Canad. Math. Bull. Vol. **18** (4), 1975

APPROXIMATION POLYNOMIALE GENERALISEE DANS CERTAINS ESPACES SEMI-NORMES

PAR
MARIO LAVOIE

Dans cet article, nous nous intéressons à trouver des conditions suffisantes au problème d'approximation polynômiale généralisée dans certains espaces semi-normés. Notre résultat principal est basé sur un théorème d'unicité de Malliavin et sur la théorie de la représentation de Choquet.

Avant de l'énoncer, donnons quelques définitions et notations. Tout au long de ce texte nous noterons Λ une suite régulière de nombres positifs i.e. $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq h>0$ et nous définirons sa fonction caractéristique comme suit: $\lambda(r)=\sum_{\lambda<r} 2/\lambda$, pourvu que $r>\lambda_0$;$=0$, lorsque $0\leq r\leq\lambda_0$. Nous noterons $\mathscr{P}_\Lambda(X)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{x^\lambda:X\subseteq \mathbb{R}_+^*=]0,\infty[\to\mathbb{R};\, t\to t^\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ et $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ l'espace vectoriel des fonctions f continues sur X vérifiant

$$|f(t)|\leq C\Gamma_{\lambda,\lambda'}(t),\text{ pour tout } t\in X,$$

pour un $C>0$ et des λ, $\lambda'\in\Lambda$, avec $\Gamma_{\lambda,\lambda'}\ (t)=\max\{t^\lambda,\ t^{-\lambda'}\}$. Sur $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ nous considérerons une semi-norme croissante Π i.e. $|f|\leq|g|=>\Pi(f)\leq\Pi(g)$, pour tout $f,g\in\mathscr{C}_\Lambda(X)$. De plus, pour une suite (M_n) de nombres positifs, nous parlerons de sa fonction de trace, à savoir:

$$M(s)=\sup\{ns-\log M_n:n\in\mathbb{N}\}.$$

Enonçons maintenant notre théorème principal.

THEOREME A. *Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et X un sous-groupe localement compact de $\mathbb{R}_+^*$. Pour que $\mathscr{P}_\Lambda(X)$ soit dense dans $(\mathscr{C}_\Lambda(X),\Pi)$où Π est une semi-norme croissante sur $\mathscr{C}_\Lambda(X)$, il suffit que la condition $U(M_n,\lambda(r))$ soit satisfaite i.e. pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int^\infty M(\lambda(r)-a)\,dr/r^2=+\infty$, où λ est la fonction caractéristique de Λ et M est la fonction de trace de la suite (M_n), avec $M_n=\Pi(x^n)$, pour les $n\geq\lambda_0$ (le premier élément de Λ) et un nombre positif quelconque autrement.*

NOTE: Il est bien connu que les sous-groupes localement compacts de $\mathbb{R}_+^*$ sont $\{1\}$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\exp(bZ)$ pour tout $b\in\mathbb{R}_+^*$, ce qui nous donne pour des semi-normes particulières des théorèmes déjà prouvés par Fuch [8], Lavoie [10] et Malliavin [11], puisque dans tous ces cas, la semi-norme engendrée par la fonction poids est croissante et que $C_\Lambda(X)$ est dense dans l'espace pondéré.

Reçu par les rédacteurs le 25 février 1974; version revisée reçu le 2 janvier 1975.

Nous prouverons le théorème A en nous servant de la caractérisation du dual de $(\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)$. Donnons donc quelques propriétés de $\mathscr{C}_\Lambda(X)$. Disons d'abord qu'il est clair que $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ est un espace de Riesz (voir Choquet [4]) par rapport à l'ordre canonique et que tout $L \in (\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)$ est relativement borné, (voir Bourbaki [3]). On a de plus:

Propriété 1. *Si X est fermé de $\mathbb{R}_+^*$, $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ est un espace adapté de fonctions continues.*

Preuve. Il est clair que $\mathscr{C}_\Lambda(X)=\mathscr{C}_\Lambda^+(X)-\mathscr{C}_\Lambda^+(X)$ et que pour tout $x \in X$, il existe un $f \in C_\Lambda^+(X)$ tel que $f(x)>0$, puisque $\mathscr{P}_\Lambda^+(x)\subseteq\mathscr{C}_\Lambda^+(X)$. Il ne reste plus à montrer que chaque $g \in \mathscr{C}_\Lambda^+(X)$ est dominé par un $f \in \mathscr{C}_\Lambda^+(X)$. Pour ce faire, prenons un $g \in \mathscr{C}_\Lambda^+(X)$; à cause de la définition de $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ et parce que $\max\{\Gamma_{\lambda,\lambda'}, \Gamma_{\mu,\mu'}\}= \Gamma_{\max\{\lambda,\mu\},\max\{\lambda',\mu'\}}$, il existe un $a>0$ et un $\Gamma_{\lambda,\mu}$ vérifiant $g\leq a\Gamma_{\lambda,\mu}$. Comme Λ est une suite strictement croissante, on a $g\leq a\Gamma_{\lambda,\mu}\leq a\Gamma_{\lambda',\mu'}$ avec $\lambda'\geq\lambda$, $\mu'\geq u$. Pour $\varepsilon>0$ quelconque, considérons

