Canad. J. Math. Vol. **60** (2), 2008 pp. 412–442

Quelques calculs de traces compactes et leurs transformées de Satake

G.-V. Nguyen-Chu

Résumé. On calcule les restrictions à l'algèbre de Hecke sphérique des traces tordues compactes d'un ensemble de représentations explicitement construites du groupe $\mathbf{GL}(N, F)$, où F est un corps p-adique. Ces calculs résolve en particulier une question posée dans un article précédent du même auteur.

1 Introduction

Soit F un corps local, non archimédien, de caractéristique zéro de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Soit N un entier positif. Posons $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(N)$ et $G = \mathbf{G}(F)$. On note W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ qui est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$. Le groupe $\mathbf{G}$ est muni d'une involution θ définie par $\theta(g) = w_0{}^t g^{-1} w_0^{-1}$, où w_0 est essentiellement l'élément du groupe de Weyl de plus grande longueur (voir §2.3). On note $G_{\theta-c}$ l'ensemble des éléments θ-compacts de G.

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke sphérique de G des fonctions complexes à support compact, biinvariantes par le sous-groupe compact maximal habituel. Soit $S\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}[X_1^{\pm1}, X_2^{\pm1}, \dots, X_N^{\pm1}]^W$ l'isomorphisme de Satake, où l'exposant signifie que l'on prend des invariants. Notons n la partie entière de $\frac{N}{2}$. On dispose d'un homomorphisme surjectif d'algèbres

$$p\colon \mathbb{C}[X_1^{\pm1}, X_2^{\pm1}, \dots, X_N^{\pm1}]^W \longrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm1}, X_2^{\pm1}, \dots, X_n^{\pm1}]^{W(C_n)},$$

où $W(C_n)$ désigne le groupe de Weyl de type C_n qui agit de façon naturelle sur l'ensemble $\{X_1^{\pm1}, \dots, X_n^{\pm1}\}$. Il est défini par la formule $p(X_i) = X_i$ si $1 \le i \le n$, X_{N+1-i}^{-1} si $N - n < i \le N$ et 1 si $N = 2n+1, i = n+1$.

Soit $\mathbf{\Delta}$ une suite de segments de longueur N (voir §2.1 pour les définitions et conventions). Soit $St_{\mathbf{\Delta}}$ la représentation correspondante; elle est l'induite parabolique normalisée d'un produit tensoriel des représentations de Steinberg St_{n_i} et $\xi\, St_{n_i}$ où ξ est le caractère non ramifié, quadratique, non trivial de $F^\times$. C'est une représentation lisse, irréductible et θ-stable de G. Soit $A : St_{\mathbf{\Delta}} \simeq St_{\mathbf{\Delta}}^\theta$ un opérateur d'entrelacement convenablement normalisé. Soit $\operatorname{tr}_{\theta-c} St_{\mathbf{\Delta}}\colon \mathcal{C}_c^\infty(G) \to \mathbb{C}$ la trace tordue compacte

$$f \longmapsto \operatorname{tr}_{\theta-c} St_{\mathbf{\Delta}}(f) = \operatorname{trace}\Big(A \circ \int_{G_{\theta-c}} f(g)\, St_{\mathbf{\Delta}}(g)\, dg\Big).$$

À $\mathbf{\Delta}$ on associe une fraction rationnelle en n variables $Q_{\mathbf{\Delta}}$ (§5.1).

Reçu par la rédaction le 14 mars, 2005 .
Classification (AMS) par sujet: Principale: 22E50; secondaire: 11F70.

Supposons que la suite de segments $\boldsymbol{\Delta}$ vérifie l'hypothèse suivante: si sa longueur N est impaire, le nombre des termes inclus dans $\mathbb{R}$ est aussi impair. C'est une hypothèse mineure, le théorème qui suit restera valable dans le cas non considéré à condition de modifier la définition de l'homomorphisme p en posant $p(X_{\frac{N+1}{2}}) = -1$ au lieu de 1.

L'objet de cet article est de démontrer le résultat suivant (Théorème 5.1).

Théorème *La fonction $Q_{\boldsymbol{\Delta}}$ n'a pas de pôle au voisinage du tore unitaire*

$$\hat{T}_u = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n; |X_1| = |X_2| = \cdots = |X_n| = 1\}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a l'égalité

$$\mathrm{tr}_{\theta - c}\, St_{\boldsymbol{\Delta}}(f) = \int_{\hat{T}_u} pS(f)(X_1, X_2, \dots, X_n) Q_{\boldsymbol{\Delta}}(X_1, X_2, \dots, X_n)\, d^\times X_1 \cdots d^\times X_n.$$

En plus, les pôles de $Q_{\boldsymbol{\Delta}}$ sont d'ordre 1 et inclus dans les hyperplans $X_i = q^{\pm 1} X_j$, $X_i = q^{\pm 1}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Ce résultat résout et généralise un des rsultats de [NgCh, X.3]. La motivation de ce problème provient du calcul des intégrales orbitales unipotentes sur les groupes classiques p-adiques. Par exemple, lorsque que N impair, disons $N = 2n+1$, comme l'est indiqué dans [NgCh], les fonctions $Q_{\boldsymbol{\Delta}}$ ci-dessus sont susceptibles d'engendrer l'espace des transformées de Satake des intégrales orbitales unipotentes stables sur le groupe $\mathbf{Sp}(2n, F)$. Rappelons brièvement ce lien. Pour simplifier, posons $\mathbf{H} = \mathbf{Sp}(2n)$, $H = \mathbf{Sp}(2n, F)$ (rappelons que la lettre $\mathbf{G}$ désigne le groupe $\mathbf{GL}(2n+1)$). Notons $\mathcal{D}^{\mathrm{st}}_{\mathrm{unip}}$ l'espace des distributions stablement invariantes à support unipotent sur H et $\mathcal{H}'$ l'algèbre de Hecke sphérique usuelle de H. La relation entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ réside dans le fait que le $\mathbf{H}$ est un groupe endoscopique pour $\mathbf{G} \rtimes \{\theta\}$, où $\{\theta\}$ est le groupe à deux éléments engendré par θ. Soit $S\colon \mathcal{H}' \to \mathbb{C}[X_1^{\pm}, X_2^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]^{W(C_n)}$, encore, l'isomorphisme de Satake pour H dont l'image n'est autre que celle de l'homomorphisme p introduit précédemment. On s'attend, entre autres choses, à ce que pour tout $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}_{\mathrm{unip}}$, il existe une fraction rationnelle Q_D en n variables, n'ayant pas de pôle sur le tore unitaire $\hat{T}_u$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{H}'$, on ait

$$D(f) = \int_{\hat{T}_u} S(f)(X_1, X_2, \dots, X_n) Q_D(X_1, X_2, \dots, X_n)\, d^\times X_1 \cdots d^\times X_n.$$

En d'autres termes, la transformée de Satake d'une distribution stable, à support unipotent sur le groupe symplectique est une fraction rationnelle en n variables. Cette assertion a été vérifiée pour $n = 1$ et 2, puis conjecturée vraie en général. On a ensuite proposé une décription conjecturale de ces fonctions Q_D, donnée dans [NgCh, X.3] dont on rappelle ci-dessous quelques détails. On construit d'abord un ensemble raisonnable de représentations de G qui sont des cas particuliers de celles considérées dans le présent article. On en déduit, en prenant la trace tordue compacte de telles représentations, des distributions θ-invariantes sur G. Ensuite on transpose ces distributions sur H, au moins au niveau de la transformation

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

de Satake de la façon suivante. Comme **H** est un groupe endoscopique tordue pour **G**, on dispose d'un homomorphisme de transfert habituel, noté P, de $\mathcal{H}$ (l'algèbre de Hecke sphérique de G) vers $\mathcal{H}'$. Les homomorphismes p et P sont certainement liés par le diagramme comutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad S \quad} & \mathbb{C}[X_1^{\pm}, X_2^{\pm}, \dots, X_{2n+1}^{\pm}]^{\mathfrak{S}_{2n+1}} \\ \Big\downarrow P & & \Big\downarrow p \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{\quad S \quad} & \mathbb{C}[X_1^{\pm}, X_2^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]^{W(C_n)} \end{array}$$

Le résultat principal de cet article, énoncé précédemment, établit en particulier une relation intéressante entre **G** et son groupe endoscopique **H** : les transformées de Satake des traces tordues, compactes des représentations considérées ici de G sont transférées de façon attendue vers H par la formule du théorème. La description conjecturale évoquée plus haut consiste à dire que les fonctions conjecturales Q_D, transformées des distributions stables à support unipotent sur H, sont combinaisons linéaires de ces fonctions $Q_{\boldsymbol{\Delta}}$ qui, eux, sont obtenues à partir des traces tordues, compactes des représentations sur G. On l'a vérifié pour $n = 1, 2$ et on s'attend que cela soit vrai en général.

Esquissons le schéma de démonstration du résultat principal de cet article. La première étape est l'application d'une formule de Clozel (§5.2) qui s'écrit ainsi, pour $f \in \mathcal{H}$

$$\operatorname{tr}_{\theta-c} St_{\boldsymbol{\Delta}}(f) = \sum_{P=MN\in\mathcal{P}^{\theta}} (-1)^{a_P^{\theta}-a_G^{\theta}} \operatorname{tr}_{\theta} St_{\boldsymbol{\Delta}N}(\hat{\zeta}_N^{\theta} f^P).$$

Nous n'expliquons pas les notations ici mais soulignons que la fonction $\hat{\zeta}_N^{\theta} f^P$ appartient à l'algèbre de Hecke sphérique de M. On est donc amené aux calculs de traces tordues sur les modules de Jacquet correspondant aux sous-groupes paraboliques standard θ-stables de G. Notons que la torsion sur $St_{\boldsymbol{\Delta}N}$ est définie par l'opérateur A_N obtenu de A par descente.

La deuxième étape consiste à calculer la trace tordue correspondant au sous-groupe de Borel $B = TU$ des matrices triangulaires supérieures. On décompose l'espace de dimension finie $St_{\boldsymbol{\Delta}U}$ en somme de sous-espaces caractéristiques $St_{\boldsymbol{\Delta}U} = \bigoplus_{\chi} St_{\boldsymbol{\Delta}U}[\chi]$ où χ parcourt un ensemble de caractères non ramifiés de T. Mais seuls contribuent à la trace les caractères non ramifiés θ-invariants. Notons $\mathcal{C}^{\theta}$ l'ensemble de tels caractères. On peut écrire

$$\operatorname{tr}_{\theta} St_{\boldsymbol{\Delta}U}(\hat{\zeta}_U^{\theta} f^B) = \sum_{\chi\in\mathcal{C}^{\theta}} \operatorname{trace}\big(A_U \circ St_{\boldsymbol{\Delta}U}(\hat{\zeta}_N^{\theta} f^B), St_{\boldsymbol{\Delta}U}[\chi]\big).$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}^{\theta}$, on note $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ la trace de la restriction de A_U à $St_{\boldsymbol{\Delta}U}[\chi]$. Pour $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) \in \mathcal{C}^{\theta}$ (voir §2.1 pour la notation), on montre que

$$\operatorname{trace}\big(A_U \circ St_{\boldsymbol{\Delta}U}(\hat{\zeta}_U^{\theta} f^B), St_{\boldsymbol{\Delta}U}[\chi]\big) = c(\chi, \boldsymbol{\Delta}) S(\hat{\zeta}_U^{\theta} f^B)(q^{-\chi_1}, q^{-\chi_2}, \dots, q^{-\chi_N}).$$

Il reste à calculer le terme $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$. On a déjà vu [NgCh] comment le calculer explicitement dans un certain nombre de cas. À la différence de [NgCh], on ne fixe pas $\boldsymbol{\Delta}$ et χ mais on les fait varier. On établit alors des formules de récurrence qui calculent implicitement $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$. On en déduit quelques propriétés de $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ qui nous seront utiles pour les calculs ultérieurs, surtout lors de l'étape de l'élimination des pôles.

La troisième étape est le calcul de la trace tordue relativement à un sous-groupe parabolique standard θ-stable $P = MN \neq B$. On définit un ensemble $\mathcal{C}_P^\theta$ des classes d'équivalence de caractères non ramifiés de T, puis, pour $\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta$, le coefficient $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$ de sorte que

$$\mathrm{tr}_\theta\, St_{\boldsymbol{\Delta} N}(\hat{\zeta}_N^\theta f^B) = \sum_{\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta} c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta}) S(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)(q^{-\chi_1}, q^{-\chi_2}, \dots, q^{-\chi_N}),$$

où pour chaque $\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta$ on a pris un représentant $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) \in \bar{\chi}$. On définit une section $\bar{\chi} \mapsto \chi$, puis établit une relation entre $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$ et $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ lorsque χ est la section de $\bar{\chi}$. Cela termine le calcul de la trace tordue $\mathrm{tr}_\theta\, St_{\boldsymbol{\Delta} N}(\hat{\zeta}_N^\theta f^B)$.

La dernière étape consiste à établir la formule du théorème en utilisant ces calculs. Pour cette fin, on suit la méthode déjà utilisée [NgCh]. Remarquons que les propriétés des coefficients $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ suffisent à éliminer des pôles.

L'organisation de cet article est la suivante. On commence par fixer des notations et faire des rappels, notamment la normalisation de A. Les deuxième et troisième sections servent à définir les coefficients $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ et $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$. On y établit des formules de récurrence qui calculent $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$, ainsi que leurs propriétés. On y donne également une formule déjà évoquée qui calcule $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$ à partir de $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$. Dans la dernière section on énonce le résultat principal et sa démonstration dont le schéma est indiqué plus haut. Enfin, l'article se termine avec un exemple concret qui illustre ces calculs.

2 Notations et rappels

2.1 Préliminaires

Soit F un corps local, non archimédien, de caractéristique zéro et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, ϖ une uniformisante. La valuation val et la valeur absolue $|\cdot|$ sont normalisées par les égalités $\mathrm{val}(\varpi) = 1, |\varpi| = q^{-1}$. On pose $\epsilon = \frac{i\pi}{\log q}$, de sorte que $|\varpi|^\epsilon = -1$.

On appelle segment une suite de la forme $\Delta = (z, z-1, \dots, z-n), z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Le terme z est appelé l'extrémité supérieure (ou extrémité pour faire court) de Δ. Dans cet article nous ne considérons que des segments $\Delta = (z, z-1, \dots, z-n)$ tels que $z = \frac{n}{2}$ ou $z = \frac{n}{2} + \epsilon$. Il va sans dire que lors que l'on parle de segments, ce sont des segments de la forme précédente. Une partition est par définition une suite d'entiers strictement positifs $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Pour un tel segment et une telle partition, on pose $l(\Delta) = n+1, l(\boldsymbol{\alpha}) = r, s(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. On dira que $\boldsymbol{\alpha}$ est une partition de n si $n = s(\boldsymbol{\alpha})$. On associe à une suite de segments $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une partition $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ par la formule $\alpha_i = l(\Delta_i)$.

