Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2003), **23**, 193–205
DOI: 10.1017/S0143385702001207

Sur les spectres de Lagrange et de Markoff des corps imaginaires quadratiques

FRANÇOIS MAUCOURANT

Laboratoire d'Arithmétique, Géométrie, Analyse et Topologie, UMR CNRS 8524, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Bât. M2, Université des Sciences et Technologies de Lille, F–59665 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
(e-mail: Francois.Maucourant@agat.univ-lille1.fr)

(*Received* 13 *December* 2001 *and accepted in revised form* 21 *January* 2002)

Résumé. Nous étendons des théorèmes sur le spectre de Markoff et de Lagrange connus dans le cas rationnel au cas analogues imaginaires quadratiques. Pour ce faire, nous nous ramenons à un problème de géométrie hyperbolique.

Abstract. We generalize some known results about the Lagrange and Markoff spectra to their analogs on imaginary quadratic fields. This is done by analysing asymptotic orbits on negatively curved manifold, and the use of a geometrical equivalence between diophantine approximation problems and orbits on Bianchi orbifolds.

1. *Introduction*

Soit $\mathbb{K}$ un corps imaginaire quadratique, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ son anneau d'entiers, et $C_{\mathbb{K}}$ son groupe de classes d'idéaux (voir [**BC66**]). Pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2 - \{(0, 0)\}$, on note $\langle x, y\rangle$ l'idéal fractionnaire engendré par x, y, et si I est un idéal fractionnaire, $[I]$ désignera sa classe dans $C_{\mathbb{K}}$. On fixe P une partie non vide de $C_{\mathbb{K}}$. Ce papier est une contribution à l'étude de l'approximation des nombres complexes par des fractions p/q avec $(p, q) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^2$ et $[\langle p, q\rangle] \in P$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note

$$\nu_P(z) = \liminf_{(p,q)\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}\times\mathcal{O}_{\mathbb{K}}-\{0\},[\langle p,q\rangle]\in P} (|q|^2|z - p/q|).$$

On appelera *spectre de Lagrange* l'ensemble L_P des $\nu_P(z)$ pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{K}$. Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques binaires non dégénérées à coefficients complexes. Pour $q \in \mathcal{Q}$,

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

de discriminant $\Delta(q) = b^2 - 4ac$, on note

$$\mu_P(q) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^2-\{(0,0)\},[\langle x,y\rangle]\in P} \frac{|q(x,y)|}{\sqrt{|\Delta(q)|}}.$$

On appelera *spectre de Markoff* l'ensemble M_P des $\mu_P(q)$ pour $q \in \mathcal{Q}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, il est bien connu que pour les spectres de Lagrange et Markoff classiques L et M, on a $M \cap]1/3; +\infty[= L \cap]1/3; +\infty[$ est discret dans $]1/3; +\infty[$ (Markoff 1879), que L est l'adhérence des $\nu(z)$ pour z irrationnel quadratique (Cusick 1975), M est l'adhérence des $\mu(q)$ pour $q \in \mathcal{Q}$ dont les droites isotropes ont des pentes irrationnelles quadratiques, et que $L \subsetneq M$ (Tornheim 1955, Freiman 1968), voir par exemple [**CF89**].

THÉORÈME 1. *Soit E_0 l'ensemble des éléments de $\mathbb{C} - \mathbb{K}$ quadratiques sur $\mathbb{K}$, et $\mathcal{Q}_0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Q}$ de la forme $q(x,y) = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)$ avec α_1, α_2 vérifiant chacun $\alpha_i \in E_0$, ou $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $[\langle \alpha_i, 1\rangle] \notin P$, alors*

(1)

$$M_P = \overline{\{\mu(q) \mid q \in \mathcal{Q}_0\}},$$

(2)

$$L_P = \overline{\{\nu(z) \mid z \in E_0\}}.$$

En particulier, ces spectres sont fermés. Les preuves dans le cas rationnel utilisent le développement en fractions continues [**CF89**], qui ne se généralise pas à tous les corps quadratiques imaginaires (voir toutefois [**Sc75**]). On utilise et on développe en §§3 et 4 la relation bien connue entre l'approximation diophantienne dans les corps quadratiques imaginaires et l'étude des géodésiques dans l'orbifold de Bianchi $V_{\mathbb{K}} = PSL(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})\backslash\mathbb{H}^3$, avec $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique réel de dimension 3 [**Su82, Na88**]. Le théorème précédent découle du résultat dynamique suivant (voir §2).

Soit V une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle inférieure ou égale à $-a^2 < 0$, et $\phi^t : T^1V \to T^1V$ son flot géodésique. Pour $v \in T^1V$, on note $\omega(v)$ son ensemble ω-limite positif, i.e. l'ensemble des points d'accumulation de $\phi^t v$ lorsque $t \to +\infty$.

THÉORÈME 2. *Soit $f : T^1V \to \mathbb{R}$ une fonction continue et propre. Soit J_0 l'ensemble des vecteurs périodiques de T^1V, et J l'ensemble des vecteurs de T^1V tels que $\omega(v)$ et $\omega(-v)$ soient chacun vide ou bien une orbite périodique. Alors*

(1)

$$\mathbb{R} \cap \left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in T^1V\right\} = \overline{\mathbb{R} \cap \left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in J\right\}},$$

(2)

$$\mathbb{R} \cap \left\{\limsup_{t\to+\infty} f(\phi^t v) \mid v \in T^1V\right\} = \overline{\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in J_0\right\}}.$$

(Les adhérences sont prises dans $\mathbb{R}$, et non pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.)

