

## DIAGRAMMES CANONIQUES ET REPRÉSENTATIONS MODULO $p$ DE $GL_2(F)$

YONGQUAN HU

*Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud,  
91405 Orsay Cedex, France (yongquan.hu@math.u-psud.fr)*

(Reçu le 3 décembre 2009 ; révisé le 11 juin 2010 ; accepté le 29 juin 2010)

*Résumé* Soit  $p$  un nombre premier et  $F$  un corps local non archimédien de caractéristique  $p$ . Dans cet article, à une représentation lisse irréductible de  $GL_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec caractère central, nous associons un diagramme qui détermine la représentation de départ à isomorphisme près. Nous le déterminons également dans certains cas.

*Abstract* Let  $p$  be a prime number and  $F$  a non-Archimedean local field with residual characteristic  $p$ . In this article, to an irreducible smooth representation of  $GL_2(F)$  over  $\overline{\mathbb{F}}_p$  with central character, we associate a diagram which determines the original representation up to isomorphism. We also explicitly determine it in some cases.

*Mots clés* : représentation supersingulière ; diagramme ; représentation de présentation finie

*Keywords*: supersingular representation; diagram; representation of finite presentation

AMS 2010 *Mathematics subject classification*: Primary 22E50

### Table des matières

1. Introduction	68
2. Rappels et compléments	71
2.1. Rappels sur des décompositions de $G$	71
2.2. Poids et algèbre de Hecke relative à un poids	72
2.3. Le foncteur $\text{Ind}_I^K$	78
3. Le diagramme canonique	84
3.1. Préliminaires	84
3.2. Le diagramme canonique associé à une représentation irréductible de $G$	91
3.3. Le diagramme canonique associé à un quotient non trivial de $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$	99
4. La condition de finitude	101
4.1. L'espace $D_1(\sigma, \pi)$	101
4.2. L'espace des $I_1 \cap U^+$ -invariants de $I^+(\sigma, \pi)$	107

5. Le cas où $F$ est de caractéristique positive	110
5.1. $D(\pi) = \mathcal{K}(\pi)$	110
5.2. Conséquences	112
Références	117

### 1. Introduction

Soient  $p$  un nombre premier et  $F$  un corps local complet pour une valuation discrète de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . Fixons un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  noté  $\bar{\mathbb{F}}_p$ . L'étude des représentations lisses irréductibles avec caractère central de  $GL_2(F)$  sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  a été initiée par Barthel et Livné [2, 3]. Ils ont classé ces représentations en quatre « catégories » (les *caractères*, les *séries principales*, les *séries spéciales* et les *supersingulières*) et ont complètement étudié la structure des trois premières. Dans [4], Breuil a déterminé les supersingulières dans le cas particulier (mais important) où  $F = \mathbb{Q}_p$ , ce qui lui a permis de définir une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et les classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles de dimension 2 de  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ . Mais, lorsque  $F \neq \mathbb{Q}_p$ , au moins lorsque  $F$  est une extension finie non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de degré supérieur ou égal à 2, il existe une très grande quantité de représentations lisses admissibles supersingulières [6, 10, 12].

Une grosse différence entre la théorie des représentations modulo  $p$  de  $GL_2(F)$  et la théorie classique (i.e. en caractéristique 0) est la non existence de mesure de Harr non triviale sur  $GL_2(F)$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{F}}_p$ , ce qui fait que beaucoup d'outils classiques ne sont plus applicables. Dans [12], Paškūnas a donné une construction très générale de représentations lisses de  $GL_2(F)$  à partir d'objets appelés « diagrammes ». Dans cet article, à une représentation lisse irréductible de  $GL_2(F)$  avec caractère central, on associe un diagramme canonique qui détermine la classe d'isomorphisme de la représentation de départ.

Fixons quelques notations pour énoncer notre résultats. Notons  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\varpi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  (fixée une fois pour toutes),

$$G = GL_2(F), \quad K = GL_2(\mathcal{O}),$$

$Z$  le centre de  $G$ ,  $I \subset K$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo  $\varpi$  et  $N$  le normalisateur de  $I$  dans  $G$ . Par définition [12], un *diagramme* est un triplet  $(D_0, D_1, r)$  où  $D_0$  est une représentation lisse de  $KZ$ ,  $D_1$  est une représentation lisse de  $N$  et  $r : D_1 \rightarrow D_0$  est un morphisme  $I$ - $Z$ -équivariant. Les diagrammes forment une catégorie et l'on dispose d'un foncteur  $H_0$  de cette catégorie dans celle des représentations lisses de  $G$ . Inversement, si  $\pi$  est une  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central, on peut lui associer un diagramme, appelé le *diagramme canonique* de  $\pi$  (§ 3) :

$$D(\pi) = (D_0(\pi), D_1(\pi), \text{can}),$$

où  $D_1(\pi)$  est une certaine sous- $N$ -représentation de  $\pi$  à préciser,  $D_0(\pi) = \langle KZ \cdot D_1(\pi) \rangle$  est la sous- $KZ$ -représentation de  $\pi$  engendrée par  $D_1(\pi)$  et  $\text{can}$  désigne l'inclusion naturelle  $D_1(\pi) \hookrightarrow D_0(\pi)$ .

Les résultats centraux de cet article sont les suivants.

**Théorème 1.1 (corollaire 3.25).** *On a un isomorphisme naturel de  $G$ -représentations*

$$H_0(D(\pi)) \cong \pi.$$

Dans certains cas, on peut déterminer explicitement le diagramme canonique. Notons  $I_1 \subset I$  le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures modulo  $\varpi$ .

**Théorème 1.2 (proposition 3.16 et théorèmes 3.27, 3.28 et 5.1).** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *On a toujours  $\pi^{I_1} \subseteq D_1(\pi)$ .*
- (ii) *On a  $D_1(\pi) = \pi^{I_1}$  si  $\pi$  est non supersingulière ou si  $F = \mathbb{Q}_p$ .*
- (iii) *On a  $D_1(\pi) = \pi$  si  $F$  est de caractéristique  $p$  et si  $\pi$  est supersingulière.*

Mais malheureusement il ne semble pas facile de calculer  $D(\pi)$  dans le cas où  $F$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et  $\pi$  est supersingulière, même de démontrer si  $D_1(\pi)$  est ou non de dimension finie sur  $\mathbb{F}_p$ . Néanmoins, on peut clarifier le lien entre certaines propriétés de  $D(\pi)$  et certaines propriétés de  $\pi$ , qui sont valables quelle que soit la représentation irréductible  $\pi$  avec caractère central, quel que soit le corps  $F$ .

**Théorème 1.3 (théorème 4.3, corollaires 4.7 et 4.10).** *Soit  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$D_1(\pi)$  est de dimension finie ;*
- (ii)  *$\pi$  admet une présentation finie (voir § 4.1) ;*
- (iii)  *$\pi$  admet une présentation standard (au sens de [8]).*

*Si l'une de ces conditions est vérifiée, alors*

- (iv)  *$\pi$  est admissible ;*
- (v) *l'espace  $I^+(\pi) \begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de dimension finie.*

Remarquons qu'il est intéressant d'obtenir des présentations finies pour les représentations lisses irréductibles de  $G$  en raison des travaux de Colmez [8], Schneider et Vignéras [15] et Vignéras [19].

Soulignons les conséquences suivantes des théorèmes 1.2 (iii) et 1.3 dans le cas où  $F$  est de caractéristique  $p$ .

**Corollaire 1.4 (corollaire 5.5 et théorèmes 5.7 et 5.8).** *Si  $F$  est de caractéristique  $p$  et si  $\pi$  est une représentation supersingulière de  $G$ , alors*

- (i)  $\pi$  n'est pas de présentation finie ;
- (ii)  $\pi|_{P^+}$  est irréductible ;
- (iii) pour toute représentation lisse  $\pi'$  de  $G$ , on a

$$\text{Hom}_{P^+Z}(\pi, \pi') \cong \text{Hom}_G(\pi, \pi').$$

Paškūnas [13] a montré les analogues de (ii) et de (iii) du corollaire 1.4 sans restriction sur  $F$  mais en remplaçant  $P^+$  par  $P$ , le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de  $G$ . Par ailleurs, après la première rédaction de cet article, il m'a signalé une preuve de (iii) qui est plus conceptuelle et qui est valable pour *tout*  $F$ . On la présentera après notre preuve originale.

Introduisons maintenant les principales (autres) notations de cet article.

Notons  $\mathfrak{p} := \varpi\mathcal{O}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$  et  $q$  le cardinal du corps résiduel  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ . On identifie  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$  avec  $\mathbb{F}_q$  et on note  $[\lambda]$  le représentant multiplicatif dans  $\mathcal{O}$  de  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ . Si  $x \in \mathcal{O}$ , on note  $\bar{x} \in \mathbb{F}_q$  sa réduction modulo  $\varpi$ . On note  $\text{val}_F$  la valuation sur  $F$  normalisée par  $\text{val}_F(\varpi) = 1$ .

On désigne par  $P^+$  le sous-monoïde de  $G$  défini par

$$P^+ := \begin{pmatrix} \mathcal{O} - \{0\} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $n \geq 1$ , on note

$$K_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix}, \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^{n-1} \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $K$  normalise  $K_n$  et  $N$  normalise  $I_n$ . On note  $U^+ = \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (respectivement  $U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix}$ ) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (respectivement inférieures) de telle sorte que  $I_1 \cap U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (respectivement  $I_1 \cap U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 \end{pmatrix}$ ). On note  $\mathcal{H} \subset I$  le sous-groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times$ . Enfin, on désigne par  $\Pi$  (respectivement  $s$ ) la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$  (respectivement  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) de  $G$ . Notons que  $N$  est engendré par  $I$  et  $\Pi$ .

Toutes les représentations considérées dans cet article sont sur des  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels. Pour celles de  $G$ , on suppose qu'elles admettent un caractère central, et on notera  $\chi_\pi$  le caractère central si  $\pi$  est une telle représentation.

Une représentation  $M$  d'un groupe localement profini  $H$  est dite *lisse* si chaque vecteur de  $M$  est fixé par un sous-groupe ouvert de  $H$ . Elle est dite *admissible* si  $M^{H_1}$ , l'espace des  $H_1$ -invariants de  $M$ , est de dimension finie sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  pour tout sous-groupe ouvert  $H_1$  de  $H$ , ou de manière équivalente, pour un seul pro- $p$ -sous-groupe ouvert  $H_1$  (voir, par exemple, [12, Théorème 6.3.2]). On désigne par  $\text{Rep}_G$  (respectivement  $\text{Rep}_K, \text{Rep}_I$ , etc.) la catégorie des représentations lisses de  $G$  (respectivement  $K, I$ , etc.) sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .

Nous utiliserons le résultat classique suivant, qui est essentiel à la théorie des représentations *lisses* modulo  $p$  de  $G$ . Si  $M$  est une représentation lisse d'un *pro- $p$ -groupe*

$H$  (e.g.  $H = I_1$  ou  $I_1 \cap U^+$ ), alors  $M^H$  est non trivial (voir, par exemple, [2, Lemme 3(1)]). Remarquons que si  $\sigma$  est une représentation irréductible de  $K$  sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ , alors  $\sigma^{I_1}$  est de dimension 1 [2, Lemme 2(1)].

Si  $M$  est une représentation d'un groupe ou d'un monoïde  $H$ , et si  $v \in M$  est un vecteur, on notera  $\langle H \cdot v \rangle$  le sous-espace vectoriel de  $M$  engendré par  $v$  sous l'action de  $H$ .

Si  $M$  est une représentation lisse d'un groupe profini  $H$  (e.g.  $H = K$  ou  $I$ ), on définit le socle de  $M$ , et on le note  $\text{soc}_H(M)$ , comme la plus grande sous-représentation semi-simple de  $M$ . De même, on définit le radical de  $M$ , et on le note  $\text{rad}_H(M)$ , comme la plus petite sous-représentation de  $M$  telle que le quotient  $M/\text{rad}_H(M)$  soit semi-simple. Notons que l'on a toujours  $\text{rad}_H(M) \subsetneq M$  par [1, § 1, Proposition 4].

Enfin, si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$  et si  $M$  est une représentation lisse de  $H$  (sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ), on note  $\text{c-Ind}_H^G M$  le  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f : G \rightarrow M$  qui sont localement constantes, à support compact modulo  $H$ , et telles que  $f(hg) = h \cdot f(g)$  ( $h \in H, g \in G$ ). Il est muni de l'action à gauche de  $G$  donnée par  $(g' \cdot f)(g) := f(gg')$  ( $g, g' \in G$ ). On obtient ainsi une représentation lisse de  $G$ . Si  $H$  est de plus ouvert dans  $G$  et si  $g \in G$  et  $v \in M$ , on désigne par  $[g, v]$  l'élément de  $\text{c-Ind}_H^G M$  de support  $Hg^{-1}$  et de valeur  $v$  en  $g^{-1}$ . Cela coïncide avec la définition précédente de  $\text{c-Ind}_H^G \sigma$ . Lorsque  $H = P$ , on écrira  $\text{Ind}_P^G$  au lieu de  $\text{c-Ind}_P^G$ . On définit l'induction  $\text{Ind}_I^K$  de manière analogue. Remarquons que  $\text{c-Ind}_H^G$  est un foncteur exact de la catégorie des représentations lisses de  $H$  dans la catégorie des représentations lisses de  $G$  (voir, par exemple, [9, Proposition 4.1.5] dans le cas  $H = P$ ). On a la même chose pour le foncteur  $\text{Ind}_I^K$ .

## 2. Rappels et compléments

Ce chapitre de préliminaires commence par quelques rappels pour lesquels on se réfère principalement à [2] et à [4].

### 2.1. Rappels sur des décompositions de $G$

On rassemble des décompositions classiques de  $G$  et de  $K$  qui seront utiles au long de l'article. Commençons par la décomposition de Cartan :

$$\begin{aligned}
 G &= \coprod_{n \geq 0} KZ \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} KZ \\
 &= \left( \coprod_{n \geq 0} IZ \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} KZ \right) \coprod \left( \coprod_{n \geq 0} IZ \Pi \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} KZ \right). \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

D'après la définition de  $P^+$  et l'équation

$$\begin{pmatrix} \varpi^n a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si  $a \in \mathcal{O}^\times$  et  $b \in \mathcal{O}$ , on trouve que

$$P^+KZ = \prod_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} KZ. \tag{2.2}$$

Par conséquent, en utilisant le lemme 2.1 ci-après, (2.1) se réécrit sous la forme (voir aussi [19, Lemme 11]) :

$$G = P^+KZ \amalg \amalg P^+KZ. \tag{2.3}$$

**Lemme 2.1.** *On a les égalités*

$$IZ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} IZ = IZ \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} IZ.$$

**Démonstration.** Voir la preuve de [14, Lemme 4.6] pour la première égalité. La deuxième s'en déduit facilement.  $\square$

Par ailleurs, la décomposition (2.2) implique que tout élément  $g$  de  $P^+KZ$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$g = g^{(n)}g^{(n-1)} \dots g^{(1)}k, \tag{2.4}$$

où  $k \in KZ$ ,  $g^{(i)}$  égale à l'une des matrices  $g_\lambda := \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ,  $n \geq 0$  et on convient que  $n := 0$  si  $g \in KZ$ . On appelle  $\ell(g) := n$  la *longueur* de  $g$ . Pour  $g \in \amalg P^+KZ$ , on écrit  $g = \amalg g^+$  avec  $g^+ \in P^+KZ$  et on appelle  $\ell(g) := \ell(g^+) + 1$  la longueur de  $g$ . Remarquons que  $\ell(g) = 0$  si et seulement si  $g \in KZ$ .

Enfin, on rappelle la décomposition d'Iwahori :

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 + \mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

et la décomposition suivante de  $K$  :

$$K = I \amalg \left( \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} I \right). \tag{2.6}$$

## 2.2. Poids et algèbre de Hecke relative à un poids

### 2.2.1. L'opérateur de Hecke $T$

D'après [2, Proposition 4] et la remarque qui suit, toute représentation irréductible lisse de  $KZ$  sur  $\mathbb{F}_p$  est triviale sur  $K_1$  et admet un caractère central. On appellera *poids* une telle représentation en modifiant la définition originale de [7], où un poids désigne une représentation irréductible lisse de  $K$ . On peut classifier les poids à isomorphisme près (voir, par exemple, [2, Proposition 1]).

Fixons  $\sigma$  un poids. Dans  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on définit pour  $n \geq 0$  :

$$R_n^+(\sigma) = \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right], \quad R_n^-(\sigma) = \Pi \cdot R_n^+(\sigma).$$

En particulier,  $R_0^+(\sigma) = [\text{Id}, \sigma]$  où  $\text{Id}$  désigne la matrice identité de  $G$ . Posons également

$$R_0(\sigma) := R_0^+(\sigma), \quad R_n(\sigma) := R_n^+(\sigma) \oplus R_{n-1}^-(\sigma) \quad \text{si } n \geq 1.$$

Par le lemme 2.1,  $R_n^+(\sigma)$  et  $R_n^-(\sigma)$  sont stables par  $IZ$  et  $R_n(\sigma)$  par  $KZ$ . De la décomposition de Cartan (2.1), on déduit que

$$c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma|_{KZ} = \bigoplus_{n \geq 0} R_n(\sigma)$$

et

$$c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma|_{IZ} = \left( \bigoplus_{n \geq 0} R_n^+(\sigma) \right) \oplus \left( \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-(\sigma) \right).$$

On a le lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Pour  $n \geq 1$ ,  $R_n(\sigma)$  est la sous- $KZ$ -représentation de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  engendrée par  $R_{n-1}^-(\sigma)$  et*

$$R_n^+(\sigma) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R_{n-1}^-(\sigma). \tag{2.7}$$

**Démonstration.** Tout  $x \in \mathcal{O}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = [\lambda_x] + \varpi x'$  avec  $\lambda_x \in \mathbb{F}_q$  et  $x' \in \mathcal{O}$  dépendant de  $x$ , de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} \varpi^n & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda_x] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^{n-1} & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda_x] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi \begin{pmatrix} \varpi^{n-1} & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat s'en déduit. □

L'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(KZ, \sigma)$  (relativement à  $KZ$  et à  $\sigma$ ) est par définition l'algèbre des  $\mathbb{F}_p$ -endomorphismes de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  qui commutent à l'action de  $G$ . Par réciprocity de Frobenius, elle s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_p}(\sigma)$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $\varphi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(k_2)$  pour  $k_1, k_2 \in KZ$  et  $g \in G$ . Si  $\varphi$  est une telle fonction et  $T$  l'endomorphisme correspondant de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , alors on a la formule [4, § 2.4, (3)] :

$$T([g, v]) = \sum_{g' KZ \in G/KZ} [g g', \varphi(g'^{-1})(v)].$$

Soit  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_p}(\sigma)$  l'unique fonction à support dans  $KZ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} KZ$  vérifiant  $\varphi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(k_2)$  comme précédemment et telle que

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} \right) = U_{r_1} \otimes \cdots \otimes U_{r_f}$$

(voir [2, § 3.1] ou [4, § 2.7] pour cette notation où les  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq f$ , sont des entiers associés à  $\sigma$ ), et soit  $T$  l'opérateur de Hecke correspondant. D'après [2, Proposition 8],  $\mathcal{H}(KZ, \sigma)$  est isomorphe à l'algèbre des polynômes  $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ .

L'action de  $T$  se décrit explicitement par le lemme suivant. Soit  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ .

