

# SUR L'EXISTENCE DES MESURES DES CONDENSATEURS

MASANORI KISHI

dédié au Professeur K. NOSHIRO pour fêter ses soixante ans

## 1. Introduction

Dans l'espace de Dirichlet il existe des mesures des condensateurs<sup>1)</sup> et inversement un certain espace de fonctions est l'espace de Dirichlet s'il y existe des mesures des condensateurs<sup>2)</sup>. Dans ce mémoire nous considérons le problème d'existence des mesures des condensateurs par rapport à un noyau positif et continu au sens large, symétrique ou non.

Soit  $G$  un noyau sur un espace localement compact séparé  $X$  tel que  $G(x, y)$  soit continue au sens large sur l'espace produit  $X \times X$  à valeurs dans  $(0, \infty)$ , où la valeur  $\infty$  est admise au plus aux points diagonaux. Le potentiel  $G\sigma(x)$  d'une mesure  $\sigma$  est la fonction définie par l'intégrale

$$\int G(x, y) d\sigma(y)$$

en chaque point où elle n'est pas ambiguë. Quand  $\sigma$  est positive, le potentiel est défini partout et semi-continu inférieurement. L'énergie de  $\sigma$  est l'intégrale

$$\iint G(x, y) d\sigma(x) d\sigma(y).$$

Nous supposons que tous les sous-ensembles ouverts non-vides de  $X$  soient de capacité positive, c'est-à-dire, qu'ils contiennent un ensemble compact qui porte une mesure positive  $\neq 0$  d'énergie finie.

La *mesure du condensateur*  $\sigma = \mu_1 - \mu_0$  d'une paire ordonnée  $\langle K_1, K_0 \rangle$  des ensembles compacts disjoints est par définition la mesure telle que  $\mu_i$  soit une mesure positive portée par  $K_i$  et le potentiel  $G\sigma(x)$  soit égal à  $i$  à p.p.p.<sup>3)</sup> sur  $K_i$  ( $i=0, 1$  respectivement) et  $0 \leq G\sigma(x) \leq 1$  dans  $X$ .

---

Received May 4, 1966.

1) Cf. Deny [1].

2) Cf. Itô [4].

3) Cela signifie que l'ensemble exceptionnel est de capacité nulle.

## 2. Remarques introductives

D'abord en supposant que  $G$  et le noyau adjoint<sup>4)</sup>  $G^*$  satisfassent au principe de continuité<sup>5)</sup> nous montrerons: *si les mesures des condensateurs existent pour toutes les paires ordonnées d'ensembles compacts disjoints,  $G$  satisfait au principe complet du maximum<sup>6)</sup>. Puisque  $G$  satisfait au principe d'équilibre<sup>7)</sup>, il satisfait au principe du maximum<sup>8)</sup>, donc il suffit de montrer que  $G^*$  satisfait au principe de domination<sup>9)</sup>. Pour cela il suffit de montrer que l'inégalité  $G^*\mu(x) \leq G^*\varepsilon_{x_0}(x)$  sur le support  $S\mu$  implique la même inégalité dans  $X^{10)}$ , où  $\mu$  est une mesure positive d'énergie fine à support compact et  $\varepsilon_{x_0}$  est une mesure-unité de support ponctuel  $x_0$  extérieur à  $S\mu$ . S'il y avait un point  $x_1$  tel que  $G^*\mu(x_1) > G^*\varepsilon_{x_0}(x_1)$ , nous pourrions trouver un voisinage compact  $K$  de  $x_1$  dans lequel  $G^*\mu(x) > G^*\varepsilon_{x_0}(x)$ . Soit  $\sigma = \nu_1 - \nu_0$  la mesure du condensateur de la paire  $\langle K, S\mu \rangle$ . Alors*

$$0 = \int G\sigma \, d\mu = \int G^*\mu \, d\nu_1 - \int G^*\mu \, d\nu_0 > \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\nu_1 - \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\nu_0 = G\sigma(x_0) \geq 0.$$

Cette contradiction montre que  $G^*$  satisfait au principe de domination.

