*Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 13 (2003) pp. 9-43
DOI:10.1017/S0957423903003023 

# AL-QŪHĪ ET AL-SIJZĪ: SUR LE COMPAS PARFAIT ET LE TRACÉ CONTINU DES SECTIONS CONIQUES

ROSHDI RASHED

Trois mathématiciens contemporains parmi les plus prestigieux de la fin du Xᵉ siècle inventent de nouveaux instruments pour le tracé continu des courbes coniques et élaborent les moyens théoriques indispensables pour expliquer et contrôler leur fonctionnement. Ibn Sahl, al-Qūhī et al-Sijzī ont écrit chacun sur l'un ou l'autre instrument pour tracer ces courbes. Sont-ils les seuls? Rien n'est moins sûr. On sait qu'al-Bīrūnī s'y intéresse[1]; et il y a suffisamment de raisons pour conjecturer qu'Ibn al-Haytham a étudié un instrument pour tracer ces courbes dans un écrit aujourd'hui perdu[2] et que, plus tard, Hibat Allāh al-Baghdādī (m. 1140) et Muḥammad ibn al-Ḥusayn (fin du XIIᵉ siècle) ont rédigé, sous l'influence du livre d'al-Qūhī, un traité sur le compas parfait.[3]

Ce phénomène de la fin du Xᵉ siècle ne connaît rien de comparable avant cette période en histoire des mathématiques. Certes, il arrivait avant cette date aux ingénieurs d'aborder plus ou moins directement cette question du tracé continu de l'une ou l'autre section conique, mais sans jamais, autant que nous sachions, en faire la théorie mathématique. En fait, ils ne faisaient qu'évoquer un procédé sans engager la recherche géométrique nécessaire pour en expliquer la construction et l'usage. En tout cas, notre connaissance de l'histoire de ce thème avant les mathématiques arabes, se réduit à un seul fait et à un vestige qui tous deux nous viennent du VIᵉ siècle. On sait en effet qu'An-

[1] *Kitāb fī istīʿāb al-ujūh al-mumkina fī ṣanʿat al-asṭurlāb*, Leiden, MS Or. 591, notamment fols. 148 sqq.; voir R. Rashed, *Geometry and Geometrical Optics in the 10th-11th Century: Ibn Sahl, al-Qūhī and Ibn al-Haytham* (London, 2003), à paraître.
[2] *Fī birkār al-quṭūʿ*, cf. *Les mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle,* vol. II: *Ibn al-Haytham* (London, 1993), pp. 514-15.
[3] Rashed, *Geometry and Geometrical Optics*.

thémius de Tralles[4] a tracé l'ellipse par le procédé du "jardinier"; d'autre part, une phrase, d'authenticité douteuse, attribuée à Eutocius, laisse entendre qu'Isidore de Milet[5] aurait inventé un instrument pour tracer la parabole.[6]

[4] Voir R. Rashed, *Œuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindī*, vol. I: *L'optique et la catoptrique d'al-Kindī* (Leiden, 1997), pp. 678-9 et *Les catoptriciens grecs*. I: *Les miroirs ardents*, textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000), pp. 250 et 292.

[5] Paul Tannery, "Eutocius et ses contemporains", *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e série, t. VIII (1884), pp. 315-329; repris dans *Mémoires scientifiques*, publiés par J.L. Heiberg et H.G. Zeuthen, t. II: *Sciences exactes dans l'antiquité* (Toulouse / Paris, 1912), pp. 118-36.