**Lemme 2.3.**

(i) Si  $\sigma$  est de dimension 1 (sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ ), alors

$$T([1, v_0]) = [II, v_0] + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left[ \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_0 \right].$$

(ii) Si  $\sigma$  est de dimension supérieure ou égale à 2, alors

$$T([1, v_0]) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left[ \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_0 \right].$$

**Démonstration.** Il découle de la formule [4, § 2.5, (7)], du choix de  $T$  que l'on a fait ci-dessus. □

Si  $n \geq 1$ , on vérifie que  $T(R_n^-(\sigma)) \subseteq R_{n+1}^-(\sigma) \oplus R_{n-1}^-(\sigma)$  et que l'opérateur  $T|_{R_n^-(\sigma)} : R_n^-(\sigma) \rightarrow R_{n+1}^-(\sigma) \oplus R_{n-1}^-(\sigma)$  est la somme d'une injection  $IZ$ -équivariante  $T^+|_{R_n^-(\sigma)} : R_n^-(\sigma) \hookrightarrow R_{n+1}^-(\sigma)$  et d'une surjection  $IZ$ -équivariante  $T^-|_{R_n^-(\sigma)} : R_n^-(\sigma) \twoheadrightarrow R_{n-1}^-(\sigma)$ . Explicitement, ils correspondent respectivement aux deux termes de droite de la formule [4, § 2.5, (6)].

**Lemme 2.4.** Soient  $k \geq 0$ ,  $f \in \bigoplus_{n \geq k} R_n^-(\sigma)$  et  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors il existe  $f' \in \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-(\sigma)$ , dépendant de  $f$  et de  $P(T)$ , tel que

$$f + f' \in P(T) \left( \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-(\sigma) \right).$$

**Démonstration.** Comme le degré de  $P(T)$  est non nul, on peut écrire  $P(T) = (T - \lambda)P_1(T)$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $P_1(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré strictement inférieur à celui de  $P(T)$ . Soit  $h \in \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-(\sigma)$  un élément tel que  $T^-(h) = f$ . Si  $\deg P_1(T) = 0$ , alors  $f' := T^+(h) - \lambda h$  satisfait à la condition demandée. Sinon, par récurrence sur le degré de  $P(T)$ , on peut trouver  $h', h'' \in \bigoplus_{n \geq k+2} R_n^-(\sigma)$  tels que  $h + h' = P_1(T)(h'')$ , et donc

$$\begin{aligned} P(T)(h'') &= (T - \lambda)(h + h') \\ &= T^-(h) + T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h') \\ &= f + (T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h')). \end{aligned}$$

Comme  $h' \in \bigoplus_{n \geq k+2} R_n^-(\sigma)$  et  $h \in \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-(\sigma)$ , le vecteur

$$f' := T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h')$$

appartient à  $\bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-(\sigma)$ , ce qui achève la démonstration. □



2.2.2. Application aux quotients non triviaux de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$

*Notation.* Si  $\pi$  est un  $G$ -quotient non trivial de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on note  $R_n(\sigma, \pi)$  (respectivement  $R_n^+(\sigma, \pi)$ ,  $R_n^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $R_n(\sigma)$  (respectivement  $R_n^+(\sigma)$ ,  $R_n^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ . Pour un vecteur  $f \in c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on note  $\bar{f}$  l'image de  $f$  dans  $\pi$ .

**Proposition 2.5.** Soient  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  et  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Alors

(i)  $\overline{[\text{Id}, v_0]} \in \sum_{n \geq 0} R_n^-(\sigma, \pi)$  ;

(ii)  $R_0(\sigma, \pi) \subset \sum_{n \geq 1} R_n(\sigma, \pi)$ .

**Démonstration.** (i) Par la preuve de [13, Lemme 3.2], on voit que la surjection  $G$ -équivariante  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  se factorise par

$$c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T) \twoheadrightarrow \pi$$

avec  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 (remarquons que la preuve utilise [2, Proposition 32] qui reste vraie pour tout  $G$ -quotient non trivial de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ ). Il suffit donc de vérifier que

$$[\text{Id}, v_0] \in P(T)(c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma) + \left( \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-(\sigma) \right). \tag{2.8}$$

Écrivons  $P(T) = (T - \lambda)P_1(T)$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $P_1(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré strictement inférieur à celui de  $P(T)$ . Posons

$$f = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}, v_0 \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0 \right] \in R_0^-(\sigma).$$

Alors un calcul facile en utilisant [4, § 2.5, (8)] montre que :

$$(T - \lambda)(f) = [\text{Id}, v_0] + h \tag{2.9}$$

avec  $h \in \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-(\sigma)$ . Si le degré de  $P_1(T)$  est nul, i.e.  $P(T) = a(T - \lambda)$  avec  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , alors (2.8) est déjà prouvé par (2.9). Sinon, d'après le lemme 2.4, il existe  $f' \in \bigoplus_{n \geq 1} R_n^-(\sigma)$  tel que

$$f + f' \in P_1(T) \left( \bigoplus_{n \geq 1} R_n^-(\sigma) \right),$$

et donc par (2.9) :

$$[\text{Id}, v_0] + h + (T - \lambda)(f') \in P(T)(c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma).$$

Cela entraîne (2.8) et termine la preuve de (i).

(ii) Comme  $R_0(\sigma, \pi)$  est engendrée par  $\overline{[\text{Id}, v_0]}$  en tant que  $K$ -représentation et comme  $\sum_{n \geq 1} R_n(\sigma, \pi)$  est une  $K$ -représentation contenant  $\sum_{n \geq 0} R_n^-(\sigma, \pi)$ , l'assertion (ii) découle de (i). □

**Remarque 2.6.** Comme  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  est réductible [2, Théorème 25] et non admissible [2, Proposition 14(2)], la proposition 2.5 s'applique en particulier lorsque  $\pi$  est un  $G$ -quotient irréductible ou admissible de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ .

2.2.3. L'opérateur  $S$

La définition suivante, qui sera très importante pour la suite, est extraite de la formule pour  $T$  du lemme 2.3 (ii).

**Définition 2.7.** On définit l'opérateur  $S$ , opérant sur toute représentation de  $G$ , par

$$S := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \bar{\mathbb{F}}_p[G]. \tag{2.10}$$

En posant  $S^1 = S$ , on définit par récurrence  $S^n := S \cdot S^{n-1} \in \bar{\mathbb{F}}_p[G]$  pour  $n \geq 2$ .

Donnons des propriétés élémentaires concernant  $S$ .

**Lemme 2.8.** Soient  $\pi$  une représentation de  $G$  et  $v \in \pi$  un vecteur.

- (i) Si  $v$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ , alors il en est de même de  $Sv$ .
- (ii) Si  $v$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ , alors il en est de même de tout vecteur de  $\langle \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix} \cdot v \rangle$  et on a  $h \cdot Sv = S(h \cdot v)$  pour tout  $h \in \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$ .
- (iii) Si  $v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathcal{O} \\ 0 & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$ , alors il en est de même de  $Sv$ .
- (iv) Si  $v$  est fixé par  $I_1$ , alors il en est de même de  $Sv$ .

**Démonstration.** (i) Soit  $x \in \mathcal{O}$  que l'on décompose en  $x = \sum_{n \geq 0} \varpi^n [\mu_n]$  avec  $\mu_n \in \mathbb{F}_q \subset \bar{\mathbb{F}}_p$  pour tout  $n \geq 0$ . L'énoncé se déduit du calcul suivant

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Sv &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\mu_0] + [\lambda] + \sum_{n \geq 1} \varpi^n [\mu_n] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\mu_0 + \lambda] + \varpi X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\mu_0 + \lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\mu_0 + \lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= Sv, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que  $[\mu_0] + [\lambda] - [\mu_0 + \lambda] \in \mathfrak{p}$  (voir [16, § II.6]) pour obtenir  $X \in \mathcal{O}$  qui dépend de  $x$  et de  $\lambda$ .

(ii) Le premier énoncé résulte de la formule suivante (où  $a, b, d \in \mathcal{O}$ ) :

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b(1 + \varpi d)}{1 + \varpi a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrons le deuxième. Soit

$$h = \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 + \mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} h \cdot Sv &= \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{[\lambda](1 + \varpi a)}{1 + \varpi d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi a & 0 \\ 0 & 1 + \varpi d \end{pmatrix} v \\ &= S(h \cdot v), \end{aligned}$$

où  $X$  est l'unique élément de  $\mathcal{O}$ , dépendant de  $a, d$  et  $\lambda$ , tel que

$$\frac{[\lambda](1 + \varpi a)}{1 + \varpi d} = [\lambda] + \varpi X.$$

(iii) C'est une conséquence de (i) et (ii).

(iv) Compte tenu de (iii), on est ramené par la décomposition d'Iwahori (2.5) à regarder l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi & 1 \end{pmatrix}$  sur  $Sv$ . Comme précédemment, on a le calcul suivant (où  $c \in \mathcal{O}$ ) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi c & 1 \end{pmatrix} Sv &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi c & 1 \end{pmatrix} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{[\lambda]}{1 + \varpi c[\lambda]} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^2 c & 1 + \varpi c[\lambda] \end{pmatrix} v \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{[\lambda]}{1 + \varpi c[\lambda]} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \\ &= Sv \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit maintenant  $\pi$  une représentation lisse *irréductible* de  $G$  (admettant un caractère central). D’après [2], de telles représentations sont classées en quatre catégories : les *caractères*, les *séries principales*, les *séries spéciales* et les *supersingulières*. On y renvoie le lecteur pour les détails.

**Lemme 2.9.** *Si  $\pi$  est supersingulière, alors pour tout  $v \in \pi^{I_1}$ , il existe  $m \geq 1$  tel que  $S^m v = 0$ .*

**Démonstration.** Rappelons que  $\mathcal{H} \subset I$  désigne le sous-groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times$ . C’est un groupe abélien d’ordre premier à  $p$ , de telle sorte que  $v$  puisse s’écrire sous la forme  $v = \sum_i v_i$  avec  $v_i$  des vecteurs propres de  $\mathcal{H}$  de caractères propres distincts l’un de l’autre. On est donc ramené au cas où  $v$  est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$ . D’après [6, Lemmes 2.6, 2.7], on a ou bien  $Sv = 0$  (d’où le lemme), ou bien  $Sv \neq 0$  et  $\langle K \cdot Sv \rangle \subset \pi$  est une représentation irréductible de  $K$  auquel cas le lemme découle de [13, Corollaire 3.3]. □

### 2.3. Le foncteur $\text{Ind}_I^K$

#### 2.3.1. Réciprocité de Frobenius

Rappelons que, si  $M$  est une représentation lisse de  $I$ , on désigne par  $\text{Ind}_I^K M$  la  $K$ -représentation induite, ce qui fournit un foncteur exact de  $\underline{\text{Rep}}_I$  dans  $\underline{\text{Rep}}_K$ . On note  $W = \text{Ind}_I^K M$  et on pose  $\text{pr}_M : W \rightarrow M$  le morphisme  $I$ -équivariant naturel induit par l’identité  $\text{Id} : W \xrightarrow{\sim} W$  par réciprocité de Frobenius. Plus précisément, si

$$f = a_1[1, v_1] + \sum_{k \in K/I, k \neq 1} a_k[k, v_k] \in \text{Ind}_I^K M$$

avec  $a_k \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $v_k \in M$  pour tout  $k \in K/I$ , alors  $\text{pr}_M(f) := a_1 v_1$ . Ce morphisme admet une section  $I$ -équivariante  $i_M : v \in M \mapsto [1, v] \in W$ . Ceci réalise la décomposition de Mackey pour  $W$  en tant que  $I$ -représentation :

$$W = \text{Ind}_I^K M = M \oplus W^+ \tag{2.11}$$

avec  $W^+$  le noyau de  $\text{pr}_M$ . L’espace sous-jacent à  $W^+$  est l’espace vectoriel engendré par

$$\left\{ \left( \begin{bmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [1, v], v \in M, \lambda \in \mathbb{F}_q \right), \right.$$

ou, de manière équivalente, par

$$\left. \left\{ \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v], v \in M, 0 \leq i \leq q - 1 \right\} \right.$$

Soit  $Q$  une  $K$ -représentation contenant  $M$  et engendrée par  $M$ . On a par réciprocité de Frobenius une surjection  $K$ -équivariante  $\alpha : W = \text{Ind}_I^K M \rightarrow Q$  donnée par  $[k, v] \mapsto k \cdot v$

pour  $k \in K$  et  $v \in M$ . Soit  $W_1$  son noyau et soit  $M_1$  l'image de  $W_1$  dans  $M$  via le morphisme composé

$$W_1 \hookrightarrow W \xrightarrow{\text{pr}_M} M.$$

On note  $Q^+$  l'image de  $W^+ \subset W$  dans  $Q$  de sorte que l'on puisse considérer l'intersection  $M \cap Q^+$  comme un sous-espace de  $Q$ . Les remarques précédentes sont illustrées par le diagramme commutatif suivant à lignes et à colonnes exactes (où les morphismes  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\text{pr}}_M$  sont définis de manière évidente) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & W^+ & \longrightarrow & Q^+ & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha} & Q \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{\text{pr}}_M \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & M/M_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dont l'exactitude de la colonne de droite résulte du lemme du serpent. Le lemme suivant sera utilisé de manière cruciale au § 3, en particulier au lemme 3.1.

**Lemme 2.10.** Avec les notations précédentes, on a

$$M_1 = M \cap Q^+, \quad W_1 \subseteq \text{Ind}_I^K M_1 ;$$

de plus,  $M_1$  est la plus petite sous-représentation de  $M$  ayant cette dernière propriété.

**Démonstration.** Par la définition de  $i_M$ , on a  $\alpha \circ i_M = (\text{id} : M \hookrightarrow Q)$ . Par conséquent, si  $v \in M$ , on a :

$$\begin{aligned}
 v \in M_1 &\iff \bar{\alpha}(v) = 0 \\
 &\iff \bar{\text{pr}}_M \circ \alpha \circ i_M(v) = 0 \\
 &\iff \bar{\text{pr}}_M(v) = 0 \\
 &\iff v \in Q^+,
 \end{aligned}$$

d'où le premier énoncé.

Pour les autres, en remplaçant  $M$  par  $M/M_1$  et  $W_1$  par  $W_1/(\text{Ind}_I^K M_1 \cap W_1)$ , on est ramené à montrer l'énoncé suivant : si  $W_1 \subset \text{Ind}_I^K M$  est une sous- $K$ -représentation, alors  $W_1 = 0$  si et seulement si  $M_1 = 0$ . Or, ceci est une conséquence directe de la réciprocity de Frobenius.  $\square$

Donnons une application du lemme 2.10.

**Corollaire 2.11.** *Sous les hypothèses ci-dessus, on suppose que  $Q$  est une représentation irréductible de  $K$  engendrée par son espace  $I_1$ -invariant  $Q^{I_1}$ . On choisit  $M = Q^{I_1}$ . Alors  $Q$  et  $Q^+$  coïncident. C'est-à-dire,  $Q$  est engendré sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  par les vecteurs*

$$\left\{ \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

**Démonstration.** Comme on l'a indiqué dans l'introduction,  $M$  est non trivial de dimension 1 sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ . Considérons la surjection naturelle  $K$ -équivariante  $W = \text{Ind}_I^K M \twoheadrightarrow Q$ . Comme  $\text{Ind}_I^K M$  n'est pas irréductible par [6, Lemmes 2.3, 2.4], on voit que le noyau  $W_1$  est non trivial et qu'il en est de même de  $M_1 \subseteq M$  puisque  $W_1 \subseteq \text{Ind}_I^K M_1$  d'après le lemme 2.10. Or,  $M$  est de dimension 1, on a donc  $M_1 = M$ , puis  $M$  s'injecte dans  $Q^+$  en appliquant à nouveau le lemme 2.10. L'énoncé s'en déduit puisque l'espace vectoriel  $Q$  est engendré par  $M$  et  $Q^+$ . □

2.3.2. *Invariants sous le groupe  $I_1 \cap U^+$*

Si  $M$  est une représentation de  $I$ , on note  $\Pi(M)$  la représentation de  $I$  définie par :

- l'espace sous-jacent de  $\Pi(M)$  est l'ensemble des symboles  $\{\Pi(v), v \in M\}$  qui forment un  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de manière évidente ;
- l'action de  $I$  sur  $\Pi(M)$  est donnée par :

$$h \cdot \Pi(v) := \Pi(\Pi^{-1}h\Pi \cdot v), \quad h \in I, v \in M. \tag{2.12}$$

**Remarque 2.12.** Rappelons que  $N$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par  $I$  et  $\Pi$ . Si  $M'$  est une représentation de  $N$  et si  $M \subset M'$  est un sous-espace vectoriel stable par  $I$ , alors l'espace  $\Pi(M)$  est aussi stable par  $I$  avec l'action définie par (2.12).

**Proposition 2.13.** *Soit  $M$  une représentation lisse de  $I$ . Posons  $W = \text{Ind}_I^K \Pi(M)$  et  $W^+ \subset W$  le sous-espace vectoriel engendré par*

$$\left\{ F_{i,v} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)], v \in M, 0 \leq i \leq q-1 \right\}.$$

- (i) *Pour tout vecteur  $v \in M$  fixé par  $I_1 \cap U^+$ , l'élément  $F_{0,v} \in W^+$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ .*
- (ii) *L'espace  $W^+$  est stable par  $I_1 \cap U^+$  et  $(W^+)^{I_1 \cap U^+}$  est engendré sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$  par  $\{F_{0,v}, v \in M^{I_1 \cap U^+}\}$ .*

**Démonstration.** (i) La même preuve que celle du lemme 2.8 (i).

(ii) Par la décomposition (2.11),  $W^+$  est  $I$ -stable et donc  $I_1 \cap U^+$ -stable. Soit  $f \in W^+$  un vecteur non nul fixé par  $I_1 \cap U^+$ . Écrivons  $f$  sous la forme  $f = \sum_{i=0}^{q-1} F_{i,v_i}$  avec  $v_i \in M$ . Montrons que  $v_0 \in M^{I_1 \cap U^+}$  et que  $v_i = 0$  pour tout  $i > 0$ .

Soit  $i_0 > 0$  un indice fixé tel que  $v_{i_0} \neq 0$ . Comme  $I_1 \cap U^+$  est un pro- $p$ -groupe, la représentation  $\langle (I_1 \cap U^+) \cdot v_{i_0} \rangle$  possède des vecteurs  $I_1 \cap U^+$ -invariants non nuls, donc il existe un élément  $Q \in \overline{\mathbb{F}}_p[I_1 \cap U^+]$  tel que  $Qv_{i_0}$  soit non nul fixé par  $I_1 \cap U^+$ . De plus, en appliquant le même raisonnement à tous les  $i$ ,  $1 < i \leq q-1$ , et quitte à modifier  $Q$  et  $i_0$ , on peut supposer que  $Qv_i$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$  pour tout  $1 < i \leq q-1$ . Par la formule suivante (avec  $a \in \mathcal{O}$  et  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ) :

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

on voit que  $F_{i,Qv_i}$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour tout  $i > 0$ . Puis, encore d'après (2.13), on peut trouver  $Q' \in \overline{\mathbb{F}}_p[I_1 \cap U^+]$  vérifiant

$$Q' \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q', \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}_q,$$

d'où

$$Q'f = \sum_{i=0}^{q-1} Q'F_{i,v_i} = \sum_{i=0}^{q-1} F_{i,Qv_i}. \tag{2.14}$$

On en déduit que  $F_{0,Qv_0}$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  parce que  $Q'f$  et  $F_{i,Qv_i}$  pour  $i > 0$  le sont, puis que  $Qv_0$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$  en utilisant encore l'équation (2.13).