En outre nous pouvons montrer que *notre hypothèse sur l'existence des mesures des condensateurs implique le principe d'unicité<sup>11)</sup> si  $G$  est régulier<sup>12)</sup>. En effet, s'il ne satisfaisait pas au principe d'unicité, il serait dégénéré à cause du principe*

4) Le noyau adjoint  $G^*$  se définit par  $G^*(x, y) = G(y, x)$ . Les potentiels par rapport à  $G^*$  se nomment les potentiels adjoints.

5) Cela signifie que si le potentiel d'une mesure positive  $\lambda$  à support compact est fini continu comme la fonction sur le support  $S\lambda$ , il est fini continu partout dans  $X$ .

6) L'inégalité  $G\mu \leq G\nu + a$  sur  $S\mu$  implique la même inégalité dans  $X$ , où  $a \geq 0$ ,  $\mu$  est une mesure positive à support compact et d'énergie finie et  $\nu$  est une mesure positive.

7) Pour tout ensemble compact  $K$  il existe une mesure positive  $\mu$ , supportée par  $K$ , telle que  $G\mu = 1$  à p.p.p. sur  $K$  et  $G\mu \leq 1$  partout. Cette mesure se nomme la mesure d'équilibre de  $K$ . Evidemment  $G$  satisfait au principe d'équilibre sous notre hypothèse.

8) L'inégalité  $G\mu \leq 1$  sur  $S\mu$  implique la même inégalité dans  $X$ , où  $\mu$  est une mesure positive à support compact. Le principe d'équilibre implique le principe du maximum, si  $G$  satisfait au principe de continuité, voir [5].

9) L'inégalité  $G\mu \leq G\nu$  sur  $S\mu$  implique la même inégalité dans  $X$ , où  $\mu$  et  $\nu$  sont les mêmes mesures dans la note 6). Les principes du maximum et de domination impliquent le principe complet du maximum si  $G^*$  satisfait au principe de continuité, voir [5].

10) Cf. [5].

11) Si  $G\mu = G\nu$  à p.p.p. dans  $X$ ,  $\mu = \nu$ .

12) Pour tout ensemble compact  $K$  et pour tout voisinage  $\omega$  de  $K$  il existe un ensemble  $K'$  tel que  $K \subset K' \subset \omega$  et que l'inégalité  $G\mu \geq h$  à p.p.p. sur  $K'$  implique la même inégalité sur  $K'$  partout, où  $\mu$  est une mesure positive à support compact et  $h$  est une fonction finie continue sur  $K'$ .

de domination<sup>13)</sup>. Donc il existerait des points distincts  $x_1$  et  $x_2$  tels que

$$\frac{G(x_1, x_1)}{G(x_2, x_1)} = \frac{G(x_1, x_2)}{G(x_2, x_2)}.$$

Alors il n'y aurait pas de mesure du condensateur de  $\langle\{x_1\}, \{x_2\}\rangle$ .

### 3. L'opération $\varphi$ du balayage itéré

Maintenant nous supposons que  $G$  satisfait au principe complet du maximum et au principe d'unicité et que le noyau adjoint  $G^*$  satisfait au principe de continuité, et nous montrerons l'existence des mesures des condensateurs. Evidemment c'est le problème suivant: étant donnés deux ensembles compacts disjoints  $K$  et  $K'$ , chercher la mesure positive  $\mu$  supportée par  $K$  telle que

$$G\mu(x) - G\mu'(x) = 1$$

à p.p.p. sur  $K$ , où  $\mu'$  est la mesure balayée<sup>14)</sup> de  $\mu$  sur  $K'$ . Nous donnerons deux méthodes pour montrer l'existence: la première par approximation et la deuxième par variation. Dans cette section nous faisons des préparatifs.