Dans cet article, on utilise une même notation pour un groupe algébrique et le groupe des F-points de celui-ci. Considérons le groupe linéaire $GL(N)$. Soient B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, T le tore diagonal. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques P contenant B, les sous-groupes paraboliques standard. Un tel groupe contient un unique sous-groupe de Lévi standard M, c'est-à-dire contenant T. Ces sous-groupes sont paramétrés par l'ensemble des partitions de N. On note $P(\boldsymbol{\alpha}), M(\boldsymbol{\alpha})$ les sous-groupes correspondant à $\boldsymbol{\alpha}$. Le groupe $M(\boldsymbol{\alpha})$ est donc isomorphe à $GL(\alpha_1) \times \cdots \times GL(\alpha_r)$ si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

On emploiera la notation suivante pour les caractères non ramifiés du tore diagonal T. On écrit $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)$, où $\chi_i \in \mathbb{C}$ pour tout i, pour désigner le caractère défini par $\chi(t_1, t_2, \dots, t_N) = |t_1|^{\chi_1}|t_2|^{\chi_2} \cdots |t_N|^{\chi_N}$.

À un segment $\Delta = (z, \dots, z-n)$ est associée une représentation $St_\Delta = |\cdot|^{z-\frac{n}{2}} St_{n+1}$, la tordue par $|\det|^{z-\frac{n}{2}}$ de la Steinberg St_{n+1}. Plus généralement, soit $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r)$ une suite de segments. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ la partition associée comme précédemment. Posons

$$St_{\boldsymbol{\Delta}} = St_{\Delta_1} \times St_{\Delta_2} \times \cdots \times St_{\Delta_r} = \operatorname{Ind}_{P(\boldsymbol{\alpha})}^{GL(s(\boldsymbol{\alpha}))} St_{\Delta_1} \otimes St_{\Delta_2} \otimes \cdots \otimes St_{\Delta_r}.$$

C'est une représentation lisse et irréductible de $GL(\ell(\boldsymbol{\Delta}))$ où $\ell(\boldsymbol{\Delta})$, la longueur de $\boldsymbol{\Delta}$ est définie par $\ell(\boldsymbol{\Delta}) = \sum_{i=1}^r \ell(\Delta_i)$.

Enfin, pour X un ensemble, on note $|X|$ son cardinal.

2.2 Algèbres de Hecke–Iwahori et Hecke sphériques

Soit N un entier ≥ 1, et posons $G = GL(N)$. Soit $K = GL(N, \mathfrak{o})$ le sous-groupe compact maximal usuel de G et munissons G de la mesure de Haar pour laquelle le volume de K est égal à 1. On note I le sous-groupe d'Iwahori formé des $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K$ tels que $\operatorname{val}(g_{ij}) \geq 1$ pour tous i, j tels que $1 \leq j < i \leq N$. Notons W^M le groupe de Weyl d'un sous-groupe de Lévi M de G. Lorsque $M = G$ nous écrivons simplement W au lieu de W^G. Au besoin, on identifie W au groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$, ou encore au sous-groupe des matrices de permutations de G.

Notons $\mathcal{H}^I$ l'algèbre des fonctions complexes sur G, à support compact et biinvariantes par I. C'est l'algèbre de Hecke–Iwahori de G. Pour $i = 1, \dots, N-1$, notons s_i la symétrie élémentaire qui échange i et $i+1$. L'algèbre $\mathcal{H}^I$ est alors engendrée par des éléments $\{T_{s_i}\}_{i=1,\dots N-1}$ et $\{X_i^{\pm 1}\}_{i=1,\dots N}$. Pour tous i, j, on a les relations suivantes

$$(T_{s_i} + 1)(T_{s_i} - q) = 0, \quad T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}} = T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i}, \quad X_i X_j = X_j X_i,$$
$$X_i T_{s_j} = T_{s_j} X_i \quad \text{si } i \neq j, j+1,$$
$$X_i T_{s_i} = T_{s_i} X_{i+1} - (q-1) X_i, \quad X_{i+1} T_{s_i} = T_{s_i} X_i + (q-1) X_{i+1}.$$

Ces relations forment un système complet de relations [Ro, §1]. Soit $w \in W$ et soit $w = s_i \cdots s_j$ une décomposition réduite de w, l'élément $T_w = T_{s_i} \cdots T_{s_j}$ est alors bien défini. Concrètement T_w est la fonction caractéristique de l'ensemble IwI. Les éléments $T_w, w \in W$ forment une base d'une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G, I)$ que l'on va noter par $\mathcal{H}_W^I$.

On note $\mathcal{H}$ l'algèbre des fonctions complexes sur G, à support compact et biinvariantes par K. C'est l'algèbre de Hecke sphérique de G. Il existe un isomorphisme de Satake

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_N^{\pm 1}]^W \\ f &\longmapsto S(f), \end{aligned}$$

où le membre de droite est la sous-algèbre des polynômes invariants par le groupe symétrique qui agit par permutation des variables.

2.3 Involutions θ

Pour tout entier $N \geq 1$, introduisons l'involution θ sur $GL(N)$ de la façon suivante. Posons $w = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ où

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= 0 \quad \text{si } i + j \neq N + 1, \\ a_{i,N+1-i} &= (-1)^{i-1}. \end{aligned}$$

On définit alors θ par la formule

$$\begin{aligned} \theta\colon\ GL(N) &\longrightarrow GL(N) \\ g &\longmapsto w({}^{\mathrm{t}}g^{-1})w^{-1} \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a désigné ces involutions sur les groupes linéaires par une même notation θ. Espérons que cela ne crée pas de confusion par la suite.

2.4 Traces tordues, traces tordues compactes

Soit (π, V) une représentation lisse, irréductible de $GL(N)$. On dira qu'elle est θ-invariante s'il existe un opérateur $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, qui est alors unique à un scalaire près, tel que pour tout $g \in GL(N)$ on ait l'égalité $A \circ \pi(g) = \pi(\theta(g)) \circ A$. Soit f une fonction continue, à support compact sur $GL(N)$. On définit alors la trace tordue $\mathrm{tr}_\theta\, \pi(f)$ comme trace de l'opérateur $\int_{GL(N)} A \circ \pi(g) \cdot f(g)\, dg$.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard θ-invariant de $GL(N)$. Alors, l'opérateur A induit un opérateur, que l'on notera A_N, sur le module de Jacquet V_N qui entrelace π_N et π_N^θ (sans que celui-ci soit irréductible). On définit de façon analogue la trace tordue $\mathrm{tr}_\theta\, \pi_N$.

On dira qu'un élément $g \in GL(N)$ est θ-compact si toutes les valeurs propres de $g\theta(g)$ ont la même valuation. Notons $GL(N)_{\theta-c}$ l'ensemble de tels éléments qui est ouvert et fermé dans $GL(N)$. Pour une fonction f comme ci-dessus, on définit la trace tordue compacte $\mathrm{tr}_{\theta-c}\, \pi(f)$ comme trace de l'opérateur

$$\int_{GL(N)_{\theta-c}} A \circ \pi(g) \cdot f(g)\, dg.$$

2.5 Représentations considérées et normalisation de A

Soit $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments. Posons $N = \ell(\mathbf{\Delta})$. Soit $R = LV$ le sous-groupe parabolique de $GL(N)$ correspondant à la partition associée à $\mathbf{\Delta}$, (§2.1). Soit $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ le caractère non ramifié du tore diagonal de $GL(N)$ défini comme suit. Écrivons $\Delta_i = (z_i, z_i - 1, \dots, z_i - n_i)$ et posons

$$\eta = (z_1, z_1 - 1, \dots, z_1 - n_1, z_2, z_2 - 1, \dots, z_t - n_t).$$

Soit $(St_{\mathbf{\Delta}}, V)$ la représentation construite comme en §2.1. On a déjà dit que c'est une représentation lisse, irréductible de $GL(N)$. En plus, on vérifie aisément qu'elle est θ-invariante. L'espace V^I des invariants par le sous-groupe d'Iwahori I est isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{H}_W^I$ sur lequel agit l'algèbre de Hecke–Iwahori $\mathcal{H}$ et donc aussi la sous-algèbre $\mathcal{H}_W^I$. Identifions V^I à ce sous-espace. L'espace V^I contient alors la droite engendrée par l'élément $\delta = \sum_{w \in W} (-q)^{-\ell(w)} T_w$ [NgCh, Corollaire II.3.3].

L'opérateur d'entrelacement A conserve cette droite. On normalise A de telle sorte que qu'il fixe δ.

3 Les coefficients $c(\chi, \mathbf{\Delta})$

3.1 La définition

Fixons une suite de segments $\mathbf{\Delta}$. Soient $(St_{\mathbf{\Delta}}, V)$ la représentation correspondante et $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ l'opérateur d'entrelacement normalisé comme en §2.5. Considérons le module de Jacquet V_U correspondant au sous-groupe de Borel $B = TU$. C'est un espace de dimension finie. Soit χ un caractère non ramifié du tore diagonal T et définissons l'espace caractéristique relativement à χ par la formule

$$V_U[\chi] = \{v \in V_U \ ; \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q pour tout } t \in T,\ (St_{\mathbf{\Delta}U}(t) - \chi(t)\,\mathrm{Id})^n \cdot v = 0\}.$$

Notons $\mathcal{C}^\theta$ l'ensemble des caractères non ramifiés et θ-invariants de T. Si $\chi \in \mathcal{C}^\theta$ l'opérateur A_U conserve $V_U[\chi]$. On définit alors $c(\chi, \mathbf{\Delta})$ comme trace de la restriction de A_U à $V_U[\chi]$. Si $\chi \notin \mathcal{C}^\theta$, on pose $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = 0$.

Faisons la remarque suivante. Soient L le sous-groupe de Lévi standard et η le caractère non ramifié du tore diagonal associés à $\mathbf{\Delta}$,(§2.5). L'espace $V_U[\chi]$ est non nul si et seulement s'il existe un

$$w \in [W/W^L] = \{w \in W \ ; w \text{ de longueur minimale dans } wW^L\}$$

tel que $\chi = w\eta$. Par conséquent, $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = 0$ sauf s'il existe un $w \in [W/W^L]$ tel que $\chi = w\eta$.

3.2 Formules de récurrence calculant les $c(\chi, \mathbf{\Delta})$

Dans cette section, on fixe un caractère $\chi \in \mathcal{C}^\theta$. D'après la remarque qui suit la définition de $c(\chi, \mathbf{\Delta})$, si χ_1 n'est extrémité d'aucun segment de $\mathbf{\Delta}$, alors $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = 0$.

3.2.1 Première formule de récurrence

Introduisons d'abord la notation suivante : soit $\Delta = (z, z-1, \dots, z-n)$ un segment. On pose $\Delta^- = (z-1, z-2, \dots, -z-n+1)$.

Supposons qu'il existe un seul segment de $\mathbf{\Delta}$ tel que χ_1 en soit l'extrémité supérieure, disons Δ_i. Introduisons alors la suite de segments $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ obtenue de $\mathbf{\Delta}$ en remplaçant Δ_i par Δ_i^-. Notons que $\ell(\widetilde{\mathbf{\Delta}}) = N-2$. Posons $\tilde{\chi} = (\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_{N-1})$.

Proposition 3.1 *On a l'égalité*

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\tilde{\chi}, \widetilde{\mathbf{\Delta}}). \tag{3.1}$$

Démonstration Soit $Q = MN$ le sous-groupe parabolique standard de $GL(N)$ paramétré par la partition $(1, N-2, 1)$ de sorte que $M \simeq GL(1) \times GL(N-2) \times GL(1)$. Soit $(St_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}, \widetilde{V})$ la représentation de $GL(N-2)$ associée à $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ et posons $\pi = \chi_1 \otimes St_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}} \otimes \chi_N$. L'espace de représentation de π est donc $\widetilde{V}$ et π est une sous-représentation du module de Jacquet V_N qui en plus, est invariant sous A_N. En plus la restriction de A_N à $\widetilde{V}$ coïncide avec $\tilde{A}$, l'oprérateur d'entrelacement pour $St_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}$. D'autre part, d'après un calcul sur la filtration de Bernstein–Zelevinsky, on a l'égalité $V_U[\chi] = \widetilde{V}_{U\cap M}[\tilde{\chi}]$. D'où le résultat. ■

3.2.2 Deuxième formule de récurrence

Supposons maintenant qu'il existe au moins deux segments d'extrémité χ_1. Quitte à réarranger les Δ_i, on peut supposer que $\Delta_1 = \Delta_t$ (les premier et dernier segments de $\mathbf{\Delta}$) ont pour extrémité (supérieure) χ_1. Posons $m = \ell(\Delta_1)$. Soit $\mathbf{Q} = \mathbf{MN}$ le sous-groupe parabolique de $GL(N)$ associé à la partition $(m, N-2m, m)$ de sorte que $M = GL(m) \times GL(N-2m) \times GL(m)$. Posons $\widetilde{\mathbf{\Delta}} = (\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{t-1})$. Soit $(St_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}, \widetilde{V})$ la représentation de $GL(N-2m)$ associée à $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$. Posons $\pi = St_\Delta \otimes St_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}} \otimes St_\Delta$. On a donc $St_{\mathbf{\Delta}} = \mathrm{Ind}_Q^{GL(N)} \pi$. Soit E l'espace de représentation de St_Δ. Soit $A_m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$, $\tilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$ les opérateurs d'entrelacement normalisés. Identifions V à l'espace des fonctions $f\colon\ GL(N) \mapsto E \otimes \widetilde{V} \otimes E$ telles que $f(mng) = \delta_P^{1/2}(m)\pi(m)f(g)$ où δ_P est la fonction module de P, pour tous $m \in M, n \in N, g \in G$.

On définit l'opérateur $B\colon E \otimes \widetilde{V} \otimes E \to E \otimes \widetilde{V} \otimes E$ par la formule $B(e \otimes v \otimes f) = A_m(f) \otimes \tilde{A}(v) \otimes A_m(e)$ pour tous $e, f \in E, v \in \widetilde{V}$. L'opérateur A est alors défini par $A(f)(g) = B(f(\theta(g)))$ pour tous $f \in V, g \in GL(N)$. Remarquons que B entrelace π et π^θ. Pour tout caractère non ramifié θ-invariant ζ de T, on définit $b(\zeta)$ comme trace de la restriction l'opérateur $B_{U\cap M}$ à l'espace caractéristique $(E \otimes \widetilde{V} \otimes E)_{U\cap M}[\zeta]$.