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

2. *Limites supérieures sur les orbites d'une fonction*
Soit V comme dans l'introduction, on note Ω son revêtement universel, $\pi : T^1\Omega \to \Omega$ et $\pi : T^1V \to V$ les projections canoniques, et $\partial\Omega$ le bord de Ω (voir [**Ba95**]). La paramétrisation de Hopf nous permet de faire l'identification :

$$T^1\Omega = ((\partial\Omega \times \partial\Omega) - diag) \times \mathbb{R}.$$

Si $v \in T^1\Omega$, v_+, v_- désigneront les éléments de $\partial\Omega$ tels que $v = (v_+, v_-, t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, qui sont les extrémités en $+\infty$ et $-\infty$ de la géodésique définie par v.

Nous utiliserons sur $T^1\Omega$ la distance suivante. Si $v, v' \in T^1\Omega$:

$$d(v, v') = \int_{\mathbb{R}} d(\pi\phi^t v, \pi\phi^t v')e^{-|t|}\,dt.$$

Cette distance a l'avantage d'être convexe, i.e. l'application de la variable t

$$t \mapsto d(\phi^t v, \phi^t v')$$

est convexe, car intégrale positive de fonctions convexes. En particulier, si $v_+ = v'_+$, alors cette application est décroissante. Notons encore que cette distance est invariante par isométrie, et induit donc une distance sur T^1V, encore notée d. Les distances d sont invariantes par renversement du temps.

Nous utiliserons dans la suite le lemme de fermeture d'Anosov ci-dessous.

LEMME 1. [**An67**] *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $T_0 > 0$ tels que pour tout $v \in T^1V$, si $d(\phi^t v, v) \leq \delta$ et $t \geq T_0$, alors il existe $w \in T^1V$ et $T > 0$ tels que $\phi^T w = w$, $|t - T| < \epsilon$ et pour tout $s \in [0, t]$, $d(\phi^s v, \phi^s w) \leq \epsilon$.*

Preuve de l'assertion (1) *du Théorème* 2. Montrons d'abord que l'ensemble $\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in T^1V\}$ est fermé. Ensuite, il nous suffira pour conclure de montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in J\}$ en est une partie dense. Soit $(\phi^{\mathbb{R}} v_i)_i$ une suite d'orbites telles que $\mu_i = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v_i)$ converge vers $\mu \in \mathbb{R}$. Quitte à translater v_i à l'aide du flot, nous pouvons supposer que $\mu_i - 1/i \leq f(v_i) \leq \mu_i$, et à partir d'un certain rang que $|\mu_i - \mu| < 1$. Comme v_i est dans le compact $f^{-1}([\mu - 2, \mu + 1])$, la suite v_i admet un point d'accumulation v. Ainsi $f(v) = \mu$ par continuité de f. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\phi^t v) = \lim_{i\to\infty} f(\phi^t v_i) \leq \limsup_{i\to\infty} \mu_i = \mu,$$

et donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) = \mu.$$

Montrons maintenant que $\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in J\}$ est un sous ensemble dense de $\mathbb{R} \cap \{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in T^1V\}$. Soit $\phi^{\mathbb{R}} v$ une orbite du flot géodésique, telle que $\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) < +\infty$. Soit K le 1-voisinage fermé de $f^{-1}([\mu - 1, \mu + 1])$, qui est compact. Soit $\delta(\epsilon)$ le module de continuité de f sur K, c'est à dire

$$\delta(\epsilon) = \sup_{x,y\in K, d(x,y)\leq\epsilon} |f(x) - f(y)|.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Prenons $\epsilon > 0$ tel que $\delta(2\epsilon) + 2\epsilon < 1$. Quitte à opérer une translation, nous pouvons imposer $|\mu - f(v)| < \epsilon$.

Supposons d'abord que $\omega(v) \neq \emptyset$. Soit $w \in \omega(v)$, $\tilde{w} \in T^1\Omega$ un relevé de ce vecteur, et $U \subset U'$ deux voisinages ouverts de $\tilde{w} \in T^1\Omega$, de diamètre plus petit que ϵ, vérifiant que pour tout $v^{(1)}, v^{(2)} \in U$, il existe $v^{(3)} \in U'$ tel que $v_+^{(3)} = v_+^{(1)}$ et $v_-^{(3)} = v_-^{(2)}$.

En appliquant le lemme de fermeture d'Anosov il existe $T_1 > T_2 > 0$, aussi grands que l'on veut, et une géodésique périodique de longueur T avec $|T - (T_1 - T_2)| < \epsilon$, ayant un vecteur unitaire tangent v' tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$d(\phi^{t+T_1} v, \phi^t v') < \epsilon,$$

et que v', $\phi^{T_1} v$ aient des relevés $\tilde{v}'$, $\phi^{T_1} \tilde{v}$ dans U.