Soit  $\mu$  une mesure positive portée par  $K$ . Par notre hypothèse nous pouvons considérer l'opération suivante  $\varphi: \mu \rightarrow \varphi(\mu; K, K')$ , une mesure positive portée par  $K$ . Il existe une mesure balayée  $\mu'$  de  $\mu$  sur  $K'$  et ensuite une mesure balayée de  $\mu'$  sur  $K$ . Cette mesure balayée itérativement est par définition  $\varphi(\mu; K, K')$  ou simplement  $\varphi(\mu)$ . Elle est uniquement déterminée.

Les propriétés élémentaires suivantes de  $\varphi$  sont aisément vérifiées.

- (i)  $G\varphi(\mu) \leq G\mu' \leq G\mu$  partout dans  $X$ .
- (ii)  $\varphi(\mu_1 + \mu_2; K, K') = \varphi(\mu_1; K, K') + \varphi(\mu_2; K, K')$ .
- (iii) Si  $G\mu_1 \leq G\mu_2$  dans  $X$ ,  $G\varphi(\mu_1; K, K') \leq G\varphi(\mu_2; K, K')$  dans  $X$ .
- (iii)' Si  $G\varphi(\mu; K, K') \leq pG\mu$  dans  $X$ ,  $G\varphi^k(\mu; K, K') \leq pG\varphi^{k-1}(\mu; K, K')$  dans  $X$  ( $k=2, 3, \dots$ ), où  $\varphi^k(\mu; K, K') = \varphi(\varphi^{k-1}(\mu; K, K'); K, K')$ .
- (iv) Si  $\mu$  reste invariable par rapport à  $\varphi$ ,  $\mu=0$ .
- (v)  $\varphi$  est vaguement continue. Pour cela il suffit de noter la continuité du balayage sur  $K'$ : si un filtre  $\{\mu_\alpha\}$  converge vaguement vers  $\mu$ , le filtre  $\{\mu'_\alpha\}$  des mesures balayées sur  $K'$  converge vaguement vers  $\mu'$ . En effet, si  $\{\mu'_\alpha\}$  converge vaguement vers  $\nu$ , on a, pour toutes les mesures  $\lambda$ , portées par  $K'$ ,

<sup>13)</sup> Cf. [6].

<sup>14)</sup> C'est la mesure positive, portée par  $K'$ , dont le potentiel  $G\mu' \leq G\mu$  dans  $X$  et  $G\mu' = G\mu$  à p.p.p. sur  $K'$ . Pour l'existence des mesures balayées, voir [5].

dont les potentiels adjoints sont finis continus,

$$\begin{aligned} \int G\nu \, d\lambda &= \int G^*\lambda \, d\nu = \lim \int G^*\lambda \, d\mu'_\alpha = \lim \int G\mu'_\alpha \, d\lambda = \lim \int G\mu_\alpha \, d\lambda \\ &= \lim \int G^*\lambda \, d\mu_\alpha = \int G^*\lambda \, d\mu = \int G\mu \, d\lambda. \end{aligned}$$

Donc  $G\nu = G\mu'$  à p.p.p. sur  $K'$  et par le principe d'unicité  $\nu = \mu'$ .

(vi) La suite  $\{\varphi^k(\mu; K, K')\}$  converge vaguement vers 0. Nous ne donnons pas ici la démonstration de cette propriété; nous démontrerons le résultat plus fort: la série  $\sum \varphi^k(\mu; K, K')$  converge vaguement.

(vii) Si  $G\mu_1 \leq G\mu_2$  partout dans  $X$  et si  $\sum \varphi^k(\mu_2; K, K')$  converge, alors  $\sum \varphi^k(\mu_1; K, K')$  converge aussi.

(viii) Soient  $a_k > 0$  et  $\mu_1 = \sum a_k \varphi^k(\mu; K, K')$  une mesure positive. Alors le support  $S\mu_1$  contient  $S\varphi(\mu_1; K, K')$ . En effet, par (ii) et (v) on a  $\varphi(\mu_1) = \sum a_k \varphi^{k+1}(\mu)$  donc  $S\varphi(\mu_1) \subset S\mu_1$ .