Par application de la filtration de Bernstein–Zelevinsky, le module de Jacquet V_U est filtré par l'ensemble

$$[W/W^M] = \{w \in W \text{ ; } w \text{ est de longueur minimale dans } wW^M\}.$$

Le gradué F_w correspondant à un élément $w \in [W/W^M]$ est isomorphe à $\pi_{U\cap M} \circ \mathrm{Ad}\, w^{-1}$. D'où une filtration de $V_U[\chi]$ par des $F_w[\chi]$. Le gradué de A_U envoie $F_w[\chi]$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

vers $F_{\theta(w)}[\chi]$. Ainsi seuls contribuent à la trace les facteurs $F_w[\chi]$, $w \in [W/W^M]$ tels que $\theta(w) = w$. Fixons un tel w. L'action du gradué de A_U sur le facteur $F_w[\chi] \simeq \pi_{U\cap M} \circ \operatorname{Ad} w^{-1}[\chi] \simeq \pi_{U\cap M}[w^{-1}\chi]$ s'identifie à celle de $B_{U\cap M}$ sur l'espace caractéristique $\pi_{U\cap M}[w^{-1}\chi]$. On en déduit

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = \sum_{\substack{w\in[W/W^M]\\ \theta w = w}} b(w^{-1}\chi). \tag{3.2}$$

Explicitons la précédente égalité. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des couples de suites d'entiers $(\mathbf{i} = (i_l)_{1\le l\le m}, \mathbf{j} = (j_l)_{1\le l\le m})$ où $m = \ell(\Delta_1)$, telles que

$$\begin{gathered} 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le N, \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le N, \\ \chi_{i_l} = \chi_{j_l} = \chi_1 - l + 1, \\ i_l + j_{m-l+1} = N + 1, \end{gathered}$$

pour tout $l = 1, 2, \ldots, m$. Pour $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ un tel couple, posons $\chi^{\mathbf{ij}}$ le caractère non ramifié obtenu de χ en supprimant tous les χ_{i_l}, χ_{j_l}. On déduit la suivante de l'égalité. (3.2)

Proposition 3.2 *On a l'égalité*

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in\mathcal{I}} c(\chi^{\mathbf{ij}}, \widetilde{\mathbf{\Delta}}). \tag{3.3}$$

3.2.3 Quelques conséquences

Remarquons que pour le cas suivant $\mathbf{\Delta}$ est réduit à un seul segment $\Delta = (0)$ et $\chi = (0)$, autrement dit $St_{\mathbf{\Delta}} = St_1$ et χ est le caractère trivial de $F^\times$, alors le coefficient $c(\chi, \mathbf{\Delta})$ est égal à 1. Les formules (3.1) et (3.3) calculent donc par récurrence (sur la longueur de $\mathbf{\Delta}$), en principe, les coefficients $c(\chi, \mathbf{\Delta})$.

Soit $\mathbf{\Delta}$ une suite de segments et $\chi \in \mathcal{C}^\theta$. Soit $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{I}}$, resp. $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{II}}$, la suite de segments obtenue de $\mathbf{\Delta}$ en ne gardant que les segments contenus dans $\mathbb{R}$, resp. dans $\mathbb{R} + \epsilon$. On définit de façon similaire les caractères χ^{I} et χ^{II}. On déduit aisément le résultat suivant par récurrence des formules (3.1) et (3.3).

Proposition 3.3 *On a l'identité*

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi^{\mathrm{I}}, \mathbf{\Delta}^{\mathrm{I}})c(\chi^{\mathrm{II}}, \mathbf{\Delta}^{\mathrm{II}}).$$

Soit $\mathbf{\Delta}$ une suite de segments qui sont tous inclus dans $\mathbb{R}$, on pose $\mathbf{\Delta}^\epsilon$ la suite de segments obtenue de $\mathbf{\Delta}$ en remplaçant chaque segment $(z, z-1, \ldots, -z)$, $z \in \mathbb{R}$ par $(z+\epsilon, z-1+\epsilon, \ldots, -z+\epsilon)$. Soit $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n) \in \mathcal{C}^\theta$; on pose $\chi^\epsilon = (\chi_1+\epsilon, \chi_2+\epsilon, \ldots, \chi_n+\epsilon)$. Alors il est facile de voir que $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi^\epsilon, \mathbf{\Delta}^\epsilon)$. Cette remarque, jointe à la proposition précédente montre qu'il suffit de se restreindre aux cas où $\mathbf{\Delta}$ ne contient que des segments contenus dans $\mathbb{R}$.

On a le résultat suivant.

Proposition 3.4 *On suppose que $N \geq 4$. Soit $1 \leq i \leq \frac{N}{2}$ et soit $\chi \in \mathcal{C}^\theta$ tel que $\chi_i - \chi_{i+1} \neq \pm 1$. Posons $\chi' = s_i s_{N-i}\chi$ si $i < \frac{N}{2}$, $s_i\chi$ si $i = \frac{N}{2}, N$ pair et $s_i s_{i+1} s_i \chi$ si $i = \frac{N}{2}, N$ impair. On a l'égalité*

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi', \mathbf{\Delta}). \tag{3.4}$$

Remarquons que pour $N \leq 3$, l'énoncé ci-dessus devient trivial. De même, lors que χ_1 (ou χ'_1, ce qui est équivalent) n'est pas l'extrémité d'un segment de $\mathbf{\Delta}$, alors $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi', \mathbf{\Delta}) = 0$.

Démonstration On va procéder par récurrence sur $\ell(\mathbf{\Delta})$. Supposons que la proposition est vraie pour tous $\mathbf{\Delta}, \chi \in \mathcal{C}^\theta$ tels que $\ell(\mathbf{\Delta}) < N$. Soient $\mathbf{\Delta}$ de longueur N et $\chi \in \mathcal{C}^\theta$. Nous dirons que $(\chi, \mathbf{\Delta})$ vérifie la propriété (P_1) si χ_1 est l'extrémité (supérieure) d'un seul segment de $\mathbf{\Delta}$ et (P_2) dans le cas contraire.

Supposons que $(\chi, \mathbf{\Delta})$ vérifie la propriété (P_1) et $i > 1$. Alors il suffit d'appliquer la formule (3.1) et l'hypothèse de récurrence pour obtenir l'égalité cherchée.

Supposons que $(\chi, \mathbf{\Delta})$ et $(\chi', \mathbf{\Delta})$ vérifient (P_1) et $i = 1$. Les éléments χ_1, χ_2 sont donc extrémités de deux uniques segments, disons Δ_1, Δ_2. Rappelons que pour tout $\Delta = (z, z-1, \dots, z-k)$ on a défini $\Delta^- = (z-1, z-2, \dots, z-k+1)$. Comme $\chi_1 - \chi_2 \neq \pm 1$, χ_1 et χ_2 ne sont pas extrémités des segments Δ_1^-, Δ_2^-. Posons $\chi^* = (\chi_3, \chi_4, \dots, \chi_{N-2})$ et $\mathbf{\Delta}^* = (\Delta_1^-, \Delta_2^-, \Delta_3, \dots, \Delta_t)$. On peut appliquer deux fois la formule (3.1) à $(\chi, \mathbf{\Delta})$, et on obtient $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi^*, \mathbf{\Delta}^*)$. Le même raisonnement s'applique à $(\chi', \mathbf{\Delta})$ et on obtient aussi $c(\chi', \mathbf{\Delta}) = c(\chi^*, \mathbf{\Delta}^*)$, d'où l'égalité cherchée.

Supposons maintenant que $i = 1$, $(\chi, \mathbf{\Delta})$ vérifie (P_2), tandis que $(\chi', \mathbf{\Delta})$ vérifie (P_1). Sans perte de généralité, on peut supposer que les extrémités de Δ_1, Δ_t sont égales à χ_1, celle de Δ_2 à χ_2. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des couples de suites $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ correspondant à $(\chi, \mathbf{\Delta})$ comme dans la proposition 3.2. Pour $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}$, soit $\chi^{\mathbf{ij}}$ le caractère obtenu de χ en supprimant tous les $\chi_{i_l}, \chi_{j_l}, l = 1, 2, \dots, m$, et soit $\widetilde{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{\Delta} - \{\Delta_1, \Delta_t\}$. On a

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \mathcal{I}} c(\chi^{\mathbf{ij}}, \widetilde{\mathbf{\Delta}}). \tag{3.5}$$

Posons $\mathcal{I}^1 = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}\ ;\ i_1 = 1 \text{ ou } j_1 = 1\}$, $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I} - \mathcal{I}^1$. On a $\chi^{\mathbf{ij}} = (\chi_2, \dots, \chi_{N-1})$ si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^1$ et $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{N-1}, \chi_N)$ si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^2$ (car χ_2 n'est égal ni à χ_1 ni à $\chi_1 - 1$). Définissons $\chi^{\mathbf{ij},*}$ comme le caractère obtenu de $\chi^{\mathbf{ij}}$ en supprimant $\chi_1^{\mathbf{ij}}, \chi_{N-2}^{\mathbf{ij}}$ si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^1$, $\chi_2^{\mathbf{ij}}, \chi_{N-3}^{\mathbf{ij}}$ si $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^2$. Soit $\widetilde{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}$ la suite de segments obtenue de $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ en remplaçant Δ_2 par Δ_2^-. Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^1$. Alors d'après la formule (3.1), on a

$$c(\chi^{\mathbf{ij}}, \widetilde{\mathbf{\Delta}}) = c(\chi^{\mathbf{ij},*}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}).$$

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}^2$ et écrivons $\chi^{\mathbf{ij}} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{N-1}, \chi_N)$. Alors par application de l'hypothèse de récurrence, puis la formule (3.1), on a aussi

$$c(\chi^{\mathbf{ij}}, \widetilde{\mathbf{\Delta}}) = c((\chi_2, \chi_1, \dots, \chi_N, \chi_{N-1}), \widetilde{\mathbf{\Delta}}) = c(\chi^{\mathbf{ij},*}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Soit χ^* le caractère obtenu de χ' en supprimant χ'_1 et χ'_N (*i.e.*, $\chi_2, -\chi_2$). Posons $\boldsymbol{\Delta}^* = \boldsymbol{\Delta} - \{\Delta_2\} \cup \{\Delta_2^-\}$. D'après la formule (3.1), on a $c(\chi', \boldsymbol{\Delta}) = c(\chi^*, \boldsymbol{\Delta}^*)$. Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}$, on définit le couple $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*)$ par la formule

$$(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*) = \begin{cases} \big((i_1 - 1, \dots, i_m - 1), (j_1 - 1, \dots, j_m - 1)\big) & \text{si } i_1 \neq 1, j_1 \neq 1, \\ \big((i_1, i_2 - 1, \dots, i_m - 1), (j_1 - 1, \dots, j_{m-1} - 1, j_m - 2)\big) & \text{si } i_1 = 1, j_1 \neq 1, \\ \big((i_1 - 1, \dots, i_{m-1} - 1, i_m - 2), (j_1, j_2 - 1, \dots, j_m - 1)\big) & \text{si } i_1 \neq 1, j_1 = 1. \end{cases}$$

Alors les couples $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*)$ pour $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}$ sont celles de la proposition 3.2 pour le couple $(\chi^*, \boldsymbol{\Delta}^*)$. Pour $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{I}$, soit $\chi^{*,\mathbf{ij}}$ le caractère obtenu de χ^* en supprimant les $\chi^*_{i_l^*}, \chi^*_{j_l^*}$. Remarquons que $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}} = \boldsymbol{\Delta}^* - \{\Delta_1, \Delta_t\}$. On déduit de la formule (3.3)

$$c(\chi^*, \boldsymbol{\Delta}^*) = \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \mathcal{I}} c(\chi^{*,\mathbf{ij}}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}). \tag{3.6}$$

On vérifie que $\chi^{*,\mathbf{ij}} = \chi^{\mathbf{ij},*}$ et le résultat cherché découle des égalités (3.5) à (3.6).

Le dernier cas où χ_1, χ_2 sont chacun une extrémité de deux segments se démontre de façon similaire. ∎

4 Les coefficients $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$

Dans cette section, nous fixons une suite de segments $\boldsymbol{\Delta} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t\}$ de longueur $N = \ell(\Delta_1) + \cdots + \ell(\Delta_t)$. Nous gardons les notations $(St_{\boldsymbol{\Delta}}, V)$ comme précédemment. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard θ-stable de $G = GL(N)$.

4.1 L'action de A_N sur le module de Jacquet V_N

Commençons par le résultat élémentaire suivant.

Lemme 4.1 *Soit (ρ, E) une repésentation lisse de longueur finie de M. Supposons qu'il existe un opérateur inversible $B \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(E)$, qui entrelace ρ et ρ^θ. Il existe alors une filtration de M-représentations $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m = E$ telle que*

(i) *Les E_i sont stables par B.*

(ii) *Posons $\bar{E}_i = E_i/E_{i-1}$ et soit ρ_i le sous-quotient correspondant. Notons B_i l'opérateur sur $\bar{E}_i$ déduit de B. Alors pour tout i, la représentation $\bar{E}_i$ est*

  (a) *soit irréductible,*

  (b) *soit somme directe de deux représentations de M : $\bar{E}_i = \bar{E}_i^{\mathrm{I}} \oplus \bar{E}_i^{\mathrm{II}}$ telles que $B_i(\bar{E}_i^{\mathrm{I}}) = \bar{E}_i^{\mathrm{II}}, B_i(\bar{E}_i^{\mathrm{II}}) = \bar{E}_i^{\mathrm{I}}$.*

Démonstration On procède par récurrence sur la longueur de ρ. On choisit une sous-représentation irréductible quelconque F_1 de E. Si F est stable par B, on pose $E_1 = F$ et on conclut par l'hypothèse de récurrence sur E/F. Si F n'est pas stable par

B, alors $B(F)$ est aussi une sous-représentation irréductible de M et on a forcément $F \cap B(F) = \{0\}$. On pose $E_1 = F \oplus B(F)$ et on conclut par récurrence sur E/E_1. ∎

4.2 La définition

Appliquons le lemme 4.1 à $E = V_N$, le module de Jacquet relatif à P de $St_{\boldsymbol{\Delta}}$, et $B = A_N$. On peut donner quelques propriétés de cette filtration en utilisant celle de Bernstein–Zelevinsky. Notons $[W^M \backslash W/W^L]$ l'ensemble des $w \in W$ tels que w est de longueur minimale dans les classes wW^L, $W^M w$. L'espace V_N est filtré par $[W^M \backslash W/W^L]$ dont la composante correspondante à w, que l'on notera par F_w, est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{M \cap wRw^{-1}}^M \pi_{L \cap w^{-1}Nw} \circ Ad(w^{-1})$. Ainsi les représentations ρ_i ou $\rho_i^{\mathrm{I}}, \rho_i^{\mathrm{II}}$ sont des sous-quotients irréductibles des composantes F_w.

