SUR LES ESPACES LOCALEMENT QUASI-COMPACTS

J. DIXMIER

Introduction. Un espace topologique est dit quasi-compact s'il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue sans être nécessairement séparé. Un espace topologique est dit localement quasi-compact si chaque point admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts.

Soit X un espace topologique. Nous noterons $\mathscr{C}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X. Pour toute partie quasi-compacte C de X et tout ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X, soit $U(C; \mathscr{F})$ l'ensemble des $Y \in \mathscr{C}(X)$ tels que $Y \cap C = \emptyset$ et $Y \cap A \neq \emptyset$ pour tout $A \in \mathscr{F}$. Les $U(C; \mathscr{F})$ forment la base d'une certaine topologie sur $\mathscr{C}(X)$, introduite par J. M. G. Fell (**5**). L'espace $\mathscr{C}(X)$ est quasi-compact, et il est même compact lorsque X est localement quasi-compact (**5**, lemme 1 et théorème 1).

Pour tout point x de X, nous noterons $\bar{x}$ au lieu de $\overline{\{x\}}$ l'adhérence de $\{x\}$ dans X; nous noterons λ_X l'application $x \to \bar{x}$ de X dans $\mathscr{C}(X)$. Si A est une partie ouverte de X, on a $x \in A$ si et seulement si $\lambda_X(x) \in U(\emptyset; \{A\})$, de sorte que λ_X est une application ouverte de X sur $\lambda_X(X)$; mais il est facile de voir sur des exemples que λ_X n'est pas continue en général.

Les points de $\mathscr{C}(X)$ adhérents à $\lambda_X(X)$ ont été caractérisés dans (**5**); ce sont les parties Y de X pour lesquelles il existe un filtre Φ sur X ayant les propriétés suivantes: Y est l'ensemble des limites de Φ, et l'ensemble des valeurs d'adhérence de Φ.

Ces définitions s'appliquent en particulier quand X est l'espace des idéaux primitifs d'une C^*-algèbre A (cf., par exemple, **3**). Si A est séparable, on a les propriétés suivantes:

(i) $\lambda_X(X)$ est un G_δ dans $\mathscr{C}(X)$ (**4**, pp. 94–95; **3**, 1.9.13);

(ii) l'ensemble X' des points continuité de λ_X est un G_δ partout dense de X, et les points de X' sont les points "séparés" de X (la définition des points séparés sera rappelée plus loin: définition 16) (**2**, p. 116).

On verra ici que ces propriétés n'ont rien à voir avec la théorie des C^*-algèbres, mais relèvent de la topologie générale. Un outil technique peut-être intéressant en lui-même est la notion d'éléments maximaux de $\overline{\lambda_X(X)}$; ces éléments mettent en évidence la non-séparation de X de la meilleure manière possible; assez curieusement, c'est leur considération qui permettra de prouver l'existence de points séparés dans X.

Les notations $\mathscr{C}(X)$, λ_X, $U(C; \mathscr{F})$ sont utilisées dans tout l'article.

1. Les lemmes 1 et 2 sont donnés sans démonstration dans (**5**, p. 474).

Received December 16, 1966.

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-106-4 Published online by Cambridge University Press

Comme nous utilisons ces lemmes plus loin, nous les démontrons ici.

LEMME. *Soit X un espace topologique. L'application $(Y, Y') \to Y \cup Y'$ de $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(X)$ est continue.*

Soient Y_0, $Y_0' \in \mathscr{C}(X)$. Soient C une partie quasi-compacte de X, et $\mathscr{F}$ un ensemble fini de parties ouvertes de X, tels que $Y_0 \cup Y_0' \in U(C; \mathscr{F})$. Soit $\mathscr{G}$ $[\mathscr{G}']$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}$ qui rencontrent Y_0 $[Y_0']$. On a $Y_0 \in U(C;\mathscr{G})$, $Y_0' \in U(C;\mathscr{G}')$, et $\mathscr{G} \cup \mathscr{G}' = \mathscr{F}$. Si $Y \in U(C;\mathscr{G})$ et $Y' \in U(C;\mathscr{G}')$, on a $Y \cup Y' \in U(C;\mathscr{G} \cup \mathscr{G}') = U(C; \mathscr{F})$, d'où le lemme.