(ix) Si  $\mu$  est une mesure d'énergie finie, il existe un nombre positif  $p < 1$  tel que  $G\varphi(\mu; K, K') \leq pG\mu$  sur  $S\mu$ . Pour cela il suffit de démontrer que  $G\mu' < G\mu$  sur  $S\mu$ . Supposons qu'il existe un point  $x$  tel que  $G\mu(x) = G\mu'(x)$  et désignons par  $\varepsilon_x^*$  la mesure balayée de  $\varepsilon_x$  sur  $K'$  par rapport au noyau adjoint  $G^*$ . Alors

$$\begin{aligned} 0 &= G\mu(x) - G\mu'(x) = \int G^*\varepsilon_x \, d\mu - \int G^*\varepsilon_x \, d\mu' \geq \int G^*\varepsilon_x^* \, d\mu - \int G^*\varepsilon_x^* \, d\mu' \\ &= \int (G\mu - G\mu') \, d\varepsilon_x^* = 0. \end{aligned}$$

Donc  $G^*\varepsilon_x = G^*\varepsilon_x^*$   $\mu$ -p.p. et par conséquent  $G^*\varepsilon_x = G^*\varepsilon_x^*$  sur  $S\mu$ . Alors si  $x$  était un point de  $S\mu$ , on aurait  $G^*\varepsilon_x(x) = G^*\varepsilon_x^*(x)$ . Ce serait absurde parce que l'on obtiendrait l'égalité  $G\varepsilon_x = G\varepsilon_x'$  partout dans  $X$ , où  $\varepsilon_x'$  est la mesure balayée sur  $K'$  par rapport à  $G$ . En effet,

$$\begin{aligned} G\varepsilon_x'(x) &= \int G^*\varepsilon_x \, d\varepsilon_x' = \int G^*\varepsilon_x^* \, d\varepsilon_x' = \int G\varepsilon_x' \, d\varepsilon_x^* = \int G\varepsilon_x \, d\varepsilon_x^* = G^*\varepsilon_x^*(x) \\ &= G^*\varepsilon_x(x) = G\varepsilon_x(x). \end{aligned}$$

Et par le principe de domination on aurait  $G\varepsilon_x' = G\varepsilon_x$  partout.

(x) Si  $\mu$  est une mesure d'énergie finie, la série  $\sum \varphi^k(\mu; K, K')$  converge. Prenons les nombres  $a_0 = 1$  et  $a_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) tels que  $\mu_1 = \sum a_k \varphi^k(\mu)$  soit une mesure d'énergie finie. Alors par (ix) il existe un nombre positif  $p < 1$  tel que  $G\varphi(\mu_1) \leq$

$pG\mu_1$  sur  $S\mu_1$ , donc par (viii) on a la même inégalité sur  $S\varphi(\mu_1)$ . En conséquence, la série  $\sum\varphi^k(\mu_1)$  et donc la série  $\sum\varphi^k(\mu)$  convergent.

**4. Démonstration de l'existence par approximation**

Ici nous donnons une démonstration de l'existence des mesures des condensateurs par la méthode d'approximation, en supposant que le noyau  $G$  satisfasse au principe complet du maximum et au principe d'unicité et que le noyau adjoint  $G^*$  satisfasse au principe de continuité.