Maintenant, les vecteurs  $Qv_i$  étant tous fixés par  $I_1 \cap U^+$ , on a le calcul suivant pour tout  $0 \leq i \leq q-1$ , avec la convention que  $F_{-1,Qv_0} := 0$  (comparer avec la démonstration de [2, Lemme 2], particulièrement avec l'opérateur  $l \in \text{LieGL}_2$ ) :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} \begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_{i,Qv_i} &= \sum_{\mu, \lambda \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\mu] + [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Qv_i \\ &= \sum_{\mu, \lambda \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\mu + \lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Qv_i \\ &= \sum_{\mu, \lambda \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} (\lambda - \mu)^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Qv_i \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \left( \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} (-\mu)^{i-k} \right) \left( \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Qv_i \right) \\ &= iF_{i-1,Qv_i}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que, si  $0 < j < 2(q - 1)$ , alors la somme  $\sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \mu^j$  vaut  $-1$  si  $j = q - 1$  et  $0$  sinon. D'autre part, comme  $Q'f$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ , on voit que :

$$\sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} \begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q'f = \left( \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \mu^{q-2} \right) Q'f = 0.$$

En utilisant (2.14), on en déduit facilement que  $F_{i-1, Qv_i} = 0$  puis  $Qv_i = 0$  pour tout  $i > 0$ , ce qui est impossible puisque  $Qv_{i_0} \neq 0$ . Cette contradiction montre que  $v_i = 0$  pour tout  $i > 0$  et donc  $f = F_{0, v_0}$ . Enfin, puisque  $f$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ , l'équation (2.13) permet de conclure que  $v_0$  l'est aussi. Cela termine la démonstration.  $\square$

2.3.3. *Conséquences*

Rappelons que si  $\sigma$  est un poids, on a défini les sous-espaces  $IZ$ -stables  $R_n^+(\sigma)$  pour tout  $n \geq 0$  de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  au §2.2. Notons que l'élément  $S$  défini par (2.10) induit une application linéaire de  $R_n^+(\sigma)$  dans  $R_{n+1}^+(\sigma)$ . Le corollaire suivant améliore [2, Proposition 14(2)]. Soit  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ .

**Proposition 2.14.** *Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\dim_{\mathbb{F}_p} R_n^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = 1$  et  $R_n^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = \mathbb{F}_p S^n [\text{Id}, v_0]$ .*

**Démonstration.** On prouve la proposition par récurrence sur  $n$ . Il est vrai au rang  $n = 0$  d'après [2, Lemme 2]. Il reste donc à démontrer que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} R_n^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = 1 \implies \dim_{\mathbb{F}_p} R_{n+1}^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = 1$$

et que

$$R_n^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = \mathbb{F}_p v_n \implies R_{n+1}^+(\sigma)^{I_1 \cap U^+} = \mathbb{F}_p S v_n.$$

Or, cela est une conséquence du lemme 2.13 puisque  $R_n^+(\sigma)$  est isomorphe à l'espace  $(\text{Ind}_I^K \Pi(R_{n-1}^+(\sigma)))^+$  d'après (2.7).  $\square$

On pose pour tout  $n \geq 0$  (encore dans  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ )

$$M_n^+(\sigma) = \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_p v_0 \right]$$

ce qui fait de  $M_n^+(\sigma)$  une sous- $IZ$ -représentation de  $R_n^+(\sigma)$  par le lemme 2.1.

**Corollaire 2.15.**

- (i)  $M_n^+(\sigma)$  est triviale sur  $I_{n+1} \cap U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p}^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (ii) En tant que représentation de  $I_1 \cap U^+ / I_{n+1} \cap U^+$ ,  $M_n^+(\sigma)$  est une enveloppe injective de la représentation triviale dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_{I_1 \cap U^+ / I_{n+1} \cap U^+}$ .

On renvoie le lecteur à [12, § 6] ou [5, § 5] pour la notion « enveloppe injective ».



**Démonstration.** (i) Il découle de la formule suivante où  $a, b \in \mathcal{O}$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi^n b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La proposition 2.14 implique que l'espace des  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $M_n^+(\sigma)$  est de dimension 1. D'autre part,  $M_n^+(\sigma)$  est de dimension  $q^n$  dont une base est formée des vecteurs  $\{[(\varpi^n \ b), v]\}$  avec  $b \in \mathcal{O}$  parmi un système de représentants de  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ . L'énoncé s'en déduit d'après [1, § 5, Corollaire 4], car le groupe  $I_1 \cap U^+ / I_{n+1} \cap U^+$ , étant isomorphe à  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ , est un  $p$ -groupe abélien d'ordre  $q^n$ . □

Dans la suite, soit  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  isomorphe à une série spéciale ou à une série principale. D'après [2, Théorème 33],  $\pi$  admet toujours une sous- $KZ$ -représentation irréductible  $\sigma$  de dimension supérieure ou égale à 2 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Soit  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  la surjection  $G$ -équivariante induite. Alors [2, Théorème 34] impliquent qu'elle se factorise par  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .

Soient  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et  $\langle P^+ \cdot v_0 \rangle$  le sous-espace vectoriel de  $\pi$  engendré par  $v_0$  qui est  $IZ$ -stable par le lemme 2.1. On en déduit les morphismes naturels  $IZ$ -équivariants :

$$\iota_n : M_n^+(\sigma) \rightarrow \langle P^+ \cdot v_0 \rangle.$$

Le lemme 2.16 suivant s'est inspiré de la preuve de [14, Proposition 11.1]. Il sera utilisé au § 5.2.2.

**Lemme 2.16.**

- (i) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\iota_n$  est injectif.
- (ii) Pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\text{Im}(\iota_n) \subseteq \text{Im}(\iota_{n+1})$ .
- (iii) En tant que représentation de  $I_1 \cap U^+$ ,  $\langle P^+ \cdot v_0 \rangle$  est une enveloppe injective de la représentation triviale dans la catégorie  $\text{Rep}_{I_1 \cap U^+}$ .

**Démonstration.** (i) Par le corollaire 2.15, l'espace des  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $M_n^+(\sigma)$  est de dimension 1 engendré par le vecteur  $S^n[\text{Id}, v_0]$ , ce qui fait que, si  $\iota_n$  n'est pas injectif, alors l'image de  $S^n[\text{Id}, v_0]$  est nulle dans  $\pi$ . Or, c'est absurde parce que

$$S^n[\text{Id}, v_0] = T^n[\text{Id}, v_0] = \lambda^n[\text{Id}, v_0] \neq 0 \pmod{(T - \lambda)}$$

dont la première égalité vient du lemme 2.3 (ii).

(ii) Compte tenu de (i), il suffit de vérifier que l'opérateur  $T$  induit une injection  $M_n^+(\sigma) \hookrightarrow M_{n+1}^+(\sigma)$  pour tout  $n \geq 0$ . Comme  $\sigma$  est supposé de dimension supérieure ou égale à 2, le cas où  $n = 0$  résulte du lemme 2.3 (ii). Supposons  $n \geq 1$ . D'après la formule [4, § 2.5, (5)] de  $T$ , on est ramené à vérifier que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -[\lambda] \end{pmatrix} v_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p v_0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}_q,$$

et que

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} \right) v_0 = 0.$$

En effet, le premier énoncé découle de [4, Lemme 3.1.1] et le deuxième est une conséquence des faits que  $v_0 \in \sigma^{I^1}$  et que  $\sigma$  est de dimension supérieure ou égale à 2.

(iii) Il découle de (ii) et du corollaire 2.15 (ii) en utilisant [5, Proposition 5.17]. □

### 3. Le diagramme canonique

Dans ce chapitre, après des préliminaires au § 3.1, on définit au § 3.2 le diagramme canonique associé à une représentation lisse irréductible de  $G$  et on démontre que ce diagramme détermine la classe d’isomorphisme de la représentation de départ. Au § 3.3, on discute le diagramme canonique associé à un quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  avec  $\sigma$  un poids fixé.

#### 3.1. Préliminaires

##### 3.1.1. Filtration sur un quotient non trivial de $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$

Fixons  $\sigma$  un poids. Suivant [8], on note  $I^+(\sigma)$  le sous-espace vectoriel de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  engendré par les  $[g, \sigma]$  pour

$$g \in P^+ = \begin{pmatrix} \mathcal{O} - \{0\} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De (2.2), on voit que

$$I^+(\sigma) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right] = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^+(\sigma).$$

On pose  $I^-(\sigma) := \Pi \cdot I^+(\sigma)$  de sorte que  $I^-(\sigma) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-(\sigma)$  et que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma = I^+(\sigma) \oplus I^-(\sigma)$  par la décomposition (2.3). Les espaces vectoriels  $I^+(\sigma)$  et  $I^-(\sigma)$  sont stables sous l’action de  $I Z$ , et  $\bigoplus_{n \geq 1} R_n(\sigma)$  est la sous- $KZ$ -représentation de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  engendrée par  $I^-(\sigma)$  d’après le lemme 2.2.

Dans la suite, on fixe  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial (pas forcément irréductible ni admissible) de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  et on note  $R(\sigma, \pi)$  le noyau correspondant. On note  $I^+(\sigma, \pi)$  (respectivement  $I^-(\sigma, \pi)$ ) l’image de  $I^+(\sigma)$  (respectivement  $I^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ . Ils sont stables par  $I Z$ . Pour un vecteur  $f \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on note  $\bar{f}$  l’image de  $f$  dans  $\pi$ .

Il résulte de la proposition 2.5 (ii) et de ce qui précède que  $I^-(\sigma, \pi)$  engendre entièrement l’espace  $\pi$  sous l’action de  $K$ , de sorte que l’on obtient par réciprocity de Frobenius une surjection  $K$ -équivariante

$$\text{Ind}_I^K I^-(\sigma, \pi) \twoheadrightarrow \pi.$$

On note  $W_1(\sigma, \pi)$  son noyau. D'après le lemme 2.10, appliqué à  $M = I^-(\sigma, \pi)$  et à  $Q = \pi$ , on voit que  $W_1(\sigma, \pi)$  s'identifie à une sous- $K$ -représentation de

$$\text{Ind}_I^K \left( \sum_{n \geq 1} R_n^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi) \right),$$

et donc de  $\text{Ind}_I^K(I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi))$ . On en déduit le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** *Pour toute égalité dans  $\pi$  de la forme*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_\lambda + \Pi(w) = 0$$

avec  $w, w_\lambda \in I^+(\sigma, \pi)$ , on a  $w, w_\lambda \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

**Démonstration.** Par ce qui précède, c'est une conséquence du lemme 2.10 et de la décomposition (2.6). □

**Remarque 3.2.** On a une variante utile du lemme 3.1 : pour toute égalité dans  $\pi$  de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_i + \Pi(w) = 0$$

avec  $w, w_i \in I^+(\sigma, \pi)$ , on a  $w, w_i \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

**Remarque 3.3.** La raison principale pour laquelle on considère  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  plutôt que  $\sum_{n \geq 1} R_n^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  est que le premier est stable sous l'action de  $\Pi$  (voir la définition 3.20 plus tard). Voir aussi le lemme 3.11.

Tout vecteur  $v \in \pi$  peut s'écrire sous la forme  $v = v^+ + v^-$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ . Une telle décomposition est unique à un vecteur dans  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  près : si  $v = v_1^+ + v_1^-$  est une autre décomposition, on a

$$v^+ - v_1^+ = -v^- + v_1^- \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi).$$

Posons  $I^{+,0}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  et par récurrence,

$$I^{+,n}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle. \tag{3.1}$$

Évidemment, les  $I^{+,n}(\sigma, \pi)$  sont des sous-espaces de  $I^+(\sigma, \pi)$  stables par  $I Z$ .

**Lemme 3.4.** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a*

- (i)  $I^{+,n-1}(\sigma, \pi) \subseteq I^{+,n}(\sigma, \pi)$  ;
- (ii)  $\langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle = \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) + I^{+,n}(\sigma, \pi)$ .

**Démonstration.** (i) Par définition,  $\Pi(I^{+,0}(\sigma, \pi)) = I^{+,0}(\sigma, \pi)$ , donc

$$I^{+,1}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot I^{+,0}(\sigma, \pi) \rangle \supseteq I^{+,0}(\sigma, \pi),$$

ce qui prouve l'énoncé dans le cas où  $n = 1$ . Si  $n \geq 2$ , alors par récurrence :

$$\begin{aligned} I^{+,n}(\sigma, \pi) &= I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle \\ &\supseteq I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-2}(\sigma, \pi)) \rangle \\ &= I^{+,n-1}(\sigma, \pi). \end{aligned}$$

(ii) L'inclusion  $\supseteq$  découle de la définition (3.1) et l'inclusion  $\subseteq$  de la décomposition (2.6). □

On pose la définition suivante.

**Définition 3.5.** Pour  $v \in \pi$ , on définit le *niveau* de  $v$  (relatif à  $\sigma$ ), noté  $\ell_\sigma(v)$ , comme suit :

(i) supposons  $v \in I^+(\sigma, \pi)$ , on pose

- $\ell_\sigma(v) := 0$  si  $v \in I^{+,0}(\sigma, \pi)$ ,
- $\ell_\sigma(v) := n$  si  $v \in I^{+,n}(\sigma, \pi) \setminus I^{+,n-1}(\sigma, \pi)$  ;

(ii) supposons  $v \in I^-(\sigma, \pi)$ , on pose  $\ell_\sigma(v) := \ell_\sigma(\Pi(v))$  ;

(iii) enfin, pour  $v = v^+ + v^- \in \pi$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ , on pose  $\ell_\sigma(v) := \max\{\ell_\sigma(v^+), \ell_\sigma(v^-)\}$ .

**Remarque 3.6.** Comme le groupe  $G$  est engendré par  $K$  et  $\Pi$  et comme  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  contient un générateur de  $\pi$  comme représentation de  $G$  par la proposition 2.5 (i), on a  $\ell_\sigma(v) < +\infty$  pour tout  $v \in \pi$ . D'autre part,  $\ell_\sigma(v)$  dans (iii) est bien défini puisque  $\ell_\sigma(v^+)$  et  $\ell_\sigma(v^-)$  ne dépendent que de  $v$ .

Donnons des propriétés concernant  $\ell_\sigma(\cdot)$ .

**Lemme 3.7.**

(i) Si  $v_1, v_2 \in \pi$ , alors  $\ell_\sigma(v_1 + v_2) \leq \max\{\ell_\sigma(v_1), \ell_\sigma(v_2)\}$  ; si  $\ell_\sigma(v_1) \neq \ell_\sigma(v_2)$ , alors  $\ell_\sigma(v_1 + v_2) = \max\{\ell_\sigma(v_1), \ell_\sigma(v_2)\}$ .

(ii) Soit  $v \in I^+(\sigma, \pi)$  un vecteur tel que  $\ell_\sigma(v) = n \geq 1$ . Alors  $\ell_\sigma(Sv) = n + 1$ , où  $S \in \mathbb{F}_p[G]$  est défini par (2.10).

(iii) Soit  $v \in I^-(\sigma, \pi)$  un vecteur tel que  $\ell_\sigma(v) = n \geq 1$ . Alors  $\ell_\sigma(Sv) \leq n$  et

$$Sv \in I^{+,n}(\sigma, \pi) + \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)).$$

**Démonstration.** (i) C'est une conséquence triviale de la définition 3.5.

(ii) Par définition  $\ell_\sigma(Sv) \leq n + 1$ . Si  $\ell_\sigma(Sv) \leq n$ , alors il existe des  $w_i \in I^{+,n-1}(\sigma, \pi)$  pour  $0 \leq i \leq q - 1$  tels que

$$Sv = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_i.$$

D'après la remarque 3.2, cela entraîne que  $v - w_0 \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , d'où  $\ell_\sigma(v) \leq n - 1$  par (i), ce qui donne une contradiction et l'énoncé s'en déduit.

(iii) Comme  $\Pi(v) \in I^+(\sigma, \pi)$ , la condition  $\ell_\sigma(v) = n$  implique que  $\Pi(v)$  appartient à  $I^{+,n}(I^+(\sigma, \pi))$ , *a fortiori*, à  $\langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle$ . Comme

$$Sv = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v),$$

on en déduit l'appartenance de  $Sv$  à  $\langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle$ , d'où l'énoncé d'après le lemme 3.4 (ii). □

**Lemme 3.8.** Soit  $v \in \pi$  un vecteur vérifiant une équation de la forme

$$c_0 v + \sum_{n=1}^m c_n S^n v = 0 \tag{3.2}$$

avec  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  et  $(c_n)_{0 \leq n \leq m}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{F}_p}$  vérifiant  $c_m \neq 0$ . Alors, en choisissant une décomposition  $v = v^+ + v^-$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ , on a  $\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v^-)$ . De plus, on a  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-)$  si et seulement si  $\ell_\sigma(v) = 0$ .

**Démonstration.** Supposons au contraire que  $\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v^+) > \ell_\sigma(v^-)$ . En particulier,  $\ell_\sigma(v^+) \geq 1$ . D'après le lemme 3.7 (ii), on a pour tout  $1 \leq n \leq m$

$$\ell_\sigma(S^n v^+) = \ell_\sigma(v^+) + n,$$

ce qui donne une contradiction avec (3.2) si  $\ell_\sigma(v^-) = 0$ , car on peut alors supposer  $v^- = 0$  et (3.2) devient  $c_0 v^+ + \sum_{n=1}^m c_n S^n v^+ = 0$ . La dernière conclusion dans ce cas est triviale.

Si  $\ell_\sigma(v^-) \geq 1$ , par le lemme 3.7 (iii), on a  $\ell_\sigma(Sv^-) \leq \ell_\sigma(v^-)$  et donc pour tout  $1 \leq n \leq m$  :

$$\ell_\sigma(S^n v^-) = \ell_\sigma(S^{n-1} S v^-) \leq \ell_\sigma(v^-) + n - 1 < \ell_\sigma(v^+) + m = \ell_\sigma(S^m v^+),$$

où l'on a utilisé le fait que  $\ell_\sigma(Sw) \leq \ell_\sigma(w) + 1$  pour tout  $w \in \pi$ . On obtient encore une contradiction avec (3.2) puisque  $c_n \neq 0$  et que

$$\ell_\sigma(S^m v^+) > \max\{\ell_\sigma(S^k v^+), \ell_\sigma(S^n v^-)\}_{0 \leq k \leq m-1, 0 \leq n \leq m}. \tag{3.3}$$

Cela montre que  $\ell_\sigma(v^+) \leq \ell_\sigma(v^-)$ . La dernière conclusion se déduit de ce qui précède, car si  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-) \geq 1$  on aurait encore (3.3) et donc une contradiction. □

**Corollaire 3.9.** *Si  $\pi$  est admissible, on a  $\pi^{I_1} \subseteq I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .*

**Démonstration.** Soit  $v \in \pi^{I_1}$  un vecteur non nul. Alors il en est de même de  $S^n v$  pour tout  $n \geq 1$  par le lemme 2.8 (iv). L’admissibilité de  $\pi$  implique qu’il existe une famille  $(c_n)_{0 \leq n \leq m}$  d’éléments de  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec  $c_m \neq 0$  vérifiant l’équation (3.2). En choisissant une décomposition  $v = v^+ + v^-$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ , on obtient par le lemme 3.8 que  $\ell_\sigma(v^+) \leq \ell_\sigma(v^-)$ . De même, en appliquant le même argument à  $\Pi(v) \in \pi^{I_1}$  qui se décompose sous la forme  $\Pi(v^-) + \Pi(v^+)$  avec  $\Pi(v^-) \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $\Pi(v^+) \in I^-(\sigma, \pi)$ , on voit que

$$\ell_\sigma(v^-) = \ell_\sigma(\Pi v^-) \leq \ell_\sigma(\Pi v^+) = \ell_\sigma(v^+)$$

et donc  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-)$ . Le corollaire s’en déduit en utilisant à nouveau le lemme 3.8.  $\square$

**Remarque 3.10.** L’admissibilité de  $\pi$  est cruciale dans le corollaire 3.9. En fait, on verra plus tard (proposition 3.14) que l’espace  $I^+(\sigma, \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma/T) \cap I^-(\sigma, \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma/T)$  est de dimension finie où  $T$  est l’opérateur de Hecke défini au §2.2, tandis que l’espace des  $I_1$ -invariants de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma/T$  est de dimension infinie dès que  $F \neq \mathbb{Q}_p$  (voir [4, Remarque 4.2.6]). Malgré tout, on a un énoncé analogue si  $\pi$  est irréductible (proposition 3.16).

3.1.2. *Techniques pour calculer  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$*

Maintenant, on introduit un moyen qui permet de calculer explicitement  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  dans certains cas.

Considérons le morphisme composé  $IZ$ -équivariant

$$\Phi_\sigma = \overline{\Phi}_{\sigma, \pi} : \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow I^-(\sigma) \rightarrow I^-(\sigma, \pi) \hookrightarrow \pi. \tag{3.4}$$

Plus précisément, si  $f = f^+ + f^- \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$ , alors  $\overline{\Phi}_\sigma(f) := \overline{f^-}$  est l’image de  $f^-$  dans  $\pi$ . Évidemment,  $\overline{\Phi}_\sigma$  est un morphisme  $IZ$ -équivariant. Rappelons que l’on a défini l’espace  $R(\sigma, \pi)$  comme le noyau de l’application naturelle  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$ .

