

**L'ALGÈBRE ARABE**  
**DANS LES TEXTES HÉBRAÏQUES (I).\***  
**UN OUVRAGE INÉDIT D'ISAAC BEN SALOMON**  
**AL-AHDAB (XIV<sup>e</sup> SIÈCLE)**

TONY LÉVY

Nous ne connaissons, à l'heure actuelle, aucune version hébraïque du célèbre ouvrage d'al-Khwārizmī.<sup>1</sup> Jusqu'à une époque récente, on n'avait pas non plus identifié de textes hébreux exposant les principes et les techniques de l'algèbre arabe – quel qu'en fût le niveau – avant les compositions de Simon Moṭoṭ et de Mordekhay Finzi, en Italie, dans la deuxième moitié du xv<sup>e</sup> siècle. Fallait-il alors considérer que l'algèbre arabe avait été ignorée par les premiers traducteurs, qu'elle avait été absente du grand mouvement d'acculturation des mathématiques arabes en hébreu aux XIII<sup>e</sup> et XIV<sup>e</sup> siècles? Les témoignages présentés ici indiquent qu'il n'en est rien. Même si nous ne sommes pas en mesure de faire état d'une "tradition algébrique en hébreu", c'est-à-dire d'un

\* Nous publions dans ce numéro la première partie d'une étude d'ensemble consacrée aux traces de l'algèbre arabe dans la littérature mathématique hébraïque; elle concerne plus spécifiquement les XII<sup>e</sup>-XIV<sup>e</sup> siècles. Dans la deuxième partie, à paraître dans une prochaine livraison de la revue, nous analyserons le témoignage des textes hébraïques d'algèbre attestés en Italie aux xv<sup>e</sup> et xvi<sup>e</sup> siècles.

<sup>1</sup> On doit, toutefois, tempérer le caractère péremptoire de cette assertion. Nous avons pu identifier dans un manuscrit arithmétique, une adaptation hébraïque de la première partie de l'ouvrage d'al-Khwārizmī, soit l'exposé des six équations canoniques, accompagnées de leur procédure de résolution (Genève, Bibliothèque Publique et Universitaire, MS heb. 10, fols. 2a-5b). L'extrait traduit, qui ne cite pas le nom du savant arabe ni l'expression "algèbre", suit fidèlement la structure du texte arabe dont il reproduit (à une exception près) les exemples numériques; il s'arrête avant les démonstrations géométriques. S'agit-il d'une traduction, faite directement à partir du texte arabe d'al-Khwārizmī, ou bien d'une adaptation de ce texte, issue d'une présentation des six équations canoniques, comme on en lit dans de nombreux ouvrages d'arithmétique arabe (*ilm al-ḥisāb*)? Il est difficile de trancher. Il n'est pas impossible que ce fragment d'algèbre en hébreu soit contemporain d'Ibn Ezra (voire de sa plume), donc aussi contemporain des toutes premières occurrences de l'algèbre arabe en latin, vers le milieu du XII<sup>e</sup> siècle. Nos premières conclusions sont exposées dans T. Lévy, "A newly-discovered partial Hebrew translation of al-Khwārizmī's *Algebra*", *Aleph*, 2 (2002): 225-34.

intérêt continu et réactivé pour les concepts et les techniques de l'algèbre, nous pouvons affirmer que l'algèbre arabe n'est pas restée inconnue des savants juifs hébréophones: en attestent des sources inédites, aussi bien que des textes connus mais peu ou mal étudiés. Dans cette étude, nous présentons un tableau d'ensemble de ces témoignages, mettant l'accent sur quelques résultats inédits.

Deux périodes peuvent être distinguées:

- entre XII<sup>e</sup> et XIV<sup>e</sup> siècles, les traditions mathématiques arabes sont les sources directement exploitées en hébreu. Au cours de cette période, on voit apparaître des compositions, peu nombreuses mais significatives, qui témoignent de la diffusion de savoirs algébriques arabes au sein du monde savant hébréophone, en Espagne, en Italie, en Provence, en Sicile.

- aux XV<sup>e</sup> et XVI<sup>e</sup> siècles en Italie, le recours à des sources vernaculaires ou latines est fréquent. Ce phénomène n'est pas indépendant de la floraison d'ouvrages pratiques d'arithmétique "marchande" (les "traités d'abaque"), incluant souvent les règles du calcul de l'algèbre. On relève toutefois des circuits de transmission spécifiques au monde juif, qui ont leur source en Espagne chrétienne.

En marge de l'analyse textuelle, signalons un phénomène relevant de la culture scientifique, en un sens plus large: l'expression "algèbre et *muqābala*" n'est pas inconnue, en hébreu, à cette époque. Elle apparaît dans des ouvrages traitant de la classification des sciences; elle y figure alors généralement dans la liste des "procédés ingénieux" (en arabe *ḥiyal*; en hébreu *taḥabulot*) liés à la science du nombre.<sup>2</sup> Le plus célèbre de ces ouvrages, et le plus connu en hébreu, est *Le recensement des sciences* (*Iḥṣā' al-'ulūm*) d'al-Fārābī. Traduit en hébreu par Shem Ṭov ibn Falaqera (vers 1250), puis par Qalonymos ben Qalonymos d'Arles (1314), le texte farabien cite au rang des "procédés ingénieux numériques (*ḥiyal 'adadiyya*)", lesquels sont nombreux, "la science (*'ilm*) qui est connue de nos contemporains comme *al-jabr*

<sup>2</sup> H.A. Wolfson, "The classification of sciences in mediaeval Jewish philosophy", *Hebrew Union College Jubilee Volume*, III (1926): 203-315 (= *id.*, *Studies in the History of Philosophy and Religion*, vol. I, ed. by I. Twersky and G.H. Williams [Cambridge, Mass., 1973], pp. 493-545); voir pp. 299-305. M. Zonta, "The reception of al-Fārābī's and Ibn Sīnā's classifications of the mathematical and natural sciences in the Hebrew medieval philosophical literature", *Medieval Encounters*, 1 (1995): 358-82.

*wa al-muqābala*”.<sup>3</sup> Ce n'est pas le seul ouvrage mentionnant au moins une fois l'expression “algèbre”, dans la liste des procédés ou techniques numériques.<sup>4</sup>

Dans un contexte un peu différent, Maïmonide cite lui aussi l'algèbre, dans ses *Huit chapitres*, écrit rédigé en arabe; cette mention intervient dans une liste des disciplines mathématiques

<sup>3</sup> U. Amin (éd.), *Iḥṣā' al-'ulūm*, 3<sup>e</sup> éd. (Le Caire, 1968<sup>3</sup>), p. 109. Ibn Falaqera, dans son *Reshit Hohkma* (*Commencement de la sagesse*) cite au rang “des procédés calculatoires (*ha-taḥabulot ha-ḥeshboniyot*)”, “la science qu'on appelle en arabe 'l.j.b.r w.'l.m.q.'b.l.h”, texte hébreu dans M. David (éd.), *Schemtov ben Josef ibn Falaqueras Reshit Chokmah* (Berlin, 1902), p. 47. Qalonymos, pour sa part, cite comme “procédé numérique (*ha-taḥabula ha-misparit*)”, “la science qui est connue de nos contemporains comme 'l.j.b.r w.'l.m.q.'b.l.h”, et il ajoute, glosant l'expression arabe: “c'est-à-dire la restitution (*ha-hashava*) et la mise en opposition (*ha-nekhohut*)”; texte hébreu dans M. Zonta (éd.), *La “Classificazione delle scienze” di al-Fārābī nella tradizione ebraica* (Torino, 1992), p. 21, ll. 12-13 (trad. ital., p. 83).

<sup>4</sup> L'algèbre figure aussi dans la liste des branches des sciences mathématiques, chez Avicenne, dans son *Épître sur les divisions des sciences intellectives* (*Risāla fī aqṣām al-'ulūm al-'aqliyya*); voir R. Mimoune, “Épître sur les parties des sciences intellectuelles d'Abū 'Alī al-Ḥusayn ibn Sinā”, dans J. Jolivet et R. Rashed (éds), *Études sur Avicenne* (Paris, 1984), pp. 143-51, p. 147; M. Zonta a relevé les indices de la circulation de cet écrit en hébreu (Zonta, “The reception of al-Fārābī's and Ibn Sinā's classifications”, pp. 364-8). L'exposé de la philosophie avicennienne dû à al-Ghazālī, *Les intentions des philosophes* (*Maqāṣid al-falāsifa*), fut traduit trois fois en hébreu aux XIII<sup>e</sup> et XIV<sup>e</sup> siècles; il fut très largement diffusé et commenté (M. Steinschneider, *Die Hebräischen Übersetzungen des Mittelalters ...* [Berlin, 1893], pp. 298-326); l'ouvrage mentionne l'algèbre au rang des procédés ingénieux (Wolfson, “The classification of sciences”, p. 304, n. 155c). Toutefois, l'expression “algèbre”, même translittérée, ne semble pas avoir été conservée en hébreu. La plus connue des traductions des *Maqāṣid*, celle d'Isaac Albalag, se contente de l'expression générique “science du procédé ingénieux et autres (*ḥokhmat ha-taḥabula we-zulata*)”; voir, par exemple, MSS Paris, BnF, héb. 956, fol. 118a; héb. 994, fol. 172b. Une autre traduction, attribuée à Juda ben Salomon Nathan, donne aussi l'expression “science des procédés ingénieux et autres (*ḥokhmat ha-taḥabulot we-zulatam*)”; voir MS Paris, BnF, héb. 904, fol. 26b. Il convient de rectifier ici une erreur dans l'étude de Wolfson (Wolfson, “The classification of sciences”, p. 304, n. 155c). Ce dernier croit en effet pouvoir repérer une référence au “calcul de l'algèbre” chez un auteur du XII<sup>e</sup> siècle, Juda ben Barzillay de Barcelone, dans son *Commentaire du Livre de la Création* (*Perush Sefer Yeṣira*); évoquant “un des commentateurs de ce livre [le *Livre de la Création*]”, lequel rappelait l'usage indien des “neuf signes” dans l'écriture des nombres, Juda cite ledit commentateur: “j'en ai longuement parlé dans un livre que j'ai rédigé sur leur calcul [le calcul indien], que l'on appelle *ḥisāb al-g.b.'r.*”; voir le texte hébreu dans D. Kaufmann (éd.): Rabbi Yehuda bar Barzillay ha-Barṣeloni, *Perush Sefer Yeṣira* (Berlin, 1885), p. 144. Le commentateur en question est certainement le savant Dunash ibn Tamīm de Qairouan (X<sup>e</sup> siècle), dont nous connaissons bien aujourd'hui l'ouvrage (qui fut attribué un temps à son maître, Isaac Israeli), rédigé en arabe et rapidement traduit en hébreu. Le “calcul” que mentionne Dunash est le “calcul *ghobār*”, ou “calcul sur la poussière” (utilisant l'écriture positionnelle des nombres, avec neuf “signes” et le zéro), et non “le calcul *al-jabr*”, tel qu'a cru le lire Wolfson. Voir G. Vajda, “Le commentaire kairouanais du *Sefer Yesira*”, *Revue des études juives*, CXII (1953): 7-33, p. 13.

permettant d'aiguiser l'esprit, de maîtriser le syllogisme démonstratif, et de contribuer ainsi (fût-ce indirectement) à la connaissance des choses divines.<sup>5</sup>

Il est difficile de mesurer l'intérêt, ou simplement la curiosité, qu'ont pu susciter ces mentions fugitives et énigmatiques de l'expression "al-jabr", accompagnée de son doublet "al-muqābala". Il importe toutefois de les relever.

Tournons-nous maintenant vers les textes mathématiques proprement dits, exposant ou utilisant les principes et les techniques de l'algèbre. À ce jour, nous connaissons quatre textes répondant à cette définition; le plus riche est, sans conteste, celui que nous devons à la plume d'Isaac ben Salomon al-Aḥḍab, à la fin du XIV<sup>e</sup> siècle.

Directement issus de sources arabes, adaptées ou traduites, ces textes, on le verra, offrent un tableau contrasté des savoirs algébriques. Néanmoins, on peut affirmer qu'ils ressortissent, les uns et les autres, à une tradition mathématique arabe, désignée

<sup>5</sup> Dans le chapitre V, intitulé "De la mobilisation des capacités de l'âme en vue d'un but unique", on lit:

"Ce qui est juste, c'est qu'il [l'homme] fixe comme but de toutes ses activités la santé de son corps, la prolongation de son existence en bonne condition, de façon que les organes des facultés de l'âme, à savoir les membres du corps, se maintiennent dans leur intégrité et que son âme puisse alors, sans entrave, s'exercer aux vertus morales et intellectuelles.

Il en va de même pour tout ce qu'il acquiert en matière de sciences et de connaissances: celles qui contribuent à la réalisation d'un tel objectif, il n'y a rien à en dire. Quant à ce qui ne présente aucun intérêt relativement à cet objectif – par exemple les questions d'algèbre et de *muqābala*, le livre des sections coniques, les procédés ingénieux, la majorité des problèmes de géométrie, le transport des corps graves et bien d'autres choses de ce genre –, cela vise à aiguiser l'esprit et à exercer la faculté intellectuelle à la méthode de la démonstration, de façon que l'homme acquière le pouvoir de distinguer le syllogisme démonstratif de ce qui ne l'est pas, et qu'il parvienne par là à la connaissance relative à la vérité de Son existence, qu'Il soit exalté"; texte arabe (en caractères hébraïques), accompagné d'une traduction annotée, en hébreu moderne, dans J. Qafih, *Mishnah 'im perush Rabbenu Mosheh ben Maymon*, vol. IV, *Seder Neziqin* (Jérusalem, 1966), p. 289.