2. LEMME. *Soit X un espace localement quasi-compact à base dénombrable. Alors $\mathscr{C}(X)$ est compact métrisable.*

On sait déjà (**5**) que $\mathscr{C}(X)$ est compact. Soit $(V_1, V_2, \ldots)$ une base de la topologie de X. Pour tout $i = 1, 2, \ldots$, notons $V_i^1, V_i^2, \ldots$ ceux des V_j qui sont contenus dans une partie quasi-compacte de V_i. Comme X est localement quasi-compact, on a $V_i = V_i^1 \cup V_i^2 \cup \ldots$. Chaque V_i^j est contenu dans une partie quasi-compacte W_i^j de V_i. Nous allons montrer, ce qui achèvera la démonstration, que les ensembles

$$U(W_{i_1}^{j_1} \cup \ldots \cup W_{i_m}^{j_m}; \{V_{k_1}, \ldots, V_{k_p}\})$$

forment une base de la topologie de $\mathscr{C}(X)$. Soient C une partie quasi-compacte de X, $A_1, \ldots, A_p$ des parties ouvertes de X, et $Y \in U(C; \{A_1, \ldots, A_p\})$. Il existe un $x \in Y \cap A_i$, puis un indice k_i tel que $x \in V_{k_i} \subset A_i$, d'où $Y \cap V_{k_i} \neq \emptyset$. D'autre part, il existe un ensemble I d'entiers tel que

$$X - Y = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_j V_i^j.$$

Comme $C \subset X - Y$, C est recouvert par un nombre fini d'ensembles $V_{i_1}^{j_1}, \ldots, V_{i_m}^{j_m}$ avec $i_1, \ldots, i_m \in I$. A fortiori, C est contenu dans l'ensemble quasi-compact $W_{i_1}^{j_1} \cup \ldots \cup W_{i_m}^{j_m}$. Comme $W_{i_k}^{j_k} \subset V_{i_k} \subset X - Y$, Y ne rencontre pas $W_{i_1}^{j_1} \cup \ldots \cup W_{i_m}^{j_m}$. Ainsi

$$Y \in U(W_{i_1}^{j_1} \cup \ldots \cup W_{i_m}^{j_m}; \{V_{k_1}, \ldots, V_{k_p}\}) \subset U(C; \{A_1, \ldots, A_p\}).$$

3. DÉFINITION (cf., par exemple, **1**). *Soit X un espace topologique. Une partie fermée Y de X est dite irréductible si elle est non-vide et si pour tout couple (Y_1, Y_2) de parties fermées de X telles que $Y = Y_1 \cup Y_2$, on a $Y = Y_1$ ou $Y = Y_2$.*

4. LEMME.[1] *Soient X un espace localement quasi-compact, E $[F]$ l'ensemble des $(Y_1, Y_2) \in \mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$, tels que $Y_1 \subset Y_2$ $[Y_2 \subset Y_1]$. Soit θ l'application $(Y_1, Y_2) \to Y_1 \cup Y_2$ de $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$ dans $\mathscr{C}(X)$.*

(i) *E et F sont fermés dans $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$.*

(ii) *$\theta((\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)) - (E \cup F))$ est l'ensemble des éléments non-irréductibles et non-vides de $\mathscr{C}(X)$.*

---

[1] Je remercie l'arbitre qui m'a signalé une erreur dans mon énoncé initial.

Comme E $[F]$ est l'ensemble des (Y_1, Y_2) tels que $\theta(Y_1, Y_2) = Y_2\,[Y_1]$, (i) résulte du lemme 1 (car $\mathscr{C}(X)$ est séparé). Soit $Y \in \mathscr{C}(X)$. On a Y non-irréductible et non-vide

$\Leftrightarrow$ il existe $Y_1, Y_2 \in \mathscr{C}(X)$ avec $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y \neq Y_1$, $Y \neq Y_2$,

$\Leftrightarrow$ il existe $Y_1, Y_2 \in \mathscr{C}(X)$ avec $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \not\subset Y_2$, $Y_2 \not\subset Y_1$,

$\Leftrightarrow$ il existe $(Y_1, Y_2) \in (\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)) - (E \cup F)$ avec $Y = \theta(Y_1, Y_2)$.

5. Lemme. *Soit X un espace localement quasi-compact à base dénombrable. Alors l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathscr{C}(X)$ est un G_δ dans $\mathscr{C}(X)$.*

D'après les lemmes 2 et 4, $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$ est compact métrisable, et $E \cup F$ est fermé dans $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$; donc

$$\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X) - (E \cup F) = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$$

où $K_1, K_2, \ldots$ sont des parties compactes de $\mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X)$. Donc l'ensemble des éléments non-irréductibles de $\mathscr{C}(X)$, qui est égal à $\{\emptyset\} \cup \theta(K_1) \cup \theta(K_2) \cup \ldots$ d'après le lemme 4, est un F_σ dans $\mathscr{C}(X)$ d'après le lemme 1.