On définit une relation d'équivalence $\sim_P$ sur l'ensemble des caractères non ramifiés du tore diagonal de la façon suivante: $\chi \sim_P \chi'$ si $\chi = w\chi'$ pour un certain $w \in W^M$. Soit $\bar{\chi}$ une classe d'équivalence pour cette relation. Soit $\iota(\bar{\chi})$ l'ensemble des entiers i, $1 \leq i \leq m$ telles que $\bar{E}_i$ soit irréductible, isomorphe à un sous-quotient de $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi$ où χ est un certain élément de la classe $\bar{\chi}$. On définit $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$ par la formule

$$c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta}) = \sum_{i \in \iota(\bar{\chi})} \mathrm{trace}(B_i, \bar{E}_i^{K_M}), \tag{4.1}$$

où $\mathrm{trace}(B_i, \bar{E}_i^{K_M})$ désigne la trace de la restriction de B_i à $\bar{E}_i^{K_M}$.

On montrera que cela ne dépend pas du choix de la filtration ayant les propriétés du lemme précédent (voir corollaire 4.5).

Lemme 4.2 *Soit χ tel que χ et $\theta(\chi)$ ne sont pas équivalents pour la relation $\sim_P$. Alors aucun sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi$ n'est θ-stable.*

Démonstration Soit ϱ un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi$. Alors ϱ^θ est un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi^\theta$. Si ϱ est θ-invariant, $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi$ et $\mathrm{Ind}_{B \cap M}^M \chi^\theta$ ont pour ϱ comme commun sous-quotient irréductible. Mais cela force que $\chi \sim_P \theta(\chi)$, d'où le lemme. ∎

Notons $\mathcal{C}_P^\theta$ l'ensemble des $\bar{\chi}$ tels que la classe $\bar{\chi}$ contiennne un caractère θ-invariant. D'après le lemme précédent, si $\bar{\chi} \notin \mathcal{C}_P^\theta$, l'ensemble $\iota(\bar{\chi})$ est vide. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.3 *Si $\bar{\chi} \notin \mathcal{C}_P^\theta$, alors $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta}) = 0$.*

4.3 Une section $\bar{\chi} \mapsto \chi$

Nous étendons l'ordre naturel $<$ sur $\mathbb{R} \cup \mathbb{R} + \epsilon$ de la façon suivante : on dit que $x < y$ si $\mathrm{Re}\, x < \mathrm{Re}\, y$ ou $\mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, y$ et $y \in \mathbb{R}, x = y + \epsilon$. Évidemment, $x \leq y$ si $x < y$ au sens précédent ou $x = y$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})$ la partition de N paramétrant P. Le groupe P est θ-stable signifie que $\alpha_i = \alpha_{r-i}$ pour tout i. On définit les intervalles $\Sigma(\alpha_i) = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1}, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1} + 1, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i\}$.

Soit $\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta$. Alors il existe un unique caractère θ-invariant

$$\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N) \in \bar{\chi}$$

tel que la suite $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$, où $n = [\frac{N}{2}]$ si r est pair, resp. $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, 0$, si r est pair, soit croissante (au sens qui a été défini plus haut) sur chacun des intervalles $\Sigma(\alpha_i)$. Concrètement

(i) La suite $\operatorname{Re}\chi_1, \operatorname{Re}\chi_2, \dots, \operatorname{Re}\chi_n$ est croissante sur chacun des segments $\Sigma(\alpha_i)$,

(ii) Pour tous $j < j'$ deux entiers appartenant à un même intervalle $\Sigma(\alpha_i)$, $i \leq [\frac{r}{2}]$ tels que $\operatorname{Re}\chi_j = \operatorname{Re}\chi_{j'}$, alors $\chi_{j'} \in \mathbb{R} + \epsilon$ implique $\chi_j \in \mathbb{R} + \epsilon$. En d'autres termes, il n'existe pas deux entiers $j < j'$ appartenant à un même intervalle tels que $\chi_j = z, \chi_{j'} = z + \epsilon$ pour un certain $z \in \mathbb{R}$.

(iii) Pour tout i, $\chi_i = -\chi_{N+1-i} \bmod 2\epsilon$.

On dira que le caractère χ est la section de $\bar{\chi}$ (pour la projection évidente de $\mathcal{C}^\theta \mapsto \mathcal{C}_P^\theta$ et écrira $\chi = \sec_P(\bar{\chi})$.

4.4 Relations entre $c(\chi, \boldsymbol{\Delta})$ et $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$

Soit $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ un sous-groupe parabolique standard θ-stable. Soit $\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta$, et posons $\chi = \sec_P(\bar{\chi})$.

Proposition 4.4 *On a l'égalité*

$$c(\chi, \boldsymbol{\Delta}) = |\{w \in Stab_{W^M}(\chi) \; ; \theta(w) = w\}| c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta}). \tag{4.2}$$

Corollaire 4.5 *Le facteur $c(\bar{\chi}, \boldsymbol{\Delta})$ ne dépend pas du choix de la filtration $\{E_i\}_{i=1,\dots,m}$.*

Démonstration de la proposition 4.4 Reprenons une filtration $\{E_i\}_{i=1,\dots,m}$ relativement à l'opérateur $B = A_N$, comme dans le lemme 4.1. On obtient une filtration de T-modules de V_U stable par A_U $0 = (E_0)_{U\cap M} \subset (E_1)_{U\cap M} \subset \cdots \subset (E_m)_{U\cap M} = V_U$. On en déduit une filtration de T-modules de $V_U[\chi]$ stable par A_U

$$0 = (E_0)_{U\cap M}[\chi] \subset (E_1)_{U\cap M}[\chi] \subset \cdots \subset (E_m)_{U\cap M}[\chi] = V_U[\chi].$$

Notons $A_{U,i}$ l'opérateur déduit de A_U sur $(E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}$ et $A_{N,i}$ l'opérateur déduit de A_N sur E_i/E_{i-1}. On a

$$c(\chi, \boldsymbol{\Delta}) = \sum_{1 \leq i \leq m} \operatorname{trace}(A_{U,i}, (E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]). \tag{4.3}$$

Soit $1 \leq i \leq m$. Si $\bar{E}_i = E_i/E_{i-1}$ est somme directe de deux représentations irréductibles $\bar{E}_i^{\mathrm{I}} \oplus \bar{E}_i^{\mathrm{II}}$ telle que $A_{N,i}(\bar{E}_i^{\mathrm{I}}) = \bar{E}_i^{\mathrm{II}}, A_{N,i}(\bar{E}_i^{\mathrm{II}}) = \bar{E}_i^{I}$ alors

$$(E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]$$

est aussi somme de deux représentations (qui ne sont pas nécessairement irréductibles) auxquelles $A_{U,i}$ agit par permutation. Pour un tel i, on a

$$\mathrm{trace}(A_{U,i}, (E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]) = 0. \tag{4.4}$$

Soit i tel que $\bar{E}_i$ est irréductible θ-invariante. Donc $\bar{E}_i$ est un sous-quotient irréductible d'un facteur $F_w \subset \mathrm{Ind}_{B\cap M}^{M} w\eta$ de la filtration de Bernstein–Zelevinsky. Si $w\eta$ et χ ne sont pas équivalents, alors $(E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi] = 0$, et on a aussi

$$\mathrm{trace}(A_{U,i}, (E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]) = 0. \tag{4.5}$$

On déduit des égalités (4.3), (4.4), (4.5) :

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = \sum_{i\in\iota(\bar{\chi})} \mathrm{trace}(A_{U,i}, (E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]) \tag{4.6}$$

où, rappelons-le, $\iota(\bar{\chi})$ est l'ensemble des $i, 1 \leq i \leq m$ tels que $\bar{E}_i$ soit un sous-quotient irréductible et θ-invariant de $\mathrm{Ind}_{B\cap M}^{M} \chi$.

Lemme 4.6 *Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ un caractère non-ramifié du tore diagonal de $GL(N, F)$ tel que $\mathrm{Re}\,\xi_1 \leq \mathrm{Re}\,\xi_2 \leq \cdots \leq \mathrm{Re}\,\xi_N$. Soit ρ l'unique sous représentation irréductible sphérique de $\mathrm{Ind}_B^{GL(N)} \xi$. Alors on a l'égalité :*

$$(\mathrm{Ind}_B^{GL(N)} \xi)_U[\xi] = \rho_U[\xi].$$

Démonstration Consisdérons les sauts de la suite $\mathrm{Re}\,\xi_1, \mathrm{Re}\,\xi_2, \dots, \mathrm{Re}\,\xi_N$. Écrivons

$$\mathrm{Re}\,\xi_1 = \cdots = \mathrm{Re}\,\xi_{\alpha_1} < \mathrm{Re}\,\xi_{\alpha_1+1} = \cdots = \mathrm{Re}\,\xi_{\alpha_1+\alpha_2} < \cdots = \mathrm{Re}\,\xi_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}$$

où $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$.

Soit $P = MN$ le sous-groupe parabolique de $GL(N)$ correspondant à la partition $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. Posons $(\pi, V_\pi) = \mathrm{Ind}_B^{GL(N)} \xi$, $(\sigma, V_\sigma) = \mathrm{Ind}_{B\cap M}^{M} \xi$. D'après un résultat de Zelevinsky, σ est irréductible.

Montrons que σ est un sous-quotient du module de Jacquet ρ_N. Rappelons la filtration de Bernstein–Zelevinsky de π_N. Par définition V_π est l'espace des fonctions $f\colon G \to \mathbb{C}$ telles que

$$f(tug) = \delta_B^{\frac{1}{2}}(t)\xi(t)f(g) \quad \text{pour tous } t \in T, u \in U, g \in GL(N).$$

Pour $w \in W^M\backslash W$, posons $d(w) = \dim Bw^{-1}P - \dim BP$. Soit

$$V_i = \{f \in V_\pi \ ; \ f \text{ à support dans } \cup_{w;d(w)>i} Bw^{-1}P\}.$$

Alors $\cdots \subset V_1 \subset V_0 = V_\pi$. Pour tout i le quotient $(V_i/V_{i+1})_N$ est isomorphe à la somme directe des $\mathrm{Ind}_{B\cap M}^{M} w\xi, w \in W^M\backslash W, d(w) = i+1$. Pour $w = 1$, on obtient σ comme sous-quotient de V_N. Pour montrer que ρ_N est sous-quotient de ρ_N, il suffit de montrer que V_ρ contient un élément f tel que $\mathrm{supp}(f) \cap BP \neq \varnothing$. Mais un élément fixé par le sous-groupe compact maximal appartient à V_ρ et ne s'annule pas en 1, d'où le résultat.

On en déduit que $\sigma_{U\cap M}[\xi]$ est sous-quotient de $\rho_U[\xi]$. Mais en utilisant les filtrations de Bernstein–Zelevinsky, on montre aisément que $\dim \sigma_{U\cap M}[\xi] = \dim \pi_U[\xi]$, d'où le lemme. ■

D'après le lemme 4.6, si $i \in \iota(\bar{\chi})$ tel que $\bar{E}_i$ ne soit pas sphérique, alors $(E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi] = 0$. Pour un tel i, on a

$$\text{(4.7)} \qquad \operatorname{trace}(A_{U,i}, (E_i)_{U\cap M}/(E_{i-1})_{U\cap M}[\chi]) = 0 = \operatorname{trace}(A_{N,i}, \bar{E}_i^{K_M}).$$

Soit maintenant $i \in \iota(\bar{\chi})$ tel que $\bar{E}_i$ soit irréductible, θ-invariant, isomorphe à l'unique sous-quotient sphérique de $\operatorname{Ind}_{B\cap M}^M \chi$. On a le lemme suivant.

Lemme 4.7 *Soit (ρ, E) l'unique sous-quotient irréductible* $\operatorname{Ind}_{B\cap M}^M \chi$ *tel que $E^{K\cap M} \neq 0$. On suppose que ρ est θ-invariant et soit A un opérateur qui entrelace ρ et ρ^θ. Notons $A_{U\cap M}$ l'opérateur sur $E_{U\cap M}$ déduit de A. On a l'égalité*

$$\operatorname{trace}(A_{U\cap M}, E_{U\cap M}[\chi]) = |\{w \in Stab_{W^M}(\chi); \theta(w) = w\}| \operatorname{trace}(A, E^{K\cap M}).$$

Démonstration Notons F l'espace de représentation de $\operatorname{Ind}_{B\cap M}^M \chi$ c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions continues $f\colon M \to \mathbb{C}$ telles que $f(tum) = \delta_{B\cap M}^{1/2}(t)\chi(t)f(g)$ pour tous $t \in T, u \in U \cap M, m \in M$. Comme la suite $\{\operatorname{Re} \chi_i\}_{i=1,\dots,N}$ est croissante, il y a une injection $(\rho, E) \hookrightarrow (\operatorname{Ind}_{B\cap M}^M \chi, F)$. D'où aussi une injection $E_U \hookrightarrow F_U$. On construit un opérateur $A_F \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(F)$ par la formule $A_F(f)(g) = f(\theta(g))$ pour tous $f \in F, g \in G$. Cet opérateur conserve E. La restriction de A_F à E, qui est non nulle, est donc un multiple de A. Moyennant le lemme 4.6, il suffit donc de démontrer l'égalité du lemme en remplaçant E par F et A par A_F. Mais le calcul de $A_{F,M\cap U}$ est facile et la preuve de cette analogue de l'égalité du lemme aussi. ■

La preuve de la proposition découle alors des égalités (4.1), (4.6), (4.7) et du lemme 4.7. ■

5 Le théorème

5.1 Énoncé

On se donne une suite de segments $\mathbf{\Delta}$. Posons $N = \ell(\mathbf{\Delta})$ et n la partie entière de $\frac{N}{2}$. Faisons l'hypothèse suivante sur $\mathbf{\Delta}$: le nombre des termes de $\mathbf{\Delta}$ inclus dans $\mathbb{R}$ est de même parité que N. Sous cette hypothèse, si N est impair, les $\chi \in \mathcal{C}^\theta$ tels que $c(\chi, \mathbf{\Delta}) \neq 0$ vérifient $\chi_{n+1} = 0$. Notons que c'est une hypothèse mineure, le résultat principal restera valable dans le cas non considéré ici à condition de modifier légèrement la définition de p (voir §1).

Définissons une fraction rationnelle $Q_{\mathbf{\Delta}}$ en n variables de la façon suivante. Écrivons $\mathbf{X}$ pour $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pour $\chi \in \mathcal{C}^\theta$, on définit

$$\text{(5.1)} \qquad Q_\chi(\mathbf{X}) = \frac{1}{1 - q^{\chi_n} X_n} \prod_{i=1,\dots,n-1} \frac{1}{1 - q^{\chi_i - \chi_{i+1}} X_i X_{i+1}^{-1}}.$$

Posons $Q_\chi^{\text{sym}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{|W(C_n)|} \sum_{w\in W(C_n)} Q_\chi(w\mathbf{X})$ où l'action du groupe de Weyl de type C_n est la plus évidente. Enfin, on pose $Q_{\mathbf{\Delta}} = \sum_{\chi\in\mathcal{C}^\theta} c(\chi, \mathbf{\Delta}) Q_\chi^{\text{sym}}$.

Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$. On définit

$$\hat{T}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n \, ; |X_1| = x_1, |X_2| = x_2, \dots, |X_n| = x_n\}.$$

On le munit de la mesure usuelle pour laquelle son volume total est égal à 1. Pour simplifier, on écrit $\hat{T}_u$ quand $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)$.

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke sphérique de $GL(N)$. Notons S l'isomorphisme de Satake $S\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_N^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_N}$. On définit un homorphisme d'algèbres

$$p\colon \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_N^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_N} \longrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{W(C_n)}$$

par la formule $p(X_i) = X_i$ si $1 \le i \le n$, X_{N+1-i}^{-1} si $N - n + 1 \le i \le N$ et 1 si $N = 2n + 1, i = n + 1$.

Théorème 5.1 *Soit $\mathbf{\Delta}$ une suite de segments vérifiant l'hypothèse indiquée en début de ce paragraphe. La fonction $Q_{\mathbf{\Delta}}$ n'a pas de pôle au voisinage du tore unitaire $\hat{T}_u$. Soit $f \in \mathcal{H}$, on a l'égalité*

$$\operatorname{tr}_{\theta - c} St_{\mathbf{\Delta}}(f) = \int_{\hat{T}_u} pS(f)(\mathbf{X}) Q_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{X}) \, d^\times \mathbf{X}.$$

En plus, les pôles de $Q_{\mathbf{\Delta}}$ sont d'ordre 1 et inclus dans les hyperplans $X_i = q^{\pm 1} X_j$, $X_i = q^{\pm 1}$, $i \neq j$, $1 \le i, j \le n$.

La démonstration de ce résultat occupe le reste de cet article. Elle fait appel aux calculs des coefficients $c(\chi, \mathbf{\Delta})$, la formule de Clozel, et elle suit le schéma des preuves des résultats analogues [NgCh]. Pour alléger la rédaction, on supposera que $N = 2n + 1$, le cas $N = 2n$ étant similaire.

5.2 La Formule de Clozel

Soit π une représentation lisse, irréductible, et θ-stable de G. Soit A un opérateur qui entrelace π et π^θ. Soit $P = MN \in \mathcal{P}^\theta$. Notons $\mathfrak{a}_M$ l'algèbre de Lie réelle du centre de M, et $H\colon M \to \mathfrak{a}_M$ l'application de Harish-Chandra ; nous la définissons par $|\chi(m)| = q^{-\langle \chi, H(m) \rangle}$. De façon similaire, notons $\mathfrak{a}_M^\theta$ le sous-espace des θ-invariants de $\mathfrak{a}_M$, où, par abus de langage, θ désigne l'opérateur sur l'algèbre de Lie déduit de l'opérateur θ original. On définit $H^\theta\colon M \to \mathfrak{a}_M^\theta$ par la formule $H^\theta = H + \theta \circ H$. À N est associé un système de racines simples dans $\mathfrak{a}_M$. Notons τ_P^G, $\hat{\tau}_P^G$ les fonctions caractéristiques de la chambre de Weyl positive, chambre de Weyl obtuse positive respectivement, associée à ce système de racines simples. On note a_P^θ la dimension de $\mathfrak{a}_M^\theta$. On pose $\zeta_N^\theta = \tau_P^G \circ H^\theta, \hat{\zeta}_N^\theta = \hat{\tau}_P^G \circ H^\theta$. Soit $f \in \mathcal{H}_{2n+1}$, on note f^P le terme constant de f le long de P. On a l'égalité

$$\operatorname{tr}_{\theta - c} \pi(f) = \sum_{P = MN \in \mathcal{P}^\theta} (-1)^{a_P^\theta - a_G^\theta} \operatorname{tr}_\theta \pi_N(\hat{\zeta}_N^\theta f^P). \tag{5.2}$$

C'est la formule de Clozel, adaptée à notre situation [NgCh, Théorème I.3.2.].

5.3 Décomposition de $\mathrm{tr}_{\theta-c}\,\pi(f)$ suivant $\chi \in \mathcal{C}^\theta$

Appliquons la formule (5.2) à $\pi = St_{\mathbf{\Delta}}$. Pour $P = MN, P \neq B$ un sous-groupe parabolique standard θ-stable, calculons le terme $\mathrm{tr}_\theta\, St_{\mathbf{\Delta}N}(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)$. Fixons une filtration $\{E_i\}_{i=1,\dots,m}$ de V_N comme dans le lemme 4.1. Remarquons que la fonction $\hat{\zeta}_N^\theta f^P$ est $K \cap M$ invariante. On a

$$\mathrm{tr}_\theta\, St_{\mathbf{\Delta}N}(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) = \sum_{\bar{\chi} \in \mathcal{C}_P^\theta} c(\bar{\chi}, \mathbf{\Delta})\, \mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P),$$

où $\chi = \mathrm{sec}_P(\bar{\chi})$ pour tout $\bar{\chi}$.

On peut donc écrire

$$\mathrm{tr}_{\theta-c}\, St_{\mathbf{\Delta}}(f) = \sum_{\chi \in \mathcal{C}^\theta \text{ t.q } c(\chi,\mathbf{\Delta})\neq 0} c(\chi, \mathbf{\Delta}) D_\chi(f)$$

où

$$\begin{aligned} D_\chi(f) &= \sum_{\substack{P=MN\in\mathcal{P}^\theta \text{ t.q} \\ \chi=\mathrm{sec}_P(\bar{\chi}) \text{ pour un } \bar{\chi}\in\mathcal{C}_P^\theta}} (-1)^{a_P^\theta - a_G^\theta} \frac{c(\bar{\chi}, \mathbf{\Delta})}{c(\chi, \mathbf{\Delta})}\, \mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) \\ &= \sum_{\substack{P=MN\in\mathcal{P}^\theta \text{ t.q} \\ \chi=\mathrm{sec}_P(\bar{\chi}) \text{ pour un } \bar{\chi}\in\mathcal{C}_P^\theta}} \frac{(-1)^{a_P^\theta - a_G^\theta}\, \mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)}{|\{w \in \mathrm{Stab}_{W^M}(\chi)\,;\, \theta(w) = w\}|}. \end{aligned}$$

Notons que la dernière égalité vient de la formule (4.2).

5.4 Calcul de D_χ

Posons

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{1, 2, \dots, n\}, \\ \Sigma_<(\chi) &= \{i \in \Sigma\,;\, \chi_i < \chi_{i+1}\}, \\ \Sigma_=(\chi) &= \{i \in \Sigma\,;\, \chi_i = \chi_{i+1}\}, \\ \Sigma_\leq(\chi) &= \Sigma_<(\chi) \cup \Sigma_=(\chi). \end{aligned}$$

Pour $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})$ une partition de $2n+1$ telle que $\alpha_i = \alpha_{r-i}$, on pose $\Omega = \Sigma - \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\frac{r}{2}-1}\}$. Notons P_Ω le sous-groupe parabolique standard paramétré par α. La correspondance $\Omega \mapsto P_\Omega$, entre les sous-ensembles de Σ et les sous-groupes paraboliques standard θ-stables, est bijective.

Pour un $P_\Omega = MN$, le caractère χ est la section d'un certain $\bar{\chi} \in \mathcal{C}_{P_\Omega}^\theta$ si et seulement si $\Omega \subset \Sigma_\leq(\chi)$. D'autre part, le terme $(-1)^{a_P^\theta - a_G^\theta}$ dans la formule de Clozel se calcule par la formule

$$(5.3) \qquad (-1)^{a_{P_\Omega}^\theta - a_G^\theta} = (-1)^{|\Omega|+n}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Pour $i \in \Sigma$, on définit les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_i^{>}, \mathbf{1}_i^{\leq}$ de sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$ par les formules

$$\mathbf{1}_i^{>}(m_1, m_2, \dots, m_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_1 + m_2 + \dots + m_i \leq 0, \\ 1 & \text{si } m_1 + m_2 + \dots + m_i > 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{1}_i^{\leq}(m_1, m_2, \dots, m_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 + m_2 + \dots + m_i \leq 0, \\ 0 & \text{si } m_1 + m_2 + \dots + m_i > 0. \end{cases}$$

Plus généralement, pour $\Omega \subset \Sigma$, on pose

$$\mathbf{1}_\Omega^{>} = \prod_{i \in \Omega} \mathbf{1}_i^{>}, \quad \mathbf{1}_\Omega^{\leq} = \prod_{i \in \Omega} \mathbf{1}_i^{\leq}.$$

On a le lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.2 *Soit $f \in \mathcal{H}$ tel que $pS(f)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{m}} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n}$. Soit $\Omega \subset \Sigma$ et soit $P_\Omega = MN$ le sous-groupe parabolique standard θ-stable correspondant. On a l'identité*

$$pS(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{\Sigma - \Omega}^{>}(\mathbf{m}) d_{\mathbf{m}} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n}.$$

On pose $\langle \chi, \mathbf{m} \rangle = \chi_1 m_1 + \chi_2 m_2 \cdots + \chi_n m_n$.

On déduit du lemme précédent le résultat suivant.

Corollaire 5.3 *Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, on a l'égalité :*

$$\operatorname{tr} \operatorname{Ind}_{B \cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{\Sigma - \Omega}^{>}(\mathbf{m}) d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle} \tag{5.4}$$

En effet, le terme $\operatorname{tr} \operatorname{Ind}_{B \cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)$ se calcule facilement en termes de la transformation de Satake, on a l'identité

$$\operatorname{tr} \operatorname{Ind}_{B \cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) = S(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)(q^{-\chi_1}, q^{-\chi_2}, \dots, q^{-\chi_{2n+1}}).$$

Posons

$$w(\Omega, \chi) = |\{w \in Stab_{W^M}(\chi); \theta(w) = w\}|. \tag{5.5}$$

Des égalités (5.3), (5.4), et (5.5), on obtient

$$D_\chi(f) = (-1)^n \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} I(\chi)(\mathbf{m}) d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle},$$

où

$$I(\chi) = \sum_{\Omega \subset \Sigma_{\leq}(\chi)} (-1)^{|\Omega|} w(\Omega, \chi)^{-1} \mathbf{1}_{\Sigma - \Omega}^{>}.$$

5.5 Simplification de $I(\chi)$, cas $\operatorname{Re}\chi_n > 0$

Dans ce paragraphe, on suppose que $\operatorname{Re}\chi_n > 0$; le cas contraire sera discuté au paragraphe suivant. On a donc $n \notin \Sigma_{\leq}(\chi)$. Pour simplifier, on écrira $\Sigma_<$ pour $\Sigma_<(\chi)$, etc. On identifie désormais χ à son tronqué $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{N}^\times$. On note $W(A_\Omega)$ le groupe des permutations de $\mathbb{N}^\times$ (ou de $\{X_i \,;\, i \in \mathbb{N}^\times\}$) laissant stable Ω et fixant point par point $\mathbb{N}^\times - \Omega$. Pour $\Omega \subset \mathbb{N}^\times$ un sous-ensemble connexe, on pose $\Omega^+ = \Omega \cup \{\sup \Omega + 1\}$.

Rappelons que l'on a posé $\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $\Omega \subset \Sigma$ et supposons $n \notin \Omega$. Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_s$ sa décomposition en composantes connexes. On pose

$$W^\Omega = W(\Omega_1^+) \times W(\Omega_2^+) \times \dots \times W(\Omega_s^+).$$

Pour $\Omega \subset \Sigma_\leq$, posons $\Omega_= = \Omega \cap \Sigma_=$, $\Omega_< = \Omega \cap \Sigma_<$, etc.

Lemme 5.4 *On a l'identité $w(\Omega, \chi) = |W^{\Omega_=}|$.*

Démonstration Pour $\Gamma \subset \Sigma$, on pose ${}^t\Gamma = \{2n + 2 - i; i \in \Gamma\}$. Par définition, le groupe P_Ω correspond à la partition de $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$ en les sous-ensembles suivants :

(i) $\Omega_i^+, {}^t(\Omega_i^+), i = 1, \dots, s$;

(ii) $\{j\}$ où $1 \leq j \leq 2n + 1$ tel que j n' appartienne à aucun des ensembles précédents.

Ainsi, le groupe de Weyl du Lévi standard M de P_Ω est

$$W^M = W(A_{\Omega_1^+}) \times \dots \times W(A_{\Omega_s^+}) \times W(A_{{}^t\Omega_s^+}) \times \dots \times W(A_{{}^t\Omega_1^+}) = W^\Omega \times \theta(W^\Omega).$$

On en déduit $w(\Omega, \chi) = |\{w \in W^\Omega \,;\, w\chi = \chi\}|$.

On a $W^{\Omega_=} = W^\Omega \cap W^{\Sigma_=}$. Un élément de cet ensemble appartient à W^Ω et conserve χ. Inversement, soit $w \in W^\Omega$ tel que $w\chi = \chi$. Écrivons $w = (w_1, \dots, w_s), w_i \in W(A_{\Omega_i^+})$. On peut fixer i et prouver que $w_i \in W(A_{\Omega_i^+}) \cap W^{\Sigma_=}$. Écrivons $\Omega_i^+ = \{a, a + 1, \dots, b\}$. Puisque $\Omega \subset \Sigma_\leq$, on a $\chi_a \leq \chi_{a+1} \leq \dots \leq \chi_b$. Considérons les coupures de cette suite ; écrivons $\chi_a = \dots = \chi_{a_1} < \chi_{a_1+1} = \dots = \chi_{a_2} < \dots = \chi_{a_t}$ ($a_t = b$). Puisque w_i est une permutation de Ω_i^+ qui conserve χ, elle conserve chaque intervalle $\{a, \dots, a_1\}, \{a_1 + 1, \dots, a_2\}, \dots, \{a_{t-1} + 1, \dots, a_t\}$. Cela signifie que $w_i \in W(A_{\Omega_i^+}) \cap W^{\Omega_=}$. ■

D'après le lemme précédent, on peut écrire

$$I(\chi) = \mathbf{1}_{\Sigma_>}^{>} \Big(\sum_{\Omega_< \subset \Sigma_<} (-1)^{|\Omega_<|} \mathbf{1}_{\Sigma_< - \Omega_<}^{>} \Big) \Big(\sum_{\Omega_= \subset \Sigma_=} (-1)^{|\Omega_=|} |W^{\Omega_=}|^{-1} \mathbf{1}_{\Sigma_= - \Omega_=}^{>} \Big).$$

Mais le premier terme entre parenthèses est facile à calculer [NgCh, Lemme VII.2.10] ; il vaut $(-1)^{|\Sigma_<|} \mathbf{1}_{\Sigma_<}^{\leq}$. On remarque que pour tout i, la somme $\mathbf{1}_i^{>} + \mathbf{1}_i^{\leq}$ est la fonction