L'opuscule fut composé en arabe vers 1170, comme introduction au commentaire du traité rabbinique *Pirqey Avot* (*Les maximes des Pères*), et traduit par Samuel ibn Tibbon en 1202; il nous faut toutefois souligner que l'expression désignant l'algèbre semble avoir disparu dans la version d'Ibn Tibbon: "quant à ce qui ne présente pas d'intérêt relativement à cet objectif, comme la question du calcul (*ha-ḥeshbon*), les coniques (*ha-ḥaruṭim*), les procédés ingénieux, la majorité des questions de géométrie, le transport des corps graves et bien des choses du même genre" (texte non paginé). À notre connaissance, cette version hébraïque n'a pas fait l'objet d'une édition critique; elle figure, dans les éditions classiques du *Talmud*, en appendice du volume XVI; à ce titre, l'ouvrage maïmonidien fut donc très largement diffusé en hébreu.

génériquement comme *'ilm al-ḥisāb*. Par *'ilm al-ḥisāb*, on entend l'ensemble des disciplines "pratiques" réglant "l'usage et la détermination des nombres"; lesquelles disciplines englobent, à titre d'outils, l'algèbre, le calcul indien et les techniques analogues.<sup>6</sup> Dès la fin du IX<sup>e</sup> siècle, de nombreux savants arabes, et non des moindres, ont consacré des ouvrages à ce domaine, répondant ainsi à une demande "sociale".<sup>7</sup> Les auteurs que nous allons citer, familiers de la culture et de la langue arabes, ont su exploiter cet héritage scientifique.

1) Le traité de géométrie pratique d'Abraham bar Ḥiyya fut composé à Barcelone dans la première partie du XII<sup>e</sup> siècle. Le recours à l'algèbre dans le traitement de plusieurs problèmes de géométrie y est "muet", au sens où la terminologie technique ("chose", "bien", etc.) et même l'expression "algèbre" en sont absentes: les procédures classiques de résolution des équations quadratiques y sont appliquées sans référence; dans certains cas, des démonstrations géométriques suivent la conclusion. On sait l'importance de la version latine de ce texte, réalisée en 1145 par Platon de Tivoli.

2) Le texte inédit d'Abraham ibn Ezra, que nous avons récemment identifié, fut composé, vraisemblablement, en Italie du Nord, dans les années 1140. Il comporte un exposé de géométrie pratique conduisant, dans certains problèmes, à plusieurs équations quadratiques et à des systèmes d'équations linéaires. Le recours à l'algèbre y est aussi "muet", au sens que nous avons précisé ci-dessus. Les procédures de résolution y sont formulées en toute généralité, même quand elles sont appliquées à des exemples numériques. Ce texte a fait l'objet d'une traduction latine, qui fut sans doute réalisée du vivant même de l'auteur, voire avec son aide.

3) La version hébraïque du traité d'arithmétique d'al-Ḥaṣṣār (XII<sup>e</sup> s.?) fut réalisée par Moïse ibn Tibbon à Montpellier, en 1271. L'ouvrage inclut la résolution d'équations quadratiques par la méthode de l'algèbre, explicitement invoquée. Apparemment, il aurait dû comporter une liste classifiée des six équations canoniques: la version hébraïque, pas plus que la source arabe dont elle est issue, ne semblent l'avoir transmis. Nous savons peu

<sup>6</sup> R. Rashed, "Mathématiques et philosophie chez Avicenne", dans Jolivet et Rashed (éds), *Études sur Avicenne*, pp. 29-39, voir pp. 32-3.

<sup>7</sup> P. Crozet, "Aritmetica", dans *Storia della scienza* (Istituto della enciclopedia), vol. III, R. Rashed (dir. scien.): *La civiltà islamica* (Roma, 2002), pp. 498-506.

de choses de la diffusion de cette arithmétique hébraïque, à part ceci: son étude en est vivement recommandée aux “étudiants”, par un auteur juif espagnol de la fin du XIII<sup>e</sup> siècle, Samuel ibn ‘Abbas.

4) Nous avons récemment identifié et étudié un traité inédit de *hisāb*, plus ample et plus ambitieux que les textes cités précédemment. Il s’agit de la traduction, abondamment commentée, d’un ouvrage arabe. Le traducteur en est un astronome bien connu, qui a vécu en Castille dans la deuxième moitié du XIV<sup>e</sup> siècle: Isaac ben Salomon ben al-Aḥḍab. Selon son propre récit, c’est à Syracuse en Sicile, dans les dernières années du XIV<sup>e</sup> siècle, qu’il traduit cette “épître sur le nombre”, recueillie en pays d’Islam, exploitant les “nombreux” commentaires qu’elle a suscités. L’ouvrage comporte une importante section consacrée à l’algèbre, suivie d’une longue description des opérations sur les expressions “composées”, soit ce que nous désignerions aujourd’hui comme des monômes, binômes, trinômes, quadrinômes, etc.

#### **TECHNIQUES ALGÈBRIQUES DANS LE TRAITÉ DE LA MESURE D’ABRAHAM BAR ḤIYYA**

Généralement cité sous le titre *Ḥibbur ha-Meshiḥa we-ha-Tishboret* (*Le livre de la mesure des surfaces et des volumes*), plus rarement comme *Sefer ha-Medida* (*Le livre de la mensuration*), l’ouvrage fut traduit (par endroits, adapté) par Platon de Tivoli en 1145.<sup>8</sup> S’adressant à des hommes de terrain (arpenteurs, topographes, administrateurs de biens), ne disposant d’aucun livre rédigé en hébreu et conduits, par leur ignorance, à toutes sources d’erreurs, Bar Ḥiyya rappelle avec vigueur que cette “technique” qu’est “la mensuration de la terre et sa répartition selon la voie juste” requiert des “connaissances nombreuses qui sont à la base de la science du nombre et de la science de la

<sup>8</sup> Pour des détails, sur le contenu et l’histoire du texte, voir T. Lévy, “Les débuts de la littérature mathématique hébraïque: la géométrie d’Abraham bar Ḥiyya (XI<sup>e</sup>-XII<sup>e</sup> siècle), *Micrologus*, IX (2001): 35-64. Le texte hébreu est édité dans M. Guttmann, *Chibbur ha-Meschicha we ha-Tishboret* (Berlin, 1912); nous citerons ce texte sous le sigle HMT. Traduction en catalan dans J. Millas i Vallicrosa, *Abraam bar Hiia. Llibre de geometria. Hibbur hameixiha uehatixboret* (Barcelona, 1931). Texte latin dans M. Curtze, “Der Liber embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli”, dans *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* (Leipzig, 1902), pp. 1-183.



grandeur”. Les quatre parties (les “portails”) de l’ouvrage sont présentés par l’auteur ainsi (*HMT*, p. 6):

Premier portail: j’y présente les explications relatives à la science de la grandeur et à la science du nombre, afin qu’elles éclairent le lecteur et guident l’étudiant.

On y trouve une sélection de définitions et de propositions géométriques et arithmétiques, issue pour l’essentiel des *Éléments* d’Euclide, en particulier les propositions du Livre II intervenant dans les preuves géométriques des procédures algébriques.

Le deuxième portail concerne la mesure des terrains, des édifices, des champs, selon leurs diverses configurations: quadrilatères, triangles, cercles et toutes autres espèces de figures.

C’est la partie principale – la plus importante en volume – qui fournit le principe du calcul de diverses aires géométriques (*HMT*, §§ 42-128). L’ordre de l’exposé est le suivant: 1) carré, losange, rectangle; 2) triangle; 3) parallélogramme et trapèze; 4) cercle et segment circulaire, ellipse, table de cordes accompagnée de son mode d’emploi; 5) polygone ayant plus de quatre côtés.

Le troisième portail concerne la division [en figures élémentaires] de toutes les figures qu’on a appris à mesurer dans le portail précédent.

L’auteur y adapte des développements théoriques, remontant, à travers les sources arabes, à l’ouvrage d’Euclide *Sur la division des figures* (qui ne nous est pas parvenu en grec) (*HMT*, §§ 129-151).

Le quatrième portail concerne la mesure des puits, des fossés, des grottes et de tout ce qui se rattache [à ce type de volumes]: les remblais, les tours, les pierres tombales, les bassins, les vases.

Il y est question du calcul des volumes: prismes et cylindres (entiers ou tronqués), pyramides et cônes (entiers ou tronqués), sphères et segments sphériques (*HMT*, §§ 152-180).

C’est dans la deuxième partie, à propos de l’évaluation de la superficie de certains terrains en forme de carré, rectangle, losange, etc. qu’interviennent les procédures de résolution de type algébrique. Il s’agit d’un recours pratique à l’algèbre, laquelle – on l’a dit – n’est jamais invoquée explicitement. On soulignera toutefois que les trois premiers exemples correspondent aux trois équations trinômes “canoniques” et que la résolution est accompagnée d’une preuve géométrique s’appuyant sur les

théorèmes euclidiens énoncés précédemment. Formulées dans notre écriture, ces équations sont les suivantes:

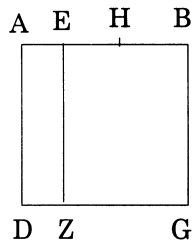
$$x^2 - 4x = 21; \quad x^2 + 4x = 77; \quad 4x - x^2 = 3.$$

S'agissant du premier exemple, l'auteur s'exprime ainsi (*HMT*, § 47):

Un carré: tu as soustrait du nombre de sa superficie (*mi-minyan tishborto*) le nombre de ses quatre côtés; il te reste de sa superficie 21 coudées; combien est la superficie? et combien est le nombre de chacun des côtés du carré?

La réponse: divise en deux le nombre de ses côtés qui est quatre; [la moitié est deux] multiplie les deux par eux-mêmes; ils donneront quatre; ajoute ce nombre au nombre qui t'est resté du carré [21], le tout donnera 25; détermine la racine de 25, c'est 5; ajoute-lui la moitié des côtés qui est 2; le tout donnera 7: c'est le côté du carré, et sa superficie est 49 [...].

Si tu veux connaître la preuve (*ha-ot*) attestant que la réponse que tu lui as apportée est vraie, [procède ainsi:] pose que le carré est *ABGD*, ses quatre côtés sont égaux; on sait que chacun de ces côtés est supérieur en longueur à 4 coudées, puisque le questionneur a dit 'nous avons soustrait du carré tous ses quatre côtés, [soit un rectangle] dont la largeur est 4 coudées et la longueur est comme la longueur du carré et il est resté tant et tant...'; et s'il n'y avait pas dans le côté plus que 4 coudées [en longueur], il n'aurait pas été possible de retirer du carré 4 côtés. Puisqu'il en est ainsi, diminuons la ligne [droite] *AB* d'une ligne dont la longueur est 4, c'est *BE*. De même, diminuons la ligne *GD*, qui lui est opposée, d'une ligne dont la longueur est 4, c'est *GZ*. Joignons le point *E* et le point *Z* en une ligne; ensuite, divisons la ligne *BE* en deux parties égales au point *H*: *BH* et *HE* sont égales et ont pour longueur 2 coudées.



La figure ainsi mise en place permet d'appliquer la proposition II, 6 des *Éléments* (dans le texte grec, c'est la proposition II, 5) dont l'auteur rappelle qu'il l'a déjà établie précédemment; ce qui, en effet, est bien le cas (*HMT*, § 29). Il vient alors:  $BA \times AE + EH^2 = HA^2$ . Le premier terme est égal au rectangle *EADZ*, soit 21; le deuxième terme est le carré de 2; on tire donc que *HA* vaut 5, et le côté *AB* recherché vaut bien 7.

\* \* \*



Ce passage, ainsi que les autres du même genre, conduisent à deux questions. Est-on vraiment fondé à parler d'algèbre (au sens d'al-Khwārizmī) appliquée aux problèmes géométriques? Peut-on rattacher la démarche de Bar Ḥiyya à une tradition arabe précise?