6. Lemme. *Soit X un espace topologique à base dénombrable. Les parties fermées irréductibles de Baire de X sont les adhérences des points.*

Soit $x \in X$. Supposons que $\bar{x} = Y_1 \cup Y_2$ avec $Y_1, Y_2 \in \mathscr{C}(X)$. On a, par exemple, $x \in Y_1$, d'où $Y_1 \subset \bar{x} \subset \bar{Y}_1 = Y_1$, et $\bar{x} = Y_1$. Donc $\bar{x}$ est irréductible. D'autre part, toute partie non-vide relativement ouverte de $\bar{x}$ contient x; donc, dans $\bar{x}$, toute intersection de parties ouvertes partout denses contient x et par suite est partout dense. Donc $\bar{x}$ est un espace de Baire.

Soit maintenant Y une partie fermée irréductible de Baire de X. Il existe une base dénombrable $(V_1, V_2, \ldots)$ de la topologie de Y, où chaque V_i est non-vide. Pour tout i, on a $Y = \bar{V}_i \cup (Y - V_i)$ et $Y \neq Y - V_i$, donc $\bar{V}_i = Y$ puisque Y est irréductible. Comme Y est un espace de Baire, il existe un x appartenant à tous les V_i. Comme (V_i) est une base de la topologie de Y, on a $\bar{x} = Y$.

7. Théorème. *Soit X un espace localement quasi-compact à base dénombrable dans lequel toute partie fermée est un espace de Baire. Alors $\lambda_X(X)$ est un G_δ dans l'espace compact métrisable $\mathscr{C}(X)$ (donc est un espace polonais).*

Ceci résulte des lemmes 5 et 6.

8. Corollaire. *Soit X un T_0-espace localement quasi-compact à base dénombrable dans lequel toute partie fermée est un espace de Baire. L'espace borélien X est standard et λ_X est un isomorphisme borélien de X sur $\lambda_X(X)$.*

Comme X est un T_0-espace, λ_X est une bijection de X sur $\lambda_X(X)$. D'après le théorème 7, l'espace borélien $\lambda_X(X)$ est standard. Comme λ_X est une application ouverte de X sur $\lambda_X(X)$, λ_X transforme toute partie borélienne de X en une partie borélienne de $\lambda_X(X)$. Enfin, il existe une base dénombrable de la topologie de X, et cette base sépare les points de X puisque X est un T_0-espace. Le corollaire résulte alors de (**6**, théorème 3.2).

9. LEMME. *Soient X un espace topologique, et $Y \subset X$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *tout ensemble fini de parties ouvertes de X rencontrant Y a une intersection non-vide;*

(ii) *il existe un filtre dans X qui tend vers tous les points de Y.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) est évident. D'autre part, si la condition (i) est remplie, les ensembles de la forme $A_1 \cap \ldots \cap A_n$, où $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles ouverts dans X rencontrant Y, forment une base de filtre qui tend vers tous les points de Y.

10. *Définition.* Si les conditions du lemme 9 sont remplies, on dit que Y est lié.

Un ensemble réduit à un point est lié. Si Y est lié, X est nécessairement non-vide, mais Y peut être vide.

11. LEMME. *Soient X un espace topologique, Y un sous-ensemble de X.*

(i) *Si Y est lié, $\bar{Y}$ est lié.*

(ii) *Si Y est réunion d'une famille filtrante croissante non-vide de sous-ensembles liés de X, Y est lié.*

(iii) *Tout sous-ensemble lié de X (et en particulier tout point de X) est contenu dans un sous-ensemble lié maximal.*

(iv) *Tout sous-ensemble lié maximal de X est fermé.*

(i) et (ii) sont évidents sur la condition (i) du lemme 9; (iii) résulte de (ii) et du théorème de Zorn; (iv) résulte de (i).