**Lemme 3.11.** *L’espace  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  est l’image de  $R(\sigma, \pi)$  via  $\overline{\Phi}_\sigma$ .*

**Démonstration.** Si  $f = f^+ + f^- \in R(\sigma, \pi)$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$ , alors par définition,

$$\overline{\Phi}_\sigma(f) = \overline{f^-} = -\overline{f^+} \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi).$$

Réciproquement, soit  $\overline{f} \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , et  $f^+$  (respectivement  $f^-$ ) un relèvement de  $\overline{f}$  dans  $I^+(\sigma)$  (respectivement  $I^-(\sigma)$ ), alors  $f := -f^+ + f^-$  est un élément dans  $R(\sigma, \pi)$  vérifiant  $\overline{\Phi}_\sigma(f) = \overline{f}$ .  $\square$

**Lemme 3.12.** *On a  $\overline{\Phi}_\sigma(\Pi(f)) = -\Pi(\overline{\Phi}_\sigma(f))$  pour  $f \in R(\sigma, \pi)$ .*

**Démonstration.** Si l’on écrit  $f = f^+ + f^-$  avec  $f \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$ , alors  $\Pi(f) = \Pi(f^-) + \Pi(f^+)$  avec  $\Pi(f^-) \in I^+(\sigma)$  et  $\Pi(f^+) \in I^-(\sigma)$  de sorte que

$$\overline{\Phi}_\sigma(\Pi(f)) = \overline{\Pi(f^+)} = \Pi(\overline{f^+}) = -\Pi(\overline{f^-}) = -\Pi(\overline{\Phi}_\sigma(f))$$

dont la troisième égalité résulte du fait que  $\overline{f^+} + \overline{f^-} = 0$  en notant que  $f \in R(\sigma, \pi)$ .  $\square$

Soit  $f = f^+ + f^- \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  un vecteur avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$ . Comme

$$\Pi(f^-) \in I^+(\sigma) = R_0^+(\sigma) \oplus \left( \bigoplus_{n \geq 1} R_n^+(\sigma) \right),$$

la décomposition (2.7) donne l'écriture suivante de  $\Pi(f^-)$  :

$$\Pi(f^-) = y + \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_\mu \tag{3.5}$$

avec  $y \in R_0^+(\sigma)$  et  $x_\mu \in I^-(\sigma)$ . De plus, on a

$$x_\mu \in \bigoplus_{0 \leq n \leq m-1} R_n^-(\sigma) \text{ si } f^- \in \bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n^-(\sigma).$$

**Lemme 3.13.** Avec les notations précédentes, on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  :

$$\Phi_\sigma \left( \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right) = \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0.$$

**Démonstration.** On calcule en utilisant (3.5) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f &= \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^+ + \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(f^-) \\ &= \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^+ + \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \\ &\quad + \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q^\times} \begin{pmatrix} [\lambda] + [\mu^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mu] & 0 \\ 0 & -[\mu^{-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & [\mu^{-1}] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_\mu \\ &\in \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 + I^+(\sigma), \end{aligned}$$

et la conclusion s'en déduit par la définition de  $\Phi_\sigma$  (3.4). □

### 3.1.3. Exemples

On donne des exemples illustrant le calcul de l'espace  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  en utilisant les techniques au §3.1.2. Le cas le plus simple est celui où  $\pi = \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)$  avec  $P(T) \in \mathbb{F}_p[T]$  un polynôme non constant, où  $T$  est l'opérateur de Hecke défini au §2.2.1.

Traisons d'abord le cas où  $P(T)$  est de degré 1, c'est-à-dire, on suppose que

$$\pi = V(\sigma, \lambda) := \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda) \tag{3.6}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{F}_p$ . Si  $f \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on désigne par  $\bar{f}$  son image dans  $\pi$ . Soit  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ .

**Proposition 3.14.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$I^+(\sigma, V(\sigma, \lambda)) \cap I^-(\sigma, V(\sigma, \lambda)) = \overline{\mathbb{F}_p[\text{Id}, v_0]} \oplus \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]}.$$

**Démonstration.** Commençons par remarquer que  $\overline{\mathbb{F}_p[\text{Id}, v_0]} \cap \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]} = 0$ , i.e.

$$[\Pi, v_0] \notin \overline{\mathbb{F}_p[\text{Id}, v_0]} + (T - \lambda)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma).$$

Ce fait peut se voir en examinant les supports comme dans la preuve de [4, Théorème 3.2.4].

L'inclusion  $\supseteq$  résulte de la proposition 2.5 (i) et du fait que le membre de gauche est stable par  $\Pi$ . Pour l'autre inclusion, on utilise le lemme 3.11 qui permet d'identifier  $I^+(\sigma, V(\sigma, \lambda)) \cap I^-(\sigma, V(\sigma, \lambda))$  avec l'image de  $(T - \lambda)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$  via  $\Phi_\sigma$  défini par (3.4). Autrement dit, il faut vérifier que : quel que soit  $g \in G$ ,

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([g, v_0])) \in \overline{\mathbb{F}_p[\text{Id}, v_0]} \oplus \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]}.$$

D'après le lemme 3.12, on peut supposer  $g \in P^+KZ$ , ce qui fait que  $g$  s'écrit sous la forme comme dans (2.4) :

$$g = g^{(n)}g^{(n-1)} \dots g^{(1)}k.$$

En utilisant le lemme 2.3 et la  $G$ -équivariance de  $T$ , on déduit que

$$(T - \lambda)([\text{Id}, kv_0]) = k \cdot (T - \lambda)([\text{Id}, v_0]) \in \langle K \cdot [\Pi, v_0] \rangle.$$

Par la décomposition (2.6) et la définition de  $\Phi_\sigma$ , cela implique que

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([\text{Id}, kv_0])) \in \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]},$$

d'où l'énoncé dans le cas particulier où  $g = k \in KZ$  (i.e.  $n = 0$ ). Traitons le cas où  $n \geq 1$ . Par ce qui précède, on voit que  $f^- \in R_0^-(\sigma)$  si l'on écrit  $[\text{Id}, kv_0] = f^+ + f^-$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$ , donc le  $x_0$  défini dans l'écriture (3.5) se réduit à 0 et le lemme 3.13 implique que

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([g^{(1)}k, v_0])) = 0.$$

Le même raisonnement donne  $\Phi_\sigma((T - \lambda)([g, v_0])) = 0$ , et le résultat s'en déduit. □

**Proposition 3.15.** *Supposons que  $\pi = \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)$  avec  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}_p}[T]$  un polynôme de degré  $k \geq 1$ . Alors  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi) \subseteq \pi^{I_1}$ .*

**Démonstration.** Soient  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et  $f = P(T)[\text{Id}, v_0]$  de telle sorte que  $P(T) \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma = \langle G \cdot f \rangle$  puisque  $T$  est un endomorphisme  $G$ -équivariant de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ . Par le lemme 3.11, l'énoncé équivaut à dire que  $\Phi_\sigma(P(T) \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma) \subseteq \pi^{I_1}$ , ou plutôt, que  $\Phi_\sigma(g \cdot f) \in \pi^{I_1}$  pour tout  $g \in G$ . De plus, le lemme 3.12 permet de se ramener au cas  $g \in P^+KZ$ .

Comme  $f$  est fixé par  $I_1$ , il s'écrit (de manière unique) sous la forme  $f = f^+ + f^-$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)^{I_1}$  et  $f^- \in I^-(\sigma)^{I_1}$ , et le lemme 2.3 implique que  $f^+ \in \bigoplus_{0 \leq m \leq k} R_m^+(\sigma)$  et  $f^- \in \bigoplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n^-(\sigma)$ . On en déduit en utilisant la proposition 2.14 que :

$$f^+ = \sum_{0 \leq m \leq k} c_m S^m[\text{Id}, v_0], \quad \Pi(f^-) = \sum_{0 \leq n \leq k-1} d_n S^n[\text{Id}, v_0]$$



pour des  $c_m, d_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$  convenables. En réécrivant  $f^+$  sous la forme

$$f^+ = c_0[\text{Id}, v_0] + \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{1 \leq m \leq k} c_m \Pi S^{m-1}[\text{Id}, v_0],$$

on obtient par le calcul du lemme 3.13 que : pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ,

$$\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f \in \sum_{1 \leq m \leq k} c_m \Pi S^{m-1}[\text{Id}, v_0] + I^+(\sigma),$$

où l'on a utilisé le fait que  $\Pi S^m[\text{Id}, v_0]$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$  pour tout  $m \geq 0$ . En particulier,

$$\Phi_\sigma \left( \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f \right) = \sum_{1 \leq m \leq k} c_m \overline{\Pi S^{m-1}[\text{Id}, v_0]} \in \pi^{I_1}$$

ce qui montre que  $\Phi_\sigma(gf) \in \pi^{I_1}$  si  $g \in KZ$  en utilisant la décomposition (2.6). On procède de même pour  $g \in P^+KZ, g \notin KZ$ . □

### 3.2. Le diagramme canonique associé à une représentation irréductible de $G$

Fixons  $\pi$  une représentation lisse *irréductible* de  $G$  (admettant un caractère central). On définit le *diagramme canonique* associé à  $\pi$  et on en fournit des propriétés élémentaires. On le détermine explicitement lorsque  $\pi$  est non supersingulière ou  $F = \mathbb{Q}_p$ .

#### 3.2.1. Définition et propriétés du diagramme canonique

En choisissant  $\sigma$  une sous- $KZ$ -représentation irréductible de  $\pi$ , on obtient une surjection  $G$ -équivariante  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  ainsi que les sous-espaces  $I^+(\sigma, \pi)$  et  $I^-(\sigma, \pi)$  de  $\pi$  (§3.1). En général, le choix de  $\sigma$  n'est pas unique. Comme on l'a signalé dans la remarque 2.6,  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  est réductible, donc on peut appliquer à  $\pi$  les résultats du §3.1, où l'on n'a fait aucune hypothèse spécifique sur le quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ .

**Proposition 3.16.** *On a  $\pi^{I_1} \subseteq I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .*

**Démonstration.** Par définition, un vecteur  $v \in \pi$  appartient à  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  si et seulement si  $\ell_\sigma(v) = 0$ . Supposons  $v$  non nul fixé par  $I_1$ . Alors  $S^n v$  l'est aussi pour tout entier  $n \geq 1$  par le lemme 2.8 (iv).

Supposons d'abord  $\pi$  non supersingulière. En particulier,  $\pi$  est admissible [2], donc le corollaire 3.9 permet de conclure.

Traitons le cas où  $\pi$  est supersingulière. D'après le lemme 2.9, on a  $S^m v = 0$  pour  $m \gg 1$  suffisamment grand. En particulier,  $v$  vérifie l'hypothèse du lemme 3.8. De même,  $\Pi(v) \in \pi^{I_1}$  la vérifie aussi. Donc l'argument que l'on a employé dans la démonstration du corollaire 3.9 permet de conclure. □

**Corollaire 3.17.** *Soient  $\sigma'$  une autre sous- $KZ$ -représentation irréductible de  $\pi$  (peut être isomorphe à  $\sigma$ ) et  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma' \twoheadrightarrow \pi$  la surjection  $G$ -équivariante induite. Alors*

$$I^+(\sigma, \pi) = I^+(\sigma', \pi), \quad I^-(\sigma, \pi) = I^-(\sigma', \pi).$$

**Démonstration.** Rappelons que  $I^+(\sigma, \pi) := \langle P^+ \cdot \sigma \rangle$ . Prenons  $v_0 \in \sigma^{I_1}$  un vecteur non nul. Par le lemme 3.18 ci-après, on a  $I^+(\sigma, \pi) = \langle P^+ \cdot \Pi(v_0) \rangle$  et  $I^-(\sigma, \pi) = \langle \Pi P^+ \cdot \Pi(v_0) \rangle$ . Autrement dit,  $x$  appartient à  $I^+(\sigma, \pi)$  (respectivement à  $I^-(\sigma, \pi)$ ) si et seulement s'il existe  $Q_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  (respectivement  $Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$ ) tel que  $x = Q_1 \Pi \cdot v_0$  (respectivement  $x = \Pi Q_2 \Pi \cdot v_0$ ).

Cela dit, le corollaire découle de la proposition 3.16 (i). Plus précisément, prenons  $w_0 \in \sigma'$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ , alors cette proposition dit que  $w_0 \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , et donc par ce qui précède, il existe  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que

$$w_0 = Q_1 \Pi \cdot v_0 = \Pi Q_2 \Pi \cdot v_0.$$

En appliquant le lemme 3.18 à  $\sigma'$  et à  $w_0$ , on en déduit que :

$$I^+(\sigma', \pi) = \langle P^+ \cdot \Pi(w_0) \rangle = \langle P^+ \cdot \Pi^2 Q_2 \Pi(v_0) \rangle \subseteq \langle P^+ \cdot \Pi(v_0) \rangle = I^+(\sigma, \pi),$$

d'où l'inclusion  $I^+(\sigma', \pi) \subseteq I^+(\sigma, \pi)$ . Le résultat s'en déduit en échangeant  $\sigma'$  et  $\sigma$  et en remarquant que  $I^-(\sigma, \pi) = \Pi \cdot I^+(\sigma, \pi)$ . □

**Lemme 3.18.** Soit  $v_0 \in \sigma^{I_1}$  un vecteur non nul. Dans  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on a

$$I^+(\sigma) = [P^+ \Pi, v_0], \quad I^-(\sigma) = [\Pi P^+ \Pi, v_0].$$

**Démonstration.** Il suffit de vérifier l'énoncé concernant  $I^+(\sigma)$ . Par définition,  $I^+(\sigma) = [P^+, \sigma] = P^+ \cdot [\text{Id}, \sigma]$ . Or, par le corollaire 2.11, l'espace  $[\text{Id}, \sigma]$  est juste l'espace engendré par

$$\left\{ \left[ \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_0 \right], \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}$$

qui n'est autre que (à une constante dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$  près)

$$\left\{ \left[ \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi, v_0 \right], \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Le lemme s'en déduit en notant que  $\begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P^+$ . □

Rappelons [6, 12] qu'un *diagramme* est par définition un triplet  $(D_0, D_1, r)$  où  $D_0$  est une représentation lisse de  $KZ$ ,  $D_1$  est une représentation lisse de  $N$  et  $r : D_1 \rightarrow D_0$  est un morphisme  $IZ$ -équivariant. On définit des morphismes entre deux diagrammes de manière évidente et on note  $\mathcal{DLA}\mathcal{G}$  la catégorie résultée. Notons qu'elle est équivalente à la catégorie des systèmes de coefficients équivariants sur l'arbre de  $G$  [12].

Donnons quelques exemples de diagrammes.

**Exemple 3.19.** Soit  $\pi'$  une représentation lisse de  $G$ . Alors (où  $\text{can}$  désigne l'inclusion naturelle)

- (i)  $\mathcal{K}(\pi') := (\pi'|_{KZ}, \pi'|_N, \text{can})$  est un diagramme ;
- (ii)  $(\pi'^{K_1}, \pi'^{I_1}, \text{can})$  est un diagramme ; plus généralement,  $(\pi'^{K_n}, \pi'^{I_n}, \text{can})$  est un diagramme pour tout  $n \geq 1$ .
- (iii)  $(W, W \cap \Pi(W), \text{can})$  est un diagramme pour toute sous- $KZ$ -représentation  $W$  de  $\pi'$ , et  $(\langle KZ \cdot M \rangle, M, \text{can})$  l'est aussi pour toute sous- $N$ -représentation  $M$  de  $\pi'$ .

D'après le corollaire 3.17, l'espace  $I^+(\sigma, \pi)$  (respectivement  $I^-(\sigma, \pi)$ ,  $I^{+,n}(\sigma, \pi)$ , le niveau  $\ell_\sigma(\cdot)$ , etc.) ne dépend que de  $\pi$ , on peut donc le noter  $I^+(\pi)$  (respectivement  $I^-(\pi)$ ,  $I^{+,n}(\pi)$ ,  $\ell(\cdot)$ , etc.). Posons :

$$D_1(\pi) := I^+(\pi) \cap I^-(\pi), \quad D_0(\pi) := \langle KZ \cdot D_1(\pi) \rangle \subset \pi. \tag{3.7}$$

Alors  $D_1(\pi)$  est stable par  $N$  et  $D_0(\pi)$  par  $KZ$ . En fait,  $D_1(\pi)$  est le plus grand sous-espace vectoriel de  $D_0(\pi)$  stable par  $N$ . On pose la définition suivante.

**Définition 3.20.** Le *diagramme canonique* associé à  $\pi$  est le diagramme

$$D(\pi) := (D_0(\pi), D_1(\pi), \text{can}),$$

où  $\text{can}$  désigne l'inclusion naturelle  $D_1(\pi) \hookrightarrow D_0(\pi)$ .

Le résultat principal de l'article est le théorème suivant, qui dit que, en passant de  $\pi$  à son diagramme canonique, on ne perd pas d'information.

**Théorème 3.21.** *Pour toute représentation lisse irréductible  $\pi'$  de  $G$ , on a  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si  $D(\pi) \cong D(\pi')$  en tant que diagrammes.*

En fait, on va démontrer un résultat plus général.

**Théorème 3.22.** *Pout toute représentation lisse  $\pi'$  de  $G$  (pas forcément irréductible), il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \cong \text{Hom}_G(\pi, \pi'),$$

où  $\mathcal{K}(\pi')$  est le diagramme défini dans l'exemple 3.19 (i).

**Démonstration.** On définit d'abord un morphisme

$$\iota : \text{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \rightarrow \text{Hom}_G(\pi, \pi'). \tag{3.8}$$

Soit  $(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$  un morphisme non nul de diagrammes, c'est-à-dire,  $\varphi_0 : D_0(\pi) \rightarrow \pi'|_{KZ}$  est un morphisme  $KZ$ -équivalent et

$$\varphi_1 = \varphi_0|_{D_1(\pi)} : D_1(\pi) \rightarrow \pi'|_N$$

est un morphisme  $N$ -équivalent. On va définir un morphisme  $G$ -équivalent  $\varphi : \pi \rightarrow \pi'$  à partir de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  vérifiant  $\varphi|_{D_0(\pi)} = \varphi_0$ .

D'abord, si un tel morphisme existe, il est nécessairement unique puisque  $\pi$  est engendrée par  $D_0(\pi)$  en tant que  $G$ -représentation. Plus précisément, si  $v \in \pi$ , on définit  $\varphi(v)$  comme suit par récurrence sur le niveau de  $v$ .

- (a) Si  $\ell(v) = 0$ , alors  $v \in D_1(\pi)$  et on pose  $\varphi(v) = \varphi_1(v)$ .
- (b) Si  $v^+ \in I^+(\pi)$  et  $\ell(v^+) = n \geq 1$ , soit  $w_\lambda \in I^{+,n-1}(\pi)$  (avec  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ) des éléments tels que

$$v^+ = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w_\lambda),$$

on pose

$$\varphi(v^+) := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w_\lambda),$$

où  $\varphi(w_\lambda)$  a été défini par récurrence. C'est bien défini car : si

$$v^+ = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w'_\lambda)$$

pour d'autres  $w'_\lambda \in I^{+,n-1}(\pi)$ , alors on a  $w_\lambda - w'_\lambda \in D_1(\pi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w_\lambda) - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w'_\lambda) &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi_1(w_\lambda - w'_\lambda) \\ &= \varphi_0 \left( \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w_\lambda - w'_\lambda) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte des faits que  $w_\lambda - w'_\lambda \in D_1(\pi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et que  $(\varphi_0, \varphi_1)$  est un morphisme de diagrammes.

