{-1}(L) \supset p^n(V_0 \times W_0)$ . Comme  $L$  est un  $\mathcal{V}$ -module, on a alors  $L \supset \langle \rho_{V,W}(p^n(V_0 \times W_0)) \rangle = p^{2n} \langle \rho_{V,W}(V_0 \times W_0) \rangle = p^{2n} U_0$ .



1.2.4. Soit  $D' \rightarrow D$  un homomorphisme de  $K$ -algèbres tel que  $K$  soit aussi dans le centre de  $D'$ . Soit  $V$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  et  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ . Comme le composé  $V \times W \rightarrow V \otimes_{D'} W \rightarrow V \otimes_D W$  est le morphisme canonique, par définition des topologies définies sur  $V \otimes_{D'} W$  et  $V \otimes_D W$ , l'épimorphisme  $V \otimes_{D'} W \rightarrow V \otimes_D W$  est donc strict.

LEMME 1.2.5. Soit  $V \rightarrow V''$  (resp.  $W \rightarrow W''$ ) un épimorphisme strict de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  (resp.  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ ). Les épimorphismes  $V \otimes_D W \rightarrow V \otimes_D W''$  et  $V \otimes_D W \rightarrow V'' \otimes_D W$  sont alors stricts.

*Démonstration.* Par symétrie, vérifions-le seulement pour le premier. Soit  $L$  un réseau de  $V \otimes_D W''$ . Comme  $V \times W \rightarrow V \times W''$  est strict, par définition de la topologie sur  $V \otimes_D W''$ ,  $L$  est ouvert si et seulement si son image inverse sur  $V \times W$  est un ouvert. Par définition de la topologie sur  $V \otimes_D W$ , cela équivaut au fait que son image inverse sur  $V \otimes_D W$  soit un ouvert. D'où le résultat.

Nous ne devrions pas avoir besoin des deux lemmes qui suivent, mais cela vaut sans doute la peine de les écrire.

LEMME 1.2.6. Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $\mathfrak{C}_{D,d}$ ,  $(W_i)_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ ,  $U$  un objet de  $\mathfrak{C}$ ,  $\beta_i: V_i \times W_i \rightarrow U$  une famille compatible d'applications  $D$ -balancées continues. Alors l'application  $D$ -balancée  $\beta := \varinjlim_i V_i \times W_i \rightarrow U$  est continue.

*Démonstration.* Notons  $g_i: V_i \times W_i \rightarrow \varinjlim_i V_i \times W_i$  les applications  $D$ -balancées continues canoniques. Soit  $L$  un réseau ouvert de  $U$ . Le lemme découle alors de l'égalité  $\beta^{-1}(L) = \sum_{i \in I} g_i(\beta_i^{-1}(L))$ .

LEMME 1.2.7. Soit  $(V_i)_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  et  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ .

- (1) Le morphisme canonique  $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow (\varinjlim_i V_i) \times W$  est un homéomorphisme.
- (2) On dispose alors de l'isomorphisme canonique dans  $\mathfrak{C}$  de la forme

$$\varinjlim_i (V_i \otimes_D W) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_i V_i) \otimes_D W.$$

*Démonstration.* Notons  $V := \varinjlim_i V_i$  et  $f_i: V_i \rightarrow V$  les morphismes canoniques. Traitons d'abord la première assertion. Par définition de la topologie sur la limite inductive, la bijection canonique  $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow V \times W$  est

continue. Soit  $(L_i)_{i \in I}$  une famille de réseaux ouverts de  $(V_i)_{i \in I}$  et  $(M_i)_{i \in I}$  une famille de réseaux ouverts de  $W$ . Il s'agit de vérifier que  $\sum_{i \in I} f_i(L_i) \times M_i$  est un ouvert de  $V \times W$ . Cela résulte immédiatement de l'inclusion  $\sum_{i \in I} f_i(L_i) \times M_i \supset (\sum_{i \in I} f_i(L_i)) \times M_{i_0}$  valable quel que que soit  $i_0 \in I$  (en effet, on utilise la relation  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$  pour  $x \in \sum_{i \in I} f_i(L_i)$  et  $y \in M_{i_0}$ ).

Vérifions à présent la seconde assertion, *i.e.* le  $K$ -espace localement convexe  $V \otimes_D W$  vérifie la propriété universelle de la limite inductive dans  $\mathfrak{C}$  du système  $(V_i \otimes_D W)_{i \in I}$  : si l'on se donne une famille compatible de morphismes de  $\mathfrak{C}$  de la forme  $V_i \otimes_D W \rightarrow U$ , alors ils se factorisent de manière unique en un morphisme  $K$ -linéaire de la forme  $V \otimes_D W \rightarrow U$ . Pour vérifier que celui-là est continu, il faut et il suffit que le composé  $V \times W \rightarrow V \otimes_D W \rightarrow U$  le soit. Or, comme toutes les applications  $D$ -balancées  $V_i \times W \rightarrow U$  sont continues, d'après 1.2.6, il en est de même de l'application  $D$ -balancée  $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow U$ . On déduit alors de la première assertion du lemme que le morphisme canonique  $V \times W \rightarrow U$  est continu. D'où le résultat.

### 1.3 Complétions de produit tensoriel de modules localement convexes

1.3.1. Avec les notations de 1.2, soit  $V$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,d}$  et  $W$  un objet de  $\mathfrak{C}_{D,g}$ . On note  $V \widehat{\otimes}_D W$  le séparé complété de  $V \otimes_D W$  et  $i_{V,W} : V \otimes_D W \rightarrow V \widehat{\otimes}_D W$  le morphisme canonique. Il résulte de la propriété universelle du produit tensoriel et de celle du séparé complété la propriété universelle suivante : pour toute application  $D$ -balancée et continue de la forme  $\phi : V \times W \rightarrow U$  avec  $U \in \mathfrak{D}$ , il existe alors un unique morphisme dans  $\mathfrak{D}$  de la forme  $\theta : V \widehat{\otimes}_D W \rightarrow U$  tel que  $\theta \circ i_{V,W} \circ \rho_{V,W} = \phi$ .

On obtient ainsi le bifoncteur canonique

$$-\widehat{\otimes}_D - : \mathfrak{C}_{D,d} \times \mathfrak{C}_{D,g} \rightarrow \mathfrak{D}.$$

DÉFINITION 1.3.2. Soit  $D$  une  $K$ -algèbre telle que  $K$  soit dans le centre de  $D$ .

- (1) On dit que  $D$  est une  $K$ -algèbre localement convexe si  $D$  est munie d'une topologie  $K$ -localement convexe, telle que la multiplication soit une application  $K$ -bilinéaire continue. Un morphisme de  $K$ -algèbres localement convexes est un morphisme de  $K$ -algèbres qui est continu pour les topologies respectives. On dit que  $D$  est une  $K$ -algèbre de

Banach si  $D$  est une  $K$ -algèbre localement convexe dont la topologie sous-jacente en fait un  $K$ -espace de Banach.

- (2) Soit  $D$  une  $K$ -algèbre localement convexe. Un  $D$ -module à gauche localement convexe est un  $D$ -module à gauche  $M$  muni d'une topologie  $K$ -localement convexe telle que la loi externe structurale  $D \times M \rightarrow M$  soit une application  $K$ -bilinéaire continue. Un  $D$ -module à gauche de Banach est un  $D$ -module à gauche localement convexe dont la topologie sous-jacente en fait un  $K$ -espace de Banach. Un morphisme de  $D$ -modules à gauche localement convexes (resp. de Banach) est un morphisme de  $D$ -modules à gauche qui est aussi un morphisme de  $K$ -espaces localement convexes (resp. de Banach).

De même en remplaçant à gauche par à droite.

LEMME 1.3.3. *Soit  $D$  une  $K$ -algèbre localement convexe et  $\phi: M \rightarrow N$  un morphisme de  $D$ -modules à gauche (resp. à droite) localement convexes.*

- (1) *La structure de  $K$ -espace localement convexe séparé complet sur  $\widehat{D}$  se prolonge en une structure canonique de  $K$ -algèbre localement convexe. De plus, le morphisme canonique  $D \rightarrow \widehat{D}$  est un morphisme de  $K$ -algèbres localement convexes.*
- (2) *Le morphisme induit par séparée complétion  $\widehat{\phi}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$  est un morphisme de  $\widehat{D}$ -modules localement convexes. De plus, le morphisme canonique  $M \rightarrow \widehat{M}$  est un morphisme de  $D$ -modules localement convexes.*

*Démonstration.* Contentons-nous de prouver le cas non respectif. D'après 2, l'application  $K$ -bilinéaire continue structurale canonique  $\mu_D: D \times D \rightarrow D$  induit l'application  $K$ -bilinéaire continue  $\mu_{\widehat{D}} := \widehat{\mu}_D: \widehat{D} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$  s'inscrivant (de manière unique) dans le diagramme commutatif :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{D} \times \widehat{D} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{D}}} & \widehat{D} \\ \uparrow & & \uparrow \\ D \times D & \xrightarrow{\mu_D} & D. \end{array}$$

Comme les deux applications  $\mu_{\widehat{D}} \circ (\mu_{\widehat{D}} \times \text{id}), \mu_{\widehat{D}} \circ (\text{id} \times \mu_{\widehat{D}}): \widehat{D} \times \widehat{D} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$  coïncident après composition par le morphisme canonique  $D \times D \times D \rightarrow \widehat{D} \times \widehat{D} \times \widehat{D}$  dont l'image est dense, on obtient  $\mu_{\widehat{D}} \circ (\mu_{\widehat{D}} \times \text{id}) = \mu_{\widehat{D}} \circ (\text{id} \times \mu_{\widehat{D}})$ , *i.e.* la multiplication est associative. On vérifie de même les autres propriétés qui font de  $\widehat{D}$  une  $K$ -algèbre localement convexe. Il est

clair que le morphisme continu canonique  $D \rightarrow \widehat{D}$  est alors un morphisme de  $K$ -algèbres localement convexes.

D'après 1.2.1, les applications  $K$ -bilinéaires continues structurales canoniques  $\mu_M: D \times M \rightarrow M$  et  $\mu_N: D \times N \rightarrow N$  induisent les applications  $K$ -bilinéaires continues  $\mu_{\widehat{M}} := \widehat{\mu}_M: \widehat{D} \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$  et  $\mu_{\widehat{N}} := \widehat{\mu}_N: \widehat{D} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{N}$ . De même, on vérifie que  $\mu_{\widehat{M}}$  et  $\mu_{\widehat{N}}$  induisent respectivement une structure canonique de  $\widehat{D}$ -modules localement convexes sur  $\widehat{M}$  et  $\widehat{N}$ . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{D} \times \widehat{M} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{M}}} & \widehat{M} \\ \downarrow \text{id} \times \widehat{\phi} & & \downarrow \widehat{\phi} \\ \widehat{D} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{N}}} & \widehat{N} \end{array}$$

est commutatif après composition par  $D \times M \rightarrow \widehat{D} \times \widehat{M}$  dont l'image est dense, celui-là est commutatif. D'où le résultat.

LEMME 1.3.4. *Soit  $D$  une  $K$ -algèbre localement convexe,  $M$  un  $D$ -module à droite localement convexe,  $N$  un  $D$ -module à gauche localement convexe et  $U$  un  $K$ -espace localement convexe. Soit  $\beta: M \times N \rightarrow U$  une application  $D$ -balancée et continue. L'application  $\widehat{\beta}: \widehat{M} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{U}$  (voir 1.2.1) est alors une application  $\widehat{D}$ -balancée et continue.*

*Démonstration.* On sait déjà que l'application  $\widehat{\beta}$  est continue. Considérons le carré :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{M} \times \widehat{D} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{M}} \times \text{id}} & \widehat{M} \times \widehat{N} \\ \downarrow \text{id} \times \mu_{\widehat{N}} & & \downarrow \widehat{\beta} \\ \widehat{M} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & \widehat{U}, \end{array}$$

où  $\mu_{\widehat{M}}: \widehat{M} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{M}$  et  $\mu_{\widehat{N}}: \widehat{D} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{N}$  sont les applications  $K$ -bilinéaires continues structurales canoniques. Comme l'image de  $M \times D \times N$  dans  $\widehat{M} \times \widehat{D} \times \widehat{N}$  est dense, le carré 4 est donc commutatif car il l'est sans les chapeaux.