S'il est vrai que la procédure calculatoire adoptée par Bar Ḥiyya peut être comparée à quelque tradition babylonienne, il nous paraît impossible de poursuivre un tel rapprochement quant à la preuve géométrique et les éléments de géométrie euclidienne qu'elle met en œuvre. À notre sens, Bar Ḥiyya exploite une tradition de l'algèbre arabe élémentaire, telle qu'elle a circulé dans les divers ouvrages de *ḥisāb*. En ce sens, nous ne souscrivons pas à l'idée d'une "algèbre babylonienne" dont Bar Ḥiyya aurait utilisé "les méthodes anciennes et traditionnelles".<sup>9</sup> De plus, Bar Ḥiyya se réfère à l'envi, dans ses divers écrits scientifiques, aux "livres arabes" qu'il n'aurait fait qu'adapter en hébreu, pour en rendre le contenu accessible aux juifs de Provence, totalement ignorants en la matière.<sup>10</sup>

### PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES ET PROCÉDURES ALGÈBRIQUES DANS UN TEXTE INÉDIT D'ABRAHAM IBN EZRA

Nous avons récemment identifié et étudié un texte inédit d'Ibn Ezra.<sup>11</sup> Le colophon de l'unique témoin manuscrit porte la mention: "Le Livre de géométrie est achevé, et c'est le Livre du

<sup>9</sup> H.L.L. Busard, "L'algèbre au Moyen Age: le 'Liber mensurationum' d'Abū Bekr", *Journal des savants* (1968): 6-124, p. 70. H. Busard souligne la différence entre l'exposé de Bar Ḥiyya (Savasorda) et celui d'Abū Bakr (dont nous ne connaissons à ce jour que la version latine due à Gérard de Crémone). Ce dernier, après avoir résolu l'équation  $x^2 - 4x = 60$  de manière analogue à ce que fait Bar Ḥiyya, redouble cette première méthode (*opus*) par un exposé de "la méthode selon l'algèbre (*eius vero opus secundum aliabram*)": "tu proposes le côté comme *res*, laquelle tu multiplies par elle-même et elle donne *census*, qui est l'aire [...]. Fais ensuite conformément au sixième cas (*in questione sexta*), c'est-à-dire que tu divises les racines en deux etc." (pp. 70-1, texte latin pp. 87-8). Là où Bar Ḥiyya propose une preuve géométrique adaptée aux données numériques et fondée sur un théorème euclidien, Abū Bakr cite directement la tradition algébrique al-khwarizmienne. Pour autant, nous affirmons que Bar Ḥiyya perpétue ici une tradition de l'algèbre *arabe* qu'il adapte à l'usage de son lecteur.

<sup>10</sup> Lévy, "Les débuts de la littérature mathématique hébraïque", p. 41. C'est ainsi que présentant son ouvrage sur le calendrier hébraïque, il s'exclame: "si j'avais trouvé, parmi les ouvrages d'Espagne composés en arabe et qui sont à ma disposition, des écrits répondant à ces besoins, je les aurais traduits en hébreu dans la mesure de mes moyens, et je n'y aurais rien introduit en mon nom propre".

<sup>11</sup> T. Lévy, "Hebrew and Latin versions of an unknown mathematical text by

nombre de Rabbi Abraham ibn Ezra, fils de Rabbi Me'ir, l'espagnol [...]".<sup>12</sup>

Le texte, tel qu'il nous est parvenu (tant en hébreu qu'en latin), débute par des considérations sur les propriétés des dix premiers nombres, sur le calcul approché de la racine carrée, sur les opérations en numération sexagésimale et sur l'intérêt d'adopter la racine carrée de 10 (l'assimiler à notre nombre  $\pi$ ) pour mesurer le cercle. La structure de ces développements n'est pas toujours très claire, contrairement à l'exposé de géométrie "pratique" qui les suit.

Après avoir présenté le point, la ligne, la surface, le corps, l'auteur traite, dans l'ordre, les thèmes suivants:

- Le triangle: équilatéral, isocèle, scalène, rectangle. Diverses formules de calcul d'aires sont indiquées.

L'étude du triangle rectangle conduit à "la mesure de l'ombre du soleil (*middat šel ha-shemesh*)", ainsi que celle de "l'ombre inversée (*ha-šel ha-hafukh*)" autrement dit, les notions de tangente et de cotangente d'arcs, introduites par les astronomes-géomètres arabes du x<sup>e</sup> siècle.

- Le quadrilatère: le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le trapèze et ses diverses espèces.

- Le cercle: les formules donnant l'aire à partir du diamètre et réciproquement. Les relations entre l'arc, la corde et la flèche.

- Les volumes: cube, pyramide à base carrée, pyramide tronquée, cylindre, cône tronqué. La mesure de la hauteur d'une colline, d'un arbre ou d'une tour; de la profondeur d'un puits.

---

Abraham ibn Ezra", *Aleph*, 1 (2001): 295-305. Le texte hébreu a fait l'objet d'une version latine (ne mentionnant aucun auteur) et datant, au plus tard de la deuxième moitié du XII<sup>e</sup> siècle, autrement dit contemporaine d'Ibn Ezra lui-même. C'est à C. Burnett que revient le mérite d'avoir étudié ce texte latin et d'avoir conjecturé qu'il pourrait bien être d'Ibn Ezra. Très courtoisement, C. Burnett a mis à ma disposition une première transcription de l'unique témoin latin, me permettant ainsi de le confronter au texte hébreu (MS Monte Cassino, Biblioteca dell'Abbazia, Caravita 510, fols. 133a-141b), et de conclure qu'on avait bien là une traduction latine de l'hébreu. C. Burnett et moi-même préparons l'édition conjointe des deux textes.

<sup>12</sup> Nous avons traduit par "livre de géométrie" l'expression *Sefer ha-Middot*, *Le livre des mesures*; le verbe "est achevé" est donné en arabe (en caractères hébraïques), *K.M.L.* Le rapprochement avec *Le livre du nombre* (*Sefer ha-Mispar*), ouvrage bien connu d'Ibn Ezra, ne laisse pas d'intriguer; cet ouvrage ne comporte aucun exposé de géométrie, analogue à ce qu'on trouve ici. Nous avons formulé la conjecture suivante: ce texte pourrait avoir été une première version du projet qui conduisit Ibn Ezra à composer son *Livre du nombre*; divers indices nous conduisent à en situer la composition en Italie, après le départ d'Espagne d'Ibn Ezra (en 1140) et avant son séjour en Provence (à partir de 1148).

Les problèmes qui suivent les définitions des figures et les formules de calcul d'aire donnent fréquemment lieu à des équations quadratiques. Comme dans le livre de Bar Ḥiyya, les procédures de résolution ne se réfèrent pas à l'expression consacrée, pas plus qu'à la terminologie technique de l'algèbre.<sup>13</sup> Deux traits retiennent toutefois notre attention et distinguent la démarche d'Ibn Ezra de celle de son prédécesseur de Barcelone. La majorité de ces problèmes sont formulés de façon générale et leur résolution est aussi indiquée de façon générale, sans référence à des données numériques. D'autre part, l'auteur (ou la source qu'il a exploitée) recourt, sans le spécifier, à des substitutions sur les quantités inconnues, substitutions d'allure algébrique qui ne sont pas toujours élémentaires (identités complexes, changement de "variable"). Donnons-en quelques exemples.

Voici un problème associé au triangle isocèle:

L'aire est tant, la base excède la hauteur de tant. Combien vaut la base et combien la hauteur?<sup>14</sup> Multiplie par deux l'aire et ajoute-lui le carré de la moitié de l'excès; prends la racine carrée de la somme, et ajoute-lui la moitié de l'excès; tu trouveras la base. De même, retranche de cette racine la moitié de l'excès, tu trouveras la hauteur.<sup>15</sup>

Si nous posons  $x$  pour désigner la base de ce triangle isocèle,  $d$  la différence (connue) entre la base et la hauteur,  $S$  l'aire (connue), la mise en équation donnerait aisément:  $x^2 = dx + 2S$ . La procédure proposée répond, et de façon générale, à ce type d'équation trinôme.

Dans l'étude du rectangle, les problèmes mettent en jeu les deux côtés, leur somme, leur différence, leur produit (l'aire), la diagonale. Les relations entre ces éléments sont de complexité croissante. Ce fait, ainsi que l'insertion de phrases de transition ("Autre problème, lié à ce qui précède..."; "autre problème, semblable à ce dernier...") laissent entrevoir en arrière-fond une pensée, voire un autre texte (?) bien plus structurés. La seule classification explicite est toutefois celle des figures géométriques.

<sup>13</sup> Soulignons toutefois ceci: le caractère fragmentaire du texte, tel qu'il nous est parvenu tant en hébreu qu'en latin, interdit d'exclure la présence d'une exposition générale des six équations canoniques. Faut-il y rattacher le fragment sur l'algèbre que nous avons cité plus haut (voir note 1)?

<sup>14</sup> *ha-shevarim kakha we-ha-mekhona tosif 'al ha-'ammud kakha, kamma ha-mekhona, we-khamma ha-'ammud?*

<sup>15</sup> MS Monte Cassino, fol. 135a, ll. 12-14.

Autre problème. On additionne les deux côtés, ils font tant; la diagonale vaut tant. Combien vaut chaque côté? Soustrais du carré de la somme [des deux côtés] le carré de la diagonale. La moitié de cette différence, c'est l'aire.<sup>16</sup>

Le texte n'indiquant rien de plus, il semble acquis ici que le problème est résolu, puisqu'il est ramené à la connaissance du produit et de la somme des deux côtés du rectangle. Bien que le passage cité ne prenne sens qu'en référence à ce dernier problème, celui-ci ne figure pourtant pas dans ce qui précède: on trouve bien un problème où les "connus" sont le produit et la différence des côtés; puis un problème où les "connus" sont un côté et la somme du deuxième et de la diagonale. Texte mal copié? Texte fragmentaire, voire notes prises par un élève? Nous penchons pour la deuxième hypothèse, que valident d'autres indices textuels.<sup>17</sup>

L'exemple suivant nous paraît significatif par la complexité des substitutions qui y sont à l'œuvre. Il concerne le losange.

Autre problème. Des côtés, nous avons soustrait les diamètres, il reste tant; l'un [des diamètres] dépasse le deuxième de tant. Combien valent les diamètres?

Ajoute l'excès et la différence susmentionnée; prends-en le quart et garde-le. Prends la moitié de la différence [entre les deux diamètres], puis prends son carré. Prends aussi le carré de ce que tu as gardé; retranche la plus petite [de ces deux quantités] de la plus grande et garde la différence. Après cela, double le quart en question, retranche l'excès; prends la moitié [de cette quantité], puis son carré; ajoute-la à la différence; prends-en la racine carrée et ajoute-la au nombre dont tu as pris le carré. Il en résulte la moitié du petit diamètre.<sup>18</sup>

En transposant dans notre symbolisme, on peut vérifier la rigueur de la procédure proposée. Désignons par  $z$  le côté du losange,  $x$  le grand diamètre,  $y$  le petit diamètre; les deux "connus" sont respectivement  $a = 4z - (x + y)$  et  $b = x - y$ . En suivant les indications, on a:

$$\begin{aligned} c &= (a + b)/4 = z - y/2 \quad \text{et} \quad b/2 = (x - y)/2 \\ [c^2 - (b/2)^2] &= d \\ (2c - b) &= e \end{aligned}$$

<sup>16</sup> MS Monte Cassino, fol. 136b, ll. 12-14.

<sup>17</sup> La version latine (du moins l'unique témoin que nous en connaissons) présente le même "désordre"; par endroits, elle est plus confuse que l'original hébraïque.

<sup>18</sup> MS Monte Cassino, fol. 137b, ll. 11-20.

En développant les égalités  $z^2 = (x/2)^2 + (y/2)^2$  et  $z^2 = (y/2 + c)^2$ , opérations qui ne sont pas proposées par le texte (vont-elles de soi?), il vient, si nous posons  $Y = y/2$ :  $Y^2 = eY + d$ . La procédure permet effectivement d'obtenir  $Y$ , "la moitié du petit diamètre".

Comment évaluer ces exemples, et plus généralement, la procédure algébrique qu'ils déploient?

Même fragmentaire, et parfois confus (certains exemples numériques se révèlent erronés), ce texte propose une série de problèmes, dont la résolution offre les traits suivants:

- les énoncés sont généraux;
- les procédures mises en œuvre sont, de toute évidence, de type algébrique, et formulées aussi de façon générale;
- aucune représentation géométrique n'est invoquée pour valider la procédure;
- les substitutions d'inconnues, destinées à ramener les relations numériques à l'une des trois équations-trinômes classiques peuvent être complexes, même si elles ne sont pas explicitées.

Nous avons affaire à de l'algèbre "élémentaire" appliquée à la résolution de problèmes géométriques, lesquels sont classifiés selon la forme des figures. Si l'on peut rattacher sans peine l'ouvrage à la tradition arabe du *ḥisāb*, il nous est difficile d'en préciser les sources.<sup>19</sup>

### LES PREMIÈRES (?) OCCURRENCES DU LANGAGE ALGÈBRIQUE EN HÉBREU: L'ARITHMÉTIQUE D'AL-ḤAṢṢĀR, TRADUITE PAR MOÏSE B. TIBBON (1271)

Moïse ibn Tibbon (actif entre 1240 et 1283) est un des plus importants traducteurs provençaux de l'arabe en hébreu. À côté d'ouvrages de philosophie, de médecine, d'écrits maïmonidiens, il a traduit des livres d'astronomie et de mathématiques.<sup>20</sup> La traduction de l'ouvrage d'al-Ḥaṣṣār est réalisée en Mai 1271 à

<sup>19</sup> S'agissant d'Ibn Ezra, de sa culture scientifique et de l'époque où il compose son texte (peu après 1140), il ne peut s'agir que de sources arabes.