Soient  $K_0$  et  $K_1$  deux ensembles compacts disjoints. D'abord nous prenons la mesure d'équilibre  $\mu$  de  $K_1$  et ensuite nous posons pour tout  $n$

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \{ \varphi^k(\mu; K_1, K_0) - \varphi^k(\mu; K_1, K_0)' \}$$

où  $\varphi^k(\mu; K_1, K_0)'$  est la mesure balayée de  $\varphi^k(\mu; K_1, K_0)$  sur  $K_0$ . Nous vérifions aisément que le potentiel  $G\sigma_n$  est égal à  $1 - G\varphi^n(\mu; K_1, K_0)$  à p.p.p. sur  $K_1$  et à 0 à p.p.p. sur  $K_0$  et  $0 \leq G\sigma_n \leq 1$  partout. Par la propriété (x)  $\{\sigma_n\}$  converge vaguement vers  $\sigma = \mu_1 - \mu_0$ , où  $\mu_1 = \sum\varphi^k(\mu; K_1, K_0)$ ,  $\mu_0 = \sum\varphi^k(\mu; K_1, K_0)'$ , et par conséquent  $G\sigma$  est égal à p.p.p. à 1 sur  $K_1$  et à 0 sur  $K_0$ . Evidemment  $0 \leq G\sigma \leq 1$  partout. Donc  $\sigma$  est la mesure du condensateur de  $\langle K_1, K_0 \rangle$ , qui est déterminée de façon unique à cause du principe d'unicité. Alors nous avons:

*THÉORÈME. Si  $G$  satisfait au principe complet du maximum et au principe d'unicité et si le noyau adjoint  $G^*$  satisfait au principe de continuité, il existe une unique mesure du condensateur pour toute paire ordonnée des ensembles compacts disjoints.*

**5. Démonstration par variation.**

Ici nous donnons une démonstration par la méthode de variation. D'abord nous considérons le cas particulier où  $G$  est symétrique. Nous supposons encore que  $G$  satisfasse au principe complet du maximum et au principe d'unicité. Soient  $K_1$  et  $K_0$  deux ensembles compacts disjoints. Nous désignons encore par  $\mu'$  la mesure balayée de  $\mu$  sur  $K_0$ . Considérons la variation

$$v(\mu) = \int (G\mu - G\mu') d\mu$$

parmi les mesures positives dont les masses totales sont 1 et dont les supports sont contenus dans  $K_1$ . Du fait que l'application  $\mu \rightarrow \mu'$  est continue vaguement on déduit l'existence de la mesure minimale  $\mu_0: v(\mu_0) \leq v(\mu)$  pour toutes les mesures  $\mu$  susdites. Cette mesure minimale  $\mu_0$  possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} G\mu_0 &\geq G\mu'_0 + a && \text{à p.p.p. sur } K_1 \\ G\mu_0 &\leq G\mu'_0 + a && \text{sur } S\mu_0. \end{aligned}$$

où  $a = v(\mu_0)$ . Donc par le principe complet du maximum et le principe d'unicité on a  $G\mu_0 \leq G\mu'_0 + a$  partout dans  $X$  et  $a > 0$ . Cela prouve l'existence de la mesure du condensateur.

La variation précédente doit être modifiée dans le cas non-symétrique. Nous désignons par  $\mathcal{M}^1$  l'ensemble des mesures positives de masses totales 1 et portées par  $K_1$ , et par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des mesures positives, portées par  $K_1$ , dont les potentiels adjoints sont finis continus. Pour démontrer l'existence de la mesure du condensateur nous pouvons supposer que  $K_1$  ne soit pas de capacité nulle, et donc  $\mathcal{E} \neq \{0\}$ . Posons

$$v(\mu, \lambda) = \int (G\mu - G\mu') d\lambda$$

pour  $\mu, \lambda \in \mathcal{M}^1$ , et définissons l'application  $\Phi$  de  $\mathcal{M}^1$  dans  $2^{\mathcal{M}^1}$  comme suit:

$$\mathcal{M}^1 \ni \mu \longrightarrow \Phi(\mu) = \{\nu \in \mathcal{M}^1; v(\mu, \nu) \leq \inf_{\lambda \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{E}} v(\mu, \lambda)\}.$$