PROPOSITION 1.3.5. *Soit  $D$  une  $K$ -algèbre localement convexe,  $M$  un  $D$ -module à droite localement convexe et  $N$  un  $D$ -module à gauche localement convexe. On dispose alors de l'isomorphisme canonique dans  $\mathfrak{D}$  de la forme :*

$$M \widehat{\otimes}_D N \xrightarrow{\sim} \widehat{M} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}} \widehat{N}.$$

*Démonstration.* Par functorialité du foncteur séparée complétion, on dispose du morphisme dans  $\mathfrak{D}$  de la forme :  $M \widehat{\otimes}_D N \rightarrow \widehat{M} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}} \widehat{N}$ . Pour construire le morphisme quasi inverse, par propriété universelle du produit tensoriel, il s’agit de définir canoniquement une application continue de la forme  $\widehat{M} \times \widehat{N} \rightarrow M \widehat{\otimes}_D N$  qui soit  $\widehat{D}$ -balancée, ce qui résulte aussitôt du lemme 1.3.4 appliqué à  $\beta$  égale à l’application canonique  $M \times N \rightarrow M \otimes_D N$ .

**§2. Espaces de type  $LB$  en théorie des  $D$ -modules arithmétiques**

Sauf mention explicite du contraire, nous utiliserons les notations et hypothèses suivantes : soit  $\mathfrak{X}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel affine, lisse, muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  et soit  $\partial_1, \dots, \partial_d$  les dérivations correspondantes. On note  $\mathcal{Z} := \bigcap_{i=1}^e V(t_i)$  et  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  l’immersion fermée induite. Soit  $\mathfrak{D} = V(t_{e+1} \cdots t_f)$  un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathfrak{X}$  tel que  $u^{-1}(\mathfrak{D})$  soit un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathcal{Z}$ . On pose  $\mathfrak{X}^\sharp := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ ,  $\mathcal{Z}^\sharp := (\mathcal{Z}, u^{-1}\mathfrak{D})$  et  $u^\sharp: \mathcal{Z}^\sharp \hookrightarrow \mathfrak{X}^\sharp$  l’immersion fermée exacte de schémas formels logarithmiques lisses sur  $\mathcal{V}$ . Soit  $f \in O_{\mathfrak{X}}$  et  $f_0 \in O_X$  sa réduction modulo  $\pi$  telle que  $T := V(f_0)$  soit un diviseur de  $X$  tel que  $U := T \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . Soit  $\lambda_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application croissante telle que  $\lambda_0(m) \geq m$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Pour alléger les notations, on pose alors  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\lambda_0(m))}(T)$ ,  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(\lambda_0(m))}(U)$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{O_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{O_{\mathcal{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}$ . De même, on pose alors  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \widehat{\otimes}_{O_{\mathcal{Z}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U)$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{O_{\mathcal{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger = \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et enfin  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger = \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ .

**2.1 Topologies canoniques**

2.1.1. (Topologie de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe canonique (resp. de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée) sur  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ .) On définit les topologies suivantes.

- Pour tout entier  $m$ , la topologie canonique de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe sur  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$  est celle dont une base de voisinages de zéro est  $(p^n \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T))_{n \in \mathbb{N}}$ .
- On munit  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  d’une topologie canonique de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe telle que l’isomorphisme canonique  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$  soit un homéomorphisme (on remarque que d’après 1.1.4, cela ne dépend pas de l’application  $\lambda_0$ ).

- Comme  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger = \{0\}$  et comme on dispose de l'isomorphisme canonique  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger_K$  (voir la preuve de [Ber96, 4.3.2]), on munit alors  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  d'une structure de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée (à ne pas confondre avec la topologie canonique induite par la limite inductive) dont une base de voisinages de zéro est donnée par  $(p^n O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger)_{n \in \mathbb{N}}$ . Muni de cette topologie,  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est normée mais pas de Banach : son séparé complété est  $O_{\mathfrak{X}}\{\frac{1}{f}\}_K$ . Rappelons enfin que comme  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger_K$ , alors  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est noethérien (voir [Ful69]).
- Comme nous préférons travailler avec des  $K$ -espaces de type  $LB$  (voir le lemme 2.2.5), nous prenons par défaut la topologie canonique de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe sur  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  (définie dans le deuxième point).

2.1.2. (Faisceaux des opérateurs différentiels.)

- Pour tout entier  $m \geq 0$ , on munit canoniquement  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  d'une topologie de  $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach, i.e. les  $p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  forment une base de voisinages de zéro. On dispose de même d'une structure canonique de  $\tilde{B}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach sur respectivement  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ ,  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  via la base de voisinages de zéro d'ouverts donnée par respectivement  $(p^n \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- La topologie canonique sur la  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est la topologie limite inductive dans  $\mathfrak{C}$  via  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ , où les  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  sont munis de la topologie définie ci-dessus. Une base de voisinages de zéro de  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est donc donnée par la famille  $\sum_{m=0}^\infty p^{n_m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ , où  $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$  parcourt les suites d'entiers positifs et où l'on a noté  $\sum_{m=0}^\infty p^{n_m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^n p^{n_m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ .
- De même, on définit respectivement sur  $D_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ ,  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger = \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger = \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  une topologie canonique de  $O_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}$ -module localement convexe. On remarque que d'après le lemme 1.1.4, on peut remplacer l'indice  $\mathbb{N}$  par un sous-ensemble cofinal sans changer la topologie.

2.1.3. (Topologie canonique d'un  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent.) Soit  $E$  un  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. On le munit d'une topologie canonique de  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module localement convexe de la manière suivante. D'après

[Ber96, 3.6], il existe pour  $m_0$  assez grand un  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini  $E^{(m_0)}$  et un isomorphisme  $D_{\mathfrak{x}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\epsilon : D_{\mathfrak{x}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} E$ . Pour tout entier  $m \geq m_0$ , posons  $E^{(m)} := \tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$ .

On munit  $E^{(m)}$  de la topologie canonique qui en fait un  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini de Banach (égale à la topologie quotient *via* un épimorphisme de la forme  $(\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow E^{(m)}$ ). Comme pour tout  $m$  les morphismes canoniques de la forme  $(\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m+1)})^r$  sont continus, on en déduit que le morphisme canonique  $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$  est continu. On munit  $E$  d'une topologie de  $D_{\mathfrak{x}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent localement convexe qui fait de  $\epsilon : \varinjlim_m E^{(m)} \xrightarrow{\sim} E$  un homéomorphisme. Cela ne dépend pas du choix de  $(m_0, E^{(m_0)}, \epsilon)$ . En effet, soit pour  $m'_0$  assez grand un  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m'_0)}$ -module de type fini  $E'^{(m'_0)}$  et un isomorphisme  $D_{\mathfrak{x}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\epsilon' : D_{\mathfrak{x}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m'_0)}} E'^{(m'_0)} \xrightarrow{\sim} E$ . Pour  $m \geq m'_0$ , posons  $E'^{(m)} := \tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m'_0)}} E'^{(m'_0)}$ . D'après [Ber96, 3.6.2], pour  $m''_0$  assez grand, il existe pour tout  $m \geq m''_0$  des isomorphismes  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaires  $\epsilon_m : E'^{(m)} \xrightarrow{\sim} E^{(m)}$  tels que  $\epsilon \circ \epsilon^\dagger = \epsilon'$ , avec  $\epsilon^\dagger := \varinjlim_m \epsilon_m$ . Or, d'après [BGR84, 3.7.3] (en effet, on remarque que la commutativité des anneaux est superflue), les  $\epsilon_m$  sont des homéomorphismes. Par passage à la limite, on en déduit que  $\epsilon^\dagger$  est un homéomorphisme. D'où la canonicité de la topologie (on utilise aussi 1.1.4).

2.1.4. (Topologie canonique d'un  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini.) Soit  $E$  un  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini. D'après [Ber96, 3.6.2], il existe, pour  $m_0$  assez grand, un  $\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini  $E^{(m_0)}$  et un isomorphisme  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\epsilon : O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}} E^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} E$ . Pour tout entier  $m \geq m_0$ , posons  $E^{(m)} := \tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}} E^{(m_0)}$ . On munit  $E^{(m)}$  de la topologie canonique qui en fait un  $\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini de Banach (égale à la topologie quotient *via* un épimorphisme de la forme  $(\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow E^{(m)}$ ). Comme, pour tout  $m$ , les morphismes canoniques de la forme  $(\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m+1)}(T)_{\mathbb{Q}})^r$  sont continus, on en déduit que le morphisme canonique  $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$  est continu. On munit  $E$  d'une topologie de  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini localement convexe qui fait de

$\epsilon: \varinjlim_m E^{(m)} \xrightarrow{\sim} E$  un homéomorphisme. De manière analogue à 2.1.3, on vérifie que cela ne dépend pas du choix de  $(m_0, E^{(m_0)}, \epsilon)$ .

**2.2 Cas des isocristaux surconvergents**

Rappelons les conventions suivantes.

DÉFINITION 2.2.1. Un isocristal sur  $\mathfrak{X}^\sharp$  surconvergeant le long de  $T$  est un  $D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent qui est aussi un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\sharp}(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module localement projectif de type fini.

LEMME 2.2.2. (Topologie canonique d’un log-isocristal surconvergent)

Soit  $E$  un  $D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent qui soit aussi un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\sharp}(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module projectif de type fini pour la structure induite. La topologie sur  $E$  en tant que  $D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent est la même que celle en tant que  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\sharp}(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module de type fini. On l’appellera donc topologie canonique sur l’isocristal surconvergent  $E$ .

Démonstration. De manière analogue à [Ber96, 4.4.5] (voir aussi [Ber96, 4.4.7]), quitte à augmenter  $\lambda_0$ , il existe pour  $m_0$  assez grand un  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini topologiquement nilpotent  $E^{(m_0)}$  qui est pour la structure induite un  $\tilde{B}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}(T)_\mathbb{Q}$ -module de type fini et tel que  $E \xrightarrow{\sim} D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$ .

Or, d’après [Ber96, 4.1.2], la topologie canonique de  $E^{(m_0)}$  en tant que  $\tilde{B}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}(T)_\mathbb{Q}$ -module de type fini est la même que celle en tant que  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini. De manière analogue à [Ber96, 4.4.11], on vérifie que le morphisme canonique

$$\tilde{B}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}(T)_\mathbb{Q} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}(T)_\mathbb{Q}} E^{(m_0)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$$

est un isomorphisme. D’où le résultat.

LEMME 2.2.3. Soit  $\phi: E \rightarrow E'$  un morphisme de  $D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules cohérents (resp. de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\sharp}(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules de type fini). Avec  $E$  et  $E'$  munis des topologies canoniques (voir respectivement 2.1.3 et 2.1.4), le morphisme  $\phi$  est continu.

Démonstration. D’après [Ber96, 3.6], il existe pour un entier positif  $m_0$  assez grand un morphisme de  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -modules de type fini  $\phi^{(m_0)}: E^{(m_0)} \rightarrow E'^{(m_0)}$  tel que  $D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$  soit isomorphe à  $\phi$ . Comme  $\phi^{(m_0)}$  est



continu pour les topologies canoniques (voir [BGR84, 3.7.3]), il en résulte que  $\phi$  est continu. Le cas respectif se traite de la même manière.

LEMME 2.2.4. *Soit  $\phi: E \rightarrow E'$  un épimorphisme de  $D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents (resp. de  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini). Alors  $\phi$  est un morphisme strict.*

*Démonstration.* D'après [Ber96, 3.6], il existe pour un entier positif  $m_0$  assez grand un morphisme de  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -modules de type fini  $\phi^{(m_0)}: E^{(m_0)} \rightarrow E'^{(m_0)}$  tel que  $D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$  soit isomorphe à  $\phi$ . Comme on a  $D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \text{coker}(\phi^{(m_0)}) = \{0\}$ , quitte à augmenter  $m_0$ , on peut supposer que  $\phi^{(m_0)}$  est surjectif. Il en est alors de même de  $\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$ , pour tout entier  $m \geq m_0$ , ces derniers étant d'ailleurs continus et stricts pour les topologies de Banach respectives (voir [BGR84, 3.7.3, corollary 5]). Par passage à la limite, il en résulte que  $\phi$  est strict (voir 1.1.3). Le cas respectif se traite de la même manière.

LEMME 2.2.5. *La topologie de  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe canonique sur  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est plus riche que celle induite par sa structure de  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée. Pour la topologie canonique, on en déduit que  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est une  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -algèbre de type LB.*

*Démonstration.* On dispose des isomorphismes canoniques  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{x}}[\frac{1}{f}]_K^\dagger$  et  $\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{x}}\{\frac{p}{f^{p^{m+1}}}\}$  (voir la preuve de [Ber96, 4.3.2]). Il en résulte le morphisme de  $\mathcal{V}$ -algèbres  $\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T) \hookrightarrow O_{\mathfrak{x}}[\frac{1}{f}]^\dagger$  (pour l'injectivité, voir [Ber96, 4.3.3.(ii)]). Le morphisme canonique de  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -algèbres  $\tilde{B}_{\mathfrak{x}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  est donc continu, avec  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  muni de sa topologie de  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée. En passant à la limite, on en déduit le résultat.