[6] Le terme διαβήτης, employé pour désigner un certain instrument, est ambigu. C'est le cas chez Platon, *Philèbe* 56b (cf. D. Frede, *Platon: Philebos. Übersetzung und Kommentar* [Göttingen, 1997], p. 73, n. 81: "Die genaue Natur mancher dieser Instrumente ist schwer zu ermitteln. Beim διαβήτης scheint es sich um einen biegsamen Bleistab zu handeln, mit dem sich Höhlungen abmessen lassen" – il s'agirait donc plutôt d'une règle de plomb flexible que d'un compas) et chez Aristophane, *Oiseaux*, v. 1003. Le seul exemple où le mot *pourrait* désigner un compas se trouve chez le même Aristophane, *Nuées*, v. 178, ce qui contribuerait à éclairer le premier passage cité. On pourrait cependant interpréter les deux textes dans le même sens que celui de Platon. Quoi qu'il en soit des images du poète comique, le mot, chez tous les auteurs techniques des époques classique, hellénistique et romaine ne désigne jamais un compas. Il s'agit d'une règle droite dans les deux comptes rendus architecturaux que l'épigraphie nous a conservés. Cf. J. Coupry, *Inscriptions de Délos. Période de l'amphictyonie attico-délienne. Actes administratifs (N° 89 - 104-33)* (Paris, 1972), inscr. 104-4, v. 7, pp. 49-55 (IVe siècle av. J.-C.) et G. R. Paton, *Inscriptiones Graecae Insularum Lesbi Nesi Tenedi* [= *C.I.G.* XII, 2] (Berlin, 1899), inscr. 11, v. 19-21, pp. 8-9. Ce sens se retrouve dans l'expression πρὸς διαβήτην, qui revient fréquemment chez Héron, *Dioptre*, éd. H. Schöne (Leipzig, 1903), pp. 218, 21, 220, 12, 16, 17, 222, 17, 20, etc., au sens de "sur l'horizontale". – Un autre sens du mot est celui de "siphon". On le trouve chez Columelle, *De re rustica* III, 10, 2 et chez Héron, *Pneumatica*, I 3, I 14, I 29, etc. Il est intéressant de noter que le mot peut désigner un siphon droit, où un premier tuyau en contient un second. La dérivation n'est donc probablement pas due à la forme "bipède" du très éventuel compas, mais à la propriété de faire passer (διαβαίνειν) le liquide d'un récipient à un autre. Notons enfin que le verbe composé sur διαβήτης ne retient pas l'idée de compas, mais celle de règle: διαβητίζομαι, "rendre droit avec une règle". Reste le fameux paragraphe cité dans le *Commentaire de la Sphère et du Cylindre d'Archimède* par Eutocius (84, 8-11 Heiberg). On y lit: "La parabole se trace au moyen d'un διαβήτης inventé par notre maître Isidore de Milet, le Mécanicien, qu'il décrit dans son commentaire sur l'ouvrage *Sur les fourneaux* de Héron (τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν)". Ch. Mugler, *Archimède,* t. IV: *Commentaires d'Eutocius et fragments* (Paris, 1972), p. 62, suffisamment prudent, a rendu διαβήτης par "instrument" sans davantage de précisions. En revanche, P. ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Paris, 1960), t. II, p. 607, le rend par "compas", mais ne justifie pas sa traduction. L'un et l'autre savaient que Heiberg considérait cette phrase comme interpolée; Eutocius lui-même, dans son *Commentaire sur les Coniques* rédigé plus tard, affirme en quelque sorte le contraire. Il élabore en effet, à propos de la proposition I, 20, un procédé pour le tracé par points de la parabole et rappelle que ceux qui s'occupent de mécanique doivent l'utiliser, "à défaut d'instruments", διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων (232, 1 Heiberg) pour tracer des paraboles. Rien donc ne permet

Or tout l'intérêt du tracé continu des courbes, aussi bien que son originalité, est qu'il exige à la fois l'invention d'un instrument, ou d'un système mécanique comme chez Ibn Sahl, apte au dessin de ces courbes, et l'élaboration des concepts de la théorie des coniques susceptibles d'expliquer et de contrôler l'usage de cet instrument. C'est donc une recherche où se mêlent intimement une *technè* et une *théoria*. À ce titre, elle n'a rien à voir avec une autre recherche, dont le but est entièrement pratique: trouver le seul instrument pour tracer la figure, comme celle que l'on rencontre chez Anthémius pour tracer l'ellipse et chez Isidore pour la parabole; ou déjà, chez Dioclès pour une autre courbe, la cissoïde. Dioclès avait en effet conçu une "règle qui s'incurve"[7] pour joindre les points d'un arc de cissoïde, mais sans jamais s'occuper de la théorie de la dite règle.

Notre question se précise donc: pourquoi ce problème du tracé continu des courbes coniques s'est-il posé au cours de la seconde moitié du Xe siècle – et jamais avant – de sorte que plusieurs mathématiciens, et non des moindres, s'occupent de sa solution? Sur l'émergence de ce thème, nous nous sommes assez longuement expliqué pour ne plus devoir nous y arrêter.[8] Rappelons brièvement la constitution d'un nouveau chapitre de la géométrie entièrement consacré aux constructions géométriques à l'aide des

---

d'affirmer que la phrase, qu'elle soit ou non interpolée, désigne un compas sous le terme διαβήτης. Le terme "compas" apparaît pourtant dans la traduction arabe, où on lit: "la parabole se trace par le compas (*birkār*) inventé par notre maître le mécanicien Isidore de Milet; c'est le compas (*birkār*) qu'il décrit dans son livre où il a commenté le livre de Héron *Sur les lignes des voûtes*":

قال أوطوقيوس: البرابولي يُرسم بالبركار الذي استخرجه السدروس (كذا) معلمنا صاحب المجانيقي الذي من أهل ملط (MS: عـى)، وهو البركار (الكتاب في نص السجزي) الذي وضعه (وصفه في نص السجزي) في كتابه الذي فسر فيه كتاب إيرن في الخطوط المكافئة (الطاقية في نص السجزي).