$$K = \{x \in X : g(x) \geq \varepsilon a\Gamma_{\lambda',\mu'}(x)\} \subseteq \{x \in X : \Gamma_{\lambda,\mu}(x)/\Gamma_{\lambda',\mu'}(x) \geq \varepsilon\} = K_1$$

Comme $\Gamma_{\lambda,\mu}/\Gamma_{\lambda',\mu'} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+^*)$ et que X est un fermé de $\mathbb{R}_+^*$, K est un compact de X. Mais comme X est un localement compact dénombrable à l'infini, $K\subseteq O$ un ouvert relativement compact de X et la normalité de X entraîne l'existence d'un $h \in \mathscr{K}^+(X)$ (l'espace des fonctions positives continues à support compact) vérifiant $h=\sup\{g(x):x \in K\}$ sur K et $h=0$ sur $X-O$. On a donc que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $h \in \mathscr{K}^+(X)$ pour lequel $g\leq\varepsilon f+h$, où $f=a\Gamma_{\lambda',\mu'}$. $\square$

Remarque. Comme $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ est un espace adapté de fonctions continues, pourvu que X soit un fermé de $\mathbb{R}_+^*$, alors tout $L \in (\mathscr{C}_\Lambda(X)^*)^+$ est donné par une mesure de Radon positive μ (voir Choquet [5] p. 276); comme d'autre part, tout $L \in (\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)'$ est relativement bornée, elle se décompose donc en une différence d'éléments de $(\mathscr{C}_\Lambda(X)^*)^+$ et ainsi tout $L \in (\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)'$ est représentée par une mesure de Radon μ sur X et chaque $f \in \mathscr{C}_\Lambda(X)$ est μ-intégrable.

Avant de démontrer une première condition suffisante, rappelons les définitions des problèmes de Watson et de Mandelbrojt-Weiner.

Probleme de Watson. Pour une suite (M_n) de nombres positifs et pour une fonction $k:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, nous noterons $W(M_n, k(r))$ l'existence d'une fonction $g\neq0$, holomorphe dans le demi-plan $x>0$ qui vérifie

$$|g(z)| \leq M_n e^{-xk(r)},\ r = |z|,\ n = [x],\ z = x+iy.$$

Probleme de Mandelbrojt-Weiner. Pour une suite (M_n) de nombres positifs et pour Λ une suite régulière de nombres positifs, nous noterons $M-W(M_n, \Lambda)$ l'existence d'un $f\neq0$, holomorphe dans le demi-plan $x>0$ satisfaisant $f(\Lambda)=0$; $|f(z)|\leq M_n$, $n=[x]$, $z=x+iy$.

On sait (voir Malliavin [11] p. 183 et 207) les relations qui existent entre ces deux problèmes lorsque $k=\lambda$ la fonction caractéristique de Λ. En effet,

$$\text{non } W(M_n, \lambda(r)) \Leftrightarrow U(M_n, \lambda(r)) \Leftrightarrow \text{non } M-W(M_n, \Lambda);$$

ceci nous permet de remplacer dans l'un ou l'autre de ces problèmes la suite (M_n) par la suite $(\max\{M_n, M_{n+1}\})$ ou par la suite (M_{n+k}) ou de remplacer Λ par $\Lambda+\alpha$ sans perte de généralité.

THEOREME B. *Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et X un sous-groupe localement compact de $\mathbb{R}_+^*$. Si le problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$, avec $M_n=\Pi(x^n)$ pour les $n\geq\lambda_0$ le premier élément de Λ et n'importe lequel nombre positif pour les $0\leq n<\lambda_0$, n'admet comme seule solution que la fonction 0, alors $\mathscr{P}_\Lambda(X)$ est dense dans $(\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)$, où Π est une semi-norme croissante.*