- (c) Si  $v = v^+ + \Pi(\tilde{v}^+)$  avec  $v^+, \tilde{v}^+ \in I^+(\pi)$ , alors on pose

$$\varphi(v) = \varphi(v^+) + \Pi\varphi(\tilde{v}^+).$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la décomposition en utilisant que

$$I^+(\pi) \cap \Pi(I^+(\pi)) = D_1(\pi)$$

et que  $\varphi_1$  est  $N$ -équivariant.

Évidemment, l'application  $\varphi$  ainsi définie est linéaire. Il faut vérifier qu'elle est  $G$ -équivariante, i.e. quelle que soit l'égalité  $v = \sum_{i \in S} g_i v_i$  (avec  $g_i \in G$ ,  $v, v_i \in \pi$ , et  $S$  un ensemble fini d'indices) dans  $\pi$ , on doit avoir dans  $\pi'$

$$\varphi(v) = \sum_{i \in S} g_i \varphi(v_i). \tag{3.9}$$

Comme ce qu'on veut démontrer est vrai sur  $D_0(\pi)$  (voir (b) et (c) ci-dessus) et comme  $\pi$  est engendrée par  $D_1(\pi)$  en tant que  $G$ -représentation, on peut supposer que tous les  $v_i$  sont dans  $D_1(\pi)$ . Puisqu'il existe des  $h_j \in G$  et des  $w_j \in D_1(\pi)$  tels que

$$v = \sum_j h_j w_j \quad \text{et} \quad \varphi(v) = \sum_j h_j \varphi(w_j),$$

on peut supposer de plus  $v = 0$ .

Rappelons que l'on peut écrire  $g = g^{(n)} \dots g^{(1)} k$  comme dans (2.4) si  $g \in P^+ KZ$  et  $g = \Pi g^{(n)} \dots g^{(1)} k$  si  $g \in \Pi P^+ KZ$ . La longueur de  $g$  est définie par  $\ell(g) = n$  si  $g \in P^+ KZ$  et  $\ell(g) = n + 1$  si  $g \in \Pi P^+ KZ$ .

On va vérifier (3.9) par récurrence sur l'entier  $m := \max_{i \in S} \{\ell(g_i)\}$ . Le cas où  $m = 0$  est évident puisqu'alors  $g_i \in KZ$ . En général, on pose

$$S_\lambda = \{i \in S \mid g_i \in P^+ KZ, g_i^{(\ell(g_i))} = g_\lambda\}, \quad S_\Pi = \{i \in S \mid g_i \in \Pi P^+ KZ\}$$

de telle sorte qu'on ait

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} g_\lambda \left( \sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \right) + \Pi \left( \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \right),$$

où l'on a écrit  $g_i = g_\lambda g'_i$  si  $i \in S_\lambda$  et  $g'_i = g_i^+$  si  $i \in S_\Pi$ . Comme  $g'_i \in P^+$  et  $v_i \in D_1(\pi) \subseteq I^+(\pi)$ , le lemme 3.1 implique

$$\sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \in D_1(\pi) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \in D_1(\pi)$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ . On en déduit avec  $\varphi|_{D_1(\pi)} = \varphi_1$  que :

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} g_\lambda \varphi \left( \sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \right) + \Pi \varphi \left( \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \right).$$

Donc l'hypothèse de récurrence permet de conclure que  $\varphi$  est  $G$ -équivariant. Autrement dit,  $\iota : (\varphi_0, \varphi_1) \mapsto \varphi$  donne le morphisme (3.8) demandé.

Ensuite, on définit un inverse de (3.8). Soit  $\varphi : \pi \rightarrow \pi'$  un morphisme  $G$ -équivariant, on en déduit un morphisme de diagrammes

$$\mathcal{K}(\varphi) : \mathcal{K}(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi'),$$

et en le composant avec le morphisme naturel  $D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(\pi)$ , on obtient un morphisme de diagrammes  $D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$ . Ceci définit un morphisme

$$\kappa : \text{Hom}_G(\pi, \pi') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')).$$

On vérifie que  $\iota \circ \kappa(\varphi) = \varphi$  et  $\kappa \circ \iota((\varphi_0, \varphi_1)) = (\varphi_0, \varphi_1)$ , ce qui permet de conclure. □

**Remarque 3.23.** On voit que le lemme 3.1 joue un rôle central pour assurer la  $G$ -équivariance de  $\varphi$  dans la démonstration du théorème 3.22. En revanche, l'irréductibilité de  $\pi$  n'est utilisée que pour garantir l'indépendance de  $\sigma$  de  $D(\pi)$  (et de  $\ell(\cdot)$ , etc.). Donc la construction marche bien pour  $\pi$  n'importe quel quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  (pas forcément irréductible) : il suffit de remplacer  $D(\pi)$  (respectivement  $\ell(\cdot)$ , etc.) par  $D(\sigma, \pi)$  (respectivement  $\ell_\sigma(\cdot)$ , etc.). On a choisi de l'énoncer ici dans un cadre plus restrictif parce que le cas où  $\pi$  est irréductible est plus intéressant.

**Remarque 3.24.** Conservons les notations du théorème 3.22. Par construction, si

$$(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$$

est non nul, alors  $\varphi = \iota((\varphi_0, \varphi_1)) : \pi \rightarrow \pi'$  l'est aussi. L'irréductibilité de  $\pi$  implique que  $\varphi$  est de plus injectif, et donc  $(\varphi_0, \varphi_1) = \kappa(\varphi)$  l'est aussi. Cette propriété peut être vue comme *irréductibilité* de  $D(\pi)$ .

**Démonstration du théorème 3.21.** La condition est suffisante d'après le théorème 3.22.

Réciproquement, soit  $\varphi : \pi \xrightarrow{\sim} \pi'$  un isomorphisme  $G$ -équivariant. Alors  $\sigma' := \varphi(\sigma) \subset \pi'$  est une sous- $KZ$ -représentation irréductible de  $\pi'$  en rappelant que  $\sigma \subset \pi$  l'est, de telle sorte que  $D_1(\pi) = \langle P^+ \cdot \sigma \rangle \cap \langle \Pi P^+ \cdot \sigma \rangle$  et  $D_1(\pi') = \langle P^+ \cdot \sigma' \rangle \cap \langle \Pi P^+ \cdot \sigma' \rangle$ . Cela implique l'inclusion  $\varphi(D_1(\pi)) \subseteq D_1(\pi')$  puis une injection de diagrammes

$$\kappa(\varphi) : D(\pi) \rightarrow D(\pi'),$$

qui est un isomorphisme car  $\kappa(\varphi^{-1})$  en fournit un inverse. □

Rappelons que dans [6, §9] est défini un foncteur  $H_0$  de  $\mathcal{DLA}\mathcal{G}$  dans  $\text{Rep}_G$  (voir aussi [12, §5.2] où l'objet « système de coefficients  $G$ -équivariants » intervient). Pour  $D = (D_0, D_1, r)$  un diagramme, on dispose d'une suite exacte :

$$\text{c-Ind}_N^G(D_1 \otimes \delta_{-1}) \xrightarrow{\partial} \text{c-Ind}_{KZ}^G D_0 \rightarrow H_0(D) \rightarrow 0, \tag{3.10}$$

où  $\delta_{-1} : N \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  désigne le caractère donné par  $g \mapsto (-1)^{\text{val}_F(\det(g))}$ , et où  $\partial$  est le composé des  $G$ -morphisms suivants qui sont définis de manière évidente :

$$\partial : \text{c-Ind}_N^G(D_1 \otimes \delta_{-1}) \hookrightarrow \text{c-Ind}_{IZ}^G D_1 \xrightarrow{r} \text{c-Ind}_{IZ}^G D_0 \twoheadrightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G D_0.$$

De manière explicite, si  $x \in D_1 \otimes \delta_{-1}$ , on a

$$\partial([\text{Id}, x]) = [\text{Id}, r(x)] - [\Pi, r(\Pi^{-1} \cdot x)] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G D_0 \tag{3.11}$$

ce qui détermine complètement  $\partial$  par sa  $G$ -équivariance.

En particulier, à partir de la représentation irréductible  $\pi$  fixée, on obtient  $H_0(D(\pi))$  en appliquant  $H_0$  au diagramme canonique  $D(\pi)$ .

**Corollaire 3.25.** Avec les notations précédentes, on a  $H_0(D(\pi)) \cong \pi$ .

**Démonstration.** Compte-tenu du théorème 3.22, le corollaire se déduit de la propriété que [12, Proposition 5.4.3] :

$$\text{Hom}_{\mathcal{DLA}G}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \cong \text{Hom}_G(H_0(D(\pi)), \pi')$$

pour toute représentation lisse  $\pi'$  de  $G$ . En effet, en prenant  $\pi' = \pi$ , l'inclusion  $D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(\pi)$  induit un  $G$ -morphisme non trivial  $\phi : H_0(D(\pi)) \twoheadrightarrow \pi$ . D'autre part, en appliquant [6, Lemme 9.9] à  $D = D(\pi)$  et à  $\Omega = \pi$ , on voit que le morphisme composé

$$D_0(\pi) \rightarrow H_0(D(\pi)) \rightarrow \pi$$

est injectif. En particulier, on obtient une injection de diagrammes  $D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(H_0(D(\pi)))$  qui induit par le théorème 3.22 un  $G$ -morphisme non trivial  $\psi : \pi \rightarrow H_0(D(\pi))$ . On vérifie que  $\phi \circ \psi = \text{id}_\pi$ , ce qui fait que  $H_0(D(\pi))$  s'écrit d'une somme directe de  $\pi$  avec une certaine sous- $G$ -représentation  $X$ . Or, par définition (3.10),  $H_0(D(\pi))$  est engendrée comme  $G$ -représentation par  $D_0(\pi)$  qui est en fait contenu dans  $\pi$ . Cela force que  $X = 0$  et le corollaire s'en déduit. □

**Remarque 3.26.** Supposons de plus  $\pi$  admissible. D'après [6, Théorème 9.8], il existe une injection de diagrammes

$$(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(\Omega),$$

où  $\Omega$  est une représentation lisse de  $G$  telle que  $\Omega|_K \cong \text{Inj}_K \text{soc}_K(\pi)$  est une enveloppe injective de  $\text{soc}_K(\pi)$  dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_K$ . Posons

$$\pi' := \langle G \cdot \varphi_1(D_1(\pi)) \rangle \subseteq \Omega$$

la sous- $G$ -représentation de  $\Omega$  engendrée par  $\varphi_1(D_1(\pi))$ . Le théorème 3.22 entraîne alors que  $\pi' \cong \pi$ . Autrement dit,  $\pi'$  ne dépend ni du choix de  $\Omega$  ni du choix de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  (à isomorphisme près).

### 3.2.2. Le cas non supersingulier

On détermine explicitement  $D(\pi)$  lorsque  $\pi$  est non supersingulière.

**Théorème 3.27.** *Supposons  $\pi$  non supersingulière. Alors*

$$D(\pi) = (\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can}).$$

*En particulier,  $D_1(\pi)$  est de dimension inférieure ou égale à 2.*

**Démonstration.** Rappelons que  $\sigma$  est une sous- $KZ$ -représentation irréductible fixée de  $\pi$ . D'après [2, Théorèmes 33, 34], la surjection  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  se factorise par  $V(\sigma, \lambda)$  pour  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  convenable (en fait,  $\lambda$  est déterminé par le choix de  $\sigma$ ), où  $V(\sigma, \lambda)$  est la  $G$ -représentation définie par (3.6).

Si  $\pi$  est un caractère, tous les énoncés sont évidents. Si  $\pi$  est une série principale, i.e.  $\pi \cong \text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2$  pour  $\chi_1$  et  $\chi_2$  deux caractères lisses convenables de  $F^\times$  (rappelons que  $P \subset G$  désigne le sous-groupe de Borel), la décomposition d'Iwasawa donne :

$$\pi^{K_1} = (\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2)^{K_1} \cong \text{Ind}_I^K \chi_1 \otimes \chi_2.$$

En conséquence,  $\pi^{I_1}$  est de dimension 2 et  $\pi^{K_1} = \langle K \cdot \pi^{I_1} \rangle$  (voir, par exemple, [6, § 2]). D'autre part, on sait d'après [2, Théorème 30] que  $\pi \cong V(\sigma, \lambda)$ , donc  $D_1(\pi)$  est aussi de dimension 2 par la proposition 3.14. L'énoncé s'en déduit en utilisant la proposition 3.16.

Il reste à traiter le cas où  $\pi$  est une série spéciale. Sans perdre de généralité on suppose que le caractère central de  $\pi$  est trivial sur  $\varpi \in Z$ . D'après [2, Théorème 30],  $\sigma$  est de dimension  $q$  et est l'unique sous- $KZ$ -représentation irréductible de  $\pi$  ; de plus,  $\lambda = 1$  et  $\pi$  est le quotient de  $V(\sigma, 1)$  par un sous-espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément, si  $v_0 \in \sigma$  est un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et si l'on pose

$$f = [\text{Id}, v_0] + [II, v_0] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma,$$

alors  $f \notin (T-1)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$  et on a une suite exacte de  $G$ -représentations (voir [3, § 3.4])

$$0 \rightarrow R(\sigma, \pi) \rightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi \rightarrow 0$$

avec  $R(\sigma, \pi) = (T-1)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma) + \overline{\mathbb{F}_p} f$ . Le lemme 3.11 nous permet d'identifier  $D_1(\pi)$  avec l'image de  $R(\sigma, \pi)$  dans  $\pi$  via le morphisme  $\Phi_\sigma$  qui est défini par (3.4). D'une part, on a par définition  $\Phi_\sigma(f) = \overline{[II, v_0]}$ , d'autre part, la proposition 3.14 nous dit que

$$\Phi_\sigma((T-1) \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma) = \overline{\mathbb{F}_p} [\overline{\text{Id}, v_0}] + \overline{\mathbb{F}_p} [\overline{II, v_0}] \in \pi.$$

Compte-tenu de l'égalité  $\overline{[\text{Id}, v_0]} = -\overline{[II, v_0]}$  dans  $\pi$ , on en déduit que  $D_1(\pi) = \overline{\mathbb{F}_p} [\overline{\text{Id}, v_0}]$  est de dimension 1. Cela suffit pour conclure que  $D_1(\pi) = \pi^{I_1}$  parce que  $\pi^{I_1} \subseteq D_1(\pi)$  (proposition 3.16) et que  $\pi^{I_1}$  est aussi de dimension 1 [3, Lemme 27]. Enfin, l'énoncé que  $\pi^{K_1} = D_0(\pi) = \langle K \cdot \pi^{I_1} \rangle$  s'en déduit aussi : comme  $\sigma$  est un objet injectif dans la catégorie  $\text{Rep}_{K/K_1}$  [6, Lemme 3.2(iii)], on doit avoir  $\pi^{K_1} \cong \sigma \oplus X$  avec  $X$  une certaine sous- $K$ -représentation de  $\pi^{K_1}$  ; or, le fait que  $\pi^{I_1}$  est de dimension 1 implique que  $\pi^{I_1} = \sigma^{I_1}$ , puis  $X^{I_1} = 0$  et  $X = 0$ , d'où l'égalité  $\pi^{K_1} = \sigma$  et l'énoncé s'en déduit.  $\square$

3.2.3. *Le cas où  $F = \mathbb{Q}_p$*

**Théorème 3.28.** *Supposons  $F = \mathbb{Q}_p$  et  $\pi$  supersingulière. Alors  $D_1(\pi) = \pi^{I_1}$  et  $D_1(\pi)$  est de dimension 2.*

**Démonstration.** Dans [14], l'espace  $I^+(\pi)$  est noté  $M$  et, le théorème 6.3 de [14] fournit une suite exacte de  $I$ -représentations

$$0 \rightarrow \pi^{I_1} \rightarrow M \oplus II(M) \rightarrow \pi \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire,  $D_1(\pi) = M \cap II(M) = \pi^{I_1}$ . La dernière conclusion s'en déduit en utilisant [4, Théorème 3.2.4].

Signalons que la proposition 3.14 donne aussi une preuve du théorème 3.28 en utilisant [4, Théorèmes 1.1 et 3.2.4].  $\square$



**Remarque 3.29.**

- (i) Ce n'est plus vrai que  $D_0(\pi) = \pi^{K_1}$  dans le théorème 3.28. En fait,  $D_0(\pi)$  est égale au  $K$ -socle de  $\pi$  [5, Théorème 4.8].
- (ii) Combiné avec le théorème 3.21, les théorèmes 3.27 et 3.28 permettent de retrouver les entrelacements entre les représentations lisses irréductibles de  $G$  fournis dans [2, Corollaire 36] et [4, Théorème 1.3].

**3.3. Le diagramme canonique associé à un quotient non trivial de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$**

Dans ce paragraphe,  $\pi$  sera un  $G$ -quotient *non trivial* de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  avec  $\sigma$  un poids fixé Rappelons que  $I^+(\sigma) := [P^+, \sigma]$  et  $I^-(\sigma) = \Pi \cdot I^+(\sigma)$ , avec  $I^+(\sigma, \pi)$  et  $I^-(\sigma, \pi)$  désignant respectivement leurs images dans  $\pi$ .

*Notation.* On pose  $D_1(\sigma, \pi) := I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  et

$$D(\sigma, \pi) := (\langle KZ \cdot D_1(\sigma, \pi) \rangle, D_1(\sigma, \pi), \text{can})$$

un sous-diagramme de  $\mathcal{K}(\pi)$  qui a été défini à l'exemple 3.19 (iii). Par abus de notation (en raison de la définition 3.20), on l'appelle le *diagramme canonique* associé à  $\pi$ . Au contraire du cas irréductible,  $D(\sigma, \pi)$  dépend de  $\sigma$ .

La même construction que celle du théorème 3.22, comme on l'a déjà mentionné dans la remarque 3.23, donne un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels

$$\text{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\sigma, \pi), \mathcal{K}(\pi')) \cong \text{Hom}_G(\pi, \pi') \tag{3.12}$$

pour toute représentation lisse  $\pi'$  de  $G$ . Autrement dit, on a

$$H_0(D(\sigma, \pi)) \cong \pi. \tag{3.13}$$

**Proposition 3.30.** *Supposons  $\pi$  admissible et soit  $\pi_1$  une sous- $G$ -représentation irréductible de  $\pi$ . Notons  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ . Alors la suite exacte*

$$0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_2 \rightarrow 0$$

*induit*

- (i) *une injection  $D_1(\pi_1) \hookrightarrow D_1(\sigma, \pi)$  et*
- (ii) *une surjection  $D_1(\sigma, \pi) \twoheadrightarrow D_1(\sigma, \pi_2)$ .*

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que la proposition est triviale si  $\pi$  est irréductible, on suppose donc que  $\pi$  est réductible. D'autre part,  $\pi_1$  étant irréductible,  $D_1(\pi_1)$  est bien défini par le corollaire 3.17.

- (i) Il suffit de vérifier que  $I^+(\pi_1) \subseteq I^+(\sigma, \pi)$ , ce qui revient à montrer que  $\pi_1^{I_1} \subseteq I^+(\sigma, \pi)$ , car le lemme 3.18 implique qu'il existe  $v_1 \in \pi_1^{I_1}$  non nul tel que  $I^+(\pi_1) = \langle P^+ \cdot v_1 \rangle$ . L'énoncé découle donc du corollaire 3.9 puisque  $\pi$  est admissible.

(ii) Fixons  $v_0 \in \sigma \hookrightarrow \pi$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et soit  $\bar{v}_0 \in \pi_2$  l'image de  $v_0$  dans  $\pi_2$ . Comme  $\pi$  est engendrée par  $v_0$  en tant que  $G$ -représentation et comme  $\pi_1$  est une sous- $G$ -représentation propre de  $\pi$ , on voit que  $\bar{v}_0 \neq 0$ . D'après le lemme 3.18, un vecteur  $x \in \pi$  (respectivement  $\bar{x} \in \pi_2$ ) appartient à  $D_1(\sigma, \pi)$  (respectivement à  $D_1(\sigma, \pi_2)$ ) si et seulement s'il existe  $Q_1, Q_2 \in \bar{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que  $x = Q_1\Pi \cdot v_0 = \Pi Q_2\Pi \cdot v_0$  (respectivement  $\bar{x} = Q_1\Pi \cdot \bar{v}_0 = \Pi Q_2\Pi \cdot \bar{v}_0$ ).