<sup>20</sup> Les *Éléments* d'Euclide (1270), les commentaires d'al-Fārābī et d'Ibn al-Haytham sur les *Éléments*, les *Sphériques* de Théodose (1271), et enfin un *Livre du calcul* (*Sefer ha-Ḥeshbon*) d'Abū Bakr Muḥammad ibn 'Abdallāh ibn 'Abbās al-Ḥaṣṣār; voir T. Lévy, "The establishment of the mathematical bookshelf of the medieval Hebrew scholar (XIIIth-XIVth century): translations and translators", *Science in Context*, 10 (1997): 431-51, voir pp. 441-2.

Montpellier.<sup>21</sup> L'auteur de l'original, dont le titre serait *Kitāb al-Bayān wa al-tadhkār*, *Le Livre de l'explication et du rappel*, est un savant d'Afrique du Nord ou d'Espagne qui a été actif au XII<sup>e</sup> siècle, dont on a découvert récemment un ouvrage de *ḥisāb* plus ambitieux.<sup>22</sup>

Il se présente en deux grandes parties: la première est consacrée au nombre entier, la deuxième aux fractions. La résolution algébrique d'équations de degré inférieur ou égal à deux y est utilisée comme un instrument "banal" de l'arithmétique. Il semble que l'auteur ait envisagé, au moins dans son plan, d'exposer les procédures de résolution des six équations canoniques.

Présentons quelques-unes de ces références à l'algèbre: dans l'état actuel de nos connaissances, nous avons là les toutes premières occurrences, en hébreu, de la terminologie algébrique. Nous les avons relevées dans la partie consacrée aux fractions.

Dans la section sur l'addition des fractions, apparaît un paragraphe consacré à "l'addition des biens (*qibuṣ ha-mamonot*)":

Si on te dit: tu as additionné le tiers et le quart d'un bien, cela fait 21 dirhams [quelle est la valeur de ce bien?]. Voici la solution de ce problème. Considère le tiers et le quart de 12; après cela prends [ensemble] le tiers et le quart de 12, qui font 7; le rapport de ces 7 pris sur 12 – qui sont la somme – est comme le rapport de 21 au nombre, c'est-à-dire au bien recherché. Multiplie 12 par 21, et divise le produit par 7. Tu trouveras 36, et c'est le bien.

Si tu veux, procède par [la méthode du] redressement (*'aliya*).<sup>23</sup> C'est-à-dire, pose que le bien est une "chose (*davar*)", dont tu prends le tiers et le quart: alors trois sixièmes de la chose et un demi d'un sixième de la chose égalent 21. Demande-toi: de combien redresser 3/6 et 1/2 de 1/6 pour parvenir à une chose entière. On y arrive en multipliant par 1 5/7, comme on

<sup>21</sup> Oxford, Christ Church College Library, MS 189 (= Neubauer 2457), fols. 1a-31b (copié en 1476), voir le colophon, fol. 31b. Nous en connaissons deux autres témoins: Roma, Biblioteca Apostolica Vaticana, MS Ebr. 396, fols. 1a-76b (copié en 1451); Moscou, MS Günzburg 30, fols. 121a-189b (copié en 1503).

<sup>22</sup> M. Aballagh et A. Djebbar, "Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII<sup>e</sup> siècle): le livre I du Kāmil", *Historia Mathematica*, 14 (1987): 147-58. Les sources arabes invitent à lire 'Ayyāsh, là où le traducteur a cru lire 'Abbās; certaines attribuent à l'auteur le surnom (la *kunya*) Abū Zakariyā plutôt qu'Abū Bakr. En l'absence d'une édition du texte arabe, on se reportera à la traduction partielle publiée par H. Suter, "Das Rechenbuch des Abū Zakarijā el-Ḥaṣṣār", II (1901): 12-40. Un tableau des thèmes traités dans l'ouvrage figure dans Aballagh et Djebbar, "Découverte d'un écrit mathématique", pp. 154-5.

<sup>23</sup> Dans MS Vatican, fol. 46b, ce terme est glosé en marge ainsi: "par *al-jabr*". C'est effectivement le terme arabe utilisé; de même le verbe hébraïque "redresser" qu'on rencontre un peu plus loin correspond bien au verbe *jabara* utilisé dans le texte arabe.



l'expliquera dans la section sur le redressement des fractions ('*aliyat ha-shevarim*).<sup>24</sup> Multiplie donc  $1\frac{5}{7}$  par 21, il te vient 36 et c'est le bien.

Si tu veux, procède par la méthode des "paumes (*hofnayim*)".<sup>25</sup> C'est-à-dire, prends n'importe quel nombre (suit l'exposé de la méthode de double fausse position)[...].<sup>26</sup>

On le voit, l'algèbre apparaît ici furtivement, avec la résolution d'une simple équation linéaire, résoluble aussi par une règle de trois, ou par la méthode des fausses positions. L'opération de "redressement" d'une fraction (recherche de son inverse) est désignée en arabe comme *al-jabr*. Le traducteur, dans un premier temps, se contente de rendre – correctement – le sens du mot arabe *al-jabr* par "redressement"; l'introduction du mot "chose" ne pose pas de problème particulier. Le vocable technique adopté pour *al-jabr*, l'opération proprement algébrique permettant de se ramener aux cas canoniques est: *hittum*. Le choix de ce néologisme ne manque pas d'intérêt: dérivé de la racine *H.T.M* (clore, sceller, signer, conclure), le mot n'est pas emprunté au champ sémantique de l'arabe *J.B.R* (restaurer, réduire, redresser). Le traducteur semble avoir voulu marquer l'idée de l'achèvement du calcul plutôt que qualifier l'opération qui y conduit.<sup>27</sup> Pour rendre l'opération "mise en opposition" *muqābala*, le traducteur a moins hésité: il s'appuie sur la racine hébraïque *Q.B.L* – correspondant exactement à la racine du terme arabe – et utilise le verbe *hiqbil*.

Les équations quadratiques que nous avons relevées figurent dans la section consacrée aux sommations (somme des entiers successifs; somme des entiers pairs [resp. impairs]; somme des carrés d'entiers; somme des carrés d'entiers pairs [resp. impairs]; somme des cubes, somme des cubes d'entiers impairs); elles interviennent dans la solution de problèmes liés aux formules de sommation.

<sup>24</sup> On trouve, en effet, plus loin une telle section qui sera désignée par un autre vocable (*hittum ha-shevarim*), le terme hébreu *hittum* étant celui que le traducteur utilisera pour l'opération *al-jabr*, appliquée cette fois à des équations quadratiques. C'est pourquoi le copiste scrupuleux de MS Christ Church, a noté en marge, à cet endroit, le mot *hittum* (fol. 20a, col. gauche).

<sup>25</sup> Le copiste de MS Christ Church College a noté en marge le mot arabe "paume": *al-kaffa*. La méthode est, en effet, désignée en arabe par l'expression *al-kaffat*, "les plateaux [de la balance]", qui signifie aussi "les paumes".

<sup>26</sup> MS Vatican, fols. 46b-47a; MS Christ Church College, fol. 20a.

<sup>27</sup> Pour les occurrences d'un tel usage, voir E. Ben Yehuda, *Thesaurus Totius Hebraicitatis et veteris et recentioris* (Jérusalem / Berlin, 1913), p. 1826, s.v. *hittem*.

Dans le premier exemple – la somme des entiers successifs – l’auteur procède ainsi: après avoir indiqué comment calculer la somme des entiers de 1 à 10 (on multiplie  $10 + 1$  par la moitié de 10), il énonce la formule générale:  $1 + 2 + \dots + n = (n + 1)n/2$ , puis pose le problème inverse: on connaît la valeur de la somme, comment déterminer le nombre de termes de la suite?

On a additionné de 1 jusqu’à un nombre inconnu (*bilti yadu’a*), selon l’ordre des nombres, et on a atteint 55. Quel est le nombre inconnu? Voici la solution (*hinneh heqsho*). Multiplie toujours 55 par 2, soit 110, que tu gardes; ensuite prends la moitié de 1, le nombre par lequel tu as commencé la somme, soit  $1/2$ , que tu multiplies par elle-même (la fraction), soit  $1/4$ ; ajoute-la à 110, ce qui donne  $110 \frac{1}{4}$  et prends-en la racine; on obtient, comme nous le montrerons dans le chapitre sur la racine carrée (*gader*),  $10 \frac{1}{2}$ ; tu en retranches  $1/2$ , (la fraction) que tu avais multipliée par elle-même. Il reste 10, qui est le nombre inconnu.

En somme, pour trouver  $n$ , à partir de la relation  $n(n+1) = 2 \times 55$ , l’auteur complète l’égalité  $n^2 + n = 110$ , de façon à faire apparaître à gauche le carré:  $n^2 + n + 1/4 = (n + 1/2)^2 = 110 \frac{1}{4}$ , d’où il tire  $n + 1/2 = 10 \frac{1}{2}$ .

La démarche “selon l’algèbre” est ensuite présentée comme une autre méthode:

Si tu veux procéder par l’algèbre (*ba-ḥittum*), pose que le nombre (recherché) est une chose (*davar*); ajoute-lui 1, ce qui donne ‘un plus la chose’, que tu multiplies par ‘la moitié de la chose’ qui est le nombre (recherché). Il vient ‘la moitié du bien (*mamon*)’ plus ‘la moitié de la chose’ égal à 55. Redresse le bien (*taḥtim ha-mamon*) en le multipliant par 2, et multiplie toute l’égalité par 2; il te viendra ‘le bien plus la chose égal à 110’. Recours alors au quatrième<sup>28</sup> cas des cas de l’algèbre (*ofney ha-ḥittum*), selon ce qui sera expliqué en son lieu, si Dieu le veut.<sup>29</sup>

Dans la mesure où l’auteur ne prend pas la peine de détailler la procédure algébrique requise ici, sinon renvoyer au “quatrième cas”, on peut penser qu’une présentation des six problèmes canoniques était effectivement prévue dans l’ouvrage. Nous n’avons toutefois pas trouvé trace d’un tel exposé dans le texte

<sup>28</sup> En fait, dans le texte hébreu (voir note suivante), on lit le “premier cas (*ha-ofen ha-rishon*)”; il pourrait s’agir du “premier” des trois cas d’équations-trinômes; toutefois, dans un autre exemple d’équation quadratique du même type (le bien plus les choses égal à un nombre), on a bien la mention du “quatrième cas”; nous avons donc rectifié. Le texte arabe indique bien le quatrième cas, lequel correspond effectivement à l’ordre d’al-Khwārizmī. Ce flottement entre “premier” et “quatrième” a, évidemment, pu déjà figurer dans la source arabe utilisée par Moïse ibn Tibbon.

<sup>29</sup> MS Vatican, fol. 49b; MS Christ Church College, fols. 21a-21b.

hébraïque, pas plus que dans le témoin du texte arabe commenté par Suter.<sup>30</sup>

Un autre exemple est associé aux sommes de cubes d'entiers impairs; il conduit à une équation bicarrée, que l'auteur appelle à résoudre par un changement de variable: comment trouver le dernier terme d'une telle suite sachant que la somme vaut 1225:  $1^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1225$ ? Cette égalité, on le sait, se réécrit:  $[(n + 1)/2]^2 \{2[(n + 1)/2]^2 - 1\} = 1225$ . Après avoir indiqué la suite d'opérations conduisant à la réponse, 9, l'auteur ajoute:

Si tu veux procéder par l'algèbre, pose le nombre (recherché) comme une chose, ajoute-lui 1, prends-en la moitié, multiplie-la par elle-même; ce qui en résulte, multiplie-le par son 'double moins 1'. Mets en opposition (*taqbil*) le résultat avec le nombre (1225). La chose est égale à 9, et c'est le nombre (recherché).

Si tu veux, pose le nombre multiplié par son 'double moins 1' [comme une nouvelle chose], soit '2 choses moins 1'. Mets en opposition le résultat avec le nombre donné (1225). La chose qui en résulte est 25 (la solution de l'équation quadratique  $z(2z - 1) = 1225$ , avec  $z = [(n + 1)/2]^2$ ). Tu dis alors: on a additionné de un jusqu'à un nombre impair, selon l'ordre des impairs, et on a atteint 25; quel est ce nombre impair? Procède comme précédemment; on trouve 9 (la somme des  $n$  premiers impairs s'écrit, en effet,  $[(n + 1)/2]^2$ ; égale à 25, l'expression permet d'obtenir le résultat).<sup>31</sup>

Que savons-nous de la diffusion du texte de Moïse ibn Tibbon? À vrai dire, peu de choses: l'ouvrage d'al-Ḥassār est mentionné avec considération par Juda ben Samuel ben 'Abbas (XIII<sup>e</sup> s.) qui a rédigé en hébreu un programme d'éducation, *Ya'ir Nativ* (*Ce qui éclaire le chemin*).<sup>32</sup> C'est la seule référence que nous connaissons. Quelle curiosité, voire quel intérêt l'ouvrage a-t-il pu susciter pour l'algèbre? Nous n'en savons rien.

Détail important pour l'historiographie de l'algèbre: Moïse ibn Tibbon a exécuté sa traduction à Montpellier en 1271; c'est aussi à Montpellier, quelques années plus tard, que furent rédigés en italien les deux plus anciens traités d'arithmétique pratique

<sup>30</sup> Suter, "Das Rechenbuch", p. 32, n. 4: "er hat vielleicht später noch ein Kapitel über Algebra hinzugefügt, das im Laufe der Zeit verloren gegangen ist".

