Can. J. Math., Vol. XXIII, No. 5, 1971, pp. 811–815

QUASI-INJECTIVITÉ DE CERTAINS MODULES SUR LEUR ANNEAU D'ENDOMORPHISMES

ANNIE CAILLEAU

Introduction. Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau unitaire. Soit M_R un R-module à droite; M_R est muni canoniquement d'une structure de module à gauche sur l'anneau Λ de ses endomorphismes, pour laquelle il sera noté ${}_\Lambda M$.

On sait [3, Théorème 3.1] que si M_R est quasi-injectif à sous-module singulier nul, Λ est un anneau régulier au sens de Von Neumann, auto-injectif à droite. Dans [5] B. Osofsky étudie l'auto-injectivité à gauche de Λ et pose les problèmes suivants.

(1) Si M_R est un module injectif à sous-module singulier nul, et si Λ est auto-injectif à gauche, ${}_\Lambda M$ est-il injectif?

(2) Si l'on remplace l'hypothèse M_R injectif par M_R quasi-injectif, ${}_\Lambda M$ est-il quasi-injectif?

On apporte ici une réponse affirmative à ces deux questions lorsque R est un anneau commutatif (Théorèmes 7 et 8).

Dans le cas où R n'est plus commutatif, on montre que sous les hypothèses du problème (1), ${}_\Lambda M$ est toujours quasi-injectif si et seulement si la propriété suivante est vraie: soit e un idempotent d'un anneau R régulier auto-injectif à droite, tel que l'anneau eRe soit auto-injectif à gauche; alors eR est un eRe-module à gauche injectif.

Nous montrons tout d'abord comment dans la plupart des cas on peut supposer l'anneau R régulier auto-injectif à droite.

Soient Z l'idéal singulier à droite de R et $\bar{Z}$ l'extension essentielle maximale de Z dans R. $\bar{Z}$ est un idéal bilatère de R et l'anneau $\bar{R} = R/\bar{Z}$ est à idéal singulier à droite nul. Considéré comme module à droite sur lui-même, $\bar{R}$ admet donc pour enveloppe injective un anneau régulier auto-injectif à droite que nous noterons $\hat{R}$. Pour un R-module à droite M_R, nous désignerons par $Z(M_R)$ le sous-module singulier de M_R.

LEMME 1 (avec les notations précédentes). *Soit M_R un module quasi-injectif tel que $Z(M_R) = 0$. Alors*

(a) *Si l'anneau R est commutatif, M_R peut être muni d'une structure de $\hat{R}$-module quasi-injectif $M_{\hat{R}}$ tel que $Z(M_{\hat{R}}) = 0$.*

(b) *Si M_R est un module injectif, M_R peut être muni d'une structure de $\hat{R}$-module à droite injectif $M_{\hat{R}}$ tel que $Z(M_{\hat{R}}) = 0$.*

Reçu le 8 février 1971.

De plus dans les deux cas, les endomorphismes de $M_{\hat{R}}$ et de M_R coïncident.

Démonstration. Soit E_R une enveloppe injective de M_R; on a $Z(M_R) = Z(E_R) = 0$ d'où $\bar{Z} \cdot M_R = \bar{Z} \cdot E_R = 0$. M_R et E_R sont donc munis canoniquement d'une structure de $\bar{R}$-modules à droite pour laquelle nous les noterons respectivement $M_{\bar{R}}$ et $E_{\bar{R}}$. On vérifie facilement que $Z(M_{\bar{R}}) = Z(E_{\bar{R}}) = 0$ et que les endomorphismes de $M_{\bar{R}}$ (resp. $E_{\bar{R}}$) sont les endomorphismes de M_R (resp. E_R). Enfin $E_{\bar{R}}$ est l'enveloppe injective de $M_{\bar{R}}$ et comme d'après ce qui précède $M_{\bar{R}}$ est stable par tout endomorphisme de $E_{\bar{R}}$, $M_{\bar{R}}$ est un module quasi-injectif [**2**, § 3].