Il existe ainsi $\tilde{w_0} \in U'$ tel que $(\tilde{w_0})_+ = (\tilde{v}')_+$ et $(\tilde{w_0})_- = (\tilde{v})_-$. En particulier, pour $t \geq 0$:

$$d(\phi^t w_0, \phi^t v') \leq d(\phi^t \tilde{w_0}, \phi^t \tilde{v}') \leq d(\tilde{w_0}, \tilde{v}') \leq \epsilon,$$

car $\tilde{w_0}$, $\tilde{v}'$ sont tous deux dans U'. De même, pour $t \leq 0$,

$$d(\phi^t w_0, \phi^{t+T_1} v) \leq d(\tilde{w_0}, \phi^{T_1} \tilde{v}) \leq \epsilon,$$

car $\tilde{w_0}$, $\phi^{T_1} \tilde{v}$ sont tous deux dans U'. Ainsi, en vertu des inégalités précédentes, l'orbite de w_0 est contenue dans le 2ϵ-voisinage de l'orbite de v, car l'orbite de v' est contenue dans le ϵ-voisinage de l'orbite de v. Comme $d(\phi^{-T_1} w_0, v) \leq \epsilon$ et $|\mu - f(v)| \leq \epsilon$, on a

$$|f(\phi^{-T_1} w_0) - \mu| \leq \delta(\epsilon) + \epsilon < 1.$$

En particulier, $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w_0) \geq \mu - \delta(\epsilon) - \epsilon$, et l'ensemble $f(\phi^{\mathbb{R}} w_0) \cap [\mu - 1, \mu + 1]$ est non vide. De plus, si $\phi^t w_0 \in f^{-1}([\mu - 1, \mu + 1])$, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $d(\phi^t w_0, \phi^{t'} v) \leq 2\epsilon$, et alors $\phi^{t'} v$ est dans K et

$$f(\phi^t w_0) \leq f(\phi^{t'} v) + \delta(2\epsilon) \leq \mu + \delta(2\epsilon).$$

Comme $f(\phi^{\mathbb{R}}(w_0))$ est connexe, on peut en conclure que

$$f(\phi^{\mathbb{R}} w_0) \subset]-\infty, \mu + \delta(2\epsilon)].$$

D'où, finalement :

$$\left| \sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w_0) - \mu \right| \leq \delta(2\epsilon) + \epsilon.$$

Nous avons ainsi obtenu une nouvelle géodésique $\phi^{\mathbb{R}}(w_0)$, telle que l'ω-limite positive soit une orbite périodique, et sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur la géodésique initiale, car f est uniformément continue sur K. Si $\omega(v) = \emptyset$, prenons $w_0 = v$. Appliquons la même technique à partir de l'orbite $\phi^{\mathbb{R}}(-w_0)$, nous pouvons obtenir une troisième orbite, dont les ω-limites positive et négative sont chacune soit périodique, soit vide, et sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur la géodésique initiale. Ce qui conclut la preuve. □

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Preuve de l'assertion (2) *du Théorème 2.* Montrons d'abord l'inclusion du terme de gauche dans celui de droite. Soit $w \in T^1 V$ tel que $\omega(w) \neq \emptyset$ et $\nu = \limsup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t w) < +\infty$. Comme $f^{-1}([\nu - 1, \nu])$ est compact, et qu'un ensemble ω-limite est fermé, il existe $v \in \omega_+(w)$ tel que $f(v) = \nu$.

Nous reprenons ici un argument très proche de celui de Sa'ar Hersonsky et Frédéric Paulin dans [**HP99**], où ils démontrent que la constante d'Hurwitz peut se calculer uniquement à l'aide de la profondeur de pénétration des géodésiques périodiques.

Soit $\delta > 0$. Il existe $T_1, T_2 > 0$, $T_1 - T_2$ aussi grand que l'on veut, tel que les vecteurs $v_i = \phi^{T_i} w \in T^1 V$ vérifient $d(v_i, v) < \delta$. Soit $\epsilon > 0$, il existe, par le lemme de fermeture d'Anosov, pourvu que $T_1 - T_2$ soit suffisamment grand, un δ tel que tel qu'il existe une orbite périodique $g(t)$ de période T avec $|T - (T_1 - T_2)| < \epsilon$, telle que pour tout $t \in [0, T]$,

$$d(g(t), \phi^{t+T_2} w) < \epsilon.$$

Par des techniques de continuité uniforme semblables à celles de la preuve de la proposition précédente, nous obtenons une orbite périodique sur laquelle la borne supérieure de f est aussi proche que l'on veut de celle sur l'ensemble ω-limite initial.

La deuxième étape, indépendante, consiste à démontrer la réciproque :

$$\overline{\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} f(\phi^t v) \mid v \in J_0\right\}} \subset \left\{\sup_{v\in\omega(w)} f(v) \mid w \in T^1 V, \omega(w) \neq \emptyset\right\}.$$

Soit une suite $\mathcal{G}_i$ de géodésiques périodiques orientées, $T^1\mathcal{G}_i$ les vecteurs tangents aux $\mathcal{G}_i$ respectant l'orientation de $\mathcal{G}_i$, telle que $\nu_i = \sup_{v\in T^1\mathcal{G}_i} f(v)$ converge vers $\nu \in \mathbb{R}$. Nous extrairons librement des sous-suites de $\mathcal{G}_i$, tout en continuant à noter la suite de la même manière. Par compacité de $f^{-1}([\nu - 1, \nu + 1])$, les ensembles $T^1\mathcal{G}_i$ ont un point d'accumulation (lorsque i tend vers l'infini) v, tel que $f(v) = \nu$. Ainsi, il nous suffit, pour conclure la démonstration, de construire un vecteur w vérifiant :

$$v \in \omega(w) \subset \bigcap_{i>0} \overline{\bigcup_{j>i} T^1\mathcal{G}_j}.$$

Soit $\tilde{v}$ un relevé de v dans $T^1\Omega$, posons $\epsilon_i = 2^{-i}$. On peut trouver :

$$B_i = V_i \times W_i \times]t_0 + \epsilon_i, t_0 + \epsilon_i[,$$

une suite décroissante de voisinages de $\tilde{v}$, V_i, W_i des ouverts relativement compacts de fermetures disjointes, et telle que $\bigcap_i B_i = \{\tilde{v}\}$, et que chaque B_i soit inclus dans une boule de $T^1\Omega$ de rayon $2\epsilon_i$. Désignons par $\gamma_i \in \Gamma$ la transformation telle que $\gamma_i(v_i) = \phi^{l_i}(v_i)$, où l_i est la longueur de $\mathcal{G}_i$.