Soit maintenant  $\bar{x} \in D_1(\sigma, \pi_2)$  et soient  $Q_1, Q_2 \in \bar{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que

$$\bar{x} = Q_1\Pi \cdot \bar{v}_0 = \Pi Q_2\Pi \cdot \bar{v}_0.$$

Posons  $x_1 = Q_1\Pi \cdot v_0 \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $x_2 = \Pi Q_2\Pi \cdot v_0 \in I^-(\sigma, \pi)$ . Par construction, on a  $x_1 - x_2 \in \pi_1$  et donc il existe  $x'_1 \in I^+(\pi_1)$  et  $x'_2 \in I^-(\pi_1)$  tels que

$$x_1 - x_2 = x'_1 + x'_2.$$

Par (i), on a  $I^+(\pi_1) \subset I^+(\sigma, \pi)$  et  $I^-(\pi_1) \subset I^-(\sigma, \pi)$ . On en déduit que  $x_1 - x'_1$  (respectivement  $x_2 + x'_2$ ) est un relèvement de  $\bar{x}$  dans  $I^+(\sigma, \pi)$  (respectivement  $I^-(\sigma, \pi)$ ), d'où le résultat. □

**Corollaire 3.31.** *Supposons  $\pi$  admissible. Si  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie, alors  $\pi$  est de longueur finie.*

**Démonstration.** Comme  $\pi$  est admissible, elle admet une sous-représentation irréductible  $\pi_1$  de  $G$ . Notons  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ . Alors la proposition 3.30 entraîne que

$$\dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} D_1(\sigma, \pi) \geq \dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} D_1(\pi_1) + \dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} D_1(\sigma, \pi_2).$$

On a deux cas à distinguer selon la caractéristique de  $F$ .

(i) Le cas où  $F$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Alors d'après [17, Théorème 2],  $\pi_2$  est aussi admissible, donc une récurrence immédiate sur la dimension de  $D_1(\sigma, \pi)$  permet de conclure.

(ii) Le cas où  $F$  est de caractéristique  $p$  sera traité au §5.2.2. □

Comme application, on détermine complètement  $D_1(\sigma, \pi)$  dans le cas où  $F = \mathbb{Q}_p$ .

**Corollaire 3.32.** *Supposons  $F = \mathbb{Q}_p$ . Alors  $D_1(\sigma, \pi) = \pi^{I_1}$  et  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie.*

**Démonstration.** Par la preuve de [13, Lemme 3.2], la surjection  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  se factorise par  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma/P(T)$  avec  $P(T) \in \bar{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Puis, en utilisant la classification de Barthel et Livné [2] et Breuil [4], on vérifie facilement que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma/P(T)$  est admissible et de longueur finie. En conséquence,  $\pi$  est aussi admissible par [17, Théorème 2], ce qui fait que la finitude de la dimension de

$D_1(\sigma, \pi)$  suivra l'égalité  $D_1(\sigma, \pi) = \pi^{I_1}$ . Par ailleurs, on déduit du corollaire 3.9 et de la proposition 3.15 que :

$$D_1(\sigma, \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)) = (\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T))^{I_1}.$$

Soit  $\pi'$  le noyau du morphisme surjectif  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T) \twoheadrightarrow \pi$ . Si  $\pi' = 0$ , le corollaire est déjà montré par ce qui précède. Sinon, soient  $\pi'_1$  une sous-représentation irréductible de  $\pi'$  et  $\pi_1$  le quotient de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)$  par  $\pi'_1$ . Alors, de même que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)$ ,  $\pi_1$  est un quotient admissible de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  par [17, Théorème 2]. En utilisant le corollaire 3.9 et la proposition 3.30 (ii), on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T))^{I_1} & \longrightarrow & \pi_1^{I_1} \\ \parallel & & \downarrow \\ D_1(\sigma, \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)) & \twoheadrightarrow & D_1(\sigma, \pi_1) \end{array}$$

d'où l'égalité  $D_1(\sigma, \pi_1) = \pi_1^{I_1}$ . Comme  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T)$  est de longueur finie, en répétant cette procédure, on arrive finalement à avoir  $D_1(\sigma, \pi) = \pi^{I_1}$ . □

#### 4. La condition de finitude

Soient  $\sigma$  un poids et  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ . On a vu au §3 le rôle important joué par  $D_1(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ . Sans faire d'hypothèse sur  $F$ , on donne au §4.1 des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $D_1(\sigma, \pi)$  soit un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie. Au §4.2, on considère l'espace des  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $I^+(\sigma, \pi)$  et l'on montre qu'il est contenu dans  $D_1(\sigma, \pi)$ .

Remarquons qu'au §5.1, on va montrer que l'espace  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension infinie dans le cas particulier où  $F$  est de caractéristique  $p$  et  $\pi$  est irréductible supersingulière.

##### 4.1. L'espace $D_1(\sigma, \pi)$

###### 4.1.1. Représentations de présentation finie

Conservons les notations ci-dessus. En général, il n'est pas clair que  $D_1(\sigma, \pi)$  soit de dimension finie ou non, ce qui conduit à introduire la condition suivante :

$$D_1(\sigma, \pi) \text{ est de dimension finie.}$$

On dit que  $\pi$  vérifie  $(P_e)$  avec  $e \geq 0$  un entier (fixé), si l'on a  $D_1(\sigma, \pi) \subseteq I^+(\sigma, \pi)^{I_{e+1}}$ .

**Remarque 4.1.** Il est trivial que la condition «  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie » est plus forte que la condition  $(P_e)$  pour un entier suffisamment grand, et elles sont équivalentes si  $\pi$  est admissible.

Réciproquement, dans le cas où  $\pi$  est irréductible, si  $D_1(\pi)$  est de dimension finie, alors  $\pi$  est admissible. Cet énoncé se déduit du fait que  $D_1(\pi)$  contient tous les  $I_1$ -invariants de  $\pi$  (proposition 3.16).

Comme conséquence directe du théorème 3.22, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 4.2.** *Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux quotients non triviaux de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  vérifiant  $(P_e)$ , alors  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si, en tant que diagrammes,*

$$(\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can}) \cong (\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can}).$$

**Démonstration.** En effet, soit

$$(\varphi_0, \varphi_1) : (\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can}) \xrightarrow{\sim} (\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can})$$

un isomorphisme de diagrammes. Comme  $D(\sigma, \pi) \subseteq (\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can})$  par hypothèse, compte-tenu de l'inclusion naturelle  $(\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can}) \subseteq \mathcal{K}(\pi')$ , on obtient un morphisme  $D(\sigma, \pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$  qui induit un  $G$ -morphisme non trivial  $\pi \rightarrow \pi'$  par (3.12). C'est un isomorphisme puisque  $(\varphi_0, \varphi_1)^{-1}$  en induit un inverse.  $\square$

**Théorème 4.3.** *Soit  $\pi$  un quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  et soit  $R(\sigma, \pi)$  le noyau de la projection  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $D_1(\sigma, \pi)$  est un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie ;
- (ii)  $R(\sigma, \pi)$  est de type fini en tant que  $\mathbb{F}_p[G]$ -module.

**Démonstration.** Prouvons l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $\{f_1, \dots, f_k\}$  un système générateur de  $R(\sigma, \pi)$  en tant que  $\mathbb{F}_p[G]$ -module et soit  $m \geq 0$  un entier tel que tout  $f_i$  soit contenu dans  $\bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma)$ . Soit  $M$  l'image de  $\bigoplus_{0 \leq n \leq m-1} (R_n^+(\sigma) \oplus R_n^-(\sigma))$  dans  $\pi$ . On va démontrer que  $D_1(\sigma, \pi) \subseteq M$ , ce qui suffit pour conclure puisque  $M$  est bien de dimension finie. D'après le lemme 3.11, cela revient à vérifier que  $\Phi_\sigma(gf_i) \in M$  pour tout  $g \in G$  et tout  $1 \leq i \leq k$ . Par définition,  $M$  est stable par  $\Pi$ , donc on peut supposer que  $g \in P^+KZ$  en utilisant la décomposition (2.3) et le lemme 3.12.

Écrivons  $g = g^{(n)} \dots g^{(1)}k$  comme dans (2.4) avec  $n = \ell(g)$  sa longueur. Si  $g \in KZ$ , alors  $gf_i \in \bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma)$  et l'énoncé découle immédiatement de la définition de  $\Phi_\sigma$ . Si  $\ell(g) \geq 1$ , un argument analogue à celui de la proposition 3.14 utilisant le lemme 3.13 permet aussi de conclure.

Passons à la démonstration de (i)  $\Rightarrow$  (ii). Commençons par remarquer que la surjection  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$  se factorise par

$$\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T) \twoheadrightarrow \pi$$

pour un polynôme  $P(T) \in \mathbb{F}_p[T]$  (voir la preuve de [13, Lemme 3.2]). D'après la proposition 2.5 (ii), il existe  $u \in \mathbb{N}$  tel que

$$\bigoplus_{0 \leq n \leq u} R_n(\sigma) \subseteq \bigoplus_{1 \leq n \leq u} R_n(\sigma, \pi') + P(T) \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma. \tag{4.1}$$

Puisque  $D_1(\sigma, \pi)$  est supposé de dimension finie, il existe un entier  $m \geq \max\{\deg P(T), u\}$  tel que  $D_1(\sigma, \pi)$  est contenu dans l'image de  $\bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma)$  dans  $\pi$ . Ici, la condition sur  $m$  est pour assurer, d'une part, que  $P(T)\sigma \subseteq \bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma)$ , d'autre part, que

(4.1) reste vrai si l'on remplace  $u$  par  $m$ . Posons  $\ker = R(\sigma, \pi) \cap (\bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma))$ . On a alors  $\langle G \cdot \ker \rangle \subseteq R(\sigma, \pi)$ , et pour achever la preuve il suffit de vérifier l'inclusion  $R(\sigma, \pi) \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$ , ou plutôt, l'inclusion

$$R(\sigma, \pi) \cap \left( \bigoplus_{0 \leq n \leq k} R_n(\sigma) \right) \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$$

pour tout  $k \geq 0$ . Par le choix de  $m$ ,  $P(T)(c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma) \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$  puisque  $P(T)\sigma \subseteq \ker$  et que  $T$  est un endomorphisme  $G$ -équivariant de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ .

Soit  $f \in R(\sigma, \pi) \cap (\bigoplus_{0 \leq n \leq k} R_n(\sigma))$ . On va démontrer que  $f \in \langle G \cdot \ker \rangle$  par récurrence sur  $k$  comme suit. D'abord, on peut supposer que  $k \geq m + 1$  par la définition de  $\ker$ , puis que  $f \in \bigoplus_{1 \leq n \leq k} R_n(\sigma)$  grâce à (4.1) et au fait que  $P(T) c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$ . L'espace  $\bigoplus_{1 \leq n \leq k} R_n(\sigma)$  étant engendré par  $\bigoplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n^-(\sigma)$  en tant que  $K$ -représentation, on peut écrire

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_\lambda + \Pi(f_\Pi)$$

avec  $f_\lambda, f_\Pi \in \bigoplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n^+(\sigma)$ . Comme  $f \in R(\sigma, \pi)$ , le lemme 3.1 implique que l'image de  $f_\lambda$  (respectivement  $f_\Pi$ ) dans  $\pi$ , notée  $\overline{f}_\lambda$  (respectivement  $\overline{f}_\Pi$ ), est contenue dans  $D_1(\sigma, \pi)$ . Choisissons un relèvement de  $\overline{f}_\lambda$  (respectivement  $\overline{f}_\Pi$ ) dans  $\bigoplus_{0 \leq n \leq m} R_n(\sigma)$ , disons  $f'_\lambda$  (respectivement  $f'_\Pi$ ), alors (en notant que  $k \geq m + 1$ )

$$f_\lambda - f'_\lambda, f_\Pi - f'_\Pi \in R(\sigma, \pi) \cap \left( \bigoplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n(\sigma) \right),$$

et par hypothèse de récurrence, on voit que

$$f_\lambda - f'_\lambda, f_\Pi - f'_\Pi \in \langle G \cdot \ker \rangle.$$

Maintenant si l'on pose

$$f' = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f'_\lambda + \Pi(f'_\Pi),$$

alors par définition  $f' \in \ker$  et donc  $f \in \langle G \cdot \ker \rangle$ , ce qui termine la démonstration. □

#### 4.1.2. Représentations de présentation standard

On fixe  $\pi$  une représentation lisse de type fini de  $G$  (ayant un caractère central). Comme dans [8], on note  $\mathcal{W}(\pi)$  l'ensemble des sous-espaces de dimension finie de  $\pi$ , stables par  $KZ$ , engendrant  $\pi$  comme  $\mathbb{F}_p[G]$ -module. Notons que  $\mathcal{W}(\pi)$  n'est pas vide. Si  $W \in \mathcal{W}(\pi)$ , on dispose par réciprocity de Frobenius d'un morphisme surjectif  $G$ -équivariant  $c\text{-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  et on note  $R(W, \pi)$  le noyau de ce morphisme. Cela justifie la notation  $R(\sigma, \pi)$  lorsque  $W = \sigma$  est un poids. On dit que  $c\text{-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  est une *présentation finie* de  $\pi$  si  $R(W, \pi)$  est de type fini comme  $\mathbb{F}_p[G]$ -module.

**Proposition 4.4.** *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\pi$  admet une présentation finie ;
- (ii) pour tout  $W \in \mathcal{W}(\pi)$ ,  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  est une présentation finie.

Signalons que cette proposition n'est pas évidente, parce que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$  n'est pas noethérien. La démonstration va demander un peu de préparation : on a besoin de généraliser quelques résultats du §3.1.

Si  $W \in \mathcal{W}(\pi)$ , on pose pour  $n \geq 0$ ,

$$R_n^+(W) := \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W \right], \quad R_n^-(W) := \Pi \cdot R_n^+(W).$$

On pose également

$$I^+(W) := [P^+, W], \quad I^-(W) := \Pi \cdot I^+(W)$$

de telles sortes que

$$I^+(W) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^+(W), \quad I^-(W) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-(W)$$

et  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W = I^+(W) \oplus I^-(W)$  par la décomposition (2.3). Remarquons que ces sous-espaces de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W$  sont tous stables par  $IZ$ .

On note  $I^+(W, \pi)$  (respectivement  $I^-(W, \pi)$ ,  $R_n^+(W, \pi)$ ,  $R_n^-(W, \pi)$ ) l'image de  $I^+(W)$  (respectivement  $I^-(W)$ ,  $R_n^+(W)$ ,  $R_n^-(W)$ ) dans  $\pi$  et on définit le morphisme composé (pareil à  $\Phi_\sigma$  du §3.1(3.4)) :

$$\Phi_W = \Phi_{W, \pi} : \text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow I^-(W) \rightarrow I^-(W, \pi) \hookrightarrow \pi.$$

On peut vérifier que les lemmes 2.2, 3.11, 3.12 et 3.13, qui sont énoncés pour  $W = \sigma$  irréductible, restent vrais pour  $W \in \mathcal{W}(\pi)$  général. En fait, le fait que  $\sigma$  est irréductible, ainsi que l'opérateur  $T$  associé à  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , n'interviennent jamais dans leurs preuves, mais seulement la stabilité de  $\sigma$  par  $KZ$  et certaines décompositions de matrices dans  $G$  y interviennent. En particulier, on a

$$I^+(W, \pi) \cap I^-(W, \pi) = \Phi_W(R(W, \pi)). \tag{4.2}$$

De plus, on a un analogue du théorème 4.3.

**Lemme 4.5.** *Avec les notations précédentes,  $I^+(W, \pi) \cap I^-(W, \pi)$  est de dimension finie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  si et seulement si  $R(W, \pi)$  est de type fini en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module.*

**Démonstration.** On peut argumenter comme dans le théorème 4.3 pour la direction  $\Leftarrow$ , car les lemmes 3.11, 3.12 et 3.13 restent vrais dans ce cas plus général. Supposons donc que  $I^+(W, \pi) \cap I^-(W, \pi)$  est de dimension finie. On va procéder par récurrence sur le nombre des facteurs de Jordan–Hölder de  $W$ . D'abord, le cas où  $W$  est irréductible se

déduit du théorème 4.3. Supposons que  $W$  est réductible et soit  $\sigma \subset W$  une sous- $KZ$ -représentation irréductible. En notant  $\pi_1$  l'image de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  dans  $\pi$  et  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ , on obtient un diagramme commutatif à lignes et à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & (4.3) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R(\sigma, \pi_1) & \longrightarrow & R(W, \pi) & \longrightarrow & R(W/\sigma, \pi_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma & \longrightarrow & \text{c-Ind}_{KZ}^G W & \longrightarrow & \text{c-Ind}_{KZ}^G W/\sigma & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1 & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \pi_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

qui, en utilisant (4.2), induit une injection

$$D_1(\sigma, \pi_1) = I^+(\sigma, \pi_1) \cap I^-(\sigma, \pi_1) \hookrightarrow I^+(W, \pi) \cap I^-(W, \pi)$$

et une surjection

$$I^+(W, \pi) \cap I^-(W, \pi) \twoheadrightarrow I^+(W/\sigma, \pi_2) \cap I^-(W/\sigma, \pi_2).$$

En particulier,  $D_1(\sigma, \pi)$  et  $I^+(W/\sigma, \pi_2) \cap I^-(W/\sigma, \pi_2)$  sont de dimension finie. D'après respectivement le théorème 4.3 et l'hypothèse de récurrence, on voit que  $R(\sigma, \pi_1)$  et  $R(W/\sigma, \pi_2)$  sont de type fini comme  $\mathbb{F}_p[G]$ -modules et donc  $R(W, \pi)$  l'est aussi. Cela termine la démonstration. □

**Démonstration de la proposition 4.4.** Évidemment, la proposition se réduit à montrer l'énoncé suivant : *si  $W_1 \subset W_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{W}(\pi)$ , alors la présentation  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_1 \twoheadrightarrow \pi$  est finie si et seulement si la présentation  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_2 \twoheadrightarrow \pi$  l'est.* De plus, par [19, Proposition 1], si la présentation  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_1 \twoheadrightarrow \pi$  est finie, alors  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_2 \twoheadrightarrow \pi$  l'est aussi.

Supposons que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_2 \twoheadrightarrow \pi$  est une présentation finie, ce qui implique que  $I^+(W_2, \pi) \cap I^-(W_2, \pi)$  est de dimension finie sur  $\mathbb{F}_p$  d'après le lemme 4.5. Or, l'inclusion naturelle  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W_1 \hookrightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G W_2$  induit une injection

$$I^+(W_1, \pi) \cap I^-(W_1, \pi) \hookrightarrow I^+(W_2, \pi) \cap I^-(W_2, \pi).$$

On en déduit que  $I^+(W_1, \pi) \cap I^-(W_1, \pi)$  est aussi de dimension finie, ce qui permet de conclure par le même lemme. □

D'après [8], si  $W \in \mathcal{W}(\pi)$ , on dit que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  est une *présentation standard* si  $R(W, \pi)$  est engendré comme  $\mathbb{F}_p[G]$ -module, par

$$R^{(0)}(W, \pi) := \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \right] - \left[ \text{Id}, \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right], x \in W \cap \begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W \right\}.$$

Notons que l'on a toujours  $\langle G \cdot R^{(0)}(W, \pi) \rangle \subseteq R(W, \pi)$ , et que  $R^{(0)}(W, \pi) = \{0\}$  si  $W \cap \begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W = 0$ . Comme  $\begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W = \Pi \begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-1} \\ \varpi^{-1} & 0 \end{pmatrix} W = \Pi(W)$  et

$$\begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \text{Id}, \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-1} \\ \varpi^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right] = [\Pi, \Pi^{-1}x],$$

on déduit que :

$$\begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R^{(0)}(W, \pi) = \{[\text{Id}, x] - [\Pi, \Pi^{-1}(x)], x \in W \cap \Pi(W)\}.$$

D'autre part, en posant  $W' = W \cap \Pi(W)$ , on obtient un diagramme  $(W, W', \text{can})$ . Compte-tenu de (3.10) et de (3.11) du §3.2.1, on a donc démontré le lemme suivant (je remercie B. Schraen pour m'avoir signalé ce fait).