Soient $x \in E_{\bar{R}}$ et f_x l'homomorphisme de $\bar{R}$ dans $E_{\bar{R}}$ défini par $f_x(r) = xr$. f_x se prolonge en un $\bar{R}$-homomorphisme h_x de $\hat{R}$ dans $E_{\bar{R}}$, et ce prolongement est unique puisque $Z(E_{\bar{R}}) = 0$. Si l'on pose pour $s \in \hat{R}$, $x \in E_{\bar{R}}$, $xs = h_x(s)$, on munit $E_{\bar{R}}$ d'une structure de $\hat{R}$-module à droite $E_{\hat{R}}$. Une démonstration élémentaire permet d'établir que $E_{\hat{R}}$ est un module injectif, tel que $Z(E_{\hat{R}}) = 0$, et qu'il a mêmes endomorphismes que $E_{\bar{R}}$. L'assertion (b) est donc établie.

Montrons maintenant (a). R étant commutatif, $\bar{R}$ l'est, et l'on a donc pour tous $x \in E_{\bar{R}}$, $s \in \bar{R}$ l'inclusion entre annulateurs $\operatorname{ann}_{\bar{R}} x \subseteq \operatorname{ann}_{\bar{R}} h_x(s)$. Comme $M_{\bar{R}}$ est quasi-injectif, ceci entraîne que $h_x(s)$ appartient à $M_{\bar{R}}$ dès que x lui appartient [**1**]. $M_{\bar{R}}$ est donc un sous $\hat{R}$-module de $E_{\hat{R}}$, nous le noterons $M_{\hat{R}}$ pour sa structure de $\hat{R}$-module à droite. On a $Z(M_{\hat{R}}) = 0$, et de plus $E_{\hat{R}}$ est l'enveloppe injective de $M_{\hat{R}}$. D'autre part, les endomorphismes de $M_{\hat{R}}$ et de $M_{\bar{R}}$ coïncident, ce qui permet de conclure à la quasi-injectivité de $M_{\hat{R}}$.

Nous reprenons maintenant les notations de l'introduction.

Considérons la propriété suivante pour un anneau R régulier, auto-injectif à droite.

(P) *Si e est un idempotent de R tel que l'anneau eRe soit auto-injectif à gauche, alors eR est un eRe-module à gauche injectif.*

Cette propriété est évidemment vérifiée par l'anneau R s'il est commutatif; mais nous ignorons s'il en est de même dans le cas non commutatif. Remarquons qu'elle signifie que si M_R est un module injectif monogène (donc tel que $Z(M_R) = 0$), tel que $\Lambda = \operatorname{End} M_R$ soit auto-injectif à gauche, alors ${}_{\Lambda}M$ est un module injectif.

PROPOSITION 2. *Soit R un anneau régulier auto-injectif à droite satisfaisant à* (P), *et soit M_R un module quasi-injectif, tel que $Z(M_R) = 0$ et tel que Λ soit auto-injectif à gauche. Alors ${}_{\Lambda}M$ est un module quasi-injectif.*

Démonstration. Pour montrer que ${}_{\Lambda}M$ est quasi-injectif, il suffit de montrer, d'après le théorème de Fuchs [**4**, Lemme 2] qu'étant donnés un idéal à gauche L de Λ, et un homomorphisme f de L dans ${}_{\Lambda}M$ tel que $\ker f$ contienne l'annulateur dans Λ d'un élément x de ${}_{\Lambda}M$, f se prolonge à Λ. xR est un sous-module injectif donc facteur direct de M_R et si e désigne un projecteur de M_R d'image xR, on a $\operatorname{ann}_{\Lambda} x = \Lambda(1 - e)$.

Λ étant un anneau régulier auto-injectif et à gauche, il existe une famille $(e_i; i \in I)$ d'idempotents de Λ telle que $(e_i, i \in I) \cup \{1 - e\}$ constitue une famille orthogonale d'idempotents de L, engendrant un idéal à gauche essentiel dans L. Pour tout $i \in I$, on a $(1 - e)e_i = e_i(1 - e) = 0$, et il en résulte d'une part que e_i appartient à $e\Lambda e$, et d'autre part que $f(e_i)$ est dans xR puisque $(1 - e)f(e_i) = 0$. L'anneau End $xR = e\Lambda e$ estauto-injectif à gauche, et comme xR est un module monogène injectif, la propriété (P) entraîne que c'est un $e\Lambda e$-module injectif. Or on définit un $e\Lambda e$-homomorphisme g de $\oplus (e\Lambda e, i_i \in I)$ dans xR en posant $g(e_i) = f(e_i)$, et d'après ce qui précède on peut trouver $y \in xR$, tel que pour tout $i \in I$, $g(e_i) = e_i y$. La multiplication à droite par y coïncide avec f sur $\oplus (\Lambda e_i, i \in I) \oplus \Lambda(1 - e)$: $f(e_i) = g(e_i) = e_i y$, et $f(1 - e) = 0 = (1 - e)y$ puisque y est dans xR, et un raisonnement classique permet de montrer qu'elle coïncide avec f sur L.