(*Tafsīr al-maqāla al-thāniya min Kitāb Arshimīdis fī al-Kura wa-al-usṭuwāna*, Escorial, MS 960, fols. 1-54v, fol. 27v). On notera de légères différences entre la citation reproduite par al-Sijzī et celle de la traduction du *Commentaire* d'Eutocius. L'étude de ces différences n'est pas l'objet de cet article.

À partir de cette phrase, le mathématicien al-Sijzī, toujours enclin à l'érudition et au fait du livre d'al-Qūhī sur le compas parfait, a reconstitué une histoire légendaire du procédé: sans information factuelle et linguistique supplémentaire, il a interprété l'instrument rendu anachroniquement par le mot persan *birkār* comme le *compas parfait*. Aucun mathématicien arabe ne l'a suivi dans cette voie.

[7] Rashed, *Les catoptriciens grecs*, p. 84 et p. 133.

[8] *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. III: *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (London, 2000).

coniques. C'est également la période où l'on commence à vouloir résoudre des équations cubiques irréductibles à l'aide des courbes coniques (Abū al-Jūd, al-Qūhī lui-même, parmi d'autres). Dans un domaine comme dans l'autre, il fallait engendrer la courbe par le mouvement pour s'assurer de sa continuité; notion désormais fondamentale pour discuter du problème d'existence des points d'intersection des courbes. Mais, outre cette raison capitale, interne à la géométrie, il y en avait d'autres qui viennent des mathématiques appliquées: l'étude systématique des propriétés anaclastiques des coniques suscitée par les nouvelles recherches sur les miroirs ardents et les lentilles plan-convexe et biconvexe, la recherche théorique et pratique sur les astrolabes et les cadrans solaires. Ce n'est nullement par hasard si c'est Ibn Sahl qui, le premier à avoir élaboré une théorie géométrique des lentilles et à avoir traité des miroirs ardents, a conçu un système mécanique pour le tracé continu des coniques. Et ce n'est pas étonnant qu'al-Qūhī, qui a écrit tout un traité sur la géométrie de l'astrolabe et les projections, compose le premier livre connu sur une généralisation du compas qu'il a nommé le compas parfait, c'est-à-dire un instrument pour le tracé continu des trois coniques, en plus de la droite et du cercle. Al-Sijzī, lui, était en liaison directe avec Ibn Sahl et très familier de ses travaux ainsi que de ceux d'al-Qūhī. Lui-même s'occupait activement aussi bien des constructions géométriques à l'aide des coniques, que des cadrans solaires et des astrolabes.[9] Il a en outre rédigé un opuscule sur le compas parfait. La bonne fortune a mis sur notre chemin une copie de ce texte important, considéré comme perdu. Nous donnons ici l'édition critique de ce manuscrit pour le moins mal transcrit, ainsi que sa traduction.[10]

Tout indique en fait que, s'il est arrivé aux mathématiciens grecs de rencontrer ce problème du tracé continu, jamais ils ne l'ont thématisé ni ne lui ont fait place au sein de leur recherche. On retrouve cette même situation chez les mathématiciens arabes

[9] Voir R. Rashed et P. Crozet, *L'œuvre mathématique d'al-Sijzī*, à paraître.

[10] Sur le manuscrit d'al-Sijzī dont une unique copie se trouve à la bibliothèque de Rampur (Inde), n° 3698, fol. 103v-104v et l'histoire du texte, voir R. Rashed et P. Crozet, *L'œuvre mathématique d'al-Sijzī*. Ce traité figure sur la liste des écrits d'al-Sijzī telle qu'elle se présente dans le manuscrit de Dublin, Chester Beatty, n° 3652, fol. 2r sous le titre *Fī ʿamal al-birkār al-makhrūṭī bi-ṭarīq ṣināʿī*. Al-Sijzī lui-même se réfère à ce traité dans sa *Risāla fī waṣf al-quṭūʿ al-makhrūṭiyya* sous le titre *Fī ʿamal al-birkār al-makhrūṭī* (Leiden, MS Or. 168/1, fol. 5r). Le manuscrit de Rampur est transcrit – en *nastaʿlīq* – par un copiste qui à l'évidence ne comprenait pas le texte. Par ailleurs, aucune figure n'est tracée.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

jusqu'au milieu du Xe siècle. Certes des savants comme Ibn Sinān[11] ont activé la recherche sur la construction par points, mais pas encore sur le tracé continu. Or c'est précisément quelques décennies plus tard et pour les raisons déjà évoquées que ce dernier thème de recherche s'impose avec les trois mathématiciens évoqués au début. Et de fait, tandis qu'Ibn Sahl[12] conçoit un appareil mécanique fondé sur les propriétés des foyers et de la directrice pour tracer les trois sections coniques seulement, al-Qūhī invente le compas parfait pour tracer celles-ci, plus la droite et le cercle. Al-Sijzī, pour sa part, entend perfectionner le compas pour tracer aussi les sections semblables.