12. THÉORÈME. *Soient X un espace topologique, $\mathscr{L}(X)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}(X)$ qui sont liés, et $\mathscr{H}(X)$ l'adhérence de $\lambda_X(X)$ dans $\mathscr{C}(X)$.*

(i) *$\mathscr{L}(X)$ est fermé dans $\mathscr{C}(X)$ et contient $\mathscr{H}(X)$.*

(ii) *$\mathscr{L}(X)$ et $\mathscr{H}(X)$ ont les mêmes éléments maximaux.*

Soit Y un élément de $\mathscr{C}(X)$ adhérent à $\mathscr{L}(X)$. Soit $\mathscr{F}$ un ensemble fini de parties ouvertes de X rencontrant Y. Alors $U(\emptyset; \mathscr{F})$ est un voisinage de Y dans $\mathscr{C}(X)$. Donc il existe $Z \in \mathscr{L}(X)$ tel que $Z \in U(\emptyset; \mathscr{F})$. Puisque Z est lié, les éléments de $\mathscr{F}$ ont une intersection non-vide. Donc Y est lié. Ceci prouve que $\mathscr{L}(X)$ est fermé dans $\mathscr{C}(X)$. Si $x \in X$, $\bar{x}$ est lié; donc $\lambda_X(X) \subset \mathscr{L}(X)$, et par suite $\mathscr{H}(X) \subset \mathscr{L}(X)$ (ceci résulte aussi de **5**, lemme 2, corollaire).

Soit Y un élément maximal de $\mathscr{L}(X)$. Il existe un filtre Φ sur X qui tend vers tous les points de Y. Soit Φ' un ultrafiltre plus fin que Φ. Alors Φ' tend vers tous les points de Y, et ne peut tendre vers d'autres points puisque Y est lié maximal. L'ensemble des points adhérents à Φ' est Y puisque Φ' est un ultrafiltre. Donc $Y \in \mathscr{H}(X)$ d'après (**5**, loc. cit.). Comme $\mathscr{H}(X) \subset \mathscr{L}(X)$, Y est maximal dans $\mathscr{H}(X)$.

Soit Y un élément maximal de $\mathscr{H}(X)$. On a $Y \in \mathscr{L}(X)$. Soit $Y' \in \mathscr{L}(X)$ avec $Y' \supset Y$. Il existe (lemme 11) un élément maximal Y'' de $\mathscr{L}(X)$ contenant Y'. D'après ce qui précède, $Y'' \in \mathscr{H}(X)$, donc $Y'' = Y$, $Y' = Y$, et Y est un élément maximal de $\mathscr{L}(X)$.

13. *Remarque.* Des exemples simples montrent qu'il peut exister des sous-ensembles de X, qui sont l'ensemble des limites d'un filtre sur X (et a fortiori qui sont liés), sans appartenir à $\mathscr{H}(X)$.

14. LEMME. *Soient X un espace topologique, Y et C deux sous-ensembles de X, avec C quasi-compact. On suppose que, pour tout ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant Y, il existe un ensemble lié rencontrant C et tous les éléments de $\mathscr{F}$. Alors il existe $c \in C$ tel que $Y \cup \{c\}$ soit lié.*

Pour tout ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant Y, soit $C_{\mathscr{F}}$ la réunion des ensembles $Z \cap C$ pour tous les ensembles liés Z qui rencontrent tous les éléments de $\mathscr{F}$. Par hypothèse, $C_{\mathscr{F}}$ est non-vide. Il est immédiat que les $C_{\mathscr{F}}$ constituent une base de filtre sur C. Comme C est quasi-compact, il existe un $c \in C$ adhérent à cette base de filtre. Pour tout voisinage V de c dans X, et pour tout ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant Y, on a $C_{\mathscr{F}} \cap V \neq \emptyset$, donc il existe un ensemble lié Z rencontrant V et tous les éléments de $\mathscr{F}$; comme Z est lié, on voit que l'intersection de V et des éléments de $\mathscr{F}$ est non-vide; mais ceci prouve que $Y \cup \{c\}$ est lié.

15. LEMME. *Soient X un espace topologique, $\mathscr{L}(X)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}(X)$ qui sont liés, et Y un sous-ensemble lié maximal de X. Les ensembles de la forme $\mathscr{L}(X) \cap U(\emptyset; \mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est un ensemble fini de parties ouvertes de X rencontrant Y, constituent un système fondamental de voisinages de Y dans $\mathscr{L}(X)$.*

Les ensembles $U(C; \emptyset) \cap U(\emptyset; \mathscr{F})$ (où C est une partie quasi-compacte de X ne rencontrant pas Y et où $\mathscr{F}$ est un ensemble fini de parties ouvertes de X rencontrant Y) constituent un système fondamental de voisinages de Y dans $\mathscr{C}(X)$. Supposons le lemme inexact. Il existe alors une partie quasi-compacte C de X ne rencontrant pas Y, avec la propriété suivante: pour tout ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant Y, il existe un $Z \in \mathscr{L}(X) \cap U(\emptyset; \mathscr{F})$ tel que $Z \notin U(C; \emptyset)$. D'après le lemme 14, il existe $c \in C$ tel que $Y \cup \{c\}$ soit lié. Mais ceci contredit l'hypothèse que Y est lié maximal.