Avant d'aborder le cas commutatif, donnons des conséquences de cette proposition dans le cas général. Introduisons pour cela une autre propriété (P′) pour un anneau R non nécessairement commutatif.

(P′) *Pour tout R-module à droite injectif $M_{\hat{R}}$, tel que $Z(M_R) = 0$, et tel que* $\Lambda =$ End M_R *soit auto-injectif à gauche, alors ${}_\Lambda M$ est un module quasi-injectif.*

PROPOSITION 3. *Soit R un anneau régulier auto-injectif à droite, alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *R satisfait à* (P);

(ii) *R satisfait à* (P′).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ceci résulte de la Proposition 2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Il suffit de remarquer que si M_R est un module monogène, ${}_\Lambda M$ contient un élément fidèle, et dire que ${}_\Lambda M$ est quasi-injectif équivaut à dire qu'il est injectif.

Enfin le problème de savoir si tout anneau R vérifie (P′) sa ramène à une formulation plus simple, grâce au résultat suivant.

PROPOSITION 4. *Dire que tout anneau satisfait à* (P′) *équivaut à dire que tout anneau régulier auto-injectif à droite satisfait à* (P).

Démonstration. D'après la Proposition 3 il suffit de montrer que si (P′) est vérifiée par tout anneau régulier auto-injectif à droite, elle est vérifiée par tout anneau. Or d'après le Lemme 1, pour étudier ${}_\Lambda M$ sous les hypothèses M_R injectif, $Z(M_R) = 0$, Λ auto-injectif à gauche, on peut supposer l'anneau R régulier auto-injectif à droite.

Les résultats dans le cas commutatif, seront précisés au moyen des lemmes qui suivent.

LEMME 5. *Soit un anneau R régulier auto-injectif à gauche; alors si P est un R-module à gauche tel que $Z(P) = 0$ et tel que l'anneau* $\mathrm{End}_R P$ *soit commutatif, P est isomorphe à un idéal à gauche de Λ.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-090-2 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. L'hypothèse $Z(P) = 0$ implique que tout annulateur dans R d'élément de P est facteur direct, et on en déduit que tout sous-module monogène de P est isomorphe à un idéal à gauche, facteur direct de R.

A l'aide du théorème de Zorn, on montre facilement qu'il existe un sous-module N de P et un monomorphisme f de N dans R, tels que pour tout sous-module N' de P contenant strictement N, f ne soit pas prolongeable en un monomorphisme de N' dans R. Cette propriété entraîne que N n'admet pas d'extension essentielle propre dans P, et il nous suffit donc pour conclure de montrer que N est un sous-module essentiel dans P.

Supposons donc qu'il existe $x \in P$ vérifiant $x \neq 0$ et $N \cap Rx = 0$. Rx est isomorphe à un idéal à gauche I de R, et d'après le choix du couple (N, f) on doit avoir $f(N) \cap I \neq 0$. Ceci entraîne que N et Rx admettent des sous-modules non nuls isomorphes, ou encore que l'on peut trouver $y \in N$, $z \in Rx$, non nuls et ayant même annulateur dans R. Le module $K = Ry \oplus Rz$ étant injectif, $\mathrm{End}_R (K)$ est un sous-anneau de End_R (P) et il est donc commutatif. Or les deux endomorphismes g et h de K tels que $g(y) = z$, $g(z) = z$, $h(y) = y$, $h(z) = 0$, vérifient $g \circ h(y) = z$ et $h \circ g(y) = 0$; d'où la contradiction.