LEMME 2.2.6. *Soit  $I \subset (O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$  un monomorphisme de  $O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules. Alors  $I$  est fermé dans  $(O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$  pour la topologie induite par la topologie canonique de  $(O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ .*

*Démonstration.* Notons  $M := (O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r / I$  et  $M_0$  l'image du morphisme composé  $(O_{\mathfrak{x}}[\frac{1}{f}]^\dagger)^r \subset (O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow M$ . Munissons  $M$  de la topologie quotient (pour la topologie canonique de  $(O_{\mathfrak{x}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ ). Il s'agit ainsi de vérifier

que  $M$  est séparé pour cette topologie. Or, comme pour tout entier  $n$  le  $\mathcal{V}$ -module  $p^n(O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger)^r$  est un ouvert de  $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$  (voir 2.2.5), le  $\mathcal{V}$ -module  $p^n M_0$  est alors un ouvert de  $M$ . En outre, comme  $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger$  est noethérien et comme  $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger \rightarrow O_{\mathfrak{X}}\{\frac{1}{f}\}$  est fidèlement plat, comme  $M_0$  est un  $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^\dagger$ -module de type fini, alors  $M_0$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique (voir [Mat89, Théorèmes 8.10 et 8.12]), i.e.  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n M_0 = \{0\}$ . Il en résulte que  $M$  est séparé.

**PROPOSITION 2.2.7.** *Les  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini sont des  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -modules de type LB pour la topologie canonique. De plus, les sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules d'un  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini  $M$  sont fermés dans  $M$  pour la topologie canonique de  $M$ .*

*Démonstration.* Soit  $M$  un  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini muni de sa topologie canonique. Il existe un épimorphisme de  $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de la forme  $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow M$ . D'après 2.2.4, ce morphisme est strict pour les topologies canoniques respectives. Il résulte alors de 2.2.6 que  $M$  est séparé et donc  $M$  est un  $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module de type LB. Si  $M'$  est un sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de  $M$ , alors, grâce à 2.2.4, le module  $M/M'$  est séparé pour la topologie quotient induite par  $M$ . D'où le résultat.

*Remarque 2.2.8.* Soit  $I \subset (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$  un sous- $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Soit  $J \subset (O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$  un sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module. Il n'est pas clair que ces inclusions soient strictes pour les topologies canoniques respectives ni que  $I$  soit fermé dans  $(D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ . Cependant, d'après une communication de Tomoyuki Abe, les  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents sont aussi des espaces de type LB.

### 2.3 Cas du faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes

**PROPOSITION 2.3.1.** *Soit  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses,  $\mathfrak{D}$  un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathfrak{X}$  tel que  $u^{-1}(\mathfrak{D})$  soit un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathcal{Z}$ . On pose  $\mathfrak{X}^\# := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ ,  $\mathcal{Z}^\# := (\mathcal{Z}, u^{-1}\mathfrak{D})$  et  $u^\#: \mathcal{Z}^\# \hookrightarrow \mathfrak{X}^\#$  l'immersion fermée exacte de schémas formels logarithmiques lisses sur  $\mathcal{V}$ . Soit  $\phi$  un morphisme  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire à gauche de la forme  $\phi: (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$ . Soit  $\psi$  un morphisme  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire à droite de la forme  $\psi: (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$ . Notons*

$u_g^*(\phi): (D_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger)^r \rightarrow (D_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger)^s$  et  $u_d^*(\psi): (D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger)^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger)^s$  les morphismes  $D_{\mathcal{Z}^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaires induits par functorialité. Les morphismes  $\phi, u_g^*(\phi), u_d^*(\psi)$  sont continus pour les topologies canoniques respectives (voir les définitions de 2.1.2).

*Démonstration.* (1) La continuité de  $\phi$  résulte du lemme 2.2.3.

(2) Vérifions à présent que  $u_g^*(\phi)$  est continu. Notons  $\pi$  les morphismes  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -linéaires surjectifs de la forme  $\pi: (D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^n \rightarrow (D_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger)^n$ , pour un certain entier positif  $n$ . Comme  $u_g^*(\phi) \circ \pi = \pi \circ \phi$ , il suffit d'établir que  $\pi$  est un morphisme continu et strict. Comme la surjection canonique  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  envoie  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  sur  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$ , celle-là est donc continue. D'après le théorème de l'application ouverte de Banach, ce morphisme surjectif et continu de  $K$ -espaces de Banach est donc strict. Il découle alors du lemme 1.1.3 qu'il en est de même par passage à la limite sur le niveau de  $\pi$ .

(3) On procède de même que pour l'étape (2) pour valider la continuité de  $u_d^*(\psi)$ .

**PROPOSITION 2.3.2.** *Soit  $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante d'entiers positifs. Le  $K$ -espace localement convexe  $\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(N_m)}$  (muni de la topologie limite inductive dans la catégorie des  $K$ -espaces localement convexes) est un espace de type LB.*

*Démonstration.* D'après 1.1.4, il suffit de traiter le cas où  $N_m = m$ . Comme les  $K$ -espaces  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  sont de Banach, il s'agit de vérifier la séparation de  $\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ . Notons  $L$  le sous- $\mathcal{V}$ -module de  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  des éléments qui s'écrivent sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} \partial_{\mathfrak{X}^\#}^{[\underline{k}]}$  avec  $a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]^\dagger$  (on demande bien sûr que la série converge dans  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ ). Or, comme  $p^n L \supset p^n D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T) = \sum_{m=0}^\infty p^m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}$ , alors  $p^n L$  est un ouvert de  $D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$  pour tout entier  $n$ . Par unicité de l'écriture sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} \partial_{\mathfrak{X}^\#}^{[\underline{k}]}$  des éléments de  $L$ , on vérifie que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n L = \{0\}$ . On obtient donc la séparation voulue.

**PROPOSITION 2.3.3.** *Les topologies canoniques sont celles définies en 2.1.2.*

(1) *Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $V^{(m)}$  un  $D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module à gauche localement convexe et  $V^{(m)} \rightarrow V^{(m+1)}$  un morphisme continu. Soit  $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$*

et  $(N'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  deux suites strictement croissantes d'entiers positifs. Avec les notations de 1.3.1, l'isomorphisme canonique

$$(5) \quad \lim_{\rightarrow m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(N'_m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}} V^{(N_m)} \xrightarrow{\sim} \lim_{\rightarrow m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}} V^{(m)}$$

est alors un homéomorphisme.

(2) Les  $K$ -espaces localement convexes

$$\lim_{\rightarrow m} \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(N_m)} \quad \text{et} \quad \lim_{\rightarrow m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}} \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$$

sont des  $K$ -espaces de type LB.

*Démonstration.* On résout la première assertion de manière analogue à 1.1.4. Pour la seconde assertion, on procède de manière analogue à 2.3.2.

### §3. Préservation de la cohérence par foncteur cohomologique local

Soit  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels séparés, quasi compacts et lisses, et  $T$  un diviseur de  $X$  tel que  $U := T \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . Soit  $\mathfrak{D}$  un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathfrak{X}$  tel que  $u^{-1}(\mathfrak{D})$  soit un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathcal{Z}$ . On pose  $\mathfrak{X}^\# := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D})$ ,  $\mathcal{Z}^\# := (\mathcal{Z}, u^{-1}\mathfrak{D})$  et  $u^\#: \mathcal{Z}^\# \hookrightarrow \mathfrak{X}^\#$  l'immersion fermée exacte de schémas formels logarithmiques lisses sur  $\mathcal{V}$ . Soit  $\lambda_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application croissante telle que  $\lambda_0(m) \geq m$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Pour alléger les notations, on pose alors  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\lambda_0(m))}(T)$ ,  $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(\lambda_0(m))}(U)$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}$ . De même,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}} \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U)$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$ ,  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger = \lim_{\rightarrow m} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger = \lim_{\rightarrow m} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ .

#### 3.1 Images inverses par une immersion fermée de $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses

On suppose dans cette section que  $\mathfrak{X}$  est affine.

LEMME 3.1.1. (Théorèmes de type A et B) *Les morphismes canoniques  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)} \rightarrow \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow D_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger$  sont des isomorphismes.*

*De plus, pour tout entier  $q \geq 1$ ,  $H^q(\mathcal{Z}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}) = 0$ ,  $H^q(\mathcal{Z}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}) = 0$  et  $H^q(\mathcal{Z}, D_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^\dagger) = 0$ .*

*Démonstration.* Comme le foncteur  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$  commute aux limites projectives, on vérifie que le morphisme canonique  $O_{\mathcal{Z}} \otimes_{O_{\mathfrak{x}}} \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{(m)} \rightarrow \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}}^{(m)}$  est un isomorphisme. Comme le foncteur  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$  et le produit tensoriel commutent à la tensorisation par  $\mathbb{Q}$  (car  $\mathcal{Z}$  est noethérien) et aux limites inductives filtrantes de faisceaux sur  $\mathcal{Z}$ , on en déduit les deux autres isomorphismes.

On procède de même pour les annulations, les propriétés satisfaites par le foncteur  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$  que l'on a utilisées étant toujours valables pour les foncteurs dérivés  $H^q(\mathcal{Z}, -)$  (voir [Ber96, 3.3.2, 3.4.0.1 et 3.6.5]).

NOTATIONS 3.1.2. (Images inverses dérivées gauches.) Soit  $E^{(m)}$  un  $\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent à gauche. On pose  $\mathcal{E}^{(m)} := \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$ ,  $E := D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$  et  $\mathcal{E} := D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$ . On définit les foncteurs images inverses dérivées gauches en posant  $\mathbb{L}u^*(E^{(m)}) := \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$ ,  $\mathbb{L}u^*(\mathcal{E}^{(m)}) := \widetilde{D}_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{E}^{(m)}$ .

De la même manière,  $\mathbb{L}u^*(E) := D_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} E$  et  $\mathbb{L}u^*(\mathcal{E}) := D_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ . On remarque que les notations sont justifiées par le lemme 3.1.1 et correspondent aux foncteurs  $\mathbb{L}u^*$  calculés dans la catégorie des  $O_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -modules ou  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}$ -modules. Enfin, d'après les théorèmes de type A, tous les  $\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents et les  $D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents sont de cette forme (voir respectivement [Ber96, 3.4 et 3.6.5]).

De même, en remplaçant  $?_{\mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}$  par  $?_{\mathfrak{x}^{\sharp} \leftarrow \mathcal{Z}^{\sharp}, \mathbb{Q}}$ , on définit le foncteur  $\mathbb{L}u^*$  pour les modules à droite. Par exemple, si  $E^{(m)}$  est un  $\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent à droite, on pose  $\mathbb{L}u^*(E^{(m)}) := E \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^{\sharp} \leftarrow \mathcal{Z}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ . Enfin, si l'on veut préciser que l'on a affaire à des modules à gauche (resp. à droite), on pourra noter  $\mathbb{L}u_g^*$  (resp.  $\mathbb{L}u_d^*$ ) à la place de  $\mathbb{L}u^*$ .

LEMME 3.1.3. Avec les notations et hypothèses de 3.1.2, on dispose alors des isomorphismes canoniques

$$(6) \quad \mathbb{L}u^*(E^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathbb{L}u^*(\mathcal{E}^{(m)})), \quad \mathbb{L}u^*(E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathbb{L}u^*(\mathcal{E})).$$

*Démonstration.* Le premier se traitant de manière analogue, contentons-nous de vérifier le dernier isomorphisme. Soit  $P^{\bullet}$  une résolution gauche de  $E$  par des  $D_{\mathfrak{x}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules libres de type fini. Le complexe  $\mathcal{P}^{\bullet} :=$

$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} P^\bullet$  est alors une résolution gauche de  $\mathcal{E}$  par des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules libres de type fini. On dispose alors des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} & D_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} E \xleftarrow{\sim} D_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} P^\bullet \\ & \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} P^\bullet) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^\dagger \otimes_{u^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)} u^{-1}P^\bullet) \xrightarrow{\sim} \\ & \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{u^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} u^{-1}P^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{u^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}} u^{-1}\mathcal{E}), \end{aligned}$$

l'avant-dernier isomorphisme résultant du fait que les  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules libres sont  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$ -acycliques (voir le lemme 3.1.1).