16. *Définition* (**2**, p. 116). Soient X un espace topologique, et $x \in X$. On *dit que x est séparé dans X si, pour tout $y \notin \bar{x}$, x et y admettent des voisinages disjoints.*

Autrement dit, x est séparé dans X si, pour tout $y \notin \bar{x}$, $\{x, y\}$ est non-lié.

17. THÉORÈME. *Soient X un espace topologique, et $x \in X$. Considérons les conditions suivantes*: (i) *x est séparé*; (ii) *$\bar{x}$ est lié maximal*; (iii) *λ_X est continue en x. Alors* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). *Si X est localement quasi-compact, les trois conditions sont équivalentes.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout $x \in X$, $\bar{x}$ est lié. Supposons x séparé. Soit Y un sous-ensemble lié de X tel que $\bar{x} \subset Y$. On a

$$y \in Y \Rightarrow \{x, y\} \text{ lié} \Rightarrow y \in \bar{x},$$

donc $Y \subset \bar{x} \subset Y$ et par suite $Y = \bar{x}$. Donc $\bar{x}$ est lié maximal.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons $\bar{x}$ lié maximal. Soit $y \in X - \bar{x}$. Alors $\bar{x} \cup \{y\}$ est non-lié. Donc il existe un ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant $\bar{x} \cup \{y\}$ d'intersection vide. On a $\mathscr{F} = \mathscr{G} \cup \mathscr{G}'$ où les éléments de $\mathscr{G}$ rencontrent $\bar{x}$ (donc contiennent x) et ceux de $\mathscr{G}'$ rencontrent $\{y\}$. Alors l'intersection des éléments de $\mathscr{G}$ et l'intersection des éléments de $\mathscr{G}'$ sont des voisinages disjoints de x et y.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons $\bar{x}$ lié maximal. Soit $\mathscr{L}(X)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}(X)$ qui sont liés. Soit $\mathscr{F}$ un ensemble fini de parties ouvertes de X rencontrant $\bar{x}$ (c'est-à-dire contenant x). Pour prouver que λ_X est continue en x, il suffit, d'après le lemme 15, de prouver que $\lambda_X^{-1}(\mathscr{L}(X) \cap U(\emptyset; \mathscr{F}))$ est un voisinage de x. Or, si $z \in X$, on a

$$z \in \lambda_X^{-1}(\mathscr{L}(X) \cap U(\emptyset; \mathscr{F})) \Leftrightarrow \bar{z} \in U(\emptyset; \mathscr{F}) \Leftrightarrow z \in \textstyle\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A$$

et l'intersection des éléments de $\mathscr{F}$ set une partie ouverte de X contenant x.

Supposons X localement quasi-compact et λ_X continue en x. Soit $y \in X - \bar{x}$. Alors $X - \bar{x}$ est un voisinage de y, donc contient un voisinage quasi-compact C de y. L'ensemble W des éléments de $\mathscr{C}(X)$ qui ne rencontrent pas C est ouvert dans $\mathscr{C}(X)$ et contient $\bar{x} = \lambda_X(x)$. Donc il existe un voisinage V de x dans X tel que

$$z \in V \Rightarrow \lambda_X(z) \text{ ne rencontre pas } C \Rightarrow z \notin C.$$

Donc V et C sont des voisinages disjoints de x et y. Ainsi, x est séparé.

18. LEMME. *Soient X un espace topologique, g une application continue de $\mathscr{C}(X)$ dans un espace métrique, et $f = g \circ \lambda_X$. Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est un F_σ maigre.*

Soient n un entier positif, et A_n l'ensemble des points de X où l'oscillation de f est $\geqq 2/n$. Alors A_n est fermé. Soit B une partie ouverte de X contenue dans A_n. On va prouver, ce qui achèvera la démonstration, que B est vide.