<sup>31</sup> MS Vatican, fol. 51b; MS Christ Church College, fol. 22a, col. gauche.

<sup>32</sup> Texte hébreu dans N. Morris, *A History of Jewish Education* (hébr.), Book II, vol. two (Jérusalem, 1977), p. 71: "puis (l'élève) commencera à étudier les livres d'arithmétique: l'ouvrage du savant Rabbi Abraham ibn Ezra, qui rassemble la plupart des domaines de la science du nombre; et si Dieu n'a pas mis entre ses mains cet ouvrage, (il étudiera) alors l'ouvrage du savant arabe Ibn al-Ḥaṣṣār". On ignore tout de la biographie de cet auteur: s'il fait référence à la version hébraïque d'Ibn Tibbon (ce qui paraît vraisemblable, sans être assuré), alors on situera son activité à la fin du XIII<sup>e</sup> siècle.

comportant une partie algébrique. Il s'agit du *Tractatus algorismi* de Jacob de Florence, achevé à Montpellier en Septembre 1307,<sup>33</sup> et du *Libro di ragioni* de Paolo Gerardi, composé à Montpellier en 1328.<sup>34</sup> Montpellier, relais de textes arabes de *hisāb* issus d'Espagne? la question mérite d'être posée.

**L'ÉPÎTRE SUR LE NOMBRE D'ISAAC BEN SALOMON  
(SYRACUSE, FIN DU XIV<sup>e</sup> S.).  
ALGÈBRE ET *HISĀB* DANS LA TRADITION D'AL-KARAJĪ**

Isaac ben Salomon ben Šaddiq ben al-Aḥdab, l'espagnol, a dit: il est un savant arabe, à qui ses admirateurs ont demandé de composer à leur intention un ouvrage d'ensemble peu volumineux (*kelal qaṭon*), rassemblant tous les domaines de la science du nombre sur un mode concis (*be-derekh qešara*). Répondant à leur requête, il composa une épître très brève; il y faisait merveille (*higdil la'asot*, [Joel 2, 20]), s'agissant de la méthode et de la concision de l'exposé; et il la leur envoya. Quand l'épître parvint à ses destinataires, il apparut qu'elle dépassait leur entendement et mettait en défaut leur savoir. Aussi ils requièrent de l'auteur qu'il en fit un commentaire. Mesurant la pauvreté de leur savoir, il réagit à son tour avec malice (*be-'orma*) et rédigea à leur intention un commentaire de cette épître, inhabituel et profond, inaccessible à celui qui n'est pas doué de logique et ne discerne pas le chemin des causes [...?]; il l'intitula *Celui qui retire le voile* (*mesir ha-masweh* [Ex. 34,34]). Ils réagirent en l'intitulant *Celui qui ramène le voile* (*meshiv ha-masweh* [Ex. 34,35]). À son tour, il leur adressa ces mots: je suis tenu d'exposer et de présenter ces sujets à partir de leurs sources et de leurs fondements; je ne suis pas tenu de me faire comprendre par les bêtes sauvages. À la suite de cela, l'épître se diffusa parmi les savants, pour qui elle devint 'l'épître de la beauté parfaite'; ils se familiarisèrent avec son contenu; ils lui consacèrent des commentaires nombreux et variés, tous extrêmement amples.

C'est sur ces lignes que s'ouvre le manuscrit Cambridge University Library, MS Heb. Add. 492 (fols. 1b-38b), récemment cata-

<sup>33</sup> J. Hoyrup, "Jacopo de Florentia, *Tractatus algorismi* (1307), the chapter on algebra" (Roskilde Universitetscenter, Preprint n° 1, 1998), p. 1. Si l'*incipit* est en latin, le texte est rédigé en toscan. W. Van Egmond est plus réservé que J. Hoyrup quant à la date de composition de la partie algébrique, laquelle ne figure que dans l'un des trois manuscrits connus du *Tractatus algorismi*. Selon son opinion, rapportée par Hoyrup, la partie algébrique daterait plutôt de la fin du xiv<sup>e</sup> s. et aurait été insérée ultérieurement dans une copie de l'ouvrage de Jacob. Voir: J. Hoyrup, "The founding of Italian vernacular algebra" (Roskilde Universitetscenter, Preprint n° 2, 1999), p. 2.

<sup>34</sup> W. Van Egmond, "The earliest vernacular treatment of algebra: the *Libro di ragioni* of Paolo Gerardi (1328)", *Physis*, 20 (1978): 155-89.

logué.<sup>35</sup> Diverses formes de son surnom sont attestées: al-Aḥḍab, Ibn al-Ḥadab, al-Ḥadib.<sup>36</sup> L'auteur du texte hébraïque n'est pas un inconnu: c'est un astronome de renom,<sup>37</sup> un poète,<sup>38</sup> né en Castille au milieu du XIV<sup>e</sup> siècle, exilé en Sicile vers la fin du siècle, et actif à Syracuse et à Palerme jusque vers 1430. La suite de son préambule n'est pas sans intérêt. Isaac ben Salomon nous apprend qu'il s'est rendu en pays d'Islam (dans le royaume naṣride de Grenade? en Afrique du Nord?); là, il a eu entre ses mains l'épître en question; il l'a étudiée auprès de savants arabes, a pris connaissance du commentaire rédigé par l'auteur lui-même ainsi que d'autres commentaires et en a approfondi les secrets. Alors qu'il naviguait vers la Palestine, il fut pris dans une tempête et finit par échouer à Syracuse, en Sicile.<sup>39</sup> Installé au sein de la communauté juive de cette ville, il fut sollicité par certains de ses membres, désireux de disposer d'un ouvrage complet et concis en arithmétique. Pour répondre à leur demande, il entreprit alors de "traduire en hébreu pour eux l'épître en question, en

<sup>35</sup> S.C. Reif, *Hebrew Manuscripts at Cambridge University Library. A Description and Introduction* (Cambridge, 1997), p. 318. La copie (unique) est sans doute datée du XVII<sup>e</sup> siècle (Nous la désignerons, si nécessaire, sous le sigle MS C). B.R. Goldstein avait, le premier à notre connaissance, signalé l'existence de ce traité d'arithmétique, dans son "The Hebrew astronomical tradition: new sources", *Isis*, 72 (1981): 237-51; voir p. 238, n. 6.

<sup>36</sup> *Ibid.*

<sup>37</sup> M. Steinschneider, *Mathematik bei den Juden* (Berlin, 1893-1901; repr. Hildesheim, 1964), pp. 167-72 et 175-6; B.R. Goldstein, "Descriptions of astronomical instruments in Hebrew", dans D. King and G. Saliba (éds), *From Deferent to Equant: A Volume of Studies ... in Honor of E. S. Kennedy* (New York, 1987), pp. 105-41.

<sup>38</sup> J. Shirmann, *The History of Hebrew Poetry in Christian Spain and Southern France* (hébr.), Edited, Supplemented and Annotated by Ezra Fleischer (Jérusalem, 1997), pp. 618-23; O. Raanan, *L'œuvre poétique d'Isaac ben Salomon al-Aḥḍab* (hébr.) (Lod, 1988).

<sup>39</sup> Dans son traité *L'instrument précieux (Keli ḥemda)*, consacré à la description d'un équateur, Isaac ben Salomon indique: "En l'an (5)156 de la Création (= 1396), me trouvant dans la ville de Syracuse dans l'île de Sicile, il me fut donné par Dieu d'inventer un instrument, aisé à construire et apte à indiquer la position vraie des planètes [...]"; voir Goldstein, "Hebrew instrument descriptions", p. 128; pour le texte hébreu, voir, entre autres: Paris, BnF, MS héb. 1031, fol. 208a, l. 14. À cette date, notre auteur est donc déjà installé en Sicile. Nous savons qu'un grand nombre de juifs d'Espagne ont pris le chemin de l'exil après les persécutions de l'été 1391, d'autres périrent au cours de ces événements, tels l'astronome Juda ben Asher de Tolède, le maître d'Isaac, d'autres se convertirent au christianisme (I. Baer, *A History of the Jews in Christian Spain*, vol. II [Philadelphia, 1978], p. 97). On peut donc penser que l'arrivée d'Isaac en Sicile, après son naufrage en Mer Méditerranée, date de cette époque. Bien que la Sicile dépendît encore à cette époque de la Couronne d'Aragon, les communautés juives n'y furent pas soumises aux épreuves que connurent les juifs d'Espagne à la fin du XIV<sup>e</sup> siècle.

l'accompagnant de manière concise de commentaires et d'exemples" (fol. 1b, l. 14).

En effet, Isaac traduit cette épître, exploite le commentaire rédigé par l'auteur, et utilise, en particulier dans la partie algébrique, d'autres commentaires.

Qui est ce savant arabe connu et respecté, dont l'ouvrage arithmétique a donné naissance à de nombreux commentaires, à commencer par le sien propre? Isaac ben Salomon ne nous le dit pas, pas plus qu'il ne nous précise le titre de l'ouvrage originel. Il nous indique toutefois le titre du commentaire rédigé par l'auteur lui-même: *Celui qui retire le voile (mesir ha-masweh)*. Cette indication, jointe à l'analyse mathématique du texte hébreu, nous permet d'identifier sans erreur possible le savant arabe et son écrit: il s'agit d'Ibn al-Bannā' (1256-1321),<sup>40</sup> auteur de *Talkhīṣ a'māl al-ḥisāb (Ouvrage concis sur les opérations du calcul)*.<sup>41</sup> Le célèbre savant de Marrakech, auquel on attribue une centaine d'ouvrages,<sup>42</sup> a commenté lui-même ce bref écrit dans son *Raf' al-ḥijāb 'an wujūh a'māl al-ḥisāb (La levée du voile sur les méthodes des opérations du calcul)*.<sup>43</sup> Son *Talkhīṣ* a fait l'objet d'une quinzaine de commentaires entre le XIV<sup>e</sup> et le XV<sup>e</sup> siècle.<sup>44</sup>

Isaac ben Salomon suit scrupuleusement le plan du *Talkhīṣ*,<sup>45</sup> dont il commente les énoncés, un par un. Le passage commenté

<sup>40</sup> Sur Abū al-'Abbās Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Uthmān al-Azdī al-Marrākushī ibn al-Bannā', voir H. Suter et M. Ben Cheneb, "Ibn al-Bannā'", *Encyclopédie de l'Islam*, 2<sup>e</sup> éd., t. III (Leyde / Paris, 1971), pp. 753-4.

<sup>41</sup> M. Souissi (éd.), *Talkhīṣ a'māl al-ḥisāb* (Texte établi, annoté et traduit en français), (Tunis, 1969).

<sup>42</sup> H.P.J. Renaud, "Ibn al-Bannā' de Marrakech, sūfi et mathématicien", *Hespéris*, 25 (1938): 13-42; *id.*, "Sur un passage d'Ibn Khaldun relatif à l'histoire des mathématiques", *Hespéris*, 31 (1944): 35-47.

<sup>43</sup> M. Aballagh (éd.), *Raf' al-ḥijāb 'an wujūh a'māl al-ḥisāb* (Fès, 1994).

<sup>44</sup> A. Djebbar, "Les activités mathématiques dans les villes du Maghreb central (XI<sup>e</sup>-XIX<sup>e</sup> s.)", dans *Actes du 3<sup>e</sup> Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Alger, 1998), pp. 73-115; voir p. 96. Parmi les élèves célèbres d'Ibn al-Bannā', citons Muḥammad al-Ābilī de Tlemcen (1282-1356), qui fut, à Tunis au milieu du XIV<sup>e</sup> siècle, le maître en mathématiques d'Ibn Khaldūn (*ibid.* pp. 98-102). D'après M. Aballagh, le premier des commentaires du *Talkhīṣ* serait l'œuvre d'un élève d'Ibn al-Bannā', al-Hawārī (m. 1344); voir M. Aballagh, "La pensée mathématique d'Ibn Haydūr" (en arabe), dans *Actes du 3<sup>e</sup> Colloque maghrébin* (partie arabe), pp. 5-22, p. 6. Parmi les manuscrits collationnés par M. Souissi pour l'édition du *Talkhīṣ*, quatre sont accompagnés du commentaire d'al-Hawārī (Souissi, *Talkhīṣ* [partie française], p. 112).

<sup>45</sup> Voir les divisions du traité, dans Souissi, *Talkhīṣ*, partie française, pp. 28-9: Livre premier consacré aux opérations arithmétiques et divisé en trois parties – les entiers, les fractions, les radicaux; Livre second consacré à la détermination de l'inconnu à partir du connu. La deuxième partie de ce deuxième Livre porte sur l'algèbre.



du *Talkhīš* est présenté comme un lemme, précédé des mots “L’auteur a dit (*amar ha-meḥabber*)”, ou simplement “Il a dit”, et suivi du mot “commentaire (*perush*)”; le commentaire est généralement très étendu, comparé aux formulations lapidaires du texte commenté; il déborde tant la lettre que l’esprit de ce dernier et semble avoir emprunté à des sources très diverses, dont le *Raf’ al-ḥijāb*. L’identification systématique des sources arabes d’Isaac, autres que le *Talkhīš*, déborde largement le cadre de cette étude. Notre objectif ici est de décrire le niveau du savoir et des techniques algébriques désormais disponibles en hébreu grâce à cette “épître sur le nombre”.