*Remarque 3.1.4.* Comme les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents (resp. les  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents) vérifient le théorème de type *B* (voir [Ber96, 3.6.4]), on aurait pu utiliser les résolutions de Koszul pour valider le lemme 3.1.3 ci-dessus.

### 3.2 Image directe de niveau $m$ : exactitude

Pour faire des calculs en coordonnées locales, nous utiliserons les notations et hypothèses suivantes : on suppose que  $\mathfrak{X}$  est affine, muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles que  $\mathcal{Z} := \bigcap_{i=1}^e V(t_i)$ ,  $\mathfrak{D} = V(t_{e+1} \cdots t_f)$  et que  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  soit l'immersion fermée induite.

NOTATIONS 3.2.1. Pour tout entier  $m \geq 0$ , on pose  $D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U) := \tilde{B}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}} D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}$  et  $D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U) := D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}} \tilde{B}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U)$ . On munit  $D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$  (resp.  $D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ ) d'une structure de  $\tilde{B}_{\mathcal{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -algèbre normée dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille  $(p^n D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U))_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(p^n D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U))_{n \in \mathbb{N}}$ ). En d'autres termes, ce sont les topologies provenant des normes induites *via* les inclusions  $D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$  et  $D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ . De plus, on remarque que le séparé complété de  $D_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$  (resp.  $D_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ ) est  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$  (resp.  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ ).

LEMME 3.2.2. Soit  $V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} V''$  une suite exacte de  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules de Banach (voir la définition 1.3.2 et la topologie canonique de 2.1.2). On

suppose de plus que  $\phi$  et  $\psi$  sont des morphismes stricts. Les suites

$$(7) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{\text{id} \otimes \psi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V'',$$

$$(8) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \phi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \psi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V''$$

sont alors exactes et leurs morphismes sont stricts.

*Démonstration.* (1) Supposons d’abord que l’on dispose en réalité de la suite exacte  $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} V'' \rightarrow 0$ . Pour tout  $\underline{k} \in \mathbb{N}^e$ , en identifiant  $\mathbb{N}^e$  à un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^d$  via l’inclusion  $\underline{k} = (k_1, \dots, k_e) \mapsto (k_1, \dots, k_e, 0, \dots, 0)$ , notons  $\xi_{\underline{k}, (m)}$  l’image de  $\underline{\partial}^{<\underline{k}>(m)}$  (comme  $\underline{k} \in \mathbb{N}^e$ , on remarque que  $\underline{\partial}^{<\underline{k}>(m)} = \underline{\partial}_\#^{<\underline{k}>(m)}$ ) via la surjection canonique  $D_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \rightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ . Les éléments du  $K$ -espace vectoriel  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$  s’écrivent de manière unique sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k}, (m)} \otimes x_{\underline{k}}$ , la somme étant finie et  $x_{\underline{k}} \in V$ . D’après 1.2.3, si l’on note  $V_0$  le sous- $\mathcal{V}$ -module de  $V$  des éléments de norme inférieure ou égale à 1 et  $U_0$  le sous- $\mathcal{V}$ -module de  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$  engendré par l’image canonique de la flèche  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U) \times V_0 \rightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$ , alors une base de voisinage de  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$  est donnée par la famille  $(p^n U_0)_{n \in \mathbb{N}}$ . On en déduit que la topologie canonique sur  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$  est induite par la norme  $\|\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k}, (m)} \otimes x_{\underline{k}}\| = \max_{\underline{k}} \|x_{\underline{k}}\|$ . On a la même description pour  $V'$  ou  $V''$  à la place de  $V$ . On obtient alors la suite exacte courte de  $K$ -espaces normés

$$(9) \quad 0 \rightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V' \rightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V \rightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V'' \rightarrow 0,$$

dont tous les morphismes sont stricts (pour celle de l'injection, c'est évident d'après la description de leur norme; pour celle de la surjection, on peut par exemple invoquer 1.2.5 ou bien faire le calcul). Or, d'après la proposition 1.3.5, comme  $V$  est un  $\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach, le morphisme canonique  $D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}_{D_{\mathbb{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V$  est un isomorphisme. Comme le foncteur de séparée complétion transforme les suites exactes courtes dont les applications sont des morphismes stricts de  $K$ -espaces normés en des suites exactes courtes dont les applications sont des morphismes stricts, on obtient la suite exacte (10)

$$0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V'' \rightarrow 0$$

dont les morphismes sont stricts. Comme  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  est plat à gauche sur  $\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ , on dispose de la même suite exacte que 10 où l'on remplace  $\widehat{\otimes}$  par  $\otimes$ . Le morphisme surjectif de cette dernière suite exacte est strict grâce à 1.2.5. Enfin, le caractère strict du morphisme injectif résulte quant à lui du fait qu'en le composant avec le monomorphisme strict  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V$ , on obtienne encore un monomorphisme strict.

(2) En décomposant les suites exactes en suites exactes courtes, on obtient le résultat.

LEMME 3.2.3. *Soit  $m' \geq m$  deux entiers,  $V$  un  $\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach et  $V'$  un  $\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')}$ -module de Banach (voir la définition 1.3.2). Soit  $\phi: V \hookrightarrow V'$  un monomorphisme de  $\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire. Le morphisme continu  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')}} V'$  canoniquement induit par  $\phi$  est alors injectif.*

*Démonstration.* Notons  $\xi_{\underline{k}, (m')}$  l'image de  $\underline{\partial}^{<\underline{k}> (m')}$  via la surjection canonique  $D_{\mathfrak{X}^\#}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow D_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}}$ . D'après la preuve de 3.2.2, le  $K$ -espace de Banach  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathbb{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')}} V'$  est le  $K$ -espace des éléments s'écrivant de manière unique sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k}, (m')} \otimes x_{\underline{k}}$ , la somme étant infinie mais la suite des éléments  $x'_{\underline{k}} \in V'$  tendant vers zéro lorsque  $|\underline{k}|$  tend vers l'infini. Comme  $\xi_{\underline{k}, (m)} = \lambda_{\underline{k}, (m, m')} \xi_{\underline{k}, (m')}$ ,



pour un certain  $\lambda_{\underline{k},(m,m')} \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ , on vérifie alors que le morphisme canonique  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m')}} V'$  envoie la somme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m)} \otimes x_{\underline{k}}$  sur  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m')} \otimes \lambda_{\underline{k},(m,m')} \phi(x_{\underline{k}})$ . D'où le résultat.

Nous n'aurons pas besoin de la proposition 3.2.4, mais elle résulte immédiatement des lemmes 3.2.2 et 3.2.3 que nous utiliserons.

PROPOSITION 3.2.4. *Soit  $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} V''$  une suite exacte de  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules de Banach (voir la définition 1.3.2). On suppose de plus que  $\phi$  est un morphisme strict. La suite*

(11)

$$0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \phi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \psi} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} V''$$

est alors exacte et  $\text{id} \hat{\otimes} \phi$  est strict.

Démonstration. En munissant  $W := V/V'$  de la topologie quotient, on obtient le morphisme  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire, injectif et continu  $W \hookrightarrow V''$ . On en déduit que  $W$  est un  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach, car il est un quotient séparé de  $V$ . On applique alors respectivement les lemmes 3.2.2 et 3.2.3 à la suite exacte  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  et au monomorphisme  $W \rightarrow V''$ .

3.2.5. Le module  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique. En effet, si  $E$  est un sous- $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}$ -module à gauche de type fini de  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$ , comme  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)}$  est le séparé complété  $p$ -adique d'un  $\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}$ -module à droite libre, alors  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} E$  est séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique (voir [Ber96, 3.2.4]). On en déduit aussi que le morphisme canonique de la forme  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} E \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  est un monomorphisme. En passant à la limite inductive sur  $E$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  est injectif.

On munit  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  de la topologie produit tensoriel définie dans 1.2.2, i.e. d'après le lemme 1.2.3, c'est la topologie dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille  $p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$

avec  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ . On munit naturellement  $(\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$  de la topologie dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille  $p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)}$  avec  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ , ce qui en fait un  $K$ -espace de Banach. On obtient alors le monomorphisme strict de  $K$ -espaces normés

$$(12) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hookrightarrow (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)})_{\mathbb{Q}}.$$

Par construction des séparées complétions de  $K$ -espaces localement connexes (par exemple voir la preuve de [Sch02, 7.5]), on vérifie que le morphisme 12 se factorise en l'isomorphisme canonique (indépendant des coordonnées locales) de  $K$ -espaces de Banach :

$$(13) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathfrak{Z}^\#}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\#}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#}^{(m)})_{\mathbb{Q}}.$$

### 3.3 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré zéro

3.3.1. (Rappels.) On rappelle que d'après [Car16, 5.3.8], les foncteurs  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$  et  $u_+^{\sharp(\bullet)} \circ u^{\sharp(\bullet)!} : LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet}) \rightarrow LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet})$  sont isomorphes. On dispose aussi du foncteur  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  défini de telle sorte que l'on ait l'isomorphisme de foncteurs  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \varinjlim \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , où  $\varinjlim$  désigne le foncteur canonique  $\varinjlim : LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  qui induit l'équivalence de catégories

$$\varinjlim : LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet}) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$$

(voir [Car16, 2] ou [Ber02, 4.2.4] énoncé sans structure logarithmique). Si le besoin de distinguer les deux foncteurs  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$  se fait sentir, on notera alors dans ce cas  $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger(\bullet)} : LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet}) \rightarrow LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{\bullet})$ . Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{H}_Z^{\dagger n} := \mathcal{H}^n \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow M(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ , où  $M(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  désigne la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à gauche.

Pour établir la proposition qui suit, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

LEMME 3.3.2. (Berthelot-Kashiwara) *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans  $Z$ .*

- (1) *Le complexe  $u^\#(\mathcal{E})$  est isomorphe à  $\mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$ , ce dernier étant un  $\mathcal{D}_{Z^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. De plus, le morphisme canonique  $u_+^\# \circ u^\#(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  est un isomorphisme.*
- (2) *Le morphisme canonique  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Modulo l'isomorphisme  $\mathbb{R}\Gamma_Z^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} u_+^\#(\bullet) \circ u^\#(\bullet)!$ , c'est une reformulation des versions arithmétiques de Berthelot du théorème de Kashiwara de [Car16, 5.3.7] et [Car16, A.8].

LEMME 3.3.3. *Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$  et  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Le morphisme canonique  $\mathcal{H}_Y^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  est injectif.*

*Démonstration.* Via le triangle de localisation de  $\mathcal{E}$  par rapport à  $Y$ , il s'agit d'établir  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{E}(\dagger Y)) = 0$ . Lorsque  $Y$  est un diviseur, cela résulte de l'exactitude du foncteur  $(\dagger Y)$  sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents. On en déduit le cas général *via* les triangles distingués de Mayer-Vietoris (voir [Car16, 4.4.5]) en procédant par récurrence sur le nombre minimal de diviseurs dont l'intersection donne  $Y$ .

PROPOSITION 3.3.4. *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Alors,  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent si et seulement si  $\mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{Z^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Si l'une de ces deux conditions est satisfaite, on a alors l'isomorphisme  $u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$ .*

*Démonstration.* (1) Supposons que  $\mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}_{Z^\#}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. On dispose alors du morphisme canonique de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents de la forme  $\phi: u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ . Comme le noyau de  $\phi$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans  $Z$ , comme  $\mathcal{H}^0 u^\#$  est exact à gauche (sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents) et comme le noyau de  $\mathcal{H}^0 u^\#(\phi)$  est nul, on déduit alors du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir la première partie de 3.3.2) que  $\phi$  est injectif.

Comme le morphisme canonique  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})) \rightarrow u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$  est un isomorphisme (voir la seconde partie de 3.3.2), on en déduit que l'injection canonique  $u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$  se factorise par les inclusions  $u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$  (la seconde flèche est bien injective grâce à 3.3.3). Par l'absurde, l'inclusion  $u_+^\# \mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$  n'est pas un isomorphisme. Dans ce cas,

il existe un ouvert affine  $\mathfrak{U}$  de  $\mathfrak{X}$ , une section  $s$  sur  $\mathfrak{U}$  de  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$  qui n'est pas une section sur  $\mathfrak{U}$  de  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})$ . Soit  $\mathcal{G}$  le sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{U}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module de  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}}$  engendré par  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}}$  et par la section  $s$ . Comme le faisceau associé à un sous-préfaisceau d'un faisceau contient le sous-préfaisceau,  $\mathcal{G}$  contient strictement  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}}$ . De plus,  $\mathcal{G}$  est à support dans  $\mathfrak{U} \cap Z$  car  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}}$  l'est. Comme  $\mathcal{G}$  est un sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{U}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini du  $\mathcal{D}_{\mathfrak{U}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent  $\mathcal{E}|_{\mathfrak{U}}$ ,  $\mathcal{G}$  est alors un sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{U}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Or, en appliquant le foncteur exact à gauche  $\mathcal{H}^0 u^{\sharp!}$  aux inclusions  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}} \hookrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{E}|_{\mathfrak{U}}$ , on obtient les isomorphismes  $\mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{G})|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}}$ . Via le théorème de Berthelot-Kashiwara, le premier de ces deux isomorphismes entraîne alors que  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ , ce qui est une contradiction.