On peut alors supposer que $T^1\mathcal{G}_i \cap B_i \neq \emptyset$, et comme le point à l'infini attractif de γ_i est dans V_i, quitte à considérer un itéré de γ_i, on peut supposer que $\gamma_i(\overline{V_i}) \subset V_i$, et de même $\overline{W_{i-1}} \subset \gamma_i(W_i)$. Soit donc $v_i \in T^1\mathcal{G}_i \cap B_i$.

Considérons la suite $V_i' = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_i(V_i)$, avec $V_0' = V_1$. Remarquons tout d'abord que cette suite est décroissante au sens de l'inclusion : comme $\gamma_{i+1}(V_{i+1}) \subset V_{i+1} \subset \underline{V_i}$, c'est évident. De même, $W_i' = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_i(W_i)$ est une suite croissante. Soit $\xi \in \bigcap_{i>0} \overline{V_i'} \neq \emptyset$, soit $\eta \in W_1$. On pose $w = (\xi, \eta, t_0) \in B_1$.

Montrons maintenant par récurrence qu'il existe $L_i \in [-16\epsilon_i + l_i, 16\epsilon_i + l_i]$, tel que :

$$\phi^{L_1+L_2+\cdots+L_i}(w) \in \gamma_1 \cdots \gamma_i(B_i),$$

En effet, c'est vrai pour $i = 0$ avec $B_0 = B_1$. Supposons que ce soit vrai pour i, et posons

$$v'_{i+1} = \gamma_1 \cdots \gamma_i(v_{i+1}) \in \gamma_1 \cdots \gamma_i(B_i).$$

On a alors :

$$\phi^{l_{i+1}}(v'_{i+1}) = (\gamma_1 \cdots \gamma_i)\gamma_{i+1}(\gamma_1 \cdots \gamma_i)^{-1}(v'_{i+1}) \in \gamma_1 \cdots \gamma_i\gamma_{i+1}(B_{i+1}).$$

Comme $\xi \in \gamma_1 \cdots \gamma_{i+1}(V_{i+1})$ et $\eta \in W_1 \subset \gamma_1 \cdots \gamma_{i+1}(W_{i+1})$, il existe T tel que $\phi^T(w) \in \gamma_1 \cdots \gamma_{i+1}(B_{i+1})$. Comme les B_i sont de diamètre $< 2\epsilon_i$, l'inégalité triangulaire appliquée aux points v'_{i+1}, $\phi^{l_{i+1}}(v'_{i+1})$, $\phi^{L_1+\cdots+L_i}(w)$ et $\phi^T(w)$ nous donne

$$|T - (L_1 + \cdots + L_i) - l_{i+1}| < 4(\epsilon_i + \epsilon_{i+1}) < 16\epsilon_{i+1}.$$

Ainsi on pose $L_{i+1} = T - (L_1 + \cdots + L_i)$.

Il ne reste qu'à vérifier que w vérifie bien les propriétés annoncées, mais c'est facile car ainsi pour $t \in [L_0 + \cdots + L_i, L_0 + \cdots + L_i + L_{i+1}]$, la projection de $\phi^t(w)$ sur T^1V est à distance $<20\epsilon_i$ de $T^1\mathcal{G}_i$, et les projection de $\phi^{L_1+\cdots+L_i}(w)$ nous donnent une suite d'adhérence v. □

3. *Formes quadratiques et géodésiques*

3.1. *Préliminaires arithmétiques.*

Posons $\Gamma_{\mathbb{K}} = SL(2, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$.

Si $q \in \mathcal{Q}$ s'écrit sous la forme :

$$q(n, m) = (nx - m)(ny - m),$$

alors on remarquera que $\Delta(q) = (x - y)^2$.

Le minimum $\mu(q)$ est normalisé de telle sorte que c'est un invariant d'homothétie. Il est également invariant par l'action de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ sur $\mathcal{Q}$: $(\gamma q)(x, y) = q(\gamma^{-1}(x, y))$. Nous dirons que deux formes sont équivalentes si elles sont proportionnelles modulo l'action de $\Gamma_{\mathbb{K}}$.

Rappelons le lemme suivant.

LEMME 2. [**Fr90**, Lemme 3.5$_2$, p.37] *Soit $I = \langle u, v\rangle = \langle p, q\rangle$ un idéal entier non nul. Alors il existe*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_{\mathbb{K}},$$

telle que :

$$u = ap + bq, \quad v = cp + bq.$$

COROLLAIRE 1. *Si $P = \{[I]\}$ est un singleton, avec I un idéal entier de norme minimale dans sa classe, et que $I = \langle p, q\rangle$, alors*

$$\mu_P(q) = \inf_{M \in \Gamma_{\mathbb{K}}} \frac{|q(a_M p + b_M q, c_M p + d_M q)|}{\sqrt{|\Delta(q)|}},$$

où les coefficients de M sont notés a_M, b_M, c_M, d_M.

