Canad. Math. Bull. Vol. **14** (3), 1971

SUR UN THÉORÈME D'INTERPOLATION DE J. LIONS ET J. PEETRE

PAR

J. I. NIETO

Dédié à la mémoire de Jean-Marie Maranda

1. **Introduction**. Dans cette note on donne une démonstration, fondée sur des propriétés élémentaires des opérateurs linéaires dans des espaces munis de deux normes, d'un théorème d'interpolation établi par J. Lions et J. Peetre [2] dans le cadre de leur théorie des espaces de moyenne.

Avant d'énoncer le théorème en question, signalons, une fois pour toutes, que tous les espaces considérés ici sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit X un espace de Banach réflexif, avec norme $\| \ \|_X$, et H un espace de Hilbert, avec produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ et norme $\| \ \|_H$, tels que $X \subset H$. On supposera toujours dans la suite que:

(1) X est dense dans H;

(2) L'injection de X dans H est continue.

Notons X^* l'anti-dual de X, muni de la norme $\| \ \|_{X^*}$ (voir §3). L'injection $i: H \to X^*$, définie par $(i(y), x) = \langle y, x \rangle$ $(x \in X)$, est continue. Dans la suite nous identifierons l'élément $y \in H$ avec son image $i(y) \in X^*$, de façon que l'on puisse écrire:

$$X \subset H \subset X^*,$$

chaque injection étant continue.

THÉORÈME. (*cf.* [2, *Théorème* 4.1]). *Soit T un opérateur linéaire borné dans X^* tel que $T(X) \subset X$. Alors*

(a) $T(H) \subset H$;

(b) *Les restrictions de T à X et à H sont bornées (pour les normes $\| \ \|_X$ et $\| \ \|_H$, respectivement). En plus*

$$\|T\|_H \leq (\|T\|_X \|T\|_{X^*})^{1/2},$$

où $\|T\|_H$, $\|T\|_X$ et $\|T\|_{X^*}$ désignent les normes de T comme opérateur dans H, X et X^*, respectivement.

La démonstration sera donnée dans §4.

REMARQUE 1. Dans l'énoncé du Théorème 4.1 dans [2] les auteurs supposent seulement que X est un espace de Banach, mais comme le fait bien signaler K.

Reçu par les rédacteurs le 3 novembre 1970.

https://doi.org/10.4153/CMB-1971-067-6 Published online by Cambridge University Press

Miyazaki [3, p. 15], leur démonstration n'est valable que pour X réflexif. Bien que Miyazaki indique avoir réussi à se débarrasser de cette hypothèse de réflexivité à l'aide de toute une série de résultats tirés de la théorie des espaces d'interpolation, nous estimons que notre démonstration pour le cas réflexif, en raison de sa grande simplicité, offre un certain intérêt.

2. **Opérateurs linéaires dans des espaces à deux normes.** Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, telles que $\| \ \|_1$ soit plus forte que $\| \ \|_2$, c'est-à-dire il existe $C>0$ tel que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in E$.

LEMME 1. *Soit A un opérateur linéaire dans E, borné pour la norme $\| \ \|_1$ et tel que*

$$\|Ax\|_2^2 \leq \|A^2x\|_2 \quad \textit{pour tout} \quad x \in E, \quad \|x\|_2 = 1. \tag{2.1}$$

Alors A est borné pour la norme $\| \ \|_2$ et

$$\|A\|_2 = r(A: \| \ \|_2) \leq r(A: \| \ \|_1) \leq \|A\|_1, \tag{2.2}$$

où $\|A\|_i$ et $r(A: \| \ \|_i) (i=1, 2)$ désignent la norme et le rayon spectral de A par rapport à $\| \ \|_i$.

Démonstration. Par induction sur $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|Ax\|_2^n \leq \|A^nx\|_2 \quad \text{pour tout} \quad x \in E, \quad \|x\|_2 = 1. \tag{2.3}$$

Par conséquent

$$\|Ax\|_2^n \leq \|A^nx\|_2 \leq C\|A^nx\|_1 \leq (C\|x\|_1)\|A^n\|_1 \quad \text{pour tout} \quad x \in E, \quad \|x\|_2 = 1.$$

Donc

$$\|Ax\|_2 \leq (C\|x\|_1)^{1/n}\|A^n\|_1^{1/n} \quad \text{pour tout} \quad x \in E, \quad \|x\|_2 = 1. \tag{2.4}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans (2.4), on voit que A est borné pour $\| \ \|_2$ et en plus $\|A\|_2 \leq r(A: \| \ \|_1)$. D'autre part (2.3) entraîne $\|A^n\|_2 = \|A\|_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\|A\|_2 = r(A: \| \ \|_2)$. Finalement l'inégalité $r(A: \| \ \|_1) \leq \|A\|_1$ est une propriété bien connue du rayon spectral.