(2) Supposons que  $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$  soit  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent. Si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\sharp}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, on obtient les isomorphismes  $u^{\sharp!}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}u^*(\mathcal{G})[d_{Z/X}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$ . Si  $Z_1$  est un diviseur de  $X$  contenant  $Z$ , on calcule que  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}(\dagger Z_1)) = 0$ . Via des suites spectrales de Mayer-Vietoris, on en déduit, par récurrence sur le nombre de diviseurs dont l'intersection est égale à  $Z$ , l'annulation  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}^0(\mathcal{E}(\dagger Z))) = \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}(\dagger Z))) = 0$ . En appliquant à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{E}(\dagger Z))$  le foncteur  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \omega_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} -)$ , on en déduit que le morphisme canonique  $\mathcal{H}^0 u^{\sharp!} \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E})$  est un isomorphisme. Via la première partie de 3.3.2, on en déduit l'isomorphisme  $u_+^{\sharp} \mathcal{H}^0 u^{\sharp!}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$ .

### 3.4 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré maximal

NOTATIONS 3.4.1. Soit  $\mathfrak{B}$  la base de voisinages de  $\mathfrak{X}$  des ouverts affines et munis de coordonnées locales. Pour tout  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$ , on note  $\mathfrak{U}^{\sharp} := (\mathfrak{U}, \mathfrak{U} \cap \mathfrak{D})$ .

- On note  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\sharp} \leftarrow Z^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{X}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$  le faisceau (d'ensemble) sur  $\mathfrak{X}$  associé au préfaisceau sur  $\mathfrak{B}$  définie de la manière suivante  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^{\sharp} \leftarrow Z^{\sharp} \cap \mathfrak{U}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z^{\sharp} \cap \mathfrak{U}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z^{\sharp} \cap \mathfrak{U}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{U}^{\sharp}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ , les morphismes de restriction étant les morphismes canoniques (la séparée complétion est un foncteur).

- Comme les morphismes canoniques

$$\tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\# \rightarrow \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\# \rightarrow \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$$

sont fonctoriels en  $\mathfrak{U}$ , on obtient donc le morphisme canonique de faisceaux :

$$(14) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$$

- Soit  $\alpha^{(m)} : (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  un morphisme  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire à gauche. En utilisant la fonctorialité en  $\mathfrak{U}$  des morphismes  $\text{id} \widehat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*(\alpha^{(m)})) : \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\# \rightarrow \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\# \rightarrow \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ , on obtient le morphisme de faisceaux :

$$(15) \quad \begin{aligned} \text{id} \widehat{\otimes} u^*(\alpha^{(m)}) : & \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \\ & \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s. \end{aligned}$$

LEMME 3.4.2.

- (1) Avec les notations de 3.4.1, on dispose du diagramme canonique commutatif de faisceaux :

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})_{\mathbb{Q}} \\ & \swarrow \text{\scriptsize 14} \quad \searrow & \\ & \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} & \end{array}$$

dont la flèche du haut est un isomorphisme.

- (2) Soit  $\epsilon^{(m)} : (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  un morphisme  $\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire à gauche et  $\alpha^{(m)} : (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  le morphisme induit par tensorisation par  $\mathbb{Q}$ .

On dispose alors du carré commutatif

$$\begin{CD}
 (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)})^r)_{\mathbb{Q}} @>(\text{id} \hat{\otimes} u^* \epsilon^{(m)})_{\mathbb{Q}}>> (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)})^s)_{\mathbb{Q}} \\
 @V \sim \uparrow VV @V \sim \uparrow VV \\
 \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^r @>(\text{id} \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)})>> \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^s,
 \end{CD}$$

(17)

dont les isomorphismes verticaux sont induites par la factorisation de (16).

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$ . Pour tout entier positif  $i$ , on note  $X_i, X_i^\sharp, Z_i, Z_i^\sharp, U_i$  et  $U_i^\sharp$  les réductions modulo  $\pi^{i+1}$  de  $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^\sharp, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}^\sharp, \mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{U}^\sharp$  respectivement. On dispose des  $\mathcal{B}_{Z_i \cap U_i}^{(m)}$  ( $T \cap Z_i \cap U_i$ )-modules quasi cohérents  $\tilde{\mathcal{D}}_{U_i^\sharp \leftarrow Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V} / \pi^{i+1}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V} / \pi^{i+1}$  et enfin  $\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp \rightarrow U_i^\sharp}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp \rightarrow \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V} / \pi^{i+1}$ . Comme le foncteur sections globales commute aux limites projectives et par quasi-cohérence de nos faisceaux sur  $X_i$ , on obtient les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\mathfrak{U}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)}) &= \Gamma(\mathfrak{U}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp \rightarrow \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)}) \\
 &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma(U_i, \tilde{\mathcal{D}}_{U_i^\sharp \leftarrow Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp \rightarrow U_i^\sharp}^{(m)}) \\
 &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \tilde{\mathcal{D}}_{U_i^\sharp \leftarrow Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i^\sharp \cap U_i^\sharp \rightarrow U_i^\sharp}^{(m)} \\
 (18) \quad &\xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp \rightarrow \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)}.
 \end{aligned}$$

Or, pour tout  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$ , le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{U}, -)$  commute au produit tensoriel par  $\mathbb{Q}$ . On en déduit alors que le faisceau  $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$  sur  $\mathfrak{X}$  est associé au faisceau sur  $\mathfrak{B}$  défini par  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\sharp \leftarrow \mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp \cap \mathfrak{U}^\sharp \rightarrow \mathfrak{U}^\sharp}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$ . Les isomorphismes canoniques (13) nous permettent de conclure le premier point. La seconde assertion se vérifie de même facilement.

*Remarque 3.4.3.* Avec les notations de 3.4.1, le faisceau sur  $\mathfrak{B}$  en  $K$ -espaces vectoriels  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$  est aussi un faisceau sur  $\mathfrak{B}$  à valeur dans la catégorie des  $K$ -espaces topologiques (on vérifie que les morphismes de restriction sont injectifs et stricts).

LEMME 3.4.4. *On suppose que  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est de codimension pure  $e$ . Soit  $\alpha$  un morphisme de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à gauche qui soit de la forme  $\alpha: (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$ . Soit  $m_0$  assez grand tel qu'il existe un morphisme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -linéaire à gauche de la forme  $\alpha^{(m_0)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^s$  induisant  $\alpha$  par extension via  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ . Pour  $m \geq m_0$ , on note  $\alpha^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  le morphisme induit par extension de  $\alpha^{(m_0)}$ .*

*On dispose alors du diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}_Z^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r) & \xrightarrow{\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\alpha)} & \mathcal{H}_Z^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s) \\
 \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\
 \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r & \xrightarrow{\varinjlim_m (\text{id} \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)})} & \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s
 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Quitte à multiplier  $\alpha^{(m_0)}$  par une puissance de  $p$  assez grande, on peut supposer que  $\alpha^{(m_0)}$  provient par extension d'un morphisme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -linéaire à gauche de la forme  $\epsilon^{(m_0)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^s$ . Notons  $\epsilon^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  les morphismes induits par extension. On obtient ainsi le foncteur dans  $LD_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(\bullet)})$  de la forme

$$\epsilon^{(\bullet+m_0)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(\bullet+m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(\bullet+m_0)})^s.$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \varinjlim_m \circ u_+^{\#(\bullet)} \circ u^*(\epsilon^{(\bullet+m_0)}): \varinjlim_m \left( \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \right)_{\mathbb{Q}} \\
 \rightarrow \varinjlim_m \left( \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\# \rightarrow \mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \right)_{\mathbb{Q}}.
 \end{aligned}$$

De plus, comme par définition  $\varinjlim = \varinjlim_m \circ (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} -)$ , en appliquant le foncteur  $\varinjlim_m$  au carré commutatif (17), on obtient que  $\varinjlim_m \circ u_+^{\#(\bullet)} \circ u^*(\epsilon^{(\bullet+m_0)})$

et  $\varinjlim_m (\text{id} \widehat{\otimes} u^* \alpha^{(m)})$  sont canoniquement isomorphes. Comme par définition  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\alpha) = \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\epsilon^{(\bullet+m_0)})$ , comme les deux foncteurs  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$  et  $u_+^{\sharp(\bullet)} \circ u^{\sharp(\bullet)!}$  sont isomorphes et comme  $u^* = u^{\sharp(\bullet)!}[e]$ , on en déduit alors le résultat.

*Remarque 3.4.5.* Avec les notations de 3.4.4, supposons  $\mathfrak{X}$  affine. Soit  $E^{(m_0)}$  un  $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}$ -module cohérent sans  $p$ -torsion,  $\mathcal{E}^{(\bullet)} := \widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet+m_0)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$  le  $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet+m_0)}$ -module localement de présentation finie associé et  $\mathcal{E} := \varinjlim(\mathcal{E}^\bullet)$  le  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent associé. En prenant une résolution de  $E^{(m_0)}$  par des  $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}$ -modules libres de type fini qui induit, après application du foncteur  $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet+m_0)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(m_0)}} -$ , une résolution de  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  par des  $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet+m_0)}$ -modules libres de type fini, on vérifie que le complexe  $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$  est isomorphe à un complexe dont les termes sont de la forme  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})^N)$  pour certains entiers  $N$ .

**THÉORÈME 3.4.6.** *On suppose que  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est de codimension pure  $e$ . Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- (1) *pour  $i = 0, \dots, e - 1$ , localement en  $\mathcal{Z}$ , les  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp}^\dagger(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -modules  $\mathcal{H}^i u^{\sharp!}(\mathcal{E})$  sont  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$ -acycliques ;*
- (2) *le module  $u^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\sharp}^\dagger(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -module cohérent qui est aussi  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -localement projectif de type fini pour la structure induite.*

*Le  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\mathcal{E})$  est alors cohérent.*

*Démonstration.* (0) *Hypothèses 1 : passage aux sections globales, quelques notations.*

Comme la  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -cohérence de  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\mathcal{E})$  est locale, on peut reprendre les notations et hypothèses du chapitre 2. Dans ce cas, posons  $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ . Avec les notations de 3.1.2, les hypothèses d’acyclicité sur  $\mathcal{E}$  impliquent l’isomorphisme  $\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathbb{L}u^* \mathcal{E}))$  (on utilise la suite spectrale d’hypercohomologie du foncteur dérivé de  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$ ). On déduit alors du lemme 3.1.3 l’isomorphisme  $\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathbb{L}u^*(E)) = u^*(E)$ .

Choisissons une présentation finie  $(D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})^r \xrightarrow{a} (D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})^s \xrightarrow{b} E \rightarrow 0$  de  $E$  (voir le théorème de type A de Berthelot de [Ber96, 3.6.5] qui est valable pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules cohérents). En appliquant à cette présentation finie le foncteur  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q} \otimes_{D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} -$ , on en déduit la suite



exacte de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à gauche  $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{\beta} \mathcal{E} \rightarrow 0$ . Par exactitude à droite des deux foncteurs de la forme  $u^*$  (voir les définitions de 3.1.2), on obtient les suites exactes  $(u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{u^*(\alpha)} (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{u^*(\beta)} u^*(\mathcal{E}) \rightarrow 0$  et  $(u^*D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{u^*(a)} (u^*D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{u^*(b)} u^*(E) \rightarrow 0$ . Comme  $\Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\alpha)) = u^*(a)$  et comme le morphisme canonique  $u^*(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Z}, u^*\mathcal{E})$  est un isomorphisme, en appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$  à l'avant-dernière suite exacte, on obtient encore une suite exacte (canoniquement isomorphe à la dernière). En posant  $\mathcal{M} := u^*(\mathcal{E})$ ,  $M := \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{M})$ ,  $\phi := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\alpha))$  et  $\psi := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\beta))$ , on obtient donc la suite exacte suivante  $(u^*D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{\phi} (u^*D_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$ .