Preuve. Etant donné un $L\in(\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)'$ tel que $L(p)=0$ pour tout $p\in\mathscr{C}_\Lambda(X)$, montrons que $L=0$. On sait par la remarque de la propriété 1 qu'il existe une mesure de Radon μ telle que chaque $f\in\mathscr{C}_\Lambda(X)$ est μ-intégrable et $L(f)=\mu(f)$. Considérons, pour $\mathscr{R}\!ez\geq\lambda_0$,

$$h(z)=\int_X t^x\cos(y\log t)\,d\mu(t)+i\int_X t^x\sin(y\log t)\,d\mu(t).$$

h est bien défini puisque les fonctions $t\to\sin(y\log t)$ ou $\cos(y\log t)$ appartiennent à $\mathscr{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur X, que la fonction $t\to t^x\in\mathscr{C}_\Lambda(X)$ et que clairement $\mathscr{C}_\Lambda(x)\cdot\mathscr{C}_b(X)\subseteq\mathscr{C}_\Lambda(X)$. De plus, h est holomorphe dans $\mathscr{R}\!ez>\lambda_0$, continue dans $\mathscr{R}\!ez\geq\lambda_0$ et vérifie

$$\begin{aligned}|h(z)| &\leq |L(t^x\cos(y\log t))|+|L(t^x\sin(y\log t))|\\ &\leq 2\,\|L\|_\Pi\,\Pi(t^x)\\ &\leq 2\,\|L\|_\Pi\,\Pi(\max\{t^n, t^{n+1}\}),\ \lambda_0\leq n=[x]\\ &\leq 4\,\|L\|_\Pi\max\{M_n, M_{n+1}\}.\end{aligned}$$

Notons n_0 le plus petit entier plus grand ou égal à λ_0, alors $h_0(z)=h(z+n_0)$ est une solutions au problème de Mandelbrojt-Wiener $M-W(N_n, \Lambda-n_0)$, où $N_n=\max\{M_{n+n_0}, M_{n+n_0+1}\}$, qui est équivalent au problème de Watson $W(M_n, \lambda(r))$, avec $M_n=\Pi(t^n)$, $n\geq n_0$ et M_n quelconque pour $0\leq n<n_0$. Mais comme ce dernier problème n'a par hypothèse, qu'une solution identiquement nulle, $h=0$. Donc

$$0=h(\lambda_0+iy)=\int_X t^{\lambda_0+iy}\,d\mu(t)=\int_{\log X} e^{i\tau y}e^{\lambda_0\tau}\,d\mu(e^\tau)$$

et comme $\log X$ est un sous-groupe localement compact de $\mathbb{R}$, il est fermé et tout caractère continue de $\log X$ est prolongeable en un caractère continue de $\mathbb{R}$ (voir Rudin [14] page 36).
On a alors

$$\hat{\nu}(\gamma)=\int_{\log X}\gamma(\tau)\,d\nu(\tau)=0,\ \text{pour tout }\gamma\in\Gamma(\log X)$$

i.e. pour tout caractère continue γ du groupe $\log X$, avec $d\nu(\tau)=\exp(\lambda_0\tau)\,d\mu(e^\tau)$; d'où $\nu=0$, par la théorème de la dualité et par le théorème de l'unicité des transformées de Fourier-Stieltjes (voir Rudin [14] page 29). Ceci entraîne que $\mu=0$ i.e. $L=0$ et alors $\mathscr{P}_\Lambda(X)$ est dense dans $(\mathscr{C}_\Lambda(X), \Pi)$. $\square$

Remarque. Le théorème A est une conséquence du théorème B, puisque la condition $U(M_n, \lambda(r))$ est équivalente à imposer au problème $W(M_n, \lambda(r))$ la fonction zéro comme seule solution (voir Malliavin [11] page 207). Montrons maintenant comment notre théorème généralise des théorèmes de Fuchs et Malliavin.

Définition. Nous dirons que la fonction $w:X\to\mathbb{R}_+^*$ est un Λ-poids au sens $\mathscr{L}^p$ où X est un sous-espace localement compact de $\mathbb{R}_+^*$ si elle est mesurable et si pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\Gamma_{\lambda,\lambda'} \in \mathscr{L}_w^p(X, \mathscr{L}, \mu)=\mathscr{L}^p(X, \mathscr{L}, w^p\,d\mu)$ (resp. $\mathscr{C}_w(X)=\{f\in\mathscr{C}(X)$: $fw\in\mathscr{C}_0(X)\}$. Nous noterons $\|f\|_{p,w}=\|fw\|_p$.