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Preuve. En effet, soit $(u, v) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^2$ tels que $\langle u, v\rangle = \alpha I$. Comme I est de norme minimale, $|\alpha| \geq 1$, et donc :

$$|q(\alpha^{-1}u, \alpha^{-1}v)| = |\alpha^{-2}q(u, v)| \leq |q(u, v)|.$$

Appliquons le lemme précédent à $I = \langle p, q\rangle = \langle \alpha^{-1}u, \alpha^{-1}v\rangle$, nous trouvons une matrice M telle que :

$$|q(a_M p + b_M q, c_M p + d_M q)| \leq |q(u, v)|.$$

Réciproquement, étant donné une matrice M, le fait qu'elle soit inversible dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$ entraîne que :

$$\langle a_M p + b_M q, c_M p + d_M q\rangle = I. \qquad \square$$

De même, nous avons le suivant.

COROLLAIRE 2. *Si $P = \{[I]\}$ est un singleton, avec I un idéal entier de norme minimale dans sa classe, et que $I = \langle p, q\rangle$, alors*

$$\nu_P(z) = \liminf_{X \in \Gamma_{\mathbb{K}}/\Gamma_{p/q}} \left(\inf_{M \in X} \left| z - \frac{a_M p + b_M q}{c_M p + d_M q} \right| |c_M p + d_M q|^2 \right),$$

où les coefficients d'un représentant M de la classe X sont notés a_M, b_M, c_M, d_M, et $\Gamma_{p/q}$ est le stabilisateur dans $\Gamma_{\mathbb{K}}$ de p/q.

3.2. *Définitions et rappels géométriques.* Soit $\Omega = \mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique de dimension 3, vu dans le modèle du demi-espace supérieur. Soit $\Gamma_{\mathbb{K}} \subset SL(2, \mathbb{C})$ comme précédemment, notons $V_{\mathbb{K}}$ le quotient $\Gamma_{\mathbb{K}}\backslash\mathbb{H}^3$. Rappelons qu'un cusp d'une variété hyperbolique V de dimension 3 et de volume fini est une orbite sous l'action de $\Gamma = \pi_1(V)$ des points paraboliques de $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Il est bien connu que $C_{\mathbb{K}}$ paramètre les cusps de $V_{\mathbb{K}}$, par l'application $\Gamma_{\mathbb{K}}$-invariante qui à un représentant $z \in \mathbb{K}$ associe $[\langle z, 1\rangle]$. Soit $[I] \in C_{\mathbb{K}}$ un cusp, soit $z \in \mathbb{C}$ un relevé de $[I]$, soit Γ_z le stabilisateur dans Γ de z, on définit $\tilde{V}_{[I]}$ comme $\Gamma_z\backslash\mathbb{H}^3$. Cette variété est bien sûr indépendante (à isométrie près) du z choisi, et revêt naturellement $V_{\mathbb{K}}$.

Par voisinage horosphérique d'un cusp, on entend l'ouvert image par la projection de $\mathbb{H}^3 \to V_{\mathbb{K}}$ d'une horoboule ouverte centrée en un point parabolique de $\partial\mathbb{H}^3$ de la classe du cusp. Si $[I] \in C_{\mathbb{K}}$, et si $F \subset V_{\mathbb{K}}$, on note $\widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(F)$ la borne supérieure du volume des voisinages horosphériques du cusp de $\tilde{V}_{[I]}$ disjoints de l'image réciproque de F dans $\tilde{V}_{[I]}$ par le revêtement naturel.

3.3. *Equivalence entre géométrie et minimum des formes quadratiques binaires.* À tout $q \in \mathcal{Q}$, on associe la géodésique $G(q)$ (non orientée) de $V_{\mathbb{K}}$ qui a pour relevé la géodésique $\tilde{G}(q)$ de $\mathbb{H}^3$ ayant pour points à l'infini les racines x, y de l'équation $q(z, 1) = 0$. En général, il y en a toujours 2 distinctes. Si $q(z, 1)$ est de degré 1, on prend comme points à l'infini la racine et $\infty \in \partial\Omega$. Réciproquement, à une géodésique non orientée de $V_{\mathbb{K}}$, en prenant un relevé dans $\mathbb{H}^3$, et notant x, y ses points à l'infini, on considère la forme quadratique $q(n, m) = (n - mx)(n - my)$, ou éventuellement $q(n, m) = (n - mx)n$

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

si un des points à l'infini est $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$. Cette association établit une bijection dont la réciproque est $q \mapsto G(q)$, entre les géodésiques non orientées de $V_{\mathbb{K}}$ et les classes de formes quadratiques [**EM98**]. Nous pouvons maintenant expliciter la relation entre minimum de formes quadratiques et profondeur de pénétration dans un cusp.

THÉORÈME 3. *Il existe des constantes* $(K_{[I]})_{[I]\in C_{\mathbb{K}}}$ *(ne dépendant que de* $\mathbb{K}$*), telles qu'on a la formule suivante :*

$$\mu_P(q)^2 = \inf_{[I]\in P} K_{[I]}\widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(G(q)).$$

Nous utiliserons ce résultat uniquement sous forme qualitative, et nous n'exploiterons pas la valeur exacte des $K_{[I]}$, qui est

$$K_{[I]} = \frac{N([I])^2 w(\mathbb{K})}{4\sqrt{|\Delta_{\mathbb{K}}|}},$$

où $w(\mathbb{K})$, $\Delta_{\mathbb{K}}$ désignent respectivement le nombre de racines de l'unité et le discriminant du corps $\mathbb{K}$, et $N([I])$ désigne la norme sur $\mathbb{Q}$ de l'idéal entier I de plus petite norme dans $[I]$. On a bien sûr $w(\mathbb{K}) = 2$ sauf si $d = -1$ ou -3, auquel cas w vaut respectivement 4 et 6, et $\Delta_{\mathbb{K}} = -d$ ou $-4d$ suivant que d est congru ou non à 3 modulo 4.