(0 bis) *Hypothèses 2 : niveaux  $m \geq m_0$ , quelques notations.*

Soit  $m_0 \geq 0$  assez grand tel que, pour tout  $m \geq m_0$ , il existe un morphisme  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire à gauche de la forme  $\alpha^{(m)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  et induisant  $\alpha$  par extension *via*  $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ . D'après la seconde partie de nos hypothèses,  $\mathcal{M}$  est associé à un isocrystal sur  $Z^\sharp \setminus U$  surconvergeant le long de  $U$  (voir [CT12]). Donc, comme  $M = \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{M})$  et comme  $\mathcal{Z}$  est affine et lisse, le  $O_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module  $M$  est alors projectif et de type fini. De plus, de manière analogue à [Ber96, 4.4.5] (et aussi [Ber96, 4.4.7]), quitte à augmenter  $\lambda_0$  et  $m_0$ , il existe un  $\tilde{\mathcal{D}}_{Z^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini et topologiquement nilpotent  $\mathcal{M}^{(m_0)}$  qui est, pour la structure induite de  $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module, un  $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module (localement projectif) de type fini et un isomorphisme  $\mathcal{D}_{Z^\sharp}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Z^\sharp}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{M}^{(m_0)}$ . Pour tout  $m \geq m_0$ , on pose alors  $\mathcal{M}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{Z^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{M}^{(m_0)}$ .

Notons  $\beta^{(m)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow \mathcal{E}$  le composé du morphisme  $\beta$  avec l'inclusion canonique  $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \hookrightarrow (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$ . Posons enfin  $\phi^{(m)} := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\alpha^{(m)}))$  et  $\psi^{(m)} := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\beta^{(m)}))$ . Avec les définitions et notations de 3.1.2, on obtient ainsi la suite  $(u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\phi^{(m)}} (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\psi^{(m)}} M \rightarrow 0$ . On remarque que cette suite devient exacte seulement après passage à la limite sur le niveau.

(1) *Hypothèses 2 : topologie de type LB sur  $M$ , niveaux  $m \geq m_1$ , sections continues  $\theta, \theta^{(m)}$ .*

On munit  $M$  de la topologie canonique de  $O_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini qui en fait un  $O_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type LB (voir 2.2.2 et 2.2.7).

Comme  $M$  est un  $O_Z(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module projectif, il existe alors un morphisme  $O_Z(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire  $\theta: M \rightarrow (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$  tel que  $\psi \circ \theta = id$ . Comme  $M^{(m_0)}$  est un  $\tilde{B}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini, il existe  $m_1 \geq m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_1$ , on ait  $\theta(M^{(m_0)}) \subset (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ . Ainsi, cette section  $\theta$  se factorise (de manière unique) en un morphisme  $\tilde{B}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme  $M^{(m_0)} \rightarrow (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ . D'où la factorisation  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire unique  $\theta^{(m)}: M^{(m)} \rightarrow (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  pour tout  $m \geq m_1$ . Soit  $\overset{\circ}{M}^{(m)}$  un  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)$ -module de type fini induisant l'isomorphisme  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire. Or, une base de voisinages de zéro sur  $(u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  (resp.  $M^{(m)}$ ) est donnée par la famille de  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)$ -modules  $(p^n(u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)})^s)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(p^n(\overset{\circ}{M}^{(m)}))_{n \in \mathbb{N}}$ ). Pour  $n$  assez grand, on a l'inclusion  $\theta^{(m)}(p^n \overset{\circ}{M}^{(m)}) \subset (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#}^{(m)})^s$ . On en déduit que le morphisme  $\theta^{(m)}$  de  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -modules de Banach est continu. Par composition de morphismes continus, il en est donc de même de  $M^{(m)} \rightarrow (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$ . Par passage à la limite sur le niveau  $m \geq m_1$ , la section  $\theta: M \rightarrow (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$  est alors continue.

(2) *Le  $K$ -espace  $G$  de type  $LB$ , les  $K$ -espaces de Banach  $G^{(m)}$ .* Avec les topologies canoniques respectives (voir les définitions de 2.1.2), d'après la proposition 2.3.1, l'application  $\phi$  est un morphisme continu de  $K$ -espaces de type  $LB$  (voir 2.3.3). Notons  $G := (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r / \ker(\phi)$  le  $K$ -espace localement convexe dont la topologie est celle qui fait de la projection canonique  $\pi: (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow G$  un morphisme strict. Notons  $\iota: G \hookrightarrow (u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$  le monomorphisme tel que  $\iota \circ \pi = \phi$ . Comme  $\phi$  est continue, alors  $\iota$  est continu. Comme  $(u^*D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$  est séparé (voir 2.3.3), il en est alors de même de  $G$ . Ainsi  $G$  est un quotient séparé d'un espace de type  $LB$ . D'après 1.1.7, cela entraîne que  $G$  est aussi un espace de type  $LB$ . Plus précisément, d'après sa preuve, en notant  $G^{(m)} := (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r / (\ker(\phi) \cap (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r)$  muni de la topologie quotient,  $G^{(m)}$  est un  $K$ -espace de Banach et l'isomorphisme canonique  $\varinjlim_m G^{(m)} \xrightarrow{\sim} G$  est aussi un homéomorphisme. Comme par définition le morphisme  $(u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow G^{(m)}$  est strict, il découle de 3.2.2 que l'on dispose de l'épimorphisme strict

$$(20) \quad \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^*\tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)}.$$

Il résulte alors de 1.1.3 que l'on dispose de l'épimorphisme strict :

$$(21) \quad \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)}.$$

(3) *Les applications  $\phi$ ,  $\iota$  et  $\psi$  sont des morphismes stricts.*

D'après ce qui précède, on dispose du morphisme  $O_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}$ -linéaire  $(\iota, \theta) : G \oplus M \rightarrow (u^* D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$  qui est aussi une application continue et bijective entre deux  $K$ -espaces de type  $LB$ . D'après le théorème de l'application ouverte de Banach (voir [Sch02, 8.8]), le morphisme  $(\iota, \theta)$  est donc un homéomorphisme. Comme  $\phi$  est le morphisme composé

$$(22) \quad \phi : (u^* D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{\pi} G \subset G \oplus M \xrightarrow[\iota, \theta]{\sim} (u^* D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s,$$

le morphisme  $\phi$  est alors strict (ce qui est équivalent d'ailleurs à la propriété selon laquelle le morphisme  $\iota$  est strict). On remarque que, comme  $M$  est un  $K$ -espace séparé, alors  $G$  est un fermé de  $G \oplus M$  (car homéomorphe au fermé  $G \oplus \{0\}$ ). Enfin, comme  $\iota(G) = \text{Im}(\phi) = \ker(\psi)$ , on obtient le carré commutatif canonique

$$(23) \quad \begin{array}{ccc} G \oplus M & \xrightarrow[\sim]{(\iota, \theta)} & (u^* D_{\mathfrak{x}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \\ \downarrow (0, \text{id}) & & \downarrow \psi \\ M & \xlongequal{\quad} & M, \end{array}$$

dont on sait déjà que toutes les flèches autres que  $\psi$  sont continues et dont la flèche du haut est un homéomorphisme. On en déduit la continuité de  $\psi$ . Comme  $\psi$  est un morphisme continu et surjectif entre deux espaces de type  $LB$ , on en déduit que  $\psi$  est un morphisme strict.

(4) *Constructions et propriétés de  $H^{(m)}$  et  $N^{(m)}$ .*

Dans toute la suite de la preuve,  $m$  sera toujours par défaut un entier plus grand que  $m_1 \geq m_0$ . Notons  $H^{(m)} := \iota^{-1}((u^* \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s)$  et  $\iota^{(m)} : H^{(m)} \hookrightarrow (u^* \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  le morphisme  $\widetilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire induit par  $\iota$ . On munit  $H^{(m)}$  de l'unique topologie telle que  $\iota^{(m)}$  soit un morphisme strict (avec  $(u^* \widetilde{D}_{\mathfrak{x}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  muni de sa topologie canonique de  $K$ -espace de Banach). On a vu au cours de l'étape 3 que  $\iota(G)$  est fermé. Il en résulte que  $\iota^{(m)}(H^{(m)})$  est un

fermé de  $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  qui est un  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach. Ainsi,  $H^{(m)}$  est aussi un  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach. Notons alors  $N^{(m)} := \text{Im}(\psi^{(m)})$  et  $\psi^{(m)}: (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow N^{(m)}$  l'épimorphisme canonique factorisant  $\psi^{(m)}$ . On obtient alors sur  $N^{(m)}$  une structure de  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach qui fait de l'épimorphisme  $\tilde{B}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire  $\psi^{(m)}: (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow N^{(m)}$  une application stricte. On dispose ainsi du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\iota} & (u^* D_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s & \xrightarrow[\psi^{(m)}]{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \nearrow \psi^{(m)} & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^{(m)} & \xrightarrow{\iota^{(m)}} & (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s & \longrightarrow & N^{(m)} & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \tag{24}$$

dont les morphismes horizontaux sont stricts et forment deux suites exactes courtes (la première est d'ailleurs scindée *via*  $\theta$ ). Comme le composé de  $H^{(m)} \subset G$  avec  $\iota$  est continu et comme  $\iota$  est un monomorphisme strict, on remarque que l'inclusion  $H^{(m)} \subset G$  est alors continue. Enfin, comme  $\psi^{(m)}$  est continu, l'inclusion  $N^{(m)} \subset M$  l'est aussi.

Grâce à 3.2.2, la suite exacte courte du bas de (24) induit la suite exacte avec morphismes stricts :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} &\xrightarrow{\text{id}_{\widehat{\otimes} \iota^{(m)}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \\
 &\xrightarrow{\text{id}_{\widehat{\otimes} \psi^{(m)}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow 0.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

En passant à la limite sur le niveau, il en résulte la suite exacte avec morphismes continus :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} &\rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \\
 &\rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

(5) *Passage à la limite sur le niveau pour  $G^{(m)}$  et  $H^{(m)}$  : comparaison.*

Notons  $j_m : G^{(m)} \rightarrow G$  le monomorphisme canonique continu. Pour tout  $m \geq m_1$ , comme le morphisme  $\phi$  se factorise par le morphisme continu  $\phi^{(m)} : (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ , on obtient alors l'inclusion  $\iota \circ j_m(G^{(m)}) \subset (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$  et donc  $j_m(G^{(m)}) \subset H^{(m)}$ . Le monomorphisme continu  $j_m$  se factorise donc (de manière unique) par un monomorphisme continu de la forme  $G^{(m)} \rightarrow H^{(m)}$ .

Réciproquement, comme  $H^{(m)}$  est un  $K$ -espace de Banach et comme on a l'égalité  $G = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} j_m(G^{(m)})$ , d'après [Sch02, 8.9], il existe alors  $N_m \geq m$  assez grand tel que  $H^{(m)} \subset G$  est le composé d'un morphisme (unique) continu de la forme  $H^{(m)} \rightarrow G^{(N_m)}$  suivi de  $j_{N_m}$ . Il ne coûte rien de supposer que la suite  $(N_m)_{m \geq m_1}$  est strictement croissante.

D'après 3.2.3, on dispose alors des monomorphismes continus :

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} &\hookrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(N_m)} \\
 (27) \qquad \qquad \qquad &\hookrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(N_m)}.
 \end{aligned}$$

En passant la suite (27) à la limite inductive sur le niveau, grâce à (5), son composé est un homéomorphisme. Comme le foncteur de passage à la limite inductive sur le niveau préserve la continuité et l'injectivité, on en déduit que le morphisme canonique horizontal du haut du carré

$$\begin{array}{ccc}
 \lim_{\rightarrow m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(N_m)} & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(N_m)} \\
 (28) \qquad \qquad \qquad \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\
 \lim_{\rightarrow m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)} & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow m} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)}
 \end{array}$$

est un homéomorphisme. Comme les morphismes verticaux sont des homéomorphismes (voir (5)), il en est de même de la flèche du bas.