Supposons que B contienne un point x_0. Il existe (lemme 11) un sous-ensemble lié maximal Y_0 de X contenant x_0. Puis il existe un voisinage W de Y_0 dans $\mathscr{C}(X)$ tel que

$$Y \in W \Rightarrow |g(Y) - g(Y_0)| < 1/2n.$$

On a $Y_0 \in U(\emptyset; B)$; donc, en diminuant W, on peut supposer que $W \subset U(\emptyset; B)$. D'après le lemme 15, il existe un ensemble fini $\mathscr{F}$ de parties ouvertes de X rencontrant Y, tel que tout élément lié de $\mathscr{C}(X)$ appartenant à $U(\emptyset; \mathscr{F})$ soit élément de W; soit A l'intersection des éléments de $\mathscr{F}$; alors A est une partie ouverte de X, non-vide puisque Y est lié; on a

$$x \in A \Rightarrow \lambda_X(x) \in W \subset U(\emptyset; B) \Rightarrow x \in B.$$

Donc $A \subset B \subset A_n$. D'autre part,

$$\begin{aligned} x, x' \in A &\Rightarrow \lambda_X(x), \lambda_X(x') \in W \\ &\Rightarrow |g(\lambda_X(x)) - g(Y_0)| < 1/2n, |g(\lambda_X(x')) - g(Y_0)| < 1/2n \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x')| < 1/n \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $A \subset A_n$.

19. Théorème. *Soit X un espace de Baire localement quasi-compact à base dénombrable. L'ensemble des points séparés de X est un G_δ partout dense dans X.*

D'après le lemme 2, $\mathscr{C}(X)$ est compact métrisable. Appliquons le lemme 18 en prenant pour g l'application identique de $\mathscr{C}(X)$. On voit que l'ensemble X' des points de continuité de λ_X est un G_δ de complémentaire maigre dans X. Donc X' est partout dense dans X puisque X est un espace de Baire. Il suffit alors d'appliquer le théorème 17.

20. Corollaire. *Soit X un T_0-espace localement quasi-compact à base dénombrable. Supposons que toute partie fermée de X soit un espace de Baire. Alors l'ensemble des points séparés de X est une espace polonais.*

Soit X' l'ensemble des points séparés de X. Comme λ_X est une application ouverte de X sur $\lambda_X(X)$, et que X' est un G_δ dans X (théorème 19), $\lambda_X(X')$ est un G_δ dans $\lambda_X(X)$. D'autre part, $\lambda_X(X)$ est un G_δ dans $\mathscr{C}(X)$ (théorème 7). Donc $\lambda_X(X')$ est un G_δ dans $\mathscr{C}(X)$ et par suite est polonais. Comme X est un T_0-espace, λ_X est injective. D'après le théorème 17, $\lambda_X|X'$ est un homéomorphisme de X' sur $\lambda_X(X')$.

21. *Remarque.* Soit A une C^*-algèbre. Soit X l'espace des idéaux primitifs de A. Alors X est un T_0-espace localement quasi-compact, et toute partie fermée de X, étant l'espace des idéaux primitifs d'une C^*-algèbre quotient de A, est un espace de Baire. Si de plus A est séparable, X est à base dénombrable, et on peut donc lui appliquer tous les résultats précédents.

22. *Remarque.* On a construit dans (**2**, pp. 118–123), une classe d'exemples de C^*-algèbres. Pour certaines de ces C^*-algèbres, l'ensemble des points séparées dans X (espace des idéaux primitifs) peut être non-borélien; cet ensemble peut aussi être vide (bien entendu, les C^*-algèbres en question sont non-séparables). On vérifie facilement sur ces exemples (bien que ce point n'ait pas été étudié dans **2**) que $\lambda_X(X)$ peut être non-borélien dans $\mathscr{C}(X)$. Les conditions de dénombrabilité du présent article sont donc indispensables.

Si X est un espace localement quasi-compact à base dénombrable, mais n'est pas un espace de Baire, l'ensemble des points séparés dans X peut être vide: il suffit de prendre pour X un ensemble infini dénombrable dans lequel les parties fermées sont X et les parties finies. Par contre, j'ignore si la conclusion du théorème 7 est valable pour tout espace localement quasi-compact à base dénombrable.

Bibliographie

1. N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapitres I–II (Hermann, Paris, 1961).

2. J. Dixmier, *Points séparés dans le spectre d'une C*-algèbre*, Acta Sci. Math. *22* (1961), 115–128.

3. ——— *Les C*-algèbres et leurs représentations* (Gauthier-Villars, Paris, 1964).

4. E. G. Effros, *A decomposition theorem for representations of C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *107* (1963), 83–106.

5. J. M. G. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. *13* (1962), 472–476.

6. G. W. Mackey, *Borel structure in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc. *85* (1957), 134–165.

Tulane University,
New Orleans, Louisiana

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-106-4 Published online by Cambridge University Press