REMARQUE 2. Dans le cas où la norme $\| \ \|_2$ est définie par un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$, tout opérateur A tel que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ pour tout $x, y \in E$ satisfait (2.1), car l'inégalité de Schwarz nous donne dans ce cas $\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^2x\rangle \leq \|A^2x\|_2$ pour $\|x\|_2 = 1$. C'est pour ces opérateurs, dits symétrisables, que nous avions obtenu les inégalités (2.2) dans [4, note au bas de la p. 146]. D'autre part, la démonstration présentée ici est plus simple, grâce à l'argument d'induction que nous y utilisons et qui a été tiré de [1, démonstration du Théorème 2.1].

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé:

LEMME 2. *Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach tels que $E_1 \subset E_2$, avec l'injection de E_1 dans E_2 continue, et T un opérateur linéaire borné dans E_2. Si $T(E_1) \subset E_1$, la restriction de T à E_1 est bornée dans E_1 (pour la norme de E_1).*

3. **L'anti-dual d'un espace normé.** L'anti-dual E^* d'un espace normé E est, par définition, l'ensemble de toutes les formes anti-linéaires continues sur E (voir [5], [3]). Une forme $\varphi : E \to \mathbb{C}$ est dite anti-linéaire si

$$(\varphi, \alpha x+\beta y) = \bar{\alpha}(\varphi, x)+\bar{\beta}(\varphi, y) \quad \text{pour tout} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad x, y \in E.$$

((φ, x) désigne la valeur de φ au point x). E^* est un espace vectoriel, qui muni de la norme $\|\varphi\|_{E^*} = \operatorname{Sup}_{\|x\|=1, x \in E} |(\varphi, x)|$ est un espace de Banach isométrique au dual fort E' de E, l'isométrie h de E' sur E^* étant donnée par $(h(x'), x) = \overline{(x', x)} (x \in E)$. Remarquons que pour $\varphi \in E^*$, $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ on a $(\varphi, \alpha x) = \bar{\alpha}(\varphi, x)$ mais $(\alpha\varphi, x) = \alpha(\varphi, x)$.

Soit maintenant E^{**} l'anti-dual de E^*, c'est-à-dire l'espace de toutes les formes anti-linéaires continues sur E^*. L'espace E^{**}, étant isométrique au bidual fort E'' de E, on voit que pour E réflexif l'injection canonique $\gamma : E \to E^{**}$, définie par $(\gamma(x), \varphi) = \overline{(\varphi, x)} (\varphi \in E^*)$, est surjective, donc une isométrie de E sur E^{**}.

4. **Démonstration du théorème.** Soit T^* l'adjoint de T, défini par

$$(T^*y, x) = (y, Tx) \quad \text{pour} \quad y \in X^{**}, \quad x \in X^*.$$

T^* est un opérateur linéaire borné dans X^{**} et sa norme $\|T^*\|$ est égale à $\|T\|_{X^*}$. Posons $Q = \gamma^{-1}T^*\gamma$, où γ est l'injection canonique de X sur X^{**}. Etant donné que γ est une isométrie, on obtient que Q est un opérateur linéaire borné dans X avec $\|Q\| = \|T^*\| = \|T\|_{X^*}$.

Posons maintenant $A = QT_0$, où T_0 est la restriction de T à X. Comme T_0 est borné dans X en vertu du Lemme 2, A est un opérateur linéaire borné dans X et sa norme satisfait

$$\|A\| \leq \|Q\| \cdot \|T_0\| = \|T\|_{X^*} \|T\|_X. \tag{4.1}$$

D'autre part on vérifie la relation

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle T_0 x, T_0 y \rangle \quad \text{pour tout} \quad x, y \in X. \tag{4.2}$$

De (4.2) il s'ensuit que $\|Ax\|_H^2 \leq \|A^2 x\|_H$ pour tout $x \in X$, $\|x\|_H = 1$. Compte tenu de cette dernière relation et de $\|T_0 x\|_H^2 = \langle Ax, x \rangle$ ($x \in X$), on a, d'après le Lemme 1 (appliqué à X avec les normes $\| \ \|_X$, $\| \ \|_H$):

$$\|T_0 x\|_H^2 \leq \|Ax\|_H \leq \|A\| \leq \|T\|_{X^*} \|T\|_X \quad \text{pour tout} \quad x \in X, \quad \|x\|_H = 1. \tag{4.3}$$

Par conséquent

$$\|Tx\|_H \leq (\|T\|_{X^*} \|T\|_X)^{1/2} \|x\|_H \quad \text{pour tout} \quad x \in X. \tag{4.4}$$

Cette relation-ci entraîne que $T(H) \subset H$ et montre, en même temps, que la restriction de T à H est bornée dans H avec $\|T\|_H \leq (\|T\|_{X^*} \|T\|_X)^{1/2}$. D'où le théorème.

Bibliographie

1. V. Istratescu et I. Istratescu, *On quasi-normalizable operators*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. XLVI, Fasc. 4 (1969), 345–347.

2. J. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. de l'I.H.E.S., Paris, No. 19, (1964), 5–68.

3. Ken-ichi, Miyazaki, *Some remarks on intermediate spaces*, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci. (15) **38** (1968), Review 3727.

4. J. I. Nieto, *On the essential spectrum of symmetrizable operators*, Math. Ann. **178** (1968), 145–153.

5. L. Schwartz, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés*, J. Analyse Math. **13** (1964), 115–256.

Université de Montréal,
Montréal, Québec