LEMME 6. *Soit R un anneau commutatif; pour tout R-module M_R d'anneau d'endomorphismes Λ, on a* $\mathrm{End}_\Lambda M = \Gamma$ *où Γ est le centre de Λ.*

Démonstration. L'anneau R étant commutatif, les endomorphismes de ${}_\Lambda M$ sont des endomorphismes de M_R, et parmi les éléments de Λ ce sont évidemment les éléments centraux.

THÉORÈME 7. *Soient R un anneau commutatif, M_R un R-module quasi-injectif tel que $Z(M_R) = 0$ et tel que l'anneau $\Lambda =$* End M_R *soit auto-injectif à gauche; alors ${}_\Lambda M$ est un module quasi-injectif isomorphe à un idéal à gauche de Λ.*

Démonstration. Le fait que ${}_\Lambda M$ soit isomorphe à un idéal à gauche de Λ résulte immédiatement des Lemmes 5 et 6. Pour montrer que ${}_\Lambda M$ est quasi-injectif, on peut d'après le Lemme 1 supposer l'anneau R régulier auto-injectif. Or on vérifie immédiatement qu'un anneau commutatif, régulier, auto-injectif satisfait à (P), et il suffit d'appliquer la Proposition 2 pour conclure.

THÉORÈME 8. *Soient R un anneau commutatif, M_R un R-module injectif tel que $Z(M_R) = 0$ et tel que l'anneau $\Lambda =$* End M_R *soit auto-injectif à gauche; alors ${}_\Lambda M$ est un module injectif, isomorphe à un idéal à gauche facteur direct de Λ.*

Démonstration. On sait déjà d'après le Théorème 7 que ${}_\Lambda M$ est isomorphe à un idéal à gauche quasi-injectif L de Λ. Soit e un idempotent de Λ tel que Λe soit l'enveloppe injective de L. L étant un Λ-module à gauche quasi-injectif, on a $\mathrm{End}_\Lambda L \cong \mathrm{End}_\Lambda \Lambda e$ [**2**, § 3] d'où $\mathrm{End}_\Lambda M \cong \mathrm{End}_\Lambda \Lambda e$, et il en résulte que l'anneau $e\Lambda e$ est commutatif (Lemme 6). Posons $e(M_R) = N$,

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-090-2 Published online by Cambridge University Press

comme $\mathrm{End}_R N = e\Lambda e$ est un anneau commutatif, N est isomorphe à un idéal de R (Lemma 5), monogène puisque N est un module injectif. Posons donc $N = xR$; e étant un projecteur de M_R d'image xR, x et e ont même annulateur dans Λ et il en résulte que Λx et Λe sont isomorphes, et si ${}_\Lambda M$ était différent de son enveloppe injective Λe serait isomorphe à un sous-module propre, ce qui est impossible puisque Λ est un anneau régulier auto-injectif à droite et à gauche [**6**]. ${}_\Lambda M$ est donc bien un module injectif.

Remarque. On peut aussi montrer le Théorème 7, au moyen des résultats suivants.

(1) Le centre d'un anneau régulier auto-injectif à gauche est un anneau régulier auto-injectif, et en vertu du Lemme 6, $\mathrm{End}_\Lambda M$ est donc un anneau commutatif régulier auto-injectif.

(2) Tout idéal à gauche L d'un anneau régulier auto-injectif à gauche Λ, tel que l'anneau $\mathrm{End}_\Lambda L$ soit auto-injectif à gauche (ou à droite), est un idéal à gauche quasi-injectif. Le Lemme 5 et le (1) précédent permettent alors de conclure.

Bibliographie

1. A. Cailleau et G. Renault. *Etude des modules Σ-quasi injectifs*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A *270* (1970), 1391–1394.
2. C. Faith. *Lectures on injective modules and quotient rings* (Springer-Verlag, New York, 1967).
3. C. Faith and Y. Utumi. *Quasi-injective modules and their endomorphism rings*, Archiv. Math. (Basel) *15* (1964), 166–164.
4. L. Fuchs. *On quasi-injective modules*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *23* (1969), 541.
5. B. Osofsky. *Endomorphism rings of quasi-injective modules*, Can. J. Math. *20* (1968), 895–903.
6. Y. Utumi. *On continuous rings and self injective rings*, Trans. Amer. Math. Soc. *118* (1965), 158–173.

Université de Poitiers,
Poitiers, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-090-2 Published online by Cambridge University Press