L'importance de l'événement n'avait pas échappé aux mathématiciens de l'époque. Voici par exemple ce qu'écrit al-Bīrūnī:

> Un groupe d'éminents modernes se sont engagés à tracer les sections après ce qu'Apollonius a exposé dans le livre des *Coniques*, comme Ibrāhīm ibn Sinān et Abū Ja'far al-Khāzin et bien d'autres. Chacun d'eux a tenté de trouver les points successifs sur leurs pourtours. Mais Abū Sahl Wayjan ibn Rustam al-Qūhī a écrit un livre pour les tracer par le compas parfait. En effet il l'a nommé parfait en raison de la possibilité de construire la ligne droite et la ligne circulaire supposées par lui et chacune des trois sections, construction effective sans nombreux points sur leurs pourtours à joindre et à augmenter.[13]

## L'INVENTION DU COMPAS PARFAIT: ABŪ SAHL AL-QŪHĪ

Abū Sahl al-Qūhī conçoit un instrument grâce auquel, écrit-il, on peut "construire les astrolabes sur des surfaces planes ou des surfaces de révolution ainsi que construire des cadrans solaires sur une surface quelconque, et de même construire tous les instruments sur lesquels se trouvent les lignes qui sont les intersections d'une surface conique et d'une surface quelconque". À ce compas, al-Quhī consacre tout un traité géométrique en deux livres.[14] Dans le premier, il élabore une théorie de cet instrument

[11] R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle* (Leiden, 2000).

[12] R. Rashed, "A pioneer in anaclastics. Ibn Sahl on burning mirrors and lenses", *Isis*, 81 (1990): 464-91 et *Géométrie et dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl - al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993).

[13] *Al-Istī'āb*, Leiden, MS Or. 591, fol. 148.

[14] F. Woepcke avait achevé juste avant son décès la copie du manuscrit du compas parfait d'al-Qūhī, sans pouvoir noter les variantes, et il en a donné une traduction française. Il est clair qu'il n'a pas pu achever son travail, publié à titre posthume par

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

avant de passer à ses applications dans le second. Notons que, malgré les déclarations préliminaires sur l'utilité de cet instrument pour les astrolabes, les cadrans, etc., toutes les applications contenues dans ce second livre sont purement géométriques.

Le premier livre du traité débute par une description du compas parfait et se poursuit avec l'explication de son usage pour tracer dans un plan donné les différentes courbes: droite, cercle, parabole, ellipse, hyperbole (une branche ou deux branches).

Le compas parfait se compose de quatre parties articulées:

- Une partie plane qui est sa base et qui contient "la droite du centre", $AD$.
- "L'axe du compas", $AB$, qui peut tourner autour du point $A$ appelé "centre", tout en restant dans le plan $\mathscr{Q}$, plan perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ suivant la droite $AD$; sa position est déterminée par l'angle au centre du compas $\alpha = D\hat{A}B \leq \frac{\pi}{2}$.
- "La droite du sommet", $BC$, qui peut tourner autour du point $B$, appelé "sommet". On considère d'abord sa position initiale dans le plan $\mathscr{Q}$ lors du choix de l'angle au sommet $\beta = A\hat{B}C \leq \frac{\pi}{2}$. On la fait tourner ensuite autour de l'axe pour engendrer une surface plane si l'angle au sommet est droit, et une surface conique de révolution s'il ne l'est pas.
- La droite $BC$ est elle-même le support d'un tire-ligne qui peut glisser sur cette droite pour que l'une de ses extrémités – soit $M$ – vienne dans le plan $\mathscr{P}$ pour tracer la figure cherchée.

La figure $DABC$ est celle du compas, $\mathscr{Q}$ le plan du compas.

Tout dépend donc de l'angle $\beta$ formé par l'axe du compas avec la branche $BC$ de celui-ci et de l'angle $\alpha$ de l'axe avec la base du compas. Le tire-ligne a une longueur variable, ce qui permet à sa pointe de rester en contact avec le plan sur lequel on entend tracer les sections coniques. L'axe, lui, reste fixe.

---

J. Mohl ("Trois traités arabes sur le compas parfait", *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres bibliothèques*, vol. 22 [1874]: 1-175). Nous avons donné la première édition critique de ce texte à partir des douze manuscrits connus dans le monde, ainsi qu'une traduction que nous avons voulue rigoureuse. Cf. *Geometry and Geometrical Optics*, chap. V.