**Lemme 4.6.** *Conservons les notations précédentes.*

- (i)  $\langle G \cdot R^{(0)}(W, \pi) \rangle$  coïncide avec l'image de (voir (3.10))

$$\partial : \text{c-Ind}_N^G(W' \otimes \delta_{-1}) \rightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G W.$$

Par conséquent, la présentation  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  se factorise par  $H_0((W, W', \text{can}))$ .

- (ii) La présentation  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  est standard si et seulement si le morphisme surjectif  $H_0((W, W', \text{can})) \rightarrow \pi$  dans (i) est un isomorphisme.

**Corollaire 4.7.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\pi$  admet une présentation finie ;
- (ii)  $\pi$  admet une présentation standard.

**Démonstration.** L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) étant triviale, il reste à démontrer que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $\text{c-Ind}_{KZ}^G W \rightarrow \pi$  une présentation finie avec  $W \in \mathcal{W}(\pi)$ . Une récurrence immédiate sur la longueur de  $W$ , en utilisant le diagramme (4.3), montre que  $\pi$  est une extension successive d'une famille finie de  $G$ -représentations  $\pi_i$  avec chaque  $\pi_i$  un quotient de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma_i$  et  $\sigma_i$  parmi les facteurs de Jordan-Hölder de  $W$ . D'une part, comme  $\pi$  est de présentation finie, le lemme 4.5 implique que tous les  $\pi_i$  le sont aussi (en fait, ces deux conditions sont équivalentes). D'autre part, d'après [8, Proposition III.1.16],  $\pi$  est de présentation standard si et seulement si  $\pi_i$  le sont. Ici, on remarque que, bien que cette proposition est énoncée pour les  $\pi$  de longueur finie, sa preuve reste valable pour  $\pi$  de type fini. On est donc ramené au cas où  $\pi$  est un quotient de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$



pour  $\sigma$  un poids. Si  $\pi = \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , (ii) est clair. Si  $\pi$  est un quotient non trivial de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , le théorème 4.3 implique que  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie, et donc  $D_0(\sigma, \pi)$  l'est aussi. En utilisant l'isomorphisme (3.13) :  $H_0(D(\sigma, \pi)) \cong \pi$ , le lemme 4.6 (ii) montre que  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G D_0(\sigma, \pi) \twoheadrightarrow \pi$  fournit une présentation standard de  $\pi$ . Cela termine la démonstration. □

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant dû à Colmez [8].

**Corollaire 4.8.** *Toute représentation irréductible non supersingulière de  $G$  admet une présentation standard. Toute représentation de type fini de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  admet une présentation standard.*

**Démonstration.** D'après le corollaire 4.7, on est ramené à montrer que les deux classes de  $G$ -représentations dans l'énoncé admettent une présentation finie, ce qui est bien connu pour la première (voir [2]). Quant à la deuxième classe, comme dans la démonstration du corollaire 4.7, il suffit de considérer les quotients non triviaux de

$$\mathrm{c}\text{-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Z}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$$

avec  $\sigma$  irréductible, auquel cas l'énoncé résulte du corollaire 3.32 et du théorème 4.3. □

Ce corollaire a aussi été démontré par Breuil et Paškūnas [6], Vignéras [18] et Ollivier [11].

### 4.2. L'espace des $I_1 \cap U^+$ -invariants de $I^+(\sigma, \pi)$

Dans ce paragraphe, on fixe  $\sigma$  un poids et  $\pi$  un quotient non trivial de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ . Rappelons que  $I_1 \cap U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 4.9.** *Supposons  $\pi$  irréductible ou admissible. On a*

$$I^+(\sigma, \pi)^{I_1 \cap U^+} \subseteq D_1(\sigma, \pi).$$

On va démontrer cette proposition aux § 4.2.1 et § 4.2.2 selon deux cas. Donnons une conséquence immédiate.

**Corollaire 4.10.** *Supposons  $\pi$  irréductible ou admissible. Si  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie, alors  $I^+(\sigma, \pi)^{I_1 \cap U^+}$  l'est aussi.*

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la proposition 4.9. □

#### 4.2.1. Le cas supersingulier

On montre la proposition 4.9 pour  $\pi$  irréductible supersingulière. En fait, on va démontrer un peu plus (notons que l'on peut écrire  $I^+(\pi)$  et  $D_1(\pi)$  au lieu de  $I^+(\sigma, \pi)$  et  $D_1(\sigma, \pi)$  puisque  $\pi$  est irréductible).

**Proposition 4.11.** *Supposons  $\pi$  irréductible supersingulière.*

- (i) *Si  $v \in I^+(\pi)$  est un vecteur fixé par  $I_1 \cap U^+$ , alors  $S^m v = 0$  pour  $m \gg 0$ .*
- (ii) *On a l'inclusion  $I^+(\pi)^{I_1 \cap U^+} \subseteq D_1(\pi)$ .*

Combiné avec la proposition 3.16, on obtient de la proposition 4.11 les inclusions suivantes (pour  $\pi$  supersingulière) :

$$\pi^{I_1} \subseteq I^+(\pi)^{I_1 \cap U^+} \subseteq \{v \in I^+(\pi), S^m v = 0 \text{ pour } m \gg 0\} \subseteq D_1(\pi).$$

Commençons la démonstration par un lemme.

**Lemme 4.12.** *Soient  $H$  un pro- $p$ -groupe et  $M$  une représentation lisse de  $H$  (sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ). Soient  $x \in M$  un vecteur non nul et  $M_x = \langle H \cdot x \rangle$  la sous-représentation de  $M$  engendrée par  $x$ .*

- (i) *Pour tout  $h \in H$ , on a  $(h - 1)x \in \text{rad}_H(M_x)$  ; en particulier,*

$$\dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} M_{(h-1)x} < \dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} M_x.$$

- (ii) *Comme  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel,  $\text{rad}_H(M_x)$  est engendré par les  $(h - 1)x$  pour  $h \in H$ .*

**Démonstration.** (i) Comme  $M$  est lisse,  $x$  est fixé par un sous-groupe ouvert  $H_1$  de  $H$ , on peut donc supposer que  $H$  est un  $p$ -groupe fini en remplaçant  $H$  par  $H/H_1$ . D'après [1, § 1.3, Exercice 2],  $h - 1$  appartient à  $\text{rad}(\bar{\mathbb{F}}_p[H])$  le radical de  $\bar{\mathbb{F}}_p[H]$ , et donc [1, § 1.1, Proposition 4]

$$(h - 1)x \in \text{rad}(\bar{\mathbb{F}}_p[H]) \cdot M_x = \text{rad}_H(M_x).$$

Le dernier énoncé vient du fait que  $M_{(h-1)x} \subset \text{rad}_H(M_x) \subsetneq M_x$ .

- (ii) Comme dans (i), on peut supposer que  $H$  est un  $p$ -groupe fini, auquel cas l'énoncé est une conséquence de [1, § 1.3, Exercice 2]. □

**Démonstration de la proposition 4.11.** D'après le lemme 3.8, (ii) est une conséquence de (i) puisque  $v \in I^+(\pi)$ . Soit  $v \in I^+(\pi)^{I_1 \cap U^+}$  un vecteur non nul. On va démontrer (i) par récurrence sur la dimension de  $\langle I_1 \cdot v \rangle$  (sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ) qui sera notée  $n(v)$ .

**(a) Cas où  $n(v) = 1$  (i.e.  $v$  est fixé par  $I_1$ ).** C'est juste le lemme 2.9.

**(b) Cas où  $n(v) \geq 2$ .** Par hypothèse de récurrence, l'énoncé (i) est vrai pour tout  $v' \in I^+(\pi)^{I_1 \cap U^+}$  tel que  $n(v') < n(v)$ . Le lemme 4.12 (i) appliqué à  $H = I_1$  montre que c'est le cas pour tout  $(h - 1)v$  avec  $h \in \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \subset I_1$ , donc il existe un entier  $m_h \geq 1$  dépendant de  $h$  tel que  $S^{m_h}((h - 1)v) = 0$ . Comme  $\pi$  est lisse, la dimension de  $\langle \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \cdot v \rangle$  (sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ) est finie, on trouve donc un entier  $m \geq 1$  suffisamment grand tel que

$$S^m((h - 1)v) = 0$$

pour tout  $h$  comme ci-dessus. En utilisant le lemme 2.8 (ii) plusieurs fois, on obtient pour tout  $h$  :

$$(h - 1)S^m v = S^m((h - 1)v) = 0,$$

c'est-à-dire,  $S^m v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}$ . Ainsi, on peut supposer que  $v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}$  quitte à remplacer  $v$  par  $S^m v$ .

Comme  $\pi$  est lisse, il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $v$  soit fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{k+1} & 1 \end{pmatrix}$ . D'après la formule suivante (où  $a \in \mathcal{O}$ ) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^k a & 1 \end{pmatrix} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{[\lambda]}{1 + \varpi^k a [\lambda]} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1 + \varpi^k a [\lambda]} & 1 + \varpi^k a [\lambda] \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

on déduit que  $Sv$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & 1 \end{pmatrix}$ . De même,  $S^k v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 \end{pmatrix}$ . Le lemme 2.8 combiné avec la décomposition d'Iwahori (2.5) montre alors que  $S^k v$  est fixé par  $I_1$ . On est donc ramené au cas (a) en remplaçant  $v$  par  $S^k v$ , et la proposition s'en déduit.  $\square$

#### 4.2.2. Le cas admissible

Comme toute représentation irréductible non supersingulière de  $G$  est admissible [2], la preuve suivante complète la preuve de la proposition 4.9.

**Démonstration de la proposition 4.9 pour  $\pi$  admissible.** (i) Posons  $V^+ = I^+(\sigma, \pi)^{I_1 \cap U^+}$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$V_n^+ := \left\{ v \in V^+ \mid v \text{ est fixé par } I_n \cap U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^n & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme  $\pi$  admet un caractère central, et comme  $\begin{pmatrix} 1+p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (si  $p \neq 2$ , on peut le remplacer par  $\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) est inclus dans le groupe engendré par  $I_1 \cap U^+$ ,  $I_n \cap U^-$  et  $I_1 \cap Z$  dans  $G$ , on voit que tout  $x \in V_n^+$  est aussi fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En conséquence,  $V_n^+$  est fixé par  $I_{n+1}$  qui est un sous-groupe ouvert de  $G$ . On en déduit que chaque  $V_n^+$  est de dimension finie puisque  $\pi$  est admissible.

Comme  $\pi$  est lisse, il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $v \in V_{n-1}^+$ . D'après la proposition 2.13 (i),  $Sv \in V^+$  ; de plus, pour  $\mu \in \mathbb{F}_q$ , on a

- par ce qui précède,  $v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et donc  $Sv$  l'est aussi :

$$\begin{pmatrix} 1 + \varpi^n [\mu] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Sv = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi^n [\mu] & \varpi^{n-1} [\mu \lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = Sv ;$$

- $Sv$  est fixé par  $I_n \cap U^-$  par le calcul (4.4).

Autrement dit,  $Sv$  appartient à  $V_n^+$  et est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . De même,  $S^m v$  l'est aussi pour tout  $m \geq 1$ . La finitude de la dimension de  $V_n^+$  implique qu'il existe  $(c_m)_{0 \leq m \leq k}$  une famille finie d'éléments de  $\mathbb{F}_p$  tels que  $c_k \neq 0$  et

$$c_0 v + \sum_{1 \leq m \leq k} c_m S^m v = 0.$$

Le lemme 3.8 permet de conclure puisque  $v \in I^+(\sigma, \pi)$ . □

**5. Le cas où  $F$  est de caractéristique positive**

Dans ce chapitre, on suppose que  $F$  est de caractéristique  $p$ . Cela fait que  $F \cong \mathbb{F}_q((\varpi))$  et  $[\lambda] = \lambda$  pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ . On détermine au § 5.1 le diagramme canonique associé à une représentation supersingulière de  $G$  et on en donne au § 5.2 quelques conséquences.

**5.1.  $D(\pi) = \mathcal{K}(\pi)$**

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant dont la démonstration va demander un peu de préparation.

**Théorème 5.1.** *Soit  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$ .*

- (i) *Pour tout  $x \in I^+(\pi)$ , on a  $S^m x = 0$  pour  $m \gg 0$ .*
- (ii) *On a*

$$D_1(\pi) = D_0(\pi) = I^+(\pi) = \pi.$$

Autrement dit,  $D(\pi) = \mathcal{K}(\pi) := (\pi|_{KZ}, \pi|_N, \text{can})$ .

Soit  $M$  une représentation lisse de  $I$ . Posons  $W = \text{Ind}_I^K \Pi(M)$  la  $K$ -représentation induite. Rappelons (§ 2.3, (2.11)) que  $W^+$  désigne le sous-espace vectoriel de  $W$  engendré par les vecteurs

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varpi & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v, v \in M, \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Notons que  $W^+$  est stable par  $I$ , a fortiori par  $I_1 \cap U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans le lemme suivant, on note pour plus d'aisance  $Sx$  au lieu de  $F_{0,x}$  (voir le lemme 2.8 (i)).

**Lemme 5.2.** *Soient  $x \in M$  un vecteur et  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq N}$  une  $\mathbb{F}_p$ -base de  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$ . Alors  $\{Sv_i\}_{1 \leq i \leq N}$  forment une  $\mathbb{F}_p$ -base pour  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot Sx \rangle \subset W^+$ .*

**Démonstration.** Remarquons que  $M$  étant lisse,  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  est bien de dimension finie.

Si  $a = \sum_{i \geq 0} a_i \varpi^i \in \mathcal{O}$  avec  $a_i \in \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathcal{O}$ , on pose

$$\tilde{a} = \sum_{i \geq 1} a_i \varpi^{i-1} \in \mathcal{O}$$

de telle sorte que (où  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ) :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & \lambda + a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Sx &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \lambda + a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

et donc  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot Sx \rangle$  est contenu dans l'espace vectoriel engendré par  $\{Sv_i\}_{1 \leq i \leq N}$ . Réciproquement, fixons un indice  $i \in \{1, \dots, N\}$  et soit

$$Q = \sum_k \alpha_k \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \bar{\mathbb{F}}_p[I_1 \cap U^+], \quad \alpha_k \in \bar{\mathbb{F}}_p,$$

un élément tel que  $Q \cdot x = v_i$ . Soit  $b'_k \in \mathcal{O}$  un élément tel que  $b_k = \tilde{b}'_k$  (c'est toujours possible). Le même calcul que ci-dessus montre que  $Q' \cdot Sx = Sv_i$ , où  $Q' \in \bar{\mathbb{F}}_p[I_1 \cap U^+]$  est défini par

$$Q' = \sum_k \alpha_k \begin{pmatrix} 1 & b'_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela permet de conclure. □

**Corollaire 5.3.** *Pout tout vecteur  $x \in \pi$ , on a*

$$\dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} \langle I_1 \cap U^+ \cdot Sx \rangle \leq \dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} \langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle,$$

avec inégalité stricte s'il existe un vecteur non nul  $v \in \langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  tel que  $Sv = 0$ .

**Démonstration.** Conséquence triviale du lemme 5.2. □

**Démonstration du théorème 5.1.** (i) Soit  $x \in I^+(\pi)$  un vecteur non nul. On va démontrer (i) par récurrence sur la dimension de  $M_x := \langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  (sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ) qui sera notée  $m(x)$ . Notons que  $m(x) < +\infty$  puisque  $\pi$  est lisse.

Comme  $I_1 \cap U^+$  est un pro- $p$ -groupe, l'espace  $M_x^{I_1 \cap U^+}$  est non nul. Soit  $v \in M_x$  un vecteur non nul fixé par  $I_1 \cap U^+$ . Alors la proposition 4.11 (i) implique  $S^n v = 0$  pour  $n \gg 0$ , et donc (par le corollaire 5.3)

$$m(S^n x) < m(x).$$

Par hypothèse de récurrence, on voit que  $S^{n+m} x = S^m(S^n x) = 0$  pour un entier  $m \geq 1$  suffisamment grand, d'où l'énoncé pour  $x$ .

(ii) D’après (i) et le lemme 3.8, on a  $I^+(\pi) \subseteq D_1(\pi)$  puis  $\pi = D_1(\pi)$ , car  $\Pi \cdot D_1(\pi) = D_1(\pi)$  et  $\pi = I^+(\pi) + \Pi \cdot I^+(\pi)$ . Les autres énoncés sont immédiats.  $\square$

**Remarque 5.4.** Supposons ici que  $F$  soit une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , avec  $e \geq 2$  l’indice de ramification. Soit  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$ . Alors pour tout  $x \in \pi^{I_{e-1}}$ , on a  $S^m x = 0$  pour  $m \gg 0$ . En particulier,  $\pi^{I_{e-1}} \subseteq D_1(\pi)$ .

**Démonstration.** D’après la démonstration du théorème 5.1, on voit qu’il suffit de montrer l’analogie du corollaire 5.3 sous l’hypothèse supplémentaire que  $x \in \pi$  est fixé par  $I_{e-1}$ . Or, c’est une conséquence du fait suivant (par un calcul analogue à celui du lemme 5.2) : si  $a = \sum_{i \geq 0} [a_i] \varpi^i \in \mathcal{O}$  avec  $a_i \in \mathbb{F}_q$  et si  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ , on a (voir, par exemple, [16])

$$a + [\lambda] = [a_0 + \lambda] + X(a_0, \lambda) \varpi^e + \sum_{i \geq 1} [a_i] \varpi^i$$

avec  $X(a_0, \lambda) \in \mathcal{O}$  un élément dépendant de  $a_0$  et de  $\lambda$ .  $\square$

**Corollaire 5.5.** Soit  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$ . Alors  $\pi$  n’est pas de présentation finie.

**Démonstration.** C’est une conséquence directe des théorèmes 4.3 et 5.1 (ii) et de la proposition 4.4 en remarquant qu’une représentation supersingulière est toujours de dimension infinie sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .  $\square$

Par les résultats de Barthel et Livné [2] et Breuil [4], les représentations non supersingulières de  $G$  et les représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sont toutes de présentation finie. Le corollaire 5.5 donne donc la première classe de représentations lisses irréductibles de  $G$  qui ne sont pas de présentation finie.

### 5.2. Conséquences

On donne deux applications des résultats au § 5.1. Au § 5.2.1, on généralise des résultats de [13] sous l’hypothèse supplémentaire que  $F$  est de caractéristique  $p$ . Au § 5.2.2, on complète la démonstration du corollaire 3.31.

#### 5.2.1. Restriction à $P^+$

Rappelons que  $P$  désigne le sous-groupe de Borel de  $G$  et  $P^+$  le sous-monoïde  $(\begin{smallmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$  de  $G$ . Commençons par rappeler un résultat de [13].

**Lemme 5.6.** Soient  $\pi$  une représentation lisse de  $G$  (avec caractère central) et  $x \in \pi$  un vecteur non nul. Alors il existe un vecteur non nul  $v \in \langle P^+ \cdot x \rangle \cap \pi^{I_1}$  tel que  $\langle K \cdot v \rangle$  soit une  $K$ -représentation irréductible.

**Démonstration.** Faire la même preuve que celle de [13, Proposition 4.2], en remarquant que  $I_1 \cap P = I_1 \cap P^+ Z$  et que  $\pi$  admet un caractère central.  $\square$

**Théorème 5.7.** Soit  $\pi$  une représentation irréductible supersingulière de  $G$ . Alors  $\pi|_{P^+}$  est encore irréductible.

On dit qu'une représentation  $V$  d'un monoïde  $H$  est *irréductible* si  $\langle H \cdot x \rangle = V$  pour tout vecteur  $x \in V$  non nul.