La deuxième grande division de l’ouvrage a pour titre: “Sur les règles (*qawānīn / siddurim*) grâce auxquelles on peut parvenir à l’inconnu recherché (*al-majhūl al-maṭlūb / ha-muskal ha-mevuqqash*) à partir de ce qui est posé comme connu (*al-ma’lūm al-mafrūd / ha-yadu’a ha-munah*)”.<sup>46</sup> Elle se répartit en deux sections: la première porte sur les procédés reposant sur le rapport, soit d’une part la règle de trois, d’autre part la méthode de la double fausse position.<sup>47</sup> La deuxième est consacrée à l’algèbre: *al-jabr wa al-muqābala / ha-hashlama we-ha-haqbala*.<sup>48</sup> C’est celle qui retient notre attention; elle comporte les cinq chapitres suivants:

- 1) sur l’algèbre et l’explicitation de ses parties<sup>49</sup>
- 2) les procédés à l’œuvre dans les six cas<sup>50</sup>
- 3) l’addition et la soustraction [des polynômes]<sup>51</sup>

<sup>46</sup> Souissi, *Talkhīš*, arabe p. 67 (nous ne suivons pas toujours la traduction française); MS C, fol. 25a.

<sup>47</sup> Désignée ici en arabe par “*al-kiffāt*, les plateaux [de la balance]”, et en hébreu par “*moznayim*, balance”.

<sup>48</sup> Souissi, *Talkhīš*, arabe pp. 73-7; MS C, fols. 27a-38b. Le commentaire proprement dit s’achève au folio 35a, avec le dernier mot du *Talkhīš*. Les folios 36a-38b comportent deux compléments issus, nous dit “le commentateur”, des propos de savants arabes. Nous y reviendrons.

<sup>49</sup> MS C, fol. 27a, l. 3: *ba-hashlama we-ha-haqbala u-ve’ur ḥalqeyhem*. Il est intéressant de relever que le dernier mot (“parties”) ne correspond pas à la leçon retenue dans l’édition du texte arabe, qui a “*bayān durūbihi*, explicitation de ses cas”. Seul un des manuscrits collationnés par Souissi transmet la leçon “ses parties, *ajzā’ihi*” (Souissi, *Talkhīš*, p. 73, n. 3).

<sup>50</sup> MS C, fol. 29b, l.3. Il convient de corriger l’hébreu qui donne, par erreur, “les trois cas, *ba-minim ha-shelesha*”. Il s’agit évidemment des six équations canoniques: les trois “simples” et les “trois composées”.

<sup>51</sup> MS C, fol. 31b, ll. 14-15: “toutes ces espèces (*minim*) que sont les nombres, les choses (*devarim*), les biens (*mamonot*), les cubes (*me’uqqavim*) et les autres qui sont composées à partir de ces dernières, on les additionne les unes aux autres, on les soustrait les unes des autres, on les multiplie les unes par les autres, on les divise les unes par les autres”.

4) la multiplication [des polynômes]; la détermination de “l’exposant” et du nom [des monômes]<sup>52</sup>

5) la division [des polynômes].<sup>53</sup>

Dans l’histoire de l’algèbre arabe, l’écrit d’Ibn al-Bannā’ s’inscrit dans un chapitre inauguré à la fin du x<sup>e</sup> siècle par al-Karajī, celui de “l’arithmétisation de l’algèbre”.<sup>54</sup> À l’évidence, l’“épître sur le nombre” d’Isaac ben Salomon se fait l’écho de cette tradition arabe. Dans l’état actuel de nos connaissances, c’est le tout premier écho, en hébreu, de ladite tradition. En tant que tel, l’écrit d’Isaac ben Salomon appelle une double lecture: celle qui nous aide à préciser la diffusion des écrits algébriques

---

Les termes modernes de “monômes” et “polynômes” présentent des avantages pour une première lecture des textes que nous analysons; ils peuvent toutefois comporter des inconvénients sur le plan historique et épistémologique, en voilant des différences théoriques réelles: ainsi, est-on habilité à désigner les expressions “composées à partir des nombres, carrés, cubes, carrés-carrés, etc.”, comme des “polynômes”, en l’absence d’une théorie générale des puissances algébriques, quel qu’en soit l’habillage rhétorique? la maîtrise pratique d’opérations arithmétiques sur ces “expressions composées” suffit-elle pour parler d’une “arithmétique des polynômes”? Nous indiquons plus loin pourquoi il convient d’adopter la formulation “expressions algébriques”, plus modeste que celle de “polynômes”.

<sup>52</sup> MS C, fol. 33a, l. 16. Par analogie avec l’écriture des nombres exposée en son lieu, il y a une correspondance entre “l’exposant” ou le “degré” du monôme – terme rendu tant en arabe (*uss*) qu’en hébreu (*mossad*) par le mot désignant la base, le fondement – et son “nom” (*ism/shem*): à 1 correspond la chose, à 2 le bien, à 3 le cube, etc. Quant au nombre lui-même (notre monôme de degré 0), il n’a pas d’exposant: en fait, dans la multiplication et la division des monômes, on verra que le produit ou le quotient par un nombre n’affecte pas le degré du monôme multiplié ou divisé.

<sup>53</sup> MS C, fol. 34b, l. 31.

<sup>54</sup> R. Rashed, “al-Karajī”, dans *Entre arithmétique et algèbre* (Paris, 1984), pp. 31-42. *Id.* “L’algèbre”, dans R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes*, vol. II (Paris, 1997), pp. 31-54, à la p. 38: “appliquer l’arithmétique à l’algèbre, c’est-à-dire étudier systématiquement l’application des lois de l’arithmétique et de certains de ses algorithmes aux expressions algébriques et en particulier aux polynômes”; p. 40: “À partir des travaux d’al-Karajī, on voit se constituer un courant de recherche en algèbre, une tradition reconnaissable au contenu et à l’organisation de chacun des travaux. Ceux-ci, pour reprendre l’expression d’Ibn al-Bannā’ aux XIII<sup>e</sup>-XIV<sup>e</sup> siècles, ‘sont presque innombrables’”.

Il nous faut toutefois préciser ceci: les écrits “presqu’innombrables” qui naissent dans le sillage des travaux d’al-Karajī (encore faut-il hiérarchiser les travaux mêmes de ce dernier, selon les avancées théoriques qu’ils représentent, et les publics auxquels ils s’adressent) ne relèvent pas tous du même genre, et ne sanctionnent pas tous les mêmes acquis théoriques: entre un simple glossateur du *Kāfi fi al-ḥisāb*, voire du *Fakhrī*, et un mathématicien exploitant et prolongeant les inventions du *Badī’* (songeons à al-Samaw’al, pour ne citer que le plus célèbre), il y a les mêmes différences qui séparent un auteur de manuel d’un savant novateur. Nous nous attachons ici à caractériser ce que al-Aḥḍab a retenu du petit ouvrage d’al-Bannā’ et des “nombreux” commentaires qu’il a exploités dans la rédaction de son épître.

arabes en cette fin de XIV<sup>e</sup> siècle, et celle qui nous permet de reconstituer, fragment par fragment, les éléments d'une littérature mathématique hébraïque aux contours encore mal définis. Contentons-nous ici d'indiquer brièvement les traits saillants de l'exposé algébrique d'Isaac; quant aux sources arabes exploitées, nous signalerons toute référence qui nous paraît vraisemblable, sans prétendre, en aucune manière, être exhaustif.

*Les objets algébriques: termes primitifs et expressions composées*

Selon le vœu d'Isaac ben Salomon, son épître devait offrir au lecteur – par définition ignorant tout autre ouvrage hébraïque en la matière, et *a fortiori* tout ouvrage arabe – un tableau exposant aussi bien les fondements que les principaux résultats de “la science du nombre”. De fait, le texte que nous lisons aujourd'hui, en historien, est une réussite: le lexique est précis (une véritable terminologie algébrique est élaborée à partir de l'arabe), la synthèse des commentaires est généralement articulée avec sûreté même si l'éclectisme n'est pas toujours évité, le souci pédagogique est constant.

Avec les trois objets primitifs (nombre, chose/racine, bien/carré) et les trois notions fondamentales (restauration, mise en opposition, égalisation), sont présentés les objets généraux du calcul algébrique, tel que le conçoit al-Aḥḍab, à partir du *Talkhīṣ /Précis* d'Ibn al-Bannā', et des commentaires qu'il a exploités. Précisons les caractéristiques de ces fondements.

Commentant la formule lapidaire d'Ibn al-Bannā', “le pivot de l'algèbre (*madār al-jabr/ sibbuw ha-hashlama*) est [constitué de] trois espèces: le nombre, les choses et les biens”,<sup>55</sup> Isaac ben Salomon propose une analogie avec l'écriture des nombres: de même que le nombre comporte trois “rangs (*madregot*)” fondamentaux, que sont les unités, les dizaines, les centaines, à partir desquels on “compose” les autres rangs, de même, en algèbre, “on a fixé des rangs [fondamentaux], que sont les nombres, les racines et les carrés, les autres [rangs] étant composés (*murkavot*) à partir de ces derniers” (fol. 27a, ll. 20-21).

Les puissances successives de la variable sont définies ainsi: le carré est produit de la racine par la racine, le cube produit de la racine par le carré, le produit du cube par la racine donne un

<sup>55</sup> Souissi, *Talkhīṣ*, p. 73, l.(-1).

nouveau rang, appelé “carré-carré”; suivent le “carré-cube”, le “cube-cube”, le “carré-carré-carré”, le “cube-cube-cube” et aussi bien le “carré-carré-cube” et le “carré-cube-cube”, et “ainsi pour le reste” (fol. 27b, ll. 4-8). La définition des neuf premières puissances algébriques, ainsi que l’analogie avec les nombres, présentés comme puissances de 10, figurent déjà dans le *Fakhrī* d’al-Karajī, en ouverture de l’ouvrage; toutefois la définition “inductive” de la série des puissances qu’al-Karajī présente de manière parfaitement claire, n’apparaît pas sous la plume d’Isaac, soit qu’il ne l’ait pas connue, soit qu’il n’en ait pas mesuré la portée théorique.<sup>56</sup>

Quoi qu’il en soit, Isaac consacre un long développement aux objets généraux, ceux sur lesquels on peut étendre les opérations de l’arithmétique. Par là, il tente de fonder, de manière générale, le calcul arithmétique sur les expressions algébriques, avant de décrire en détail le champ, plus restreint, du calcul de “l’algèbre et *muqābala*”; ce dernier, on le sait, ne porte que sur des égalités

<sup>56</sup> Reprenant les notations de Woepcke, rappelons qu’al-Karajī définit “les rangs des inconnues (*marātib al-majhūlāt*)”, soit les puissances algébriques, en commentant la suite:  $a^2/a = a^3/a^2 = a^4/a^3 = \dots$  à l’infini; c’est ainsi qu’il écrit: “le produit du cube par son côté donne le carré-carré; il figure à la place du carré (multiplié) par lui-même, car le carré est moyenne (géométrique) entre la racine et le cube” (Paris, BnF, MS arabe 2459, fol. 2a, ll. 10-11), et “quand on multiplie ce qui figure dans un rang quelconque (= une puissance algébrique) par des racines, ce qui en résulte relève du rang suivant [...] Cette propriété (*ḥukm*) existe aussi dans les rangs du nombre, puisque l’unité est à la dizaine comme la dizaine est à la centaine [...] et cela jusqu’à l’infini” (*ibid.*, fol. 2b, ll. 1-10). Voir aussi F. Woepcke, *Extrait du Fakhrī. Traité d’algèbre par Abou Bekr Mohammed ben Alḥaṣan Alkarkhī* (Paris, 1853), p. 48. Ces principes fondateurs du calcul algébrique sont aussi exposés, quoique de manière plus sobre et plus “pratique” dans le livre de *ḥisāb* d’al-Karajī; voir son *Kāfi fī al-ḥisāb*, éd. S. Chalhoub (Alep, 1406 H./1986), p. 159, ll. 9-10: “sache que le rapport de un à la racine est comme le rapport de la racine au carré (le bien = *māl*), et aussi comme le rapport du carré au cube”.

Il est probable qu’Isaac n’a pas connu (ou étudié) le *Kāfī*, ni le *Fakhrī*; l’essentiel, toutefois, c’est qu’en ne retenant pas la définition “karajienne”, inductive, des puissances, il s’interdit l’accès à une théorie générale des polynômes: on peut parler, sans restriction théorique, de monômes, binômes, ..., quadrinômes, mais il est préférable d’appeler “expressions algébriques” les “très nombreuses espèces [d’objets algébriques]” obtenues par composition des quatre espèces génériques qui sont présentées ensuite. Pour cette distinction, importante pour évaluer la dynamique de développement de l’algèbre arithmétisée, je suis redevable à R. Rashed, qui a attiré mon attention sur le problème, au cours de nos discussions sur le texte d’Isaac. Soulignons cependant que la notion d’exposant (arabe *uss* / héb. *mossad*) est mentionnée par Isaac, en relation avec la définition initiale, à la fin de sa présentation des neuf premières puissances (MS C, fol. 27b, ll. 8-9: “de même qu’on a assigné aux rangs du nombre des ‘exposants’ [*mossadim*], de même pour ces rangs”), avant d’être pleinement activée dans la présentation de la multiplication et de la division des expressions algébriques.

réductibles aux six équations canoniques de degré inférieur ou égal à deux.<sup>57</sup>

Ces objets généraux sont de quatre types, désignés génériquement comme des “termes (*şedadin*)”:

1) le terme “simple (*stam*)” ou “isolé (*levado*)”, qu’il appelle aussi “entier (*shalem*)”, tel que “nombre”, “chose”, “bien”, “cube”; il semble qu’Isaac désigne par là les notions primitives, de la même manière que la notion primitive de nombre (songeons à la définition euclidienne: “une collection d’unités”) précède la manipulation arithmétique des nombres.