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

constante égale à 1. On peut donc remplacer $\mathbf{1}^{>}_{\Sigma_= - \Omega_=}$ dans le deuxième terme entre parenthèses par $\mathbf{1}^{>}_{\Sigma_= - \Omega_=} \prod_{i \in \Omega_=} (\mathbf{1}^{>}_i + \mathbf{1}^{\leq}_i) = \sum_{\Gamma \subset \Omega_=} \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma} \mathbf{1}^{>}_{\Sigma_= - \Gamma}$. Le dernier terme devient

$$\sum_{\Gamma \subset \Sigma_=} d(\Gamma) \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma} \mathbf{1}^{>}_{\Sigma_= - \Gamma},$$

où $d(\Gamma) = \sum_{\Omega; \Gamma \subset \Omega \subset \Sigma_=} (-1)^{|\Omega|} |W^{\Omega}|^{-1}$.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 5.5 *On a l'égalité*

$$I(\chi) = (-1)^{|\Sigma_<|} \sum_{\Gamma \subset \Sigma_=} d(\Gamma) \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma \cup \Sigma_<} \mathbf{1}^{>}_{(\Sigma_= - \Gamma) \cup \Sigma_>}$$

5.6 Simplification de $I(\chi)$, cas $\operatorname{Re} \chi_n \leq 0$

On suppose maintenant que $\operatorname{Re} \chi_n \leq 0$. On identifie toujours χ à son tronqué $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$. Il existe alors deux uniques entiers naturels k, l tels que

- $\chi_{n-k-l} \neq \epsilon$;
- $\chi_{n-k-l+1} = \chi_{n-k-l+2} = \cdots = \chi_{n-l} = \epsilon, \chi_{n-l+1} = \chi_{n-l+2} = \cdots = \chi_n = 0.$

Notons $W(C_\Sigma)$ le groupe de Weyl de type C_n. On le voit soit comme le groupe des permutations w de $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ telles que $w(-i) = -w(i)$ pour tout i, soit comme le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ telles que

$$w(i) + w(2n+2-i) = 2n+2$$

pour tout i. Le groupe $W(C_\Sigma)$ agit de façon naturelle sur les groupes $(\mathbb{C}^\times)^n, \mathbb{C}^n$, ainsi que sur l'ensemble des caractère non ramifiés du tore diagonal de $GL(N)$. Pour $\Omega \subset \Sigma$, on pose $W(C_\Omega) = \{w \in W(C_\Sigma) \ ; \ w(i) = i \text{ pour tout } i \in \Sigma - \Omega\}$. Le groupe $W(A_\Omega)$ défini au paragraphe précédent se plonge dans $W(C_\Omega)$.

Pour Ω un sous-ensemble connexe de Σ tel que $n \notin \Omega$, on a posé $\Omega^+ = \Omega \cup \{\sup \Omega + 1\}$. Posons

$$\Sigma^\epsilon = \{n-k-l+1, \dots, n-l\}, \quad \Sigma^0 = \{n-l+1, \dots, n\},$$
$$\Sigma^1 = \Sigma - (\Sigma^0 \cup \Sigma^\epsilon).$$

Soit $\Omega \subset \Sigma_\leq$. On construit le groupe $W^{\Omega^*_=}$ de la manière suivante :

(i) Si $n \notin \Omega$, on pose $W^{\Omega^*_=} = W^{\Omega_=}$, le groupe construit en section 5.5. Plus concètement, soit $\Omega_= = \Omega_{=,1} \cup \Omega_{=,2} \cup \cdots \cup \Omega_{=,s}$ sa décomposition en composantes connexes. Alors $W^{\Omega^*_=} = W^{\Omega_=} = W(A_{\Omega^+_{=,1}}) \times \cdots \times W(A_{\Omega^+_{=,s}})$.

(ii) Si $n \in \Omega$, on décompose Ω en composantes connexes $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_s$ tel que $\Omega_1 < \Omega_2 < \cdots < \Omega_s$ (donc $n \in \Omega^0_s$). Posons $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_{s-1} \cup (\Omega_s \cap \Sigma^1)$, $\Omega^\epsilon_s = \Omega_s \cap \Sigma^\epsilon$, $\Omega^0_s = \Omega_s \cap \Sigma^0$. On pose $W^{\Omega^*_=} = W^{\Omega'_=} \times W(C_{\Omega^\epsilon_s}) \times W(C_{\Omega^0_s})$.

On a l'analogue suivant du lemme 5.4.

Lemme 5.6 *On a l'égalité* $w(\Omega, \chi) = |W^{\Omega^*_=}|$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Démonstration La différence avec le lemme 5.4 réside dans la présence de $\Sigma^\epsilon \cup \Sigma^0$ et si $n \in \Omega$. On va supposer que $\Sigma = \Sigma^\epsilon \cup \Sigma^0$ et $n \in \Omega$; le cas général se déduit de ce cas et du lemme 5.4. Soit donc $\Omega \subset \Sigma$ tel que $n \in \Omega$.

Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_s$ sa décomposition en composantes connexes (dans l'ordre croissant). Pour $\Gamma \subset \Sigma$, on a posé ${}^t\Gamma = \{2n+2-i; i \in \Gamma\}$. Le groupe P_Ω correspond à la partition de $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ en les sous-ensembles suivants

(i) $\Omega_i^+, {}^t(\Omega_i^+), i = 1, \ldots, s-1$;
(ii) $\Omega_s^* = \Omega_s \cup \{n+1\} \cup {}^t\Omega_s$;
(iii) $\{j\}$ où $1 \leq j \leq 2n+1$ tel que j n'appartienne à aucun des ensembles précédents.

Ainsi, le groupe de Weyl du Lévi standard M de P_Ω est

$$\begin{aligned} W^M &= W(A_{\Omega_1^+}) \times \cdots \times W(A_{\Omega_{s-1}^+}) \times W(A_{\Omega_s^*}) \times W(A_{{}^t\Omega_{s-1}^+}) \times \cdots \times W(A_{{}^t\Omega_1^+}) \\ &= W^{\Omega'} \times W(A_{\Omega_s^*}) \times \theta(W^{\Omega'}). \end{aligned}$$

Soit $w \in W^M$ et écrivons $w = (w_1, w_0, w_2)$ où $w_1 \in W^{\Omega'}, w_0 \in W(A_{\Omega_s^*}), w_2 \in \theta(W^{\Omega'})$. Les conditions $w\chi = \chi, \theta(w) = w$ équivalent à $w_1\chi = \chi$, $w_0\chi = \chi$, $\theta(w_0) = w_0$, $w_2 = \theta(w_1)$. D'après le lemme 5.4, on a $|\{w_1 \in W^{\Omega'} ; w_1\chi = \chi\}| = |W^{\Omega'_=}|$. D'autre part, la condition $w_0\chi = \chi$ siginifie que w_0 conserve

$$\Omega_s^{\epsilon,*} = \Omega_s^\epsilon \cup {}^t\Sigma^0 \quad \text{et} \quad \Omega_s^{0,*} = \Omega_s^0 \cup \{n+1\} \cup {}^t\Omega_s^0.$$

Et on vérifie que $\{w_0 \in W(A_{\Omega_s^*}) ; \theta(w_0) = w_0, w_0$ conserve $\Omega_s^{\epsilon,*}$ et $\Sigma_s^{0,*}\}$ est en bijection avec $W(C_{\Omega_s^\epsilon}) \times W(C_{\Omega_s^0})$ d'où le résultat. ■

Posons, pour $\Gamma^0 \subset \Sigma^0, \Gamma^1 \subset \Sigma^1_=$

$$d(\Gamma^0) = \sum_{\Omega^0; \Gamma^0 \subset \Omega^0 \subset \Sigma^0} (-1)^{|\Omega^0|} |W^{\Omega^0}|^{-1}, d(\Gamma^1) = \sum_{\Omega^1; \Gamma^1 \subset \Omega^1 \subset \Sigma^1_=} (-1)^{|\Omega^1|} |W^{\Omega^1}|^{-1}.$$

Alors, on obtient l'analogue de la proposition 5.5.

Proposition 5.7 *On a l'égalité*

$$I(\chi) = (-1)^{|\Sigma^1_<|} \sum_{\Gamma^1 \subset \Sigma^1_=, \Gamma^0 \subset \Sigma^0} d(\Gamma^1) d(\Gamma^0) \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma^1 \cup \Gamma^0 \cup \Sigma^1_<} \mathbf{1}^{>}_{(\Sigma^1_= - \Gamma^1) \cup \Sigma^1_> \cup (\Sigma^0 - \Gamma^0)}.$$

5.7 Transformée de Satake de $D(\chi)$, cas $\mathrm{Re}\,\chi_n > 0$

Supposons que $\mathrm{Re}\,\chi_n > 0$. Fixons un $\Gamma \subset \Sigma_=$. Notons $\mathfrak{X}(\Gamma)$ l'ensemble des $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que les x_i soient assez proches de 1 et $x_i < x_{i+1}$ si $i \in \Gamma \cup \Sigma_<$ et $x_i > x_{i+1}$ si $i \in (\Sigma_= - \Gamma) \cup \Sigma_>$ (convention $x_{n+1} = 1$).

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Remarquons que pour tout $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$, on a

$$\int_{\hat{T}_\mathbf{y}} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \, d^\times X_1 \cdots d^\times X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } m_1 = \cdots = m_n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En se rappelant que $pS(f)(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} d_\mathbf{m} X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$, on en déduit

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma \cup \Sigma_<}(\mathbf{m}) \mathbf{1}^{>}_{(\Sigma_= - \Gamma) \cup \Sigma_>}(\mathbf{m}) d_\mathbf{m} q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle} = \int_{\hat{T}_\mathbf{y}} pS(f)(\mathbf{X}) S_\Gamma(\mathbf{X}) \, d^\times \mathbf{X}, \tag{5.6}$$

où

$$S_\Gamma(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}^{\leq}_{\Gamma \cup \Sigma_<}(\mathbf{m}) \mathbf{1}^{>}_{(\Sigma_= - \Gamma) \cup \Sigma_>}(\mathbf{m}) q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle} X_1^{-m_1} X_2^{-m_2} \cdots X_n^{-m_n},$$

pourvu que cette expression converge.

D'après [NgCh], pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)$, la série S_Γ converge absolument et uniformément sur $\hat{T}_\mathbf{x}$ et on a

$$S_\Gamma = (-1)^{|\Sigma_\geq| + |\Gamma|} Q_\chi, \tag{5.7}$$

où Q_χ est la fonction définie par la formule (5.1). On en déduit

Lemme 5.8 *On a*

$$D_\chi(f) = \sum_{\Gamma \subset \Sigma_=} (-1)^{|\Gamma|} d(\Gamma) \int_{\hat{T}_\mathbf{x}} pS(f)(\mathbf{X}) Q_\chi(\mathbf{X}) \, d^\times \mathbf{X} \tag{5.8}$$

où pour chaque Γ, *on a fixé un* $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)$.

Fixons maintenant un point $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Sigma_=)$ tel que pour tous $i \in \Sigma_=$ et $j \in \Sigma - \Sigma_=$, $|x_i - x_{i+1}| \ll |x_j - x_{j+1}|$. Un tel point existe toujours. Pour tout $w \in W^{\Sigma_=}$, le point $\mathbf{x}' = w\mathbf{x}$ vérifie encore $x'_i > x'_{i+1}$ si $i \in \Sigma_<$ et $x'_i < x'_{i+1}$ si $i \in \Sigma_>$.

Lemme 5.9 *On a l'égalité* $(-1)^{|\Gamma|} d(\Gamma) = |W^{\Sigma_=}|^{-1} |\{w \in W^{\Sigma_=} ; w\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)\}|$.

Démonstration Soit $w \in W^{\Sigma_=}$. D'après ce qui précède l'énoncé, les seules conditions à vérifier pour que $w\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ sont

$$\begin{cases} x_{w^{-1}(i)} < x_{w^{-1}(i+1)} & \text{pour } i \in \Gamma, \\ x_{w^{-1}(i)} > x_{w^{-1}(i+1)} & \text{pour } i \in \Sigma_= - \Gamma. \end{cases}$$

D'après les conditions imposées à $\mathbf{x}$, cela est équivalent à

$$\begin{cases} w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1) & \text{pour } i \in \Gamma, \\ w^{-1}(i) > w^{-1}(i+1) & \text{pour } i \in \Sigma_= - \Gamma. \end{cases}$$

Notons $J(w)$ l'ensemble des $i \in \Sigma_=$ tels que $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$. La condition est $J(w) = \Gamma$. Pour w tel que $\Gamma \subset J(w)$, on a

$$\sum_{\Omega;\Gamma\subset\Omega\subset J(w)} (-1)^{|\Omega-\Gamma|} = \begin{cases} 1 & \text{si } J(w) = \Gamma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\{w \in W^{\Sigma_=}; J(w) = \Gamma\}| &= \sum_{\substack{w\in W^{\Sigma_=} \\ \Gamma\subset J(w)}} \sum_{\Omega;\Gamma\subset\Omega\subset J(w)} (-1)^{|\Omega-\Gamma|} \\ &= \sum_{\Omega;\Gamma\subset\Omega\subset\Sigma_=} (-1)^{|\Omega-\Gamma|} |\{w \in W^{\Sigma_=} ; \Omega \subset J(w)\}|. \end{aligned}$$

Pour $w \in W^{\Sigma_=}$, on a $\Omega \subset J(w)$ si et seulement si w est de longueur minimale dans sa classe $W^{\Omega}\backslash W^{\Sigma_=}$. On sait qu'il y a exactement un élément par classe. La dernière somme vaut donc $|W^{\Omega}|^{-1}|W^{\Sigma_=}|$ et on obtient

$$|\{w \in W^{\Sigma_=} ; J(w) = \Gamma\}| = (-1)^{|\Gamma|}|W^{\Sigma_=}| \sum_{\Omega;\Gamma\subset\Omega\subset\Sigma_=} (-1)^{|\Omega|}|W^{\Omega}|^{-1},$$

mais cela équivaut à l'énoncé. ∎

Grâce au lemme précédent, on peut transformer la formule (5.8) ainsi

$$\begin{aligned} D_\chi(f) &= |W^{\Sigma_=}|^{-1} \sum_{\Gamma\subset\Sigma_=} \sum_{\substack{w\in W^{\Sigma_=} \\ w\mathbf{x}\in\mathfrak{X}(\Gamma)}} \int_{\hat{T}_{w\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q_\chi(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X} \\ &= |W^{\Sigma_=}|^{-1} \sum_{w\in W^{\Sigma_=}} \int_{\hat{T}_{w\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q_\chi(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X}, \end{aligned}$$

car Γ est déterminé par w.