**Démonstration.** Comparer avec [13, Théorème 4.3]. Soit  $x \in \pi$  un vecteur non nul. Il faut démontrer :

$$\pi = \langle P^+ \cdot x \rangle.$$

En utilisant le lemme 5.6, on trouve un vecteur non nul  $v \in \langle P^+ \cdot x \rangle \cap \pi^{I_1}$ . De plus, le lemme 2.9 permet de supposer que  $Sv = 0$ , ce qui fait que  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \in \langle P^+ \cdot v \rangle$  d'après [13, Lemme 3.4]. Comme

$$\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la décomposition (2.6) implique que  $\langle K \cdot v \rangle \subset \langle P^+ \cdot v \rangle$ . Prenons  $\sigma$  une sous- $K$ -représentation irréductible de  $\langle K \cdot v \rangle$ . Alors par le théorème 5.1 (ii), on a

$$\pi = I^+(\pi) = \langle P^+ \cdot \sigma \rangle \subseteq \langle P^+ \cdot v \rangle \subseteq \langle P^+ \cdot x \rangle,$$

d'où le résultat. □

Le reste de ce paragraphe est consacré à montrer le théorème suivant (comparer avec [13, Théorème 4.4]).

**Théorème 5.8.** Soient  $\pi, \pi'$  deux représentations lisses de  $G$  avec  $\pi$  irréductible supersingulière. Alors

$$\text{Hom}_{P^+Z}(\pi, \pi') \cong \text{Hom}_G(\pi, \pi').$$

Rappelons d'abord un résultat de [13].

**Lemme 5.9.** Conservons les notations du théorème 5.8. Si  $\phi : \pi \rightarrow \pi'$  est un  $P^+Z$ -morphisme non nul, alors il existe un vecteur non nul  $v \in \pi^{I_1}$  tel que  $\phi(v) \in \pi'^{I_1}$ .

**Démonstration.** Voir la démonstration du [13, Théorème 4.4]. □

*Notation.* On pose  $R \in \bar{\mathbb{F}}_p[P^+I]$  l'élément défini par :

$$R := \sum_{\lambda \in \bar{\mathbb{F}}_q^\times} \begin{pmatrix} \varpi & \lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda^{-1} & 0 \\ \varpi & \lambda \end{pmatrix}.$$

de telle sorte que l'on ait l'égalité suivante dans  $\bar{\mathbb{F}}_p[G]$  (par un calcul direct) :

$$s \cdot S = \Pi + R \tag{5.1}$$

en rappelant que

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration du théorème 5.8.** Soit  $\phi : \pi \rightarrow \pi'$  un morphisme  $P^+$ -équivariant non nul. On va démontrer que  $\phi$  est  $G$ -équivariant (ce qui suffit pour conclure). En réécrivant les décompositions (2.3) et (2.6) sous la forme :

$$G = P^+ZK \cup sP^+ZK$$

et

$$K = I \amalg \left( \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} sI \right),$$

on est ramené à vérifier que :

- (a)  $\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x)$  pour tout  $g \in I$  et tout  $x \in \pi$  ;
- (b)  $\phi(s \cdot x) = s \cdot \phi(x)$  pour tout  $x \in \pi$ .

Soit  $v \in \pi^{I_1}$  un vecteur non nul tel que  $\phi(v) \in \pi'^{I_1}$ , dont l'existence est assurée par le lemme 5.9. D'après le théorème 5.7,  $\pi|_{P^+}$  est irréductible, donc  $\phi(v) \neq 0$  et qu'il existe  $Q \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tel que  $x = Q \cdot v$ . Si  $g \in I$ , on écrit

$$gQ = \sum_i c_i Q'_i g'_i \tag{5.2}$$

avec  $c_i \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ ,  $Q'_i \in P^+Z$  et  $g'_i \in I_1$ . Ceci est toujours possible grâce au lemme 2.1. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(g \cdot x) &= \phi(gQ \cdot v) \\ &= \phi\left(\sum_i c_i Q'_i g'_i \cdot v\right) \quad \text{par (5.2)} \\ &= \sum_i c_i Q'_i \cdot \phi(v) \quad \text{car } v \in \pi^{I_1} \text{ et } \phi \text{ est } P^+Z\text{-équivariant} \\ &= \sum_i c_i Q'_i g'_i \cdot \phi(v) \quad \text{car } \phi(v) \in \pi'^{I_1} \\ &= gQ \cdot \phi(v) \quad \text{par (5.2)} \\ &= g \cdot \phi(x) \quad \text{par } P^+\text{-équivariance de } \phi \end{aligned}$$

d'où l'énoncé (a).

D'après le théorème 5.1 (i), pour tout  $x \in \pi$ , il existe un entier  $m \gg 0$  tel que  $S^m x = 0$ . On définit  $d(x)$  comme le plus petit entier vérifiant cette propriété. On va montrer (b) par récurrence sur  $d(x)$ .

Si  $d(x) = 1$ , alors  $Sx = 0$ . D'une part, on a de l'équation (5.1) :  $\phi(\Pi \cdot x) + \phi(R \cdot x) = 0$  ; comme  $R \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+I]$ , on en déduit de (a) que :

$$\phi(\Pi \cdot x) + R \cdot \phi(x) = 0.$$

D'autre part, comme  $\phi$  est  $P^+$ -équivariant,  $S(\phi(x)) = \phi(Sx) = 0$ , donc par (5.1)

$$\Pi \cdot \phi(x) + R \cdot \phi(x) = 0.$$



On en déduit donc l'égalité

$$\phi(\Pi \cdot x) = \Pi \cdot \phi(x),$$

et en lui appliquant la matrice  $\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et en utilisant la  $P^+Z$ -équivariance de  $\phi$ , on voit que

$$\chi(\varpi)\phi(s \cdot x) = \chi(\varpi)(s \cdot \phi(x)),$$

où  $\chi$  désigne le caractère central commun de  $\pi$  et de  $\pi'$ . L'énoncé (b) s'en déduit dans ce cas particulier.

Par hypothèse de récurrence, on a  $\phi(s \cdot y) = s \cdot \phi(y)$  pour tout vecteur  $y \in \pi$  vérifiant  $d(y) \leq d$ . Soit maintenant  $x \in \pi$  un vecteur vérifiant  $d(x) = d + 1$ . Comme  $d(Sx) = d$ , on a

$$\phi(s \cdot Sx) = s \cdot \phi(Sx) = s \cdot S(\phi(x)),$$

ce qui équivaut à dire que (par (5.1)) :

$$\phi(\Pi \cdot x) + \phi(R \cdot x) = \Pi \cdot \phi(x) + R \cdot \phi(x).$$

Le même raisonnement que ci-dessus donne  $\phi(s \cdot x) = s \cdot \phi(x)$ . Cela montre (b) et achève la démonstration. □

Comme on l'a fait remarquer dans l'introduction, le théorème 5.8 reste vrai pour tout corps  $F$ . Voici la démonstration rapide de Paškūnas.

**Démonstration du théorème 5.8 pour tout  $F$ .** Posons

$$t = s\Pi = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Notons comme d'habitude  $\bar{\mathbb{F}}_p[t]$  l'anneau des polynômes en  $t$  et  $\bar{\mathbb{F}}_p[t, t^{-1}]$  la localisation de  $\bar{\mathbb{F}}_p[t]$  de telle sorte qu'on ait l'isomorphisme naturel :

$$\bar{\mathbb{F}}_p[P^+] \otimes_{\bar{\mathbb{F}}_p[t]} \bar{\mathbb{F}}_p[t, t^{-1}] \cong \bar{\mathbb{F}}_p[P]$$

puis l'isomorphisme

$$I^+(\pi) \otimes_{\bar{\mathbb{F}}_p[t]} \bar{\mathbb{F}}_p[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \pi$$

où la surjectivité résulte de l'irréductibilité de  $\pi$  en tant que  $P$ -représentation [13, Théorème 4.3]. Ce dernier induit un isomorphisme :

$$\text{Hom}_P(\pi, \pi') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{P+Z}(I^+(\pi), \pi'), \quad f \mapsto f|_{I^+(\pi)}. \tag{5.3}$$

D'autre part, comme  $t$  est nilpotent sur la  $P^+Z$ -représentation  $\pi/I^+(\pi)$  (pour le voir, on utilise le fait que  $\pi|_P$  est irréductible) et comme  $t$  est inversible sur la  $P$ -représentation  $\pi'$ , on a forcément  $\text{Hom}_{P+Z}(\pi/I^+(\pi), \pi') = 0$  et donc on obtient une injection :

$$\text{Hom}_{P+Z}(\pi, \pi') \hookrightarrow \text{Hom}_{P+Z}(I^+(\pi), \pi'), \quad f \mapsto f|_{I^+(\pi)}. \tag{5.4}$$

De (5.3) et de (5.4), on déduit que le morphisme naturel :

$$\text{Hom}_P(\pi, \pi') \rightarrow \text{Hom}_{P+Z}(\pi, \pi')$$

à travers lequel (5.3) se factorise, est en fait un isomorphisme, et l'isomorphisme cherché s'obtient en le composant avec celui de [13, Théorème 4.4]. □

5.2.2. *Démonstration du corollaire 3.31*

**Démonstration du corollaire 3.31 cas (ii).** Soient  $\pi_1$  une sous-représentation irréductible de  $G$  et  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ . Comme dans la preuve du cas (i), on a  $\dim_{\mathbb{F}_p}(D_1(\sigma, \pi)) \geq \dim_{\mathbb{F}_p} D_1(\pi_1) + \dim_{\mathbb{F}_p} D_1(\sigma, \pi_2)$ , et pour conclure il suffit de montrer que  $\pi_2$  est admissible, ou encore  $\pi_2^{I_1}$  est de dimension finie sur  $\mathbb{F}_p$ . Comme  $D_1(\pi_1)$  est de dimension finie, le théorème 5.1 (ii) assure que  $\pi_1$  est non supersingulière.

On suppose par l'absurde que  $\pi_2^{I_1}$  est de dimension infinie. Comme  $D_1(\sigma, \pi_2)$  est de dimension finie, on peut trouver un vecteur  $\bar{x}$  de  $\pi_2$  tel que  $\bar{x} \in \pi_2^{I_1}$  mais  $\bar{x} \notin D_1(\sigma, \pi_2)$ . Écrivons  $\bar{x} = \bar{x}^+ + \bar{x}^-$  avec  $\bar{x}^+ \in I^+(\sigma, \pi_2)$  et  $\bar{x}^- \in I^-(\sigma, \pi_2)$ . Quitte à remplacer  $\bar{x}$  par  $\Pi(\bar{x})$ , on peut supposer que  $\ell_\sigma(\bar{x}^+) \geq \ell_\sigma(\bar{x}^-)$ . Puisque  $\bar{x} \notin D_1(\sigma, \pi_2)$ , cela fait que  $\ell_\sigma(\bar{x}^+) \geq 1$ , donc le lemme 3.7 entraîne que  $S^n \bar{x} \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$  et que  $S^n \bar{x} \in I^+(\sigma, \pi_2)$  si  $n$  est suffisamment grand. Comme  $S^n \bar{x}$  est fixé par  $I_1$  et n'appartient pas à  $D_1(\sigma, \pi_2)$  pour tout  $n \geq 0$ , on peut supposer que  $\bar{x} \in I^+(\sigma, \pi_2)^{I_1}$  mais  $\bar{x} \notin D_1(\sigma, \pi_2)$  en remplaçant éventuellement  $\bar{x}$  par  $S^n \bar{x}$  avec  $n \gg 0$ .

Soit  $x \in \pi$  un relèvement de  $\bar{x}$  et considérons  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  la sous-représentation de  $\pi$  qu'il engendre. Puisque  $\bar{x}$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ , le radical de  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  est contenu dans  $\pi_1$  par le lemme 4.12. On va distinguer deux cas.

*Premier cas :*  $\pi_1$  est un caractère isomorphe à  $\chi \circ \det$  avec  $\chi$  un caractère lisse de  $F^\times$ . Soit  $v_0 \in \pi_1$  un vecteur non nul de sorte que  $\pi_1 = \mathbb{F}_p v_0$ . On a alors dans  $\pi_1$  :

$$Sv_0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0 = q\chi(\varpi)v_0 = 0,$$

ce qui fait que  $Sx$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$  d'après le lemme 5.2. Ensuite, l'admissibilité de  $\pi$  implique que  $Sx \in D_1(\sigma, \pi)$  par la proposition 4.9, puis  $x \in D_1(\sigma, \pi)$  par le lemme 3.7 (ii). Enfin, la proposition 3.30 montre que  $\bar{x} \in D_1(\sigma, \pi_2)$ , ce qui donne une contradiction avec le choix de  $\bar{x}$ .

*Deuxième cas :*  $\pi_1$  est une série spéciale ou une série principale. D'après [2, Théorème 33],  $\pi_1$  admet toujours une sous- $KZ$ -représentation irréductible  $\sigma$  de dimension supérieure ou égale à 2. Soient  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et  $\langle P^+ \cdot v_0 \rangle$  le sous-espace vectoriel de  $\pi_1$  engendré par  $v_0$ . Par les lemmes 5.2 et 5.10 (ci-après) et quitte à remplacer  $\bar{x}$  par  $S^m \bar{x}$  avec  $m \gg 0$ , on peut supposer que le radical de  $\langle I_1 \cap U^+ \cdot x \rangle$  est contenu dans  $\langle P^+ \cdot v_0 \rangle$ . Ainsi, on obtient une suite exacte de  $I_1 \cap U^+$ -représentations :

$$0 \rightarrow \langle P^+ \cdot v_0 \rangle \rightarrow \langle P^+ \cdot v_0 \rangle \oplus \mathbb{F}_p x \rightarrow \mathbb{F}_p \bar{x} \rightarrow 0.$$

Or, d'après le lemme 2.16,  $\langle P^+ \cdot v_0 \rangle$  est un objet injectif de la catégorie  $\text{Rep}_{I_1 \cap U^+}$ , la suite s'y scinde et il existe donc un vecteur  $v' \in I^+(\pi_1)$  tel que  $v - v'$  soit fixé par  $I_1 \cap U^+$ . On conclut alors comme dans le premier cas par l'admissibilité de  $\pi$ . □

**Lemme 5.10.** *Conservons les notations de la démonstration précédente du deuxième cas. Pour tout  $x \in \pi_1$ , il existe un entier  $m \gg 0$  tel que  $S^m x \in \langle P^+ \cdot v_0 \rangle$ .*

**Démonstration.** Tout d’abord, l’espace  $I^+(\pi_1)$  étant stable par  $S$ , le lemme 3.7 (iii) implique que  $S^m x \in I^+(\pi_1)$  pour  $m \gg 0$  et on peut donc supposer  $x \in I^+(\pi_1)$ . Or, on a  $I^+(\pi_1) = \langle P^+ \cdot \Pi(v_0) \rangle$  d’après le lemme 3.18, ce qui permet de conclure si  $\pi$  est une série spéciale parce que  $\pi_1^{I_1}$  est de dimension 1 dans ce cas et donc  $\Pi(v_0) \in \overline{\mathbb{F}}_p v_0$  (voir la preuve du théorème 3.27).

Supposons que  $\pi_1$  est une série principale. Par ce qui précède, on peut supposer que  $x = g\Pi(v_0)$  avec  $g \in P^+$ . Supposons d’abord  $g = 1$  et montrons que  $m = 1$  convient. En effet, on a (où  $\chi_{\pi_1}$  désigne le caractère central de  $\pi$ ) :

$$S\Pi(v_0) = \chi_{\pi_1}(\varpi) \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0 \in \sigma,$$

et que  $S\Pi(v_0)$  est fixé par  $I_1$  puisque  $\Pi(v_0)$  l’est. Or,  $\sigma^{I_1}$  est de dimension 1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  dont  $v_0$  est un vecteur de base, d’où  $S\Pi(v_0) \in \overline{\mathbb{F}}_p v_0$ .

Supposons  $g \neq 1$  et écrivons  $g = \begin{pmatrix} \varpi^n a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathcal{O}^\times$ ,  $b \in \mathcal{O}$  et  $n \geq 0$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , alors  $g \in I$  puis  $g\Pi(v_0) \in \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(v_0)$ , et le résultat se déduit du cas où  $g = 1$ . Si  $n \geq 1$ , on a

$$g\Pi(v_0) = \begin{pmatrix} \varpi^n a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} v_0 = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^{n-1} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0.$$

Par ailleurs, comme la  $K$ -représentation  $\pi_1^{K_1}$  est isomorphe à une série principale de  $K/K_1 \cong GL_2(\mathbb{F}_q)$  contenant  $\sigma$  dans son socle, elle est engendrée par  $\Pi(v_0)$  comme  $K$ -représentation (voir [6, § 2]). Par conséquent, on obtient de la décomposition (2.6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0 \in \sigma \subseteq \langle K \cdot \Pi(v_0) \rangle \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(v_0) + \langle P^+ \cdot v_0 \rangle.$$

Le résultat s’en déduit facilement par hypothèse de récurrence. □

**Remerciements.** Ce travail s’est accompli sous la direction de C. Breuil. Je le remercie chaleureusement pour avoir partagé avec moi ses idées et ses connaissances et pour toutes ses remarques. Je remercie sincèrement V. Paškūnas pour des discussions constructives, pour m’avoir envoyé l’article [14], et particulièrement pour m’avoir permis de présenter ici sa preuve du théorème 5.8 pour  $F$  général. Je remercie M.-F. Vignéras pour les discussions que nous avons eues ensemble et l’intérêt qu’elle a porté à ce travail. Je remercie R. Abdellatif et B. Schraen pour leur commentaires et suggestions à la première version. Enfin, je remercie vivement le referee pour ses nombreuses remarques et suggestions constructives.

**Références**

1. J. L. ALPERIN, *Local representation theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Volume 11 (Cambridge University Press, 1986).
2. L. BARTHEL ET R. LIVNÉ, Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), 261–292.

3. L. BARTHEL ET R. LIVNÉ, Modular representations of  $GL_2$  of a local field: unramified case, *J. Number Theory* **55** (1995), 1–27.
4. C. BREUIL, Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , I, *Compositio Math.* **138** (2003), 165–188.
5. C. BREUIL, Representations of Galois and of  $GL_2$  in characteristic  $p$ , Course at Columbia University (2007).
6. C. BREUIL ET V. PAŠKŪNAS, Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL_2$ , *Mem. Am. Math. Soc.*, à paraître.
7. K. BUZZARD, F. DIAMOND ET F. JARVIS, On Serre’s conjecture for mod  $\ell$  Galois representations over totally real fields, *Duke Math. J.*, à paraître.
8. P. COLMEZ, Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, *Astérisque* **330** (2010), 281–509.
9. M. EMERTON, Ordinary parts of admissible representations of  $p$ -adic reductive groups, I, Definition and first properties, *Astérisque* **331** (2010), 335–381.
10. Y. HU, Sur quelques représentations supersingulières de  $GL_2(\mathbb{Q}_{p^f})$ , *J. Alg.* **324** (2010), 1577–1615.
11. R. OLLIVIER, Mod  $p$  representations of  $p$ -adic  $GL(2)$  and coefficient systems on the tree, prépublication (2009).
12. V. PAŠKŪNAS, *Coefficient systems and supersingular representations of  $GL_2(F)$* , Mémoires de la Société Mathématique de France, Volume 99 (Société Mathématique de France, Paris, 2004).
13. V. PAŠKŪNAS, On the restriction of representations of  $GL_2(F)$  to a Borel subgroup, *Compositio Math.* **143** (2007), 1533–1544.
14. V. PAŠKŪNAS, Extensions for supersingular representations of  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , *Astérisque* **331** (2010), 317–353.
15. P. SCHNEIDER ET M.-F. VIGNÉRAS, A functor from smooth  $\mathfrak{o}$ -torsion representations to  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, prépublication (2008).
16. J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 3ième édition (Hermann, Paris, 1968).
17. M.-F. VIGNÉRAS, Admissibilité des représentations  $p$ -adiques et lemme de Nakayama, prépublication (2007).
18. M.-F. VIGNÉRAS, A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of  $PGL(2, F)$ , *Pure Appl. Math. Q.* **4**(4) (2008), 1291–1316.
19. M.-F. VIGNÉRAS, Le foncteur de Colmez pour  $GL_2(F)$ , prépublication (2009).