Preuve. La première remarque est qu'il nous suffit de la prouver pour P un singleton. Soit donc $P = \{[I]\}$ un singleton, avec un représentant I, qui soit un idéal entier de norme minimale parmi les représentants de cette classe. Soient $(p, q) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ deux éléments qui engendrent I, et soient $(\mu, \nu) \in (I^{-1})^2$ tels que :

$$p\nu + q\mu = 1.$$

Posons :

$$M = \begin{bmatrix} p & -\mu \\ q & \nu \end{bmatrix}.$$

On pose pour $\gamma \in \Gamma_K, \rho(\gamma) = M^{-1}\gamma M$.

Il est facile de voir qu'une matrice de $\rho(\Gamma)$ stabilise l'infini si et seulement si elle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix},$$

avec $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^*$ et $y \in I^{-2}$.

L'application $M^{-1} : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ passe au quotient en une isométrie de $V_{\mathbb{K}} = \Gamma_{\mathbb{K}}\backslash\mathbb{H}^3$ sur $\rho(\Gamma_{\mathbb{K}})\backslash\mathbb{H}^3$, encore notée M^{-1}. Soit q_0 une forme quadratique de la forme $q_0(n, m) = (n - xm)(n - ym)$. Considérons la géodésique $M^{-1}G(q_0) \in \rho(\Gamma_{\mathbb{K}})\backslash\mathbb{H}^3$. Pour un élément $\rho(\gamma)$, calculons la distance euclidienne entre les 2 points à l'infini de $\rho(\gamma)M^{-1}\tilde{G}(q_0)$, dans le modèle du demi-espace :

$$\begin{aligned} |M^{-1}\gamma(x) - M^{-1}\gamma(y)| &= \frac{|x-y|}{|((-qa+pc)x + (pd-qb))((pc-qa)y + (pd-qb))|} \\ &= \frac{\sqrt{|\Delta(q_0)|}}{|q_0(pd-qb, -pc+qa)|}. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Le Corollaire 1 nous permet de faire apparaître $\mu_{[I]}(q_0)$ en prenant la borne supérieure de la quantité précédente.

Ainsi, il est clair après un court calcul de volume que :

$$\frac{N([I])^2 w(\mathbb{K})}{4\sqrt{|\Delta_{\mathbb{K}}|}} \widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(G(q_0)) = \mu_{[I]}(q_0)^2. \qquad \square$$

4. *Géométrie et approximation diophantienne*

A un nombre complexe z, on associe la classe asymptotique $R(z)$ de rayons géodésiques de $V_{\mathbb{K}}$ à laquelle appartient tout rayon dont un relevé a pour point à l'infini z. Réciproquement, à un rayon géodésique de $V_{\mathbb{K}}$, on peut associer la classe de point à l'infini dans $\partial\mathbb{H}^3$ d'un relevé de ce rayon au demi-espace supérieur. Nous obtenons ainsi une bijection entre ces deux ensembles ; en particulier les éléments de $\mathbb{K}$ sont associés aux rayons qui se terminent dans les cusps. Soit w un vecteur tangent à un rayon géodésique de $R(z)$, alors l'ω-limite $\omega(w)$ ne dépend en fait que de $R(z)$, ce qui justifie l'écriture de cet ensemble comme $\omega(R(z))$. On notera $F(z) \subset V_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des points-bases de cette ω-limite.

Ces notations introduites, nous sommes en mesure de citer le théorème d'équivalence géométrique entre approximation diophantienne et profondeur des excursions géodésiques. Il est bien connu dans le cas $P = \{[\mathcal{O}_{\mathbb{K}}]\}$ (voir par exemple [**HP99**]), mais lorsque la variété a plusieurs cusps, ce théorème fournit une interprétation nouvelle.

THÉORÈME 4. *Il existe des constantes $(K_{[I]})_{[I]\in C_{\mathbb{K}}}$ (ne dépendant que de $\mathbb{K}$), telles qu'on a la formule suivante :*

$$\nu_P(z)^2 = \inf_{[I]\in P} K_{[I]} \widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(F(z)).$$

Les $K_{[I]}$ sont les mêmes constantes que celle du Théorème 3.

Avant d'en donner une preuve, commençons par une proposition un peu plus générale. On paramètre $\mathbb{H}^3$ par des coordonnées (z, t), $z \in \mathbb{C}$ et $t > 0$. Nous appliquerons cette proposition par la suite à différentes représentations de $\Gamma_{\mathbb{K}}$, pour obtenir le résultat désiré.