Posons

$$Q^1_\chi(\mathbf{X}) = |W^{\Sigma_=}|^{-1} \sum_{w\in W^{\Sigma_=}} Q_\chi(w\mathbf{X}).$$

Par changement de variables et en utilisant l'invariance de $pS(f)$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.10 *On a l'identité*

$$D_\chi(f) = \int_{\hat{T}_{\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q^1_\chi(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

5.8 Transformée de Satake de $D(\chi)$, cas $\operatorname{Re}\chi_n \leq 0$

Posons $\Sigma^{\epsilon,0} = \Sigma^{\epsilon} \cup \Sigma^0, \Sigma^{\times}_{\equiv} = \Sigma^1_{\equiv} \cup \Sigma^{\epsilon,0}$. Fixons un élément $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Sigma^{\times}_{\equiv})$ (donc $x_{n-k-l+1} < \cdots < x_n < 1$) avec des propriétés analogues au cas précédent : les x_i sont assez proches de 1 et pour tous $i \in \Sigma^{\times}_{\equiv}$, $j \in \Sigma - \Sigma^{\times}_{\equiv}$, on a $|x_i - x_{i+1}| \ll |x_j - x_{j+1}|$. On a l'analogue suivant du lemme 5.9

Lemme 5.11 *Soient $\Gamma^1 \subset \Sigma^1, \Gamma^0 \subset \Sigma^{\epsilon,0}$. On a l'égalité*

$$(-1)^{|\Gamma^1|+|\Gamma^0|} d(\Gamma^1) d(\Gamma^0) = |W^{\Sigma^*_{=}}|^{-1} |\{w \in W^{\Sigma^*_{=}} \ ; w\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma^1 \cup \Gamma^0)\}|.$$

Démonstration On peut supposer $\Sigma^1 = \varnothing$; le cas général se déduit de ce cas et du lemme 5.9. Soit $\Gamma \subset \Sigma$. On doit montrer l'égalité

$$(-1)^{|\Gamma|} d(\Gamma) = |W^0|^{-1} |\{w \in W^0 \ ; w\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)\}|,$$

où $W^0 = W(C_{\Sigma^\epsilon}) \times W(C_{\Sigma^0})$. Posons, pour $w \in W^0$, $J(w) = \{i \in \Sigma \ ; (w\mathbf{x})_i < (w\mathbf{x})_{i+1}\}$ avec toujours la convention $(w\mathbf{x})_{n+1} = 1$. D'après la démonstration du lemme 5.9, on a

$$|\{w \in W^0 \ ; w\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Gamma)\}| = \sum_{\Omega ; \Gamma \subset \Omega \subset \Sigma} (-1)^{|\Omega - \Gamma|} |\{w \in W^0 \ ; \Omega \subset J(w)\}|.$$

Il suffit de montrer que chaque classe $\bar{w} \in W^{\Omega} \backslash W^0$ contient un unique élément w tel que $\Omega \subset J(w)$, où W^{Ω} est le groupe défini en (5.6) ; le reste est similaire à la fin de la démonstration du lemme 5.9. On supposera que $n \in \Omega$; l'autre cas est similaire et plus simple. Soit $w \in \bar{w}$. La condition $\Omega \subset J(w)$ équivaut à : $(w\mathbf{x})_i < (w\mathbf{x})_{i+1}$ pour tout $i \in \Omega$ (rappelons que par convention $(w\mathbf{x})_{n+1} = 1$).

Soient $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et $\{e_i\}$ sa base canonique. Posons $\Phi = \{e_i \pm e_j \ ; i, j \in \Sigma^{\epsilon}\} \cup \{e_i \pm e_j \ ; i, j \in \Sigma^0\}$. Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_s$ la décomposition de Ω en composantes connexes telle que $\Omega_1 < \Omega_2 < \cdots < \Omega_s$. Posons

$$\Phi' = \bigcup_{r=1}^{s-1} \{e_i - e_j \ ; i, j \in \Omega_r^+\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \ ; i, j \in \Omega_s \cap \Sigma^{\epsilon}\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \ ; i, j \in \Omega_s \cap \Sigma^0\}$$

et soit $V' = \mathbb{R}\Phi'$ l'espace vectoriel engendré par Φ'. Les ensembles Φ et Φ' sont des systèmes de racines de groupe de Weyl W^0, W^{Ω} respectivement. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ tels que

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_k < 0, \quad y_{k+1} < y_{k+2} < \cdots < y_n < 0,$$

où $k = \max \Sigma^{\epsilon}$. Notons $\mathcal{C}'$ l'ensemble des $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V'$ vérifiant les conditions suivantes : $y_i < y_{i+1}$ pour tout $i \in \bigcup_{r=1}^{s-1} \Omega_r$, $y_j < y_{j'}$ pour tous $j < j'$, $j, j' \in \Omega_s \cap \Sigma^{\epsilon}$ ou $j, j' \in \Omega_s \cap \Sigma^0$, $y_n < 0$, et $y_k < 0$ si $k \in \Omega_s$. Notons π la projection orthogonale de V sur V'. Alors $\mathcal{C}$ est une chambre de Weyl pour Φ et $\pi(\mathcal{C}), \mathcal{C}'$ pour Φ'. On montre que toute classe $\bar{w} \in W^{\Omega} \backslash W^0$ contient un unique élément $w \in \bar{w}$ tel que $\pi(w(\mathcal{C})) = \mathcal{C}'$. C'est exactement l'unique élément tel que $(w\mathbf{x})_i < (w\mathbf{x})_{i+1}$ pour tout $i \in \Omega$. ■

On pose alors

$$Q_\chi^{1,*}(\mathbf{X}) = |W^{\Sigma_=^*}|^{-1} \sum_{w \in W^{\Sigma_=^*}} Q_\chi(w\mathbf{X}).$$

Et on obtient l'analogue évident de la proposition 5.10.

Proposition 5.12 *On a l'égalité*

$$D_\chi(f) = \int_{\hat{T}_{\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X}) Q_\chi^{1,*}(\mathbf{X})\, d^\times \mathbf{X}.$$

5.9 Élimination des pôles sur $\hat{T}_u$

On ne fixe plus χ. Pour unifier les notations, lorsque $n \notin \Sigma_\leq(\chi)$, on pose $W^{\Sigma_=^*(\chi)} = W^{\Sigma_=(\chi)}$, $\Sigma_=^\times(\chi) = \Sigma_=(\chi)$.

Pour $\chi \in \mathcal{C}^\theta$, posons $\Sigma_\#(\chi) = \{i \in \Sigma; \operatorname{Re}\chi_i = \operatorname{Re}\chi_{i+1}\}$. On a évidemment $\Sigma_=^\times(\chi) \subset \Sigma_\#(\chi)$. Définissons le groupe $W^{\Sigma_\#(\chi)}$ de la façon suivante. Soit $\Sigma_\#(\chi) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_t$ sa décomposition en composantes connexes dans l'ordre croissant. On pose

$$W^{\Sigma_\#(\chi)} = \begin{cases} W(A_{\Sigma_1^+}) \times W(A_{\Sigma_2^+}) \times \cdots \times W(A_{\Sigma_t^+}) & \text{si } n \notin \Sigma_\#(\chi), \\ W(A_{\Sigma_1^+}) \times W(A_{\Sigma_2^+}) \times \cdots \times W(A_{\Sigma_{t-1}^+}) \times W(C_{\Sigma_t}) & \text{si } n \in \Sigma_\#(\chi). \end{cases}$$

On a $W^{\Sigma_=^*(\chi)} \subset W^{\Sigma_\#(\chi)}$.

On définit une nouvelle relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}^\theta$ de la façon suivante. On dit que χ est équivalent à χ' s'il existe un $w \in W^{\Sigma_\#(\chi)}$ tel que $\chi' = w\chi$ (cela entraîne que $\Sigma_\#(\chi) = \Sigma_\#(\chi')$). Cette relation d'équivalence conserve la condition $\operatorname{Re}\chi_n > 0$ ou $\operatorname{Re}\chi_n \leq 0$. Dans toute classe d'équivalence, il y a un unique χ avec la propriété suivante. Soit $\Sigma_\#(\chi) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_t$ comme ci-dessus ; soit $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, écrivons $\Sigma_j = \{e, e+1, \dots, f-1\}$. Alors il y a un entier $h \in \{e+1, \dots, f\}$ et un réel a tel que

$$\chi_e = \chi_{e+1} = \cdots = \chi_h = a + \epsilon, \chi_{h+1} = \cdots = \chi_f = a.$$

Fixons un tel χ. Alors sa classe est en bijection avec $W^{\Sigma_\#(\chi)}/W^{\Sigma_=^*(\chi)}$: à un w on associe $w\chi$. Remarquons qu'alors $W^{\Sigma_=^*(w\chi)} \subset wW^{\Sigma_=^*(\chi)}w^{-1}$, donc $wW^{\Sigma_=^*(\chi)}$ est une union de classes à gauche de $W^{\Sigma_=^*(w\chi)}$.

Posons

$$\Phi = \begin{cases} \bigcup_{r=1}^{t} \{e_i - e_j \,;\, i, j \in \Sigma_r^+\} & \text{si } n \notin \Sigma_t, \\ \bigcup_{r=1}^{t-1} \{e_i - e_j \,;\, i, j \in \Sigma_r^+\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,;\, i, j \in \Sigma_t\} & \text{si } n \in \Sigma_t. \end{cases}$$

C'est un système de racines dont le groupe de Weyl est précisément $W^{\Sigma_\#(\chi)}$. On construit comme dans la démonstration du lemme 5.11 un sous-système de racines $\Phi' \subset \Phi$ dont le groupe de Weyl est $W^{\Sigma_=^*(w\chi)}$. De façon analogue on définit des chambres de Weyl $\mathcal{C} \subset V, \mathcal{C}' \subset V'$ où V, V' sont les espaces vectoriels engendrés

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

par Φ et Φ', respectivement. Notons π la projection orthogonale de V sur V'. Soit $w \in W^{\Sigma_\#(\chi)}/W^{\Sigma^*_=(\chi)}$, on pose $\mathcal{U}_w = \{\nu \in wW^{\Sigma^*_=(\chi)} \ ; \ \pi(\nu^{-1}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}'\}$. Chaque classe à gauche de $W^{\Sigma^*_=(w\chi)}$ contient un unique ν ayant cette propriété. On en déduit $|\mathcal{U}_w||W^{\Sigma^*_=(w\chi)}| = |W^{\Sigma^*_=(\chi)}|$.

Fixons un $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Sigma^\times_\equiv(\chi))$. Pour $\nu \in \mathcal{U}_w$, on vérifie que $\nu\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\Sigma^\times_\equiv(\nu\chi))$. D'après les propositions 5.10 et 5.12 on a

$$D_{w\chi}(f) = \int_{\hat{T}_{\nu\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q^{1,*}_{w\chi}(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X},$$

où on a posé $Q^{1,*}_{w\chi} = Q^1_{w\chi}$ si $n \in \Sigma_\#(\chi)$. On peut aussi bien moyenner en ν

$$D_{w\chi}(f) = |\mathcal{U}_w|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{U}_w} \int_{\hat{T}_{\nu\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q^{1,*}_{w\chi}(\mathbf{X})d^\times\mathbf{X}.$$

On obtient

$$D_{w\chi}(f) = \int_{\hat{T}_{\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q^2_{w\chi}(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X},$$

où

$$\begin{aligned}
Q^2_{w\chi}(\mathbf{X}) &= |\mathcal{U}_w|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{U}_w} Q^{1,*}_{w\chi}(\nu\mathbf{X}) \\
&= |\mathcal{U}_w|^{-1}|W^{\Sigma^*_=(w\chi)}|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{U}_w;\nu'\in W^{\Sigma^*_=(w\chi)}} Q_{w\chi}(\nu'\nu\mathbf{X}) \\
&= |W^{\Sigma^*_=(\chi)}|^{-1} \sum_{\nu\in wW^{\Sigma^*_=(\chi)}} Q_{w\chi}(\nu\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

D'après la formule (3.4), le coefficient $c(\chi, \mathbf{\Delta})$ ne dépend que de la classe d'équivalence de χ. La contribution à $\mathrm{tr}_{\theta-c}\, St_{\mathbf{\Delta}}(f)$ de la classe d'équivalence de χ comme ci-dessus est alors

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) \int_{\hat{T}_{\mathbf{x}}} pS(f)(\mathbf{X})Q^3_{\chi}(\mathbf{X})\, d^\times\mathbf{X},$$

où

$$\begin{aligned}
Q^3_{\chi}(\mathbf{X}) &= \sum_{w\in W^{\Sigma_\#(\chi)}/W^{\Sigma^*_=(\chi)}} |W^{\Sigma^*_=(\chi)}|^{-1} \sum_{\nu\in wW^{\Sigma^*_=(\chi)}} Q_{w\chi}(\nu\mathbf{X}) \\
&= |W^{\Sigma^*_=(\chi)}|^{-1} \sum_{w\in W^{\Sigma_\#(\chi)}/W^{\Sigma^*_=(\chi)}} \ \sum_{w'\in W^{\Sigma^*_=(\chi)}} Q_{ww'\chi}(ww'\mathbf{X}) \\
&= |W^{\Sigma^*_=(\chi)}|^{-1} \sum_{w\in W^{\Sigma_\#(\chi)}} Q_{w\chi}(w\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que $Q_{ww'\chi} = Q_{w\chi}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

On montre par des arguments similaires à ceux dans [NgCh] que Q^3_χ n'a pas de pôle au voisinage du tore unitaire $\hat{T}_u$. On peut donc décaler le domaine d'intégration et la contribution de la classe d'équivalence est

$$c(\chi,\mathbf{\Delta})\int_{\hat{T}_u} pS(f)(\mathbf{X})Q^3_\chi(\mathbf{X})\,d^\times\mathbf{X}.$$

Et l'égalité du théorème s'ensuit.

5.10 Les pôles de la fonction $Q_{\mathbf{\Delta}}$

D'après ce qui précède, la fonction $Q_{\mathbf{\Delta}}$ n'a pas de pôle au voisinage du tore $\hat{T}_u$. On peut préciser ce résultat de la façon suivante.

Proposition 5.13 *Les pôles de $Q_{\mathbf{\Delta}}$ sont d'ordre* 1 *et inclus dans l'union des hyperplans $X_i = q, X_i = q^{-1}, X_i = qX_j, X_i = q^{-1}X_j$, $1 \le i, j \le n, i \neq j$.*

Démonstration Par définition, on a

$$Q_{\mathbf{\Delta}} = \frac{1}{|W(C_n)|}\sum_{w\in(C_n)}\Big(\sum_{\chi\in\mathcal{C}^\theta} c(\chi,\mathbf{\Delta})\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-q^{\chi_i-\chi_{i+1}}X_iX_{i+1}^{-1}}\Big)^w$$

(convention: $X_{n+1} = 1, \chi_{n+1} = 0$). Les pôles de cette fonction sont inclus dans les hyperplans $X_{i+1} = q^dX_i$, $d = \chi_i - \chi_{i+1}$ pour un certain $\chi \in \mathcal{C}^\theta$, ainsi que leurs images par les éléments du groupe $W(C_n)$. Il suffit donc de montrer que $Q_{\mathbf{\Delta}}$ n'a pas de pôles en $X_{i+1} = q^dX_i$ si $d \neq \pm 1$. On suppose que $i < n$, le cas $i = n$ se traite de manière analogue.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(\chi, w) \in \mathcal{C}^\theta \times W(C_n)$ tels qu'il existe $1 \le j < n$ tel que

(i) soit $\chi_j - \chi_{j+1} = d, w(X_j) = X_i, w(X_{j+1}) = X_{i+1}$;
(ii) soit $\chi_j - \chi_{j+1} = d, w(X_j) = X_{i+1}^{-1}, w(X_{j+1}) = X_i^{-1}$;
(iii) soit $\chi_j - \chi_{j+1} = -d, w(X_j) = X_{i+1}, w(X_{j+1}) = X_i$;
(iv) soit $\chi_j - \chi_{j+1} = -d, w(X_j) = X_i^{-1}, w(X_{j+1}) = X_{i+1}^{-1}$.