L'ensemble  $\Phi(\mu)$  est non-vide et convexe. L'application  $\Phi$  est fermée au sens suivant: si des filtres  $\{\mu_\alpha\}$  et  $\{\nu_\alpha\}$  de  $\mathcal{M}^1$  convergent vaguement vers  $\mu$  et  $\nu$  respectivement et si  $\nu_\alpha \in \Phi(\mu_\alpha)$ , alors  $\nu \in \Phi(\mu)$ . En effet, pour toute  $\lambda \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned} v(\mu, \nu) &\leq \liminf \int (G\mu_\alpha - G\mu'_\alpha) d\nu_\alpha \\ &\leq \liminf \int (G\mu_\alpha - G\mu'_\alpha) d\lambda \\ &= \liminf \left\{ \int G^*\lambda d\mu_\alpha - \int G^*\lambda d\mu'_\alpha \right\} \\ &= \int G^*\lambda d\mu - \int G^*\lambda d\mu' = v(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent par le théorème de point fixe de Glicksberg-Fan<sup>15)</sup> nous avons la mesure  $\mu_0$  telle que  $\mu_0 \in \Phi(\mu_0)$ , c'est-à-dire,

$$v(\mu_0, \mu_0) \leq v(\mu_0, \lambda)$$

pour toutes les mesures  $\lambda \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{E}$ . Par le principe d'unicité,  $a = v(\mu_0, \mu_0) > 0$ .

Donc en posant  $\nu = \frac{1}{a}\mu_0$ , nous avons

<sup>15)</sup> Cf. [2, 3].

$$\int (G\nu - G\nu') d\lambda \geq 1$$

pour toutes les mesures  $\lambda \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{E}$ , d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} G\nu - G\nu' &\geq 1 && \text{à p.p.p. sur } K_1 \\ G\nu - G\nu' &\leq 1 && \text{sur } S\nu. \end{aligned}$$

Cela prouve que la mesure  $\sigma = \nu - \nu'$  est la mesure du condensateur de  $\langle K_1, K_0 \rangle$ .

Durier a démontré indépendamment l'existence des mesures des condensateurs utilisant la méthode analogue de variation (cf. Sém. Théorie du potentiel, 10<sup>e</sup> année (1966)).

## 6. Remarques

(i) L'existence de la mesure du condensateur dans le cas où  $K_0$  est fermé et non-compact est délicate. On la prouve si l'on suppose en outre la possibilité du balayage sur  $K_0$  et la continuité du balayage.

(ii) Si  $G$  satisfait au principe de domination et au principe d'unicité et  $G^*$  satisfait au principe de continuité, on a, pour toute paire des ensembles compacts disjoints  $\langle K_1, K_0 \rangle$  et pour toute mesure positive  $\nu$  d'énergie finie, une mesure  $\sigma = \mu_1 - \mu_0$  telle que  $\mu_i$  soit la mesure positive portée par  $K_i$ , et le potentiel  $G\sigma = G\nu$  à p.p.p. sur  $K_1$  et  $G\sigma = 0$  à p.p.p. sur  $K_0$  et  $0 \leq G\sigma \leq G\nu$  partout. La réciproque est vraie si  $G$  et  $G^*$  satisfont au principe de continuité et  $G$  est régulier.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Deny: Sur les espaces de Dirichlet, Sém. Théorie du potentiel, 1<sup>ère</sup> année (1957), no. 5, 14p.
- [2] K. Fan: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear space, Proc. Nat. Sci. U.S.A., **38** (1952), 121–126.
- [3] I.L. Glicksberg: A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 170–174.
- [4] M. Itô: Condensers principle and the unit contraction, Nagoya Math. J., **30** (1967), 8–28.
- [5] M. Kishi: Maximum principles in the potential theory, ce journal, **23** (1963), 165–187.
- [6] " : On the uniqueness of balayaged mesures, Proc. Japan Acad., **39** (1963), 749–752.

*Institut de mathématiques, Université de Nagoya et Centre National de la Recherche Scientifique (Paris)*