Corollaire 1. *Soient Λ une suite régulière de nombres positifs, X un sous-groupe localement compact de $\mathbb{R}_+^*$ et pour p fini $(X, \mathscr{L}, \mu)$ l'espace mesuré formé de la tribu de Lebesgue et d'une mesure borélienne régulière (complète). Si $w:X\to\mathbb{R}_+^*$ est un Λ-poids au sens $\mathscr{L}^p$ et si la condition $U(M_n, \lambda(r))$ est vérifiée avec $\Pi=\|\cdot\|_{p,w}$, la famille $\{x^\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ est totale et topologiquement dépendante dans $\mathscr{C}_w(X)$ (resp. $\mathscr{L}_w^p(X, \mathscr{L}, \mu)$).*

Preuve.. A cause du théorème A, il suffit de montrer que $\mathscr{C}_\Lambda(X)$ est dense dans $\mathscr{C}_w(X)$ (resp. $\mathscr{L}_w^p(X, \mathscr{L}, \mu)$) par rapport à $\|\cdot\|_{p,w}$. Pour p fini on a $\mathscr{L}_w^p(X, \mathscr{L}, \mu)\supseteq\mathscr{C}_\Lambda(X)\supseteq\mathscr{K}(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact et comme la mesure $w^p\,d\mu$ est complète et que w^p est localement intégrable on a que $\mathscr{K}(X)$ est dense dans $\mathscr{L}_w^p(X, \mathscr{L}, \mu)$, par rapport à $\|\cdot\|_{p,w}$. Pour p infini, tout $f\in\mathscr{C}_w(X)$ est tel que $f\cdot w\in\mathscr{C}_0(X)$ et il existe $g\in\mathscr{K}(X)$ pour lequel $\|f\cdot w-g\|_\infty=\|f-g/w\|_{\infty,w}$ est aussi petit que l'on veut. Comme $g/w\in\mathscr{K}(X)\subseteq\mathscr{C}_\Lambda(X)$, $f\in\overline{\mathscr{C}_\Lambda(X)}$ par rapport à $\|\cdot\|_{\infty,w}$. $\square$

Corollaire 2. *Soient Λ une suite régulière de nombres positifs et $(\mathbb{R}_+^*, \mathscr{L}, m)$ l'espace mesuré de Legesque. Si $F:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ est une fonction telle que $1/F$ est un Λ-poids au sens $\mathscr{L}^p$ et si la condition de Malliavin $M(F, \lambda(r))$ est satisfaite i.e. pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int^\infty \Phi(\lambda(r)-a)\,dr/r^2=+\infty$, où Φ est la régularisée convexe de la fonction* $\log\circ F\circ\exp$, *alors la famille $\{x^\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ est totale et topologiquement linéairement dépendante dans $\mathscr{C}_{1/F}(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathscr{L}_{1/F}^p(\mathbb{R}_+^*)$).*

Preuve. Ceci découle du corollaite 1 et du fait que dans ce cas précis la condition $M(F, \lambda(r))$ entraîne la condition $U(M_n, \lambda(r))$. En effet on démontre, qu'il existe un $a>0$ pour lequel

$$M(s)\geq\Phi(s)-3s-\log 2,\ s\geq a,$$

en se servant l'inégalité

$$M_n \leq \exp \psi(n)+\exp \psi(n+2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où $\psi(t)=\sup\{st-\log F(e^s):s \in \mathbb{R}\}$. $\square$

REMARQUE. Le corollaire 2 correspond aux parties suffisantes du théorème 8.3 de Malliavin [11] pour p infini et du théorème 4.2 de Lavoie [10] pour p fini. C'est donc une généralisation de la partie suffisante du théorème principal de Fuchs [8].

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III, chap. 3 et 4, A.S.I., Hermann, Paris (1960).

2. N. Bourbaki, *Topologie générale*, livre III, chap. 5–8, A.S.I., Hermann, Paris (1963).

3. N. Bourbaki, *Intégration*, livre VI, chap. 1–4, A.S.I.. Hermann, Paris (1965).

4. G. Choquet, *Lectures on analysis*, volume I, Integration and topological vector spaces, W. A. Benjamin, New York (1969).

5. G. Choquet, *Lectures on analysis*, volume II, Representation theory, W. A. Benjamin, New York (1969).

6. J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, tome II, Gauthier-Villars, Paris (1968).

7. J. P. Ferrier, *Approximation pondérée*, Séminaire d'analyse moderne, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (1972).

8. W. H. Fuchs, *On the closure of* $(e^{-t}t^{\lambda})$, Proc. Cambridge Phil. Soc., tome **42** (1946) p. 91–105.

9. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York (1965).

10. M. Lavoie, *Approximation polynômiale pondérée généralisée*, Thèse de la faculté des sciences pures, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (1972).

11. P. Malliavin, *Sur quelques procédés d'extrapolation*, Acta math., tome **93** (1955) p. 179–255,

12. S. Mandelbrojt, *Sur les fonctions convexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, tome **209** (1939), p. 977.

13. S. Mandelbrojt, *Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions*, The Rice Institute pamphlet, tome **29**, no. 1, (1942) p. 1–142.

14. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Publishers, New York (1967).

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À RIMOUSKI
RIMOUSKI, QUÉBEC, CANADA