Notons que j est alors déterminé par w. Les éventuels pôles en $X_{i+1} = q^dX_i$ sont d'ordre au plus 1 et proviennent alors de la somme $\sum_{(\chi,w)\in\mathcal{E}} c(\chi,\mathbf{\Delta})Q_\chi(w\mathbf{X})$.

Soit $(\chi, w) \in \mathcal{E}$. On pose $\chi' = s_j\chi$ (on identifie toujours χ à son tronqué). On définit $w' \in W(C_n)$ par les propriétés $w(X_k) = w'(X_k)$ si $k \le j, j+1$, puis, si w vérifie la condition (i), resp. (ii), (iii), (iv) ci-dessus, on demande que w' vérifie (iv), resp. (iii), (ii), (i). L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'union de telles paires $\{(\chi, w), (\chi', w')\}$. D'après la formule (3.4), la contribution d'une telle paire est $c(\chi,\mathbf{\Delta})\big(Q_\chi(w\mathbf{X}) + Q_{\chi'}(w'\mathbf{X})\big)$. Mais on vérifie que $Q_\chi(w\mathbf{X}) + Q_{\chi'}(w'\mathbf{X})$ n'a pas de pôle en $X_i = q^dX_{i+1}$. D'où le résultat. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

5.11 Un exemple

Dans cette section, nous considérons le cas $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ avec $\Delta_1 = (0)$, $\Delta_2 = (1+\epsilon, \epsilon, -1+\epsilon)$, $\Delta_3 = (\epsilon)$. Ce cas correspond à

$$N = 5, \quad St_{\mathbf{\Delta}} = \mathrm{Ind}_P^G St_1 \otimes \xi\, St_3 \otimes \xi\, St_1, \quad \text{où} \quad G = GL(5)$$

et P son sous-groupe parabolique standard paramétré par la partition $(1,3,1)$. Pour simplifier les notations, posons $\pi = St_{\mathbf{\Delta}}$ et notons V son espace. Notons que ce cas a été traité dans [NgCh] dont nous allons retrouver les résultats ici. Gardons les notations des sections précédentes.

Les sous-groupes paraboliques standards θ-stables de G sont G, P et B. Soient $P = MN, B = TU$ les décompositions de Lévi habituelles. Soit $f \in \mathcal{H}$. La formule de Clozel (5.2) permet d'écrire :

$$\mathrm{tr}_{\theta - c}\, \pi(f) = \mathrm{tr}_\theta\, \pi(f) - \mathrm{tr}_\theta\, \pi_N(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) + \mathrm{tr}_\theta\, \pi_U(\hat{\zeta}_U^\theta f^B).$$

Remarquons d'abord que le terme $\mathrm{tr}_\theta\, \pi(f)$ est nul car π n'est pas une représentation non ramifiée.

Considérons le terme $\mathrm{tr}_\theta\, \pi_U(\hat{\zeta}_U^\theta f^B)$. On a l'égalité

$$\mathrm{tr}_\theta\, \pi_U(\hat{\zeta}_U^\theta f^B) = \sum_\chi c(\chi, \mathbf{\Delta})\, \mathrm{tr}\, \chi(\hat{\zeta}_U^\theta f^B).$$

La somme porte sur $\mathcal{C}^\theta$, c'est-à-dire les caractères θ-invariants χ intervenant dans le semi-simplifié V_U^{ss}. Dans notre cas, on vérifie par la filtration de Bernstein–Zelevinsky que seul le caractère $\chi = (1+\epsilon, \epsilon, 0, \epsilon, -1+\epsilon)$ intervient. D'autre part, le terme $\mathrm{tr}\, \chi(\hat{\zeta}_U^\theta f^B)$, qui est la trace de $\hat{\zeta}_U^\theta f^B$ dans l'espace de dimension 1 sur lequel T agit par le caractère χ, est facile à calculer ; elle est égale à $S(\hat{\zeta}_U^\theta f^B)(-q^{-1}, -1, 1, -1, -q)$ où S désigne comme toujours la transformation de Satake. Plus concrètement, écrivons $pS(f)(X_1, X_2) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} d_{\mathbf{m}} X_1^{m_1} X_2^{m_2}$ (rappelons la notation $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$), alors d'après la formule (5.4), on a l'égalité

$$\mathrm{tr}\, \chi(\hat{\zeta}_U^\theta f^B) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_{1,2}^{>} d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle},$$

où $q^{-\langle \chi, \mathbf{m} \rangle} = (-1)^{m_1+m_2} q^{-m_1}$ et $\mathbf{1}_{1,2}^{>}$ est la fonction caractéristque de l'ensemble $\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 ; m_1 > 0, m_1 + m_2 > 0\}$.

Quant au coefficient $c(\chi, \mathbf{\Delta})$, il se calcule par les formules de récurrence (3.1) et (3.3) comme suit. Tout d'abord, comme le terme $\chi_1 = 1 + \epsilon$ est l'extrémité de l'unique segment Δ_2, la première formule de récurrence (3.1) donne

$$c(\chi, \mathbf{\Delta}) = c(\chi', \mathbf{\Delta}'),$$

où $\chi' = (\epsilon, 0, -\epsilon)$ et $\mathbf{\Delta}' = (\Delta_1, \Delta', \Delta_3)$, avec $\Delta' = \Delta_3 = (\epsilon)$. Maintenant, comme $\chi'_1 = \epsilon$ est l'extrémité des segments Δ'_2, Δ_3, la deuxième formule de récurrence (3.3) s'écrit $c(\chi', \mathbf{\Delta}') = 2c(\chi'', \mathbf{\Delta}'')$. où $\chi'' = (0)$ (le caractère trivial de $F^\times$) et

$\mathbf{\Delta}''$ réduit à un seul segment $\Delta_1 = (0)$. Pour ce cas trivial, on a immédiatement $c(\chi'', \mathbf{\Delta}'') = 1$, d'où l'égalité $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = 2$. On en déduit

$$\mathrm{tr}_\theta\, \pi_U(\hat{\zeta}_U^\theta f^B) = 2 \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_{1,2}^{>} d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle}.$$

Considérons maintenant le terme $\mathrm{tr}_\theta\, \pi_N(\hat{\zeta}_N^\theta f^P)$. De façon similaire que dans le cas du Borel, on a

$$\mathrm{tr}_\theta\, \pi_U(\hat{\zeta}_U^\theta f^B) = \sum_{\bar{\chi}} c(\bar{\chi}, \mathbf{\Delta})\, \mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^B),$$

où la somme porte sur $\mathcal{C}_P^\theta$, les classes d'équivalence $\bar{\chi}$ de caractères de T définies précédemment, et où on a fixé une section χ pour chaque $\bar{\chi}$. Comme dans le cas du Borel, seule la classe de $\chi = (1+\epsilon, \epsilon, 0, \epsilon, -1+\epsilon)$ intervient. Comme $c(\chi, \mathbf{\Delta}) = 2$, grâce à la formule (4.2), on obtient $c(\bar{\chi}, \mathbf{\Delta}) = 1$. Quant à la trace $\mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^B)$, il se calcule aussi via la transfomée de Satake de f par la formule (5.4), qui s'écrit

$$\mathrm{tr}\, \mathrm{Ind}_{B\cap M}^M \chi(\hat{\zeta}_N^\theta f^B) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_1^{>} d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle},$$

où $\mathbf{1}_1^{>}$ est la fonction caractéristique de $\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \ ;\ m_1 > 0\}$. Remarquons que $\mathbf{1}_1^{>} = \mathbf{1}_{1,2}^{>} + \mathbf{1}_1^{>}\mathbf{1}_2^{\leq}$, où $\mathbf{1}_2^{\leq}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \ ;\ m_1 + m_2 \leq 0\}$. On en déduit

$$\mathrm{tr}_\theta\, \pi_N(\hat{\zeta}_N^\theta f^P) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} (\mathbf{1}_{1,2}^{>} + \mathbf{1}_1^{>}\mathbf{1}_2^{\leq}) d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle}.$$

On a ainsi démontré le résultat suivant.

Proposition 5.14 *Soit $f \in \mathcal{H}$. Alors on a l'égalité*

$$\mathrm{tr}_{\theta-c}\, \pi(f) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} (\mathbf{1}_{1,2}^{>} - \mathbf{1}_1^{>}\mathbf{1}_2^{\leq}) d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle},$$

où les $d_{\mathbf{m}}$ sont définis par la formule $pS(f)(X_1, X_2) = \sum_{(\mathbf{m})\in\mathbb{Z}^2} d_{\mathbf{m}} X_1^{m_1} X_2^{m_2}$.

Fixons un réel $\delta < 1$ assez proche de 1. Posons $\hat{T}_\delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^\times \ ;\ |x_1| = 1, |x_2| = \delta\}$. On définit $\hat{T}_{\delta^{-1}}$ de façon similaire. Rappelons la définition de la fonction Q_χ :

$$Q_\chi(X_1, X_2) = \frac{1}{1 - qX_1X_2^{-1}} \frac{1}{1 + X_2}.$$

Grâce aux formules (5.6) et (5.7), on a

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_{1,2}^{>} d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle} = \int_{\hat{T}_\delta} pS(f)(X_1, X_2) Q_\chi(X_1, X_2)\, d^\times X_1 d^\times X_2,$$

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_1^{>}\mathbf{1}_2^{\leq} d_{\mathbf{m}} q^{-\langle \chi,\mathbf{m}\rangle} = -\int_{\hat{T}_{\delta^{-1}}} pS(f)(X_1, X_2) Q_\chi(X_1, X_2)\, d^\times X_1 d^\times X_2.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-020-8 Published online by Cambridge University Press

Posons $Q'_\chi(X_1,X_2) = Q_\chi(X_1,X_2^{-1})$. En utilisant le changement de variable $X_2 \mapsto X_2^{-1}$ (et en remarquant l'invariance de $pS(f)$) on a

$$\int_{\hat{T}_{\delta^{-1}}} pS(f)(X_1,X_2)Q_\chi(X_1,X_2)\, d^\times X_1 d^\times X_2 \\ = \int_{\hat{T}_\delta} pS(f)(X_1,X_2)Q'_\chi(X_1,X_2)\, d^\times X_1 d^\times X_2.$$

On en déduit

$$\mathrm{tr}_{\theta-c}\,\pi(f) = \int_{\hat{T}_\delta} pS(f)(X_1,X_2)(Q_\chi(X_1,X_2) + Q'_\chi(X_1,X_2))\, d^\times X_1 d^\times X_2.$$

Mais

$$Q_\chi(X_1,X_2) + Q'_\chi(X_1,X_2) = \frac{1-qX_1}{(1-qX_1X_2^{-1})(1-qX_1X_2)}.$$

Comme cette fonction n'a pas de pôle au voisinage du tore

$$\hat{T}_u = \{(X_1,X_2) \in \mathbb{C}^\times\ ; |X_1| = |X_2| = 1\},$$

on peut donc remplacer domaine $\hat{T}_\delta$ dans l'intégrale précédente par $\hat{T}_u$ et on retrouve un résultat de [NgCh, Théorème III.3.1].

Proposition 5.15 *Pour tout $f \in H$, on a l'égalité*

$$\mathrm{tr}_{\theta-c}\,\pi(f) = \int_{\hat{T}_u} pS(f)(X_1,X_2)\frac{1-qX_1}{(1-qX_1X_2^{-1})(1-qX_1X_2)}\, d^\times X_1 d^\times X_2$$

Notons que dans la formule précédente, on peut évidemment rendre invariante la fonction $\frac{1-qX_1}{(1-qX_1X_2^{-1})(1-qX_1X_2)}$ en la remplaçant par la fonction

$$\frac{2}{|W(C_2)|}\sum_{w\in W(C_2)} Q_\chi^w(X_1,X_2),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4}\frac{4+q(-1+2q+q^2)(X_1+X_1^{-1}+X_2+X_2^{-1})+q^2(X_1^2+X_1^{-2}+X_2^2+X_2^{-2})}{(1-qX_1X_2)(1-qX_1X_2^{-1})(1-qX_1^{-1}X_2)(1-qX_1^{-1}X_2^{-1})}.$$

C'est la fonction $Q_{\boldsymbol{\Delta}}$ du théorème 5.1.

Remerciements Cet article est réalisé sous la direction de mon ancien directeur de thèse J.-L. Waldspurger. Je tiens à le remercier chaleureusement pour l'aide inestimable qu'il a apportée lors de l'élaboration de ce travail. Cet article a été écrit principalement au Max-Planck Institut für Mathematik, Bonn lors du séjour de l'auteur en 2003-2004. Quelques corrections finales ont été réalisées à l'IHES lors du passage de l'auteur de septembre à décembre 2004. Je suis heureux de remercier ces deux instituts pour leur hospitalité.

Références

[Car] R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type. Conjugacy Classes and Complex Characters.* John Wiley, Chichester, 1993.

[Clo] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change.* Duke Math. J. **61**(1990), no. 1, 255–302.

[K-S] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy.* Astérisque no. 255, 1999.

[NgCh] G.-V. Nguyen-Chu, *Intégrales orbitales unipotentes stables et leurs transformées de Satake.* Mém. Soc. Math. Fr. no. 97, 2004.

[Ree] M. Reeder, *Nonstandard intertwining operators and the structure of unramified principal series representations.* Forum Math. **9**(1997), no. 4, 457–516.

[Ro] J. D. Rogawski, *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group.* Invent. Math. **79**(1985), no. 3, 443–465.

[Van] G. van Dijk, *Computation of certain induced characters of p-adic groups.* Math. Ann. **199**(1972), 229–240.

[Wa1] J.-L. Waldspurger, *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires: un lemme fondamental.* Canad. J. Math. **43**(1991), no. 4, 852–896.

[Wa2] ———, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés.* Astérisque no. 269, 2001.

University of Toronto
Department of Mathematics
Toronto, ON
M5S 2E4
e-mail: ncgvuong@math.toronto.edu