PROPOSITION 1. *Soit $\rho : \Gamma \to SL(2, \mathbb{C})$ une représentation fidèle d'un groupe Γ comme réseau de $SL(2, \mathbb{C})$, ayant $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$ comme cusp. Le stabilisateur de l'infini $\rho(\Gamma)_\infty$ est donc de la forme :*

$$\rho(\Gamma)_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in W, y \in R \right\},$$

où W est un sous-groupe (fini) de racines de l'unité, $R \subset \mathbb{C}$ un réseau. Soit w le cardinal de W (ou 2 fois cette quantité si l'application $\Gamma \to PSL(2, \mathbb{C})$ est injective), et δ le volume de $\mathbb{C}/R$. À toute matrice

$$\rho(\gamma) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma,$$

associons $q_\rho(\gamma) = |c|$. C'est en fait une fonction sur l'ensemble quotient $\rho(\Gamma)/\rho(\Gamma)_\infty$. Pour tout $F \subset \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, notons $\widetilde{\mathrm{Vol}}_{(\infty,\rho)}$ la borne supérieure du volume des voisinages horosphériques du cusp de $\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3$ disjoints de l'image réciproque de F par l'application naturelle :

$$\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}^3 \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^3.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Pour $z \in \mathbb{C}$, notons $F_\rho(z)$ l'ensemble des points-bases de l'ω-limite de la classe de rayon géodésique donnée par $z \in \partial\mathbb{H}^3$. Alors pour tout point $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\Big(\liminf_{\gamma\in\rho(\Gamma)/\rho(\Gamma)_\infty} |z-\rho(\gamma)(\infty)q_\rho(\gamma)^2|\Big)^2 = \frac{w}{4\delta}\widetilde{\mathrm{Vol}}_{(\infty,\rho)}(F_\rho(z)).$$

Preuve. La remarque fondamentale est qu'une horoboule $H_T = \{(z,t) \mid t \geq T\}$ est envoyée par un élément $\rho(\gamma) \in \rho(\Gamma)$ sur une boule $B_{\gamma,T,\rho}$, euclidienne, tangente à $\mathbb{C}$ en $\rho(\gamma)(\infty)$, de rayon

$$r(B_{\gamma,T,\rho}) = \frac{1}{2Tq_\rho(\gamma)^2}.$$

Pour un tel T fixé, considérons la collection de boules $\mathcal{B}(T) = \{B_{\gamma,T,\rho}\}$. Il est aisé de voir que la réunion des ensembles de la famille $\mathcal{B}(T) \cup \{H_T\}$ est l'image réciproque par le revêtement naturel :

$$\mathbb{H}^3 \to \rho(\Gamma)\backslash\mathbb{H}^3,$$

de l'image par l'application :

$$\rho(\Gamma)_\infty\backslash\mathbb{H}^3 \to \rho(\Gamma)\backslash\mathbb{H}^3,$$

d'un voisinage horosphérique de l'infini de volume V dans $\rho(\Gamma)_\infty\backslash\mathbb{H}^3$. Remarquons que $\mathcal{B}(T)\cup\{H_T\}$ est naturellement paramétrée par $\rho(\Gamma)/\rho(\Gamma)_\infty$. Un simple calcul nous donne la relation entre T et V :

$$V = \frac{\delta}{wT^2}.$$

Faisons le constat suivant : le rayon géodésique $r(t) = (z, e^{-t})$ coupe une infinité de boules de $\mathcal{B}(T)$ si et seulement si, pour une infinité de $\rho(\gamma) \in \rho(\Gamma)$ distincts modulo $\rho(\Gamma)_\infty$:

$$|z-\rho(\gamma)(\infty)| \leq \frac{1}{2Tq_\rho(\gamma)^2},$$

c'est à dire, pour une infinité de tels γ :

$$(|z-\rho(\gamma)(\infty)|q_\rho(\gamma)^2)^2 \leq \frac{wV}{4\delta}.$$

Si $V > \widetilde{\mathrm{Vol}}_{(\infty,\rho)}(F_\rho(z))$, le rayon géodésique $R(z)$ rentre une infinité de fois dans le voisinage horosphérique en question. Si $V < \widetilde{\mathrm{Vol}}_{(\infty,\rho)}(F_\rho(z))$, il n'y rentre qu'un nombre fini de fois. □

Preuve du Théorème 4. Nous allons donc appliquer cette proposition aux représentations de $\Gamma_{\mathbb{K}}$ introduites dans la preuve du Théorème 3 pour démontrer le théorème d'équivalence géométrique. La première remarque est qu'il nous suffit une fois encore de le prouver pour P un singleton. Soit donc $P = \{[I]\}$ un singleton, et reprenons les éléments de la preuve du Théorème 3, ρ la représentation associée à I, idéal de norme minimale engendré par $\langle p, q\rangle$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Ainsi $w = w(\mathbb{K})$ et $\delta = \sqrt{|\Delta_{\mathbb{K}}|}N(I)^{-2}$, avec les notations de la Proposition 1. Appliquons-la à $M^{-1}z$ où $z \notin \mathbb{K}$:

$$\Big(\liminf_{|q_\rho(\gamma)|\to\infty} |M^{-1}z - \rho(\gamma)(\infty)|q_\rho(\gamma)^2\Big)^2 = \frac{w(\mathbb{K})N([I])^2}{4\sqrt{|\Delta_{\mathbb{K}}|}}\widetilde{\mathrm{Vol}}_{(\infty,\rho)}(F_\rho(M^{-1}z)).$$

Si $\gamma := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_{\mathbb{K}}$, un petit calcul montre que

$$q_\rho(\gamma) = |p^2c - q^2b + pqd - pqa| = |pc + qd||p - q\gamma M(\infty)|.$$

Autrement dit :

$$\Big(\liminf_{|q_\rho(\gamma)|\to\infty} |M^{-1}z - M^{-1}\gamma M(\infty)|q_\rho(\gamma)^2\Big)^2 = K_{[I]}\widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(F(z)).$$