(6) *Passage à la limite sur le niveau pour  $M^{(m)}$  et  $N^{(m)}$  : comparaison.*

Comme  $\psi^{(m)}$  est continu, pour tout  $m \geq m_1$ , d'après [Sch02, 8.9], il existe  $N_m \geq m$  assez grand tel que  $\psi^{(m)} : (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M$  soit la composition d'un morphisme continu (forcément unique) de la forme  $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M^{(N_m)}$  suivi du monomorphisme  $M^{(N_m)} \hookrightarrow M$ . Comme  $N^{(m)} = \text{Im}(\psi^{(m)}) =$

$\text{Im}(\psi^{(m)})$ , ce morphisme  $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M^{(N_m)}$  se décompose de manière unique en  $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\psi^{(m)}} N^{(m)} \hookrightarrow M^{(N_m)}$ . Le morphisme  $\psi^{(m)}$  induit donc le morphisme composé ci-dessous noté abusivement

$$u_+^{\sharp(m)}(\psi^{(m)}) : \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\text{id}_{\widehat{\otimes}_{\psi^{(m)}}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \\ \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)}.$$

La notation  $u_+^{\sharp(m)}(\psi^{(m)})$  est justifiée par le fait que ce morphisme composé ne dépend pas du choix de  $N_m$ , mais seulement du niveau  $m$  fixé, de  $\psi^{(m)}$  et de l’immersion fermée  $u$ . En passant à la limite sur le niveau, on obtient les morphismes continus :

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\text{id}_{\widehat{\otimes}_{\psi^{(m)}}}} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \\ (29) \quad \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)}$$

dont le composé est  $\varinjlim_m u_+^{\sharp(m)}(\psi^{(m)})$ . Comme, pour tout  $m \geq m_1$ , le morphisme  $\psi^{(m)} \circ \theta^{(m)}$  est l’inclusion canonique  $M^{(m)} \hookrightarrow M$ , ce dernier se factorise alors canoniquement en  $M^{(m)} \hookrightarrow N^{(m)} \subset M$ . On en déduit comme pour l’étape (5) que la flèche de droite de (29) est un homéomorphisme.

(7) *Première conclusion.*

En composant (21) avec l’isomorphisme du bas de (28), on obtient l’épimorphisme strict de la suite :

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} \\ (30) \quad \hookrightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s,$$

la seconde flèche étant le monomorphisme de (26). On déduit alors de la suite exacte (26) et du fait que la flèche de droite de (29) est un homéomorphisme,

la suite exacte :

$$(31) \quad \begin{aligned} & \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \longrightarrow \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \\ & \longrightarrow \lim_{\beta_Z^\dagger} \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $\alpha_Z^\dagger := \text{id} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathcal{Z}, u^* \alpha^{(m)})$ , qui est égale au composé des morphismes de (30), et, avec les notations de l'étape (6),  $\beta_Z^\dagger := \lim_m u_+^{\#(m)}(\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \beta^{(m)}))$ .

(8) *Faisceautisation.*

(i) Soit  $\mathfrak{B}$  la base de voisinages de  $\mathfrak{X}$  définie par ses ouverts affines. Le préfaisceau sur  $\mathfrak{B}$  défini par  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, \mathcal{M}^{(m)})$  est, par définition de  $\mathcal{M}^{(m)}$ , en réalité un faisceau dont le faisceau sur  $\mathfrak{X}$  est  $u_+^{\#}(\mathcal{M})$ .

(ii) Avec les notations de 3.4.1, comme le foncteur faisceau associé à un préfaisceau (d'ensemble) commute aux limites inductives filtrantes, alors le faisceau associé au préfaisceau  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r))$  est  $\lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r$ , de même pour un autre entier que  $r$ .

(iii) Pour tout  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$ , notons  $u^\#|_{\mathfrak{U}}: \mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\# \hookrightarrow \mathfrak{U}^\#$  l'immersion fermée exacte induite par  $u^\#$ . Pour tout  $m \geq m_1$ , on dispose de la suite (pas forcément exacte) :  $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\alpha^{(m)}|_{\mathfrak{U}}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\beta^{(m)}|_{\mathfrak{U}}} \mathcal{E}|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$ . Comme pour (31) (il suffit de remplacer  $u^\#$  par  $u^\#|_{\mathfrak{U}}$ ), on obtient alors la suite exacte

$$\begin{aligned} & \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r)) \\ & \longrightarrow \lim_{\alpha_{\mathfrak{U}}^\dagger} \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s)) \\ & \longrightarrow \lim_{\beta_{\mathfrak{U}}^\dagger} \lim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U}^\# \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*(\mathcal{M}^{(m)})) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $\widehat{\otimes} := \widehat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}^\# \cap \mathfrak{U}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}}$ ,  $\alpha_{\mathfrak{U}}^\dagger := \text{id} \widehat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^* \alpha^{(m)})$  et  $\beta_{\mathfrak{U}}^\dagger := \lim_m (u^\#|_{\mathfrak{U}})_+^{\#(m)}(\Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^* \beta^{(m)}))$ . Comme ces suites exactes sont fonctorielles en  $\mathfrak{U}$  et comme le

foncteur faisceau associé à un préfaisceau est exact, on obtient alors la suite exacte:

$$(32) \quad \begin{array}{c} \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \\ \longrightarrow \varinjlim_m \text{id} \widehat{\otimes}_{u^* \alpha^{(m)}} \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \leftarrow \mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow u^\#_+(\mathcal{M}) \rightarrow 0. \end{array}$$

(9) *Fin de la preuve.* Comme le foncteur  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}$  est exact à droite (dans la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules cohérents), alors le conoyau de  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\phi)$  est isomorphe à  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\mathcal{E})$ . Or, il découle du lemme 3.4.4 et de la suite exacte (32) que le conoyau de  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\phi)$  est isomorphe à  $u^\#_+ \mathcal{M}$ . Comme  $u^*(\mathcal{E}) = \mathcal{M}$ , on a démontré ainsi que  $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u^\#_+ u^*(\mathcal{E})$ . Enfin, comme  $u$  est propre et  $u^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\#}^\dagger(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -module cohérent, alors  $u^\#_+ u^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent.

**COROLLAIRE 3.4.7.** *On suppose que  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est de codimension pure 1. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -module cohérent tel que  $\mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\#}^\dagger(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -module cohérent et que  $\mathcal{H}^1 u^\#(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}^\#}^\dagger(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -module cohérent qui soit aussi un  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_\mathbb{Q}$ -module localement projectif de type fini pour la structure induite. Le complexe  $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^\dagger(\mathcal{E})$  est alors  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -cohérent.*

*Démonstration.* Via le triangle distingué  $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow (\dagger Z)(\mathcal{E}) \rightarrow +1$ , comme  $(\dagger Z)(\mathcal{E})$  est un module, on en déduit que  $\mathcal{H}_Z^{\dagger i}(\mathcal{E})$  pour tout  $i \notin \{0, 1\}$ . La  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -cohérence du complexe  $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^\dagger(\mathcal{E})$  résulte alors de 3.3.4 et de 3.4.6.

Le théorème qui suit est juste une reformulation et un corollaire de [Car16, 3.5.2].

**THÉORÈME 3.4.8.** [Car16, 3.5.2] *On suppose que  $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est de codimension pure 1. Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)}$  un objet de  $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{(\bullet)})$  et  $\mathcal{E} := \varinjlim (\mathcal{E}^{(\bullet)})$  l'objet de  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q})$  correspondant. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\#}^{(\bullet)})$ ,
- (2)  $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{(\bullet)})$ ,



- (3)  $(\dagger Z)(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}^b_{\rightarrow \mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}(\bullet)),$
- (4)  $(\dagger Z)(\mathcal{E}) \in D^b_{\text{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}),$
- (5)  $\mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E}) \in D^b_{\text{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}).$

*Démonstration.* Les équivalences (2)  $\Leftrightarrow$  (3) et (4)  $\Leftrightarrow$  (5) résultent du triangle distingué de localisation  $\mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow \mathcal{E}(\bullet) \rightarrow (\dagger Z)(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow +1$ . L'équivalence (3)  $\Leftrightarrow$  (4) est exactement le corollaire [Car16, 3.5.2]. L'équivalence (1)  $\Leftrightarrow$  (2) découle de l'isomorphisme canonique  $u^\#_+(\bullet) \circ u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E}(\bullet))$  (voir [Car16, 5.3.8.1]), de l'isomorphisme canonique  $u^\#(\bullet)! \circ \mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E}(\bullet)) \xrightarrow{\sim} u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}(\bullet))$ , ainsi que du théorème de Berthelot-Kashiwara toujours valable dans le contexte des catégories de la forme  $\underline{LD}^b_{\rightarrow \mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}(\bullet))$  (voir [Car16, 5.3.7]).

**COROLLAIRE 3.4.9.** *On suppose que  $u: Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est de codimension pure 1. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent tel que  $\mathcal{H}^0 u^\#(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}^\dagger_{Z^\#}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent et que  $\mathcal{H}^1 u^\#(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}^\dagger_{Z^\#}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent qui soit aussi un  $\mathcal{O}_Z(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module localement projectif de type fini pour la structure induite. Soit  $\mathcal{E}(\bullet)$  un objet de  $\underline{LM}_{\rightarrow \mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}(\bullet))$  tel que  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \varinjlim (\mathcal{E}(\bullet))$ . Alors  $u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}^b_{\rightarrow \mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{Z^\#}(\bullet)).$*

*Démonstration.* Cela découle de 3.4.7 et 3.4.8.

*Remarque 3.4.10.* On garde les notations et hypothèses du théorème 3.4.8.

- Si l'une des conditions équivalentes du théorème 3.4.8 est satisfaite, alors on dispose de l'isomorphisme  $u^\#_+ \circ u^\#(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E})$  (dans le terme de gauche, les foncteurs  $u^\#_+$  et  $u^\#$  sont calculés sur les catégories respectives de  $\mathcal{D}^\dagger$ -modules cohérents).

- En revanche, si l'on suppose seulement que  $u^\#(\mathcal{E}) \in D^b_{\text{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{Z^\#}(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$ , alors il n'est pas clair que  $u^\#_+ \circ u^\#(\mathcal{E})$  (les foncteurs  $u^\#_+$  et  $u^\#$  sont calculés sur les catégories respectives de  $\mathcal{D}^\dagger$ -modules cohérents) soit isomorphe à  $\varinjlim \circ u^\#_+(\bullet) \circ u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}(\bullet)) = \mathbb{R}\Gamma^\dagger_Z(\mathcal{E})$ . En effet, il n'est alors pas évident que la cohérence de  $u^\#(\mathcal{E})$  implique  $u^\#(\bullet)!(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}^b_{\rightarrow \mathbb{Q}, \text{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{Z^\#}(\bullet))$ . *A priori*, pour garantir une telle implication, on a besoin de conditions supplémentaires (par exemple 3.4.9).

### 3.5 Applications aux log-isocristaux surconvergeants

Rappelons les conditions de non-liouvillité apparaissant dans [CT12, 1.1.1].

DÉFINITION 3.5.1. Soit  $\mathcal{E}$  un isocristal sur  $\mathfrak{X}^\sharp$  surconvergeant le long de  $T$ . On dit que  $\mathcal{E}$  satisfait respectivement les conditions (a), (b) et (p) si le long de chacune des composantes irréductibles de  $D$  non incluse dans  $T$  on a :

- (a) aucune différence des exposants de  $\mathcal{E}$  n'est un nombre  $p$ -adique de Liouville ;
- (b) aucun des exposants de  $\mathcal{E}$  n'est un nombre  $p$ -adique de Liouville ;
- (p) aucun des exposants de  $\mathcal{E}$  n'est un entier strictement positif.

Nous aurons besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 3.5.2. Soit  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ .

- On dit que  $\mathcal{E}$  est strictement 0-dévisable en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^\sharp$  s'il existe un diviseur  $T'$  contenant  $T$ , une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses  $i: \mathcal{Z}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  tels que  $i^{-1}(\mathcal{D})$  soit un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathcal{Z}'$ ,  $T' \cap \mathcal{Z}'$  soit un diviseur de  $\mathcal{Z}'$ ,  $\mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$ ,  $\mathcal{E}$  soit à support dans  $\mathcal{Z}'$  et, si l'on note  $\mathcal{Z}'^\sharp := (\mathcal{Z}', i^{-1}(\mathcal{D}))$  et  $i^\sharp: \mathcal{Z}'^\sharp \hookrightarrow \mathfrak{X}^\sharp$  l'immersion fermée exacte induite, alors les espaces de cohomologie de  $i^{\sharp!}(\mathcal{E})$  sont des isocristaux sur  $\mathcal{Z}'^\sharp$  surconvergeant le long de  $T' \cap \mathcal{Z}'$ .
- Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $\mathcal{E}$  est strictement  $n + 1$ -dévisable en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^\sharp$ , s'il existe un triangle distingué dans  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\sharp}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$  de la forme

$$\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{E}'[1],$$

où  $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$  sont strictement  $n$ -dévisables en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^\sharp$ .

NOTATIONS 3.5.3. On suppose que  $\mathcal{Z} \cup \mathcal{D}$  est un diviseur à croisements normaux strict de  $\mathfrak{X}$ . On note  $\mathfrak{X}^b := (\mathfrak{X}, \mathcal{Z} \cup \mathcal{D})$  le log-schéma formel logarithmique lisse, et  $\alpha: \mathfrak{X}^b \rightarrow \mathfrak{X}^\sharp$  et  $\beta: \mathfrak{X}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}$  les morphismes canoniques.