2) le terme “lié (*meḥubbar*)”: il s’agit d’un terme “simple”, au sens précédent, “lié” à un autre terme simple, lequel peut être de rang différent, chacun des deux éléments liés “signifiant par lui-même (*omed be-’aşmo*)”, au sens où “la racine n’est pas (nécessairement) celle du carré; le carré n’est pas (nécessairement) celui du cube”. Doit-on songer ici à des inconnues (des indéterminées) distinctes, intervenant par exemple dans des expressions du type ‘ $x^2 + y^3$ ’?

3) le terme “additif (*nosaf*)”, tel que “carré plus racine” ou “cube plus carré”; la racine étant bien alors “la racine du carré”, le carré étant bien “le carré du (défini par le même) cube”; autrement dit, on a affaire à la même inconnue.<sup>58</sup> L’expression algébrique ‘un carré plus un nombre’ est aussi un “terme additif”, quand bien même “il (le nombre) n’est pas proportionnel (à l’inconnue) [...]”.<sup>59</sup>

4) le terme “soustractif (*nazor* ou *ḥaser*)”, tel que “carré moins chose” ou “cube moins carré”. Comme dans la définition précédente, c’est la même variable qui est dénotée dans chacun des deux éléments du binôme.

<sup>57</sup> MS C, fol. 27b, ll. 9-30. Si Isaac a emprunté à une source arabe, nous ne sommes pas en mesure de l’identifier. N’oublions pas qu’il a étudié des livres arabes, et aussi consulté des maîtres arabes, avec lesquels il a étudié le *Talkhīṣ* d’Ibn al-Bannā’.

<sup>58</sup> À l’appui de cette définition, Isaac invoque l’exemple numérique ‘un et un quart’: le quart est bien le quart de l’unité considérée. Avant d’insister sur le fait que “les ‘termes’ dans cette discipline (l’algèbre) sont au nombre de quatre, l’entier, le lié, l’additif et le soustractif”, Isaac avait souligné “de même que les nombres [se présentent] selon quatre aspects”. Reconnaissons que le rapprochement n’est pas très éclairant!

<sup>59</sup> Soulignons qu’une claire affirmation de la proportion  $a^2/a = a/1$  lui aurait permis de contourner cet obstacle théorique. Allons plus loin, on mesure à ce propos l’importance décisive de l’identification  $x^0=1$  (quelle qu’en soit la formulation) pour dégager la notion générale de polynômes. Relevons toutefois qu’ici l’exigence opératoire prend le dessus, même si on ne dispose pas de moyen théorique pour identifier le nombre à un monôme de degré zéro.

Dans cette discipline (ou cet art), conclut Isaac ben Salomon, on pose donc quatre termes – isolé, lié, additif, soustractif. Et de même que les nombres additionnés, soustraits et autres, peuvent être de rangs différents, unités, dizaines, centaines, milliers, et autres; de même, dans cette discipline, les termes peuvent être de rangs différents, cubes, carrés, choses; et quand on compose (*ke-she-yitrakvu*) les termes les uns avec les autres, on obtient de très nombreux types (*panim rabbim me'od*) (fol. 27b, l. 28).

Pour laborieuse qu'elle soit, cette construction théorique ne manque pas d'intérêt, dans la mesure où elle vise à décrire la nouveauté des objets algébriques, pour fonder la conduite pratique des opérations (en particulier la règle des signes et la règle des exposants, exposées ultérieurement), et étendre ainsi à ces objets nouveaux les opérations de l'arithmétique.

On a vu comment les exigences opératoires venaient parfois déborder la rigidité (voire l'inadéquation) des définitions. À l'inverse, ces dernières viennent parfois entraver la dynamique du geste opératoire. C'est ainsi que pour rendre compte de la "composition de genres distincts" (nous dirions aujourd'hui la somme algébrique de monômes non semblables), Isaac développe une distinction posée par Ibn al-Bannā': "La somme des genres distincts [est signifiée] par la [copule] conjonctive 'et'..."; "la différence des genres distincts [est signifiée] par la copule d'exclusion".<sup>60</sup> Cette distinction, empruntée à la grammaire, conduira Isaac à de fastidieux développements pour justifier les règles opératoires; ces développements seraient considérablement réduits si on identifiait simplement la copule 'et' à l'indication d'une addition, et la copule 'à l'exclusion de' à l'indication d'une soustraction, puisqu'après tout, l'auteur rappelle lui-même que la somme et la différence des "genres semblables" s'effectuent comme pour les nombres.

Enfin, le champ de l'algèbre comme discipline calculatoire est restreint aux seules égalités (entre expressions algébriques) réductibles aux six équations canoniques. Elle est présentée comme une partie, et une partie seulement, de "cette discipline" dont on vient de décrire les contours théoriques. Cette partie est soumise à des conditions particulières, où l'on reconnaît aisément la structure de la classification canonique d'al-Khwārizmī:

<sup>60</sup> Arabe: "*jam' al-ajnas al-mukhtalifa bi-waw al-'atf; tarḥ al-ajnas al-mukhtalifa bi-ḥarf al-istithnā*" (Souissi, *Talkhīṣ*, p. 75). Hébreu: "*qibbuṣ ha-sugim ha-mithalpim be-waw ha-me'atṭef; gir'on ha-sugim ha-mithalpim be-'ot ha-nezorut*" (MS C, fol. 31b, l. 29 et fol. 32a, l. 34).



- on ne doit pas trouver d'“espèce semblable (*min domeh*)” dans chacun des deux termes de l'égalité;
- dans un terme de l'égalité ne figure qu'une seule espèce, et dans l'autre terme deux espèces au plus;
- les seules espèces pouvant intervenir dans les deux termes de l'égalité sont le nombre, la racine et le carré, à l'exclusion de toute autre (on retrouve bien ainsi six cas d'égalité possibles):

la restauration (*ha-hashlama*), la mise en opposition (*ha-haqbala*) et l'égalisation (*ha-hashwa'a*) sont soumises à ces conditions. Si, dans un problème, un terme est égalé à un autre terme, il faut ramener le problème de façon qu'il vérifie les conditions indiquées. Si cela n'est pas possible, alors le problème n'est pas résoluble par la voie de l'algèbre (*al derekh ha-hashlama we-ha-haqbala*); il est possible qu'il soit résoluble par d'autres voies.<sup>61</sup>

### *Notations algébriques et résolution des équations canoniques*

L'analyse des six équations canoniques, que nous ne détaillerons pas, s'accompagne de deux remarques que nous voulons souligner; elles témoignent de la diversité des sources qu'Isaac ben Salomon a su exploiter en même temps qu'elle confère parfois à son exposé un caractère éclectique.

Dans un passage controversé de sa *Muqaddima*, Ibn Khaldūn aurait fait état de la réticence d'Ibn al-Bannā' concernant le recours aux notations, déjà en usage chez ses prédécesseurs.<sup>62</sup>

<sup>61</sup> MS C, fols. 27b, l. 36-28a, l. 1. Allusion aux équations cubiques? à leur résolution par voie géométrique? C'est possible, mais loin d'être sûr. On ne trouve aucune remarque analogue dans le *Raf' al-hijāb* d'Ibn al-Bannā'; en revanche, on peut relever dans son *Kitāb fi al-jabr wa al-muqābala*, une distinction entre les équations non résolubles (pour reprendre le langage moderne) et celles qui le sont par la méthode de l'algèbre, à savoir celles qui se ramènent à l'un des six cas canoniques. Dans son langage, “[l'équation, *al-mu'adala*] se répartit en deux classes: celle qui ne permet pas d'aboutir à la connaissance de la quantité inconnue [...]; et celle qui permet d'aboutir à la connaissance de la quantité inconnue, à savoir celle qui isole une des trois espèces que sont le nombre, le bien, et sa racine, l'égalant à l'une des autres espèces; et l'on obtient trois cas [...], ou bien aux deux autres espèces; et l'on obtient aussi trois cas”; après avoir dressé la liste des six cas canoniques, Ibn al-Bannā' ajoute: “[une équation] qui ne relèverait pas de ceux-ci [les six cas], on ne parviendra pas à déterminer l'inconnu qu'elle recèle, par la voie de l'algèbre, sauf si elle se ramène à 'des cubes égalent un nombre', auquel cas on le déterminera par l'extraction d'une racine cubique”; texte arabe dans A.S. Saidan, *History of Algebra in Medieval Islam* (arabe), Part II, *Algebra in Western Islam. A Study of Ibn-Badr and Ibn al-Bannā'* (Koweit, 1986), pp. 542-3. Isaac ben Salomon a-t-il connu cet ouvrage? Au regard de ses autres développements sur l'algèbre, cela paraît peu probable.

<sup>62</sup> F. Woepcke, “Notices sur les notations algébriques employées par les Arabes”, *Journal Asiatique*, V<sup>e</sup> série, tome IV (1854): 348-84, voir pp. 370-2; Renaud, “Sur un passage d'Ibn Khaldun relatif à l'histoire des mathématiques”, pp. 39-43.

Quoi qu'il en fût, ni son *Talkhīṣ* ni son *Raf' al-ḥijāb* ne recourent à quelque symbolisme que ce soit: les formulations sont entièrement rhétoriques. C'est donc à d'autres sources que se réfère Isaac quand, avant de commenter la résolution des six équations canoniques, il écrit:

les algébristes (les hommes de l'art, *anshey ha-mel'akha*) ont convenu de poser à la place de la racine (*shoresh*) [la lettre *shin*]  $\psi$ , à la place du bien (*mamon*) [la lettre *mem*]  $n$ ; le cube (*me'uqqav*) se dit en arabe *ka'b* et ils posent [la lettre *kaf*]  $\nu$ ; dans notre langue, à l'instar de [la racine] '*a.q.v.*, nous posons à sa place [la lettre '*ayin*]  $\nu$ . La méthode est la suivante: quand tu veux représenter une racine, tu écris 1 et au-dessus tu places  $\psi$  comme sur cette figure, et 2 racines ainsi et 3 racines ainsi, et ainsi de suite. Et quand tu veux représenter 1 bien, tu écris 1 et au-dessus tu places  $n$  ainsi, et 2 biens ainsi, et 3 biens ainsi, et ainsi de suite. Et quand tu veux représenter un cube [...]. Quant aux nombres, on ne leur affecte aucun signe, si ce n'est les nombres eux-mêmes. Si tu veux représenter un carré-carré, marque ainsi 1 surmonté de deux  $n$ , et 2 carrés-carrés, et 3 carrés-carrés ainsi. Quant au carré-cube, dessine ainsi 1 surmonté de  $n$  et  $\nu$ ; et pour 1 cube-cube, dessine 1 surmonté de deux  $\nu$ . Comprends bien cela.<sup>63</sup>

Nous n'avons pas relevé d'autres notations ou signes algébriques (par exemple, pour l'égalité), et surtout, il n'est pas fait usage de cette notation dans la suite de notre texte, ni dans la résolution des équations, ni dans la présentation des opérations sur les expressions algébriques. Isaac a sans doute relevé des remarques de ce type dans quelque commentaire du *Talkhīṣ* que nous ne sommes pas en mesure d'identifier.<sup>64</sup>

<sup>63</sup> MS C, fol. 29b, ll. 5-11.

<sup>64</sup> Depuis les travaux de Woepcke (1854) sur al-Qalaṣādī (m. 1486), nous savons que l'usage de notations algébriques était avéré au xv<sup>e</sup> siècle (Voir Woepcke, "Notices sur les notations algébriques", pp. 358-69 et M. Souissi, *Kashf al-asrār 'an 'ilm ḥurūf al-ghubār li-al-Qalaṣādī* [Tunis, 1988]). Les recherches de Renaud (1938) sur les commentaires du *Talkhīṣ* ont révélé l'usage de notations un siècle plus tôt, chez des commentateurs tels qu'Ibn Qunfūdh de Constantine (m. 1407) et al-Mawāḥidī au xiv<sup>e</sup> siècle (Renaud, "Sur un passage d'Ibn Khaldun relatif à l'histoire des mathématiques", pp. 43-7). Sur Ibn Qunfūdh, voir, G. Sarton, *Introduction to the History of Science*, vol. III (Baltimore, 1948), pp. 1764-6; Djebbar, "Les activités mathématiques dans les villes du Maghreb central (xi<sup>e</sup>-xix<sup>e</sup> s.)", p. 113.