Comme on a

$$|M^{-1}z - M^{-1}\gamma M(\infty)| = \frac{|z - \gamma M(\infty)|}{|-qz + p||-q\gamma M(\infty) + p|},$$

on peut en déduire

$$\begin{aligned}|M^{-1}z - M^{-1}\gamma M(\infty)|q_\rho(\gamma)^2 &= |z - \gamma M(\infty)||cp + dq|^2\frac{|p - q\gamma M(\infty)|}{|-qz + p|}\\ &= \left|z - \frac{ap + bq}{cp + dq}\right||cp + dq|^2\frac{|p - q\gamma M(\infty)|}{|-qz + p|}.\end{aligned}$$

Si $\gamma M(\infty) \to z$, alors la dernière fraction tend vers 1. Pour en déduire le théorème, il ne nous reste qu'à nous rappeler le Corollaire 2. □

5. *Résultats sur les spectres*

Si $x \in E_0$, notons $\overline{x}$ son conjugué par l'involution de $\mathbb{K}(x)/\mathbb{K}$. Le lemme suivant correspondrait dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ au célèbre *théorème de Lagrange* : un irrationnel quadratique a un développement en fractions continues périodique, et réciproquement.

LEMME 3. [**Sa83**] *Les paires de points à l'infini des relevés des géodésiques périodiques de $V_{\mathbb{K}}$ correspondent exactement aux paires $(x, \overline{x})$ où $x \in E_0$.*

Soit $\mathcal{G}_P$ l'ensemble des géodésiques de $V_{\mathbb{K}}$ dont les relevés sur $\mathbb{H}^3$ ont des points à l'infini qui soient dans E_0 ou bien des éléments p/q de $\mathbb{K}$ tels que $[\langle p, q\rangle] \notin P$. L'interprétation dynamique de cette définitions est donnée dans le lemme suivant.

LEMME 4. *Les éléments de $\mathcal{G}_P$ sont les géodésiques non orientées, i.e. les couples d'orbites de la forme $g = (\phi^{\mathbb{R}}(v)) \cup (\phi^{\mathbb{R}}(-v))$, avec $\omega(v)$ (respectivement $\omega(-v)$) soit vide, soit périodique, et telles que pour tout $I \in P$:*

$$\widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(g) > 0.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press

Preuve du Théorème 1. On utilise bien sûr la correspondance avec la géométrie pour traduire cet énoncé.

Nous appliquons le Théorème 2 à la fonction f sur $T^1 V_{\mathbb{K}}$ qui à un vecteur v de point-base $p \in V_{\mathbb{K}}$ associe la valeur :

$$f(v) := -\ln\Big(\inf_{[I]\in P}(K_{[I]}\widetilde{\mathrm{Vol}}_{[I]}(p))\Big).$$

Cette fonction est continue et propre, et on pourra remarquer que c'est le minimum parmi une famille finie de fonctions de Busemann. Le résultat est donc immédiat, au vu des Lemmes 3 et 4, modulo la vérification que 0 appartient bien aux deux spectres, et est bien dans l'adhérence des ensembles ci-dessus ; mais c'est vrai car presque toute orbite est dense, ainsi que presque toute ω-limite positive, et l'ensemble des vecteurs périodiques est dense. □

COROLLAIRE 3. *Pour tout $P \subset C_{\mathbb{K}}$ non vide, on a :*

$$L_P \subset M_P.$$

Le théorème suivant est une application directe des travaux de Hersonsky et Paulin aux définitions introduites précédemment.

THÉORÈME. [**HP99**]. *Tous les spectres L_P et M_P sont bornés. On a de plus*

$$\sup L_{C_{\mathbb{K}}} = \sup M_{C_{\mathbb{K}}}.$$

Comme les spectres sont fermés, nous avons le suivant.

COROLLAIRE 4. *Soit*

$$C = \sup L_{C_{\mathbb{K}}} = \sup M_{C_{\mathbb{K}}}.$$

Alors il existe $q \in \mathcal{Q}$, et $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mu_{C_{\mathbb{K}}}(q) = \nu_{C_{\mathbb{K}}}(z) = C.$$

Remerciements. Je tiens à remercier Livio Flaminio et Frédéric Paulin, ainsi que le rapporteur, pour leurs suggestions et conseils.

REFERENCES

[An67] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. *Proc. Steklov Institute for Mathematics*, Vol. 90. American Mathematical Society, Providence, RI, 1969.

[Ba95] W. Ballmann. *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature (DMV Seminar)*. Birkhäuser, Basel, 1995.

[BC66] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch. *Théorie des nombres*. Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[CF89] T. W. Cusick et M. E. Flahive. *The Markoff and Lagrange Spectra (Mathematical Surveys and Monographs, 30)*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[EM98] A. Eskin, G. A. Margulis et S. Mozes. Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of the Oppenheim conjecture. *Ann. Math.* (2) **147**(1) (1998), 93–141.

[Fr90] E. Freitag. *Hilbert Modular Forms*. Springer, 1990.

[HP99] S. Hersonsky et F. Paulin. Diophantine approximation for negatively curved manifolds, I. *Math. Z.* to appear.

[Na88] H. Nakada. On metrical theory of diophantine approximation over imaginary quadratic field. *Acta Arithmetica* **51**(4) (1988), 399–403.

[Sa83] P. Sarnak. The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds. *Acta Mathematica* **151** (1983), 253–295.

[Sc75] A. L. Schmidt. Diophantine approximation of complex numbers, *Acta Mathematica* **134** (1975), 1–84.

[Su82] D. Sullivan. Disjoint Spheres, approximation by quadratic numbers and the logarithm law for geodesics. *Acta Mathematica* **149** (1982), 215–237.

https://doi.org/10.1017/S0143385702001207 Published online by Cambridge University Press