Remarque 3.5.4. On garde les notations et hypothèses de 3.5.3. D'après une remarque apparue dans un travail en commun avec Tomoyuki Abe (voir

[AC18, 4]), il existe un diagramme de la forme du carré de gauche :

$$(33) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{Z} & \xleftarrow{g'} & \mathfrak{X}' & \longleftarrow & \mathfrak{X}'^\# & \xleftarrow{g'^\#} & \mathcal{Z}^\# & \mathfrak{X}'^\# & \longleftarrow & \mathfrak{X}^b \\ \parallel & & \begin{array}{c} u' \\ \square \\ \downarrow f \end{array} & & \begin{array}{c} \beta' \\ \square \\ \downarrow f^\# \end{array} & & \parallel & & \begin{array}{c} \alpha' \\ \square \\ \downarrow f^b \end{array} & \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{X} & \longleftarrow & \mathfrak{X}^\# & \xleftarrow{u^\#} & \mathcal{Z}^\# & \mathfrak{X}^\# & \xleftarrow{\alpha} & \mathfrak{X}^b \end{array}$$

où  $f$  est un morphisme étale,  $g'$  est un morphisme lisse qui est une rétraction de  $u'$  et tel que, en posant  $\mathfrak{D}' := f^{-1}\mathfrak{D}$ , on ait  $\mathfrak{D}' = g'^{-1} \circ u'^{-1}(\mathfrak{D}')$ , où les trois autres carrés sont cartésiens par définition (on remarque alors que tous les morphismes sont exacts).

Le corollaire qui suit étend le théorème [CT12, 1.3.13].

COROLLAIRE 3.5.5. *On garde les notations et hypothèses de 3.5.3. Soit  $\mathcal{E}$  un isocristal sur  $\mathfrak{X}^b$  surconvergeant le long de  $T$  et satisfaisant les conditions (a) et (b) de 3.5.1. Les propriétés suivantes sont alors satisfaites.*

- (1) *Le complexe  $u^\# \circ \alpha_+(\mathcal{E})$  est un complexe d'isocristaux sur  $\mathcal{Z}^\#$  surconvergeant le long de  $U$  et satisfaisant les conditions (a) et (b) de 3.5.1.*
- (2) *On dispose du triangle distingué dans  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}^\dagger(T)_{\mathbb{Q}})$  de la forme :*

$$u_+^\# \circ u^\# \circ \alpha_+(\mathcal{E}) \rightarrow \alpha_+(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger Z) \rightarrow u_+^\# \circ u^\# \circ \alpha_+(\mathcal{E})[1].$$

*En particulier,  $\alpha_+(\mathcal{E})$  est strictement 1-dévisable en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^\#$ .*

- (3) *Si  $\mathcal{E}$  vérifie en outre la condition (p) de 3.5.1, alors le morphisme canonique  $\alpha_+(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger Z)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Grâce à la remarque 3.5.4 et grâce à l'isomorphisme de changement de base par un morphisme lisse (voir [Car16, 5.4.6]) qui donne l'isomorphisme  $f^{\#!} \circ \alpha_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \alpha'_+ \circ f^{b!}(\mathcal{E})$ , on se ramène au cas où il existe un morphisme lisse  $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  tel que  $g \circ u = id$  et  $\mathfrak{D} = g^{-1} \circ u^{-1}(\mathfrak{D})$ . On note alors  $g^\#: \mathfrak{X}^\# \rightarrow \mathcal{Z}^\#$  le morphisme induit par  $g$  et  $g^b := g^\# \circ u$ . Soit  $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in LM_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^b}^{(\bullet)}(T))$  un objet tel que  $\varinjlim \mathcal{E}^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ . Comme  $(\dagger Z) \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) = \mathcal{E}^{(\bullet)}(\dagger Z)$ , on dispose alors du triangle distingué dans  $LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}^{(\bullet)}(T))$ :

$$u_+^{\#(\bullet)} \circ u^{\#(\bullet)!} \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)}(\dagger Z)$$

$$(34) \quad \rightarrow u_+^{\sharp(\bullet)} \circ u^{\sharp(\bullet)!} \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet))[1].$$

En appliquant le foncteur  $g_+^{\sharp(\bullet)}$  au triangle (34), comme  $g_+^{\sharp(\bullet)} \circ u_+^{\sharp(\bullet)} = id$  et comme  $g_+^{\sharp(\bullet)} \circ \alpha_+^{(\bullet)} = g_+^{b(\bullet)}$ , on obtient alors le triangle distingué dans  $\underline{LD}^b_{\mathbb{Q},qc}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(\bullet)}(U))$  :

$$(35)$$

$$u^{\sharp(\bullet)!} \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow g_+^{b(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet)) \rightarrow g_+^{b(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet)(\dagger Z)) \rightarrow u^{\sharp(\bullet)!} \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet))[1].$$

En appliquant le foncteur  $\varinjlim$  à (35), comme  $\alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LM}^b_{\mathbb{Q},coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet)}(T))$ , avec [Car16, 5.1.7], on obtient :

$$(36) \quad u^\sharp \circ \alpha_+(\mathcal{E}) \rightarrow g_+^b(\mathcal{E}) \rightarrow g_+^b(\mathcal{E}(\dagger Z)) \rightarrow u^\sharp \circ \alpha_+(\mathcal{E})[1].$$

Grâce au théorème [CT12, 1.3.13], on déduit de 36 que  $u^\sharp \circ \alpha_+(\mathcal{E})$  est un complexe d'isocristaux sur  $\mathcal{Z}^\sharp$  surconvergeant le long de  $U$  et satisfaisant les conditions (a) et (b) de 3.5.1. Il résulte alors de 3.4.7 et 3.4.8 que  $u^{\sharp(\bullet)!} \circ \alpha_+^{(\bullet)}(\mathcal{E}(\bullet)) \in \underline{LD}^b_{\mathbb{Q},coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}^\sharp}^{(\bullet)}(U))$ . Le triangle (34) est donc un triangle distingué de  $\underline{LD}^b_{\mathbb{Q},coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\sharp}^{(\bullet)}(T))$ . On en déduit la partie (2) du corollaire. Lorsque  $\mathcal{E}$  satisfait les conditions (a), (b) et (p) de 3.5.1, il découle de [CT12, 1.1.22.1] que  $g_+^b(\mathcal{E}) \rightarrow g_+^b(\mathcal{E}(\dagger Z))$  est un isomorphisme (cela se vérifie comme [CT12, 1.3.13] découle de [CT12, 1.1.22.1]). Via (36), cela entraîne que  $u^\sharp \circ \alpha_+(\mathcal{E}) = 0$  et donc  $u_+^\sharp \circ u^{\sharp!} \circ \alpha_+(\mathcal{E}) = 0$ . On a validé ainsi la partie (3) du corollaire.

Le corollaire qui suit étend [CT12, 2.2.9] et [CT12, 2.3.4].

**COROLLAIRE 3.5.6.** *Supposons pour simplifier les énoncés que  $\mathfrak{X}$  soit intègre. Soit  $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_s$  les composantes irréductibles de  $\mathfrak{D}$ . Soit  $1 \leq r \leq s$ ,  $\mathfrak{D}'' := \bigcup_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{D}_i$ ,  $\mathfrak{D}' := \bigcup_{r+1 \leq i \leq s} \mathfrak{D}_i$ ,  $\mathfrak{X}^\sharp := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D}')$  et  $\alpha: \mathfrak{X}^\sharp \rightarrow \mathfrak{X}^b$  le morphisme canonique. Soit  $\mathcal{E}$  un isocristal sur  $\mathfrak{X}^\sharp$  surconvergeant le long de  $T$ .*

- (1) *Si  $\mathcal{E}$  vérifie les conditions (a) et (b) de 3.5.1, alors  $\alpha_+(\mathcal{E})$  est strictement  $r$ -dévissable en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^b$  satisfaisant les conditions (a) et (b) de 3.5.1.*

(2) Si  $\mathcal{E}$  vérifie les conditions (a), (b) et (p) de 3.5.1, le morphisme canonique  $\alpha_+(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger D'')$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Vérifions d’abord (1). On procède par récurrence sur  $r$ . Le cas où  $r = 1$  est le corollaire 3.5.5. Supposons donc  $r \geq 2$ . Posons  $\mathcal{Z} := \mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_{\geq 2} := \bigcup_{2 \leq i \leq s} \mathfrak{D}_i$ ,  $\mathfrak{X}^{\sharp} := (\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_{\geq 2})$ ,  $\mathcal{Z}^{\sharp} := (\mathcal{Z}, \mathcal{Z} \cap \mathfrak{D}_{\geq 2})$  et  $\mathcal{Z}^{\flat} := (\mathcal{Z}, \mathcal{Z} \cap \mathfrak{D}')$ . On note  $\alpha_1: \mathfrak{X}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{X}^{\flat}$ ,  $\alpha': \mathfrak{X}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{X}^{\flat}$ ,  $\beta': \mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathcal{Z}^{\flat}$ ,  $u^{\sharp}: \mathcal{Z}^{\sharp} \rightarrow \mathfrak{X}^{\sharp}$  et  $u^{\flat}: \mathcal{Z}^{\flat} \rightarrow \mathfrak{X}^{\flat}$  les morphismes canoniques. Lorsque  $T \supset Z$ , on calcule facilement (voir par exemple [CT12, 2.2.1]) que  $\alpha_{1+}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ . Supposons alors que  $T \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . D’après 3.5.5, on dispose alors du triangle distingué de localisation dans  $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\sharp}}^{\dagger}(T)_{\mathbb{Q}})$

$$u_+^{\sharp} \circ u^{\sharp!} \circ \alpha_{1+}(\mathcal{E}) \rightarrow \alpha_{1+}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger Z_1) \rightarrow u_+^{\flat} \circ u^{\flat!} \circ \alpha_{1+}(\mathcal{E})[1],$$

tel que  $\mathcal{F} := u^{\sharp!} \circ \alpha_{1+}(\mathcal{E})$  soit un complexe d’isocristaux sur  $\mathcal{Z}^{\sharp}$  surconvergeant le long de  $T \cap Z$  satisfaisant les conditions (a) et (b) de 3.5.1. Or, par hypothèse de récurrence (et aussi parce que le foncteur  $\beta'_+$  est exact sur la catégorie des isocristaux sur  $\mathcal{Z}^{\sharp}$  surconvergeant le long de  $T \cap Z$ ),  $\alpha'_+(\mathcal{E}(\dagger Z_1))$  (resp.  $\beta'_+(\mathcal{F})$ ) est strictement  $r - 1$ -dévissable en log-isocristaux surconvergeant sur  $\mathfrak{X}^{\flat}$  (resp.  $\mathcal{Z}^{\flat}$ ). L’isomorphisme canonique  $\alpha'_+ \circ u_+^{\sharp}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_+^{\flat} \circ \beta'_+(\mathcal{F})$  nous permet de conclure (1). On établit (2) de manière identique.

### Remerciements

Je remercie Tomoyuki Abe pour ses commentaires concernant le fait que les  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques cohérents sont de type LB et notre travail en commun qui a conduit à la remarque 3.5.4.


### RÉFÉRENCES

[AC18] T. Abe and D. Caro, *Theory of weights in  $p$ -adic cohomology*, Amer. J. Math. **140**(4) (2018), 879–975.  
 [Ber96] P. Berthelot,  *$\mathcal{D}$ -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supé (4) **29**(2) (1996), 185–272.  
 [Ber02] P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des  $\mathcal{D}$ -modules*, Astérisque **279** (2002), 1–80. Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, II.  
 [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis: A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Springer, Berlin, 1984.  
 [Car16] D. Caro, *Systèmes inductifs cohérents de  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques logarithmiques, stabilité par opérations cohomologiques*, Doc. Math. **21** (2016), 1515–1606.

- [CT12] D. Caro and N. Tsuzuki, *Overholonomicity of overconvergent  $F$ -isocrystals over smooth varieties*, *Ann. of Math. (2)* **176**(2) (2012), 747–813.
- [Ful69] W. Fulton, *A note on weakly complete algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 591–593.
- [Mat89] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **8**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Mon02] C. Montagnon, *Généralisation de la théorie arithmétique des  $\mathcal{D}$ -modules à la géométrie logarithmique*, Ph.D. thesis, Université de Rennes I, 2002.
- [Sch02] P. Schneider, *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2002.

*Laboratoire de mathématiques Nicolas-Oresme*  
*Université de Caen Campus 2*  
*14032 Caen Cedex*  
*France*

daniel.caro@unicaen.fr

 0000-0001-9393-4838