Dans son propre commentaire du *Talkhīṣ*, al-Qalaṣādī, comme le rappelle Souissi (*Talkhīṣ*, trad. fr., p. 92, n. 2), présente ces notations comme étant usuelles. En effet, c'est en ouverture du chapitre sur les procédés de résolution des six équations canoniques qu'il définit ces notations; par la suite, il en fait un usage systématique; voir: Paris, BnF, MS arabe 2464, fol. 62a, ll. 19-21: "il est généralement acquis chez eux [les algébristes] (*wa-min iṣṭilāḥihim*) qu'on place au-dessus [du nombre] de la chose un *shin*, au-dessus du bien un *mīm*, au-dessus du cube un *kāf*. S'il y a un carré-carré (*māl-māl*), on pose au-dessus deux *mīm* [...]; et ainsi pour un cube-cube, deux *kāf*".

Deuxième remarque. Après son commentaire sur les procédés de résolution des six équations canoniques, Isaac ben Salomon se réfère à “l’un des experts arabes dans cette discipline” qui a proposé une procédure de résolution des trois équations composées (les équations trinômes) “sans restauration ni réduction”, autrement dit sans normalisation de l’équation. Isaac décrit alors la procédure proposée pour chacun des trois types d’équation, suivi d’exemples numériques.<sup>65</sup> Ces procédures n’apparaissent ni chez al-Khwārizmī, ni chez Abū Kāmil; elles sont exposées chez al-Karajī, dans son *al-Fakhrī fī al-jabr wa al-muqābala*. Il n’est pas sans intérêt de relever qu’un des exemples numériques traités par Isaac,  $3x^2 + 6x = 24$ , figure déjà dans le *Fakhrī*.<sup>66</sup> Ces procédures sont énoncées dans le *Raf’ al-ḥijāb*, mais sans exemples numériques.<sup>67</sup>

### *Les opérations sur les expressions algébriques*

L’addition et la soustraction des expressions algébriques sont longuement glosées. Nous nous arrêterons seulement sur la multiplication et la division.

La multiplication des expressions algébriques requiert une définition rigoureuse du degré ou exposant du monôme; les règles d’addition de ces exposants par quoi se traduit la multiplication des monômes; les règles des signes pour le produit des coefficients des monômes, selon qu’ils sont “additifs” ou “soustractifs”.

La technique opératoire retenue pour la multiplication est celle des tableaux, qui n’apparaît en aucune manière dans le *Talkhīṣ*.<sup>68</sup> C’est ainsi que la multiplication de  $(3x^3 + 7x^2 + 10x)$  par  $(9x^3 + 6x^2 + 5x)$  se déploie en deux tableaux.<sup>69</sup>

<sup>65</sup> MS C, fols. 31a, l. 4-31b, l. 14.

<sup>66</sup> Paris, BnF, MS arabe 2459, fol. 30a, ll. 12-13: “Si on dit trois carrés et six racines sont égaux à 24, et que tu veuilles déterminer la chose sans réduire (*min ḡayr radd*) les carrés (*al-amwāl*) à un seul carré [...]”; Woepcke, *Extrait du Fakhrī*, p. 65. S’agissant des deux autres types d’équation, on a, comme exemples numériques,  $3x^2 + 12 = 5x$  (al-Karajī) /  $3x^2 + 9 = 12x$  (Isaac);  $2x^2 = 4x + 24$  /  $3x^2 = 8x + 16$ .

<sup>67</sup> Aballagh (éd.), *Raf’ al-ḥijāb*, p. 311, ll. 8-17.

<sup>68</sup> Rien de tel, non plus, dans le *Raf’ al-ḥijāb*, qui ne donne aucun exemple numérique dans le “chapitre sur la multiplication algébrique”; voir Aballagh (éd.), *Raf’ al-ḥijāb*, pp. 315-16. À l’évidence, Isaac a emprunté ici à quelqu’autre auteur.

<sup>69</sup> MS C, fol. 34b, ll. 5-18.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
10	7	3
5	6	9
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
		50	35	15	18	27
			60	42	63	
				90		
		50	95	147	81	27

Le premier tableau présente les deux facteurs du produit recherché: en trois colonnes, les exposants des monômes dans l'ordre décroissant (en rouge dans le manuscrit); en deux lignes, les coefficients des monômes de chacune des deux expressions. Le deuxième tableau déploie les produits partiels des coefficients rapportés à chacun des monômes-produits; la dernière ligne permet de lire directement, et dans l'ordre décroissant des exposants, les coefficients de l'expression-produit. Détail important, ce deuxième tableau comporte 7 colonnes, alors que les exposants du produit, dans l'exemple choisi, vont seulement de 6 à 2: une colonne vide "prévoit" les monômes de degré 1, et la dernière colonne, marquée d'un zéro, "prévoit" les nombres. La présence de ce zéro est ainsi commenté: "à la fin, nous avons marqué zéro (*sifra*); en effet, c'est ce qui convient lorsqu'apparaît un nombre".<sup>70</sup>

\* \* \*

<sup>70</sup> Pour l'historien, cette remarque sur le zéro pourrait revêtir une importance considérable, si elle traduisait une claire conscience de l'assimilation du nombre à une espèce affectée de l'exposant zéro (des monômes de degré 0) et qu'on pouvait l'entendre comme  $x^0=1$ . Dans l'état actuel de nos connaissances, cette affirmation théorique, et les conséquences qu'elle permet de déployer, apparaît pour la première fois chez un successeur d'al-Karajī, al-Samaw'al (m. 1174) (Rashed, "L'algèbre", p. 38). Cela n'est pas le cas dans notre texte, où cette remarque sur l'exposant 0 dans le tableau est faite "en passant": le nombre reste une espèce sans exposant qui lui soit assignable. Ne négligeons pas pour autant sa portée: dans un autre contexte, cette remarque sur le zéro *pourrait* être un point d'appui pour une unification de l'écriture polynomiale.

Les formules du *Talkhīṣ* relatives à la division sont commentées plus sobrement: pour diviser deux monômes, on soustrait les exposants; le quotient de deux monômes semblables est un nombre; le quotient d'un monôme par un nombre est un monôme semblable; le quotient d'un polynôme par un monôme se ramène aux opérations sur chacun des termes du polynômes. En revanche deux limitations interdisent toute extension de la division: "on ne divise pas une espèce inférieure par une espèce supérieure (un monôme quelconque par un monôme de degré supérieur)", "on ne divise pas par une espèce soustractive" (ce qui revient à exclure comme diviseur un polynôme quelconque).<sup>71</sup> La première limitation vient de ce que l'on ne peut soustraire un nombre plus grand d'un nombre plus petit. Quant à la deuxième, nous indique Isaac, elle tiendrait à la définition même de la division donnée par l'auteur: "décomposer le dividende en parties égales dont le nombre est celui des unités contenues dans le diviseur". Or, commente Isaac, dans un terme soustractif, nous ne pouvons pas évaluer le résultat d'un tel retranchement, seul susceptible (doit-on comprendre) de nous permettre d'effectuer la division. Ainsi:

si le diviseur est 'un carré moins deux racines' [ $x^2 - 2x$ ], lorsqu'on retire du carré les deux racines, on ne sait pas combien dans le carré il reste de racines, qui constitueraient le diviseur [ainsi réduit à un seul monôme]. Il en est de même pour toutes les espèces. Et c'est clair.<sup>72</sup>

Avec ces mots s'achève le commentaire du *Talkhīṣ* proposé par Isaac.

Dans les 5 folios qui suivent, on trouve deux compléments introduits par les mots "le commentateur a dit".

Le premier est emprunté "à un savant arabe"; il se présente comme une illustration des six équations canoniques, à la

<sup>71</sup> Souissi, *Talkhīṣ*, p. 77; MS C, fol. 35a.

<sup>72</sup> MS C, fol. 35a, ll. 28-29. Remarquons que la même limitation pourrait être imposée aux termes additifs! Pour sa part, al-Karajī n'avait pas non plus envisagé la division par un polynôme quelconque (Woepcke, *Extrait du Fakhrī*, p. 53: "on ne peut pas diviser une puissance d'un certain ordre par une quantité composée de deux puissances d'un ordre différent"; *Fakhrī*, Paris, BnF, MS arabe 2459, fol. 9b, ll. 8-9). En revanche, la division d'un monôme par un monôme était pensée en toute généralité par al-Karajī: la série des puissances forme une suite géométrique et les puissances "descendantes" – que nous appelons aujourd'hui négatives – sont représentées par les inverses des puissances "ascendantes"; ainsi  $a : a^2 = 1/a$  (*ibid.*, fol. 10b). Il a appartenu à al-Samaw'al, semble-t-il pour la première fois, de définir la division par un polynôme quelconque (Voir Rashed, "Al-Karajī", pp. 33-4).

manière de ce qu'on trouve déjà dans l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī: "on divise 10 en deux parties, etc.". Une exception pourtant: l'exemple illustrant la sixième équation canonique est une équation bicarrée (absente chez al-Khwārizmī):  $4(x^2 + 8) = x^2x^2$ . Le changement de variable y est clairement indiqué:

pose le carré comme si c'était une chose [...]; la chose multipliée par elle-même devient un (nouveau) carré, et il vient '4 choses plus 32 zuzim sont égaux à un carré'. Il s'agit là du sixième type des six types de l'algèbre. Procède comme tu le sais etc.<sup>73</sup>

Le deuxième complément est emprunté "aux propos des experts en cette science". Le commentateur y expose trois règles susceptibles de contourner les limitations imposées à la division des polynômes, précédemment indiquées. Il s'agit des trois transformations suivantes:  $(a/b)b = a$ ;  $a/b + b/a = (a^2 + b^2)/ab$ ;  $a/b - b/a = (a^2 - b^2)/ab$  (avec  $a > b$ ). De fait, des équations telles que  $x/(10 - x) + (10 - x)/x = 2 \frac{1}{6}$  sont alors ramenées à des équations quadratiques. Plusieurs des équations ainsi résolues sont repérables dans les ouvrages d'al-Khwārizmī ou Abū Kāmil. Il serait vain toutefois de penser, tant ces exemples sont classiques, qu'Isaac ben Salomon les a empruntés directement à ces ouvrages. Il en est de même pour les quelques problèmes "pratiques", traduits en équations ou système d'équations linéaires, sur lesquels s'achève notre texte.<sup>74</sup>

Comment qualifier le contenu de l'ouvrage d'Isaac ben Salomon, et plus particulièrement, sa partie algébrique?

Tout en s'appuyant sur le *Précis* d'Ibn al-Bannā' (dont il traduit scrupuleusement et fidèlement les énoncés), Isaac ben Salomon a amalgamé de nombreuses sources, pour l'essentiel des ouvrages arabes de *ḥisāb*, produisant à son tour, en hébreu, un copieux ouvrage de *ḥisāb*. S'agissant de la partie consacrée à l'algèbre, son exposé se fait l'écho de la riche tradition issue des travaux d'al-Karajī. Sous cet aspect, et dans l'état actuel de nos connaissances, c'est le seul texte qui atteste, en hébreu, de la vitalité de cette tradition.

Que savons-nous de la diffusion de cette "épître sur le nombre"? Pour l'heure, nous n'en avons relevé aucune référence dans les textes mathématiques composés ultérieurement et qui nous sont

<sup>73</sup> MS C, fol. 36b, ll. 33-36.

<sup>74</sup> Le texte s'interrompt au milieu d'une phrase, sans doute à la fin d'un cahier.



connus. Contrairement à ses écrits en astronomie, dont il nous reste plusieurs manuscrits et qui sont cités par des auteurs du xv<sup>e</sup> siècle, cette épître ne nous est parvenue qu'en une seule copie et nous ne connaissons pas d'autre ouvrage de mathématiques d'Isaac ben Salomon.<sup>75</sup> Mentionnons toutefois que notre auteur est cité, pour un écrit astronomique, par Mordekhay Finzi de Mantoue, un demi-siècle plus tard.<sup>76</sup> Ce Mordekhay Finzi, qui a manifesté au xv<sup>e</sup> siècle un si grand intérêt pour l'algèbre, aurait pu connaître l'*Épître sur le nombre* d'Isaac ben Salomon. L'a-t-il effectivement connue? Nous ne pouvons que poser la question.

<sup>75</sup> L'attribution à Isaac d'un ouvrage d'arithmétique intitulé "L'œuvre du calculateur (*Ma'aseh Hoshev*)" relève sans doute d'une confusion avec l'ouvrage du même nom dû à Gersonide. Cette attribution apparaît dans les bibliographies anciennes: J.C. Wolf, *Bibliotheca Hebraea*, vol. I (Hamburg / Leipzig, 1715), n° 1160, p. 648; mention reprise dans G.B. De Rossi, *Dizionario storico degli autori ebrei e delle loro opere* (Parma, 1802), vol. I, p. 45; puis dans H. Nifi et M. Girondi, *Toledot Gedoley Yisra'el u-Geoney Italiyya (Histoire des grands hommes d'Israël et des savants d'Italie)* (Trieste, 1853), p. 191, n° 144. Steinschneider ainsi que les bibliographes plus récents ont mis en doute l'existence de ce texte. Toutes nos tentatives pour en repérer une trace récente se sont révélées vaines.

<sup>76</sup> Y.T. Langermann, "The scientific writings of Mordekhay Finzi", *Italia*, vol. VII (1988): 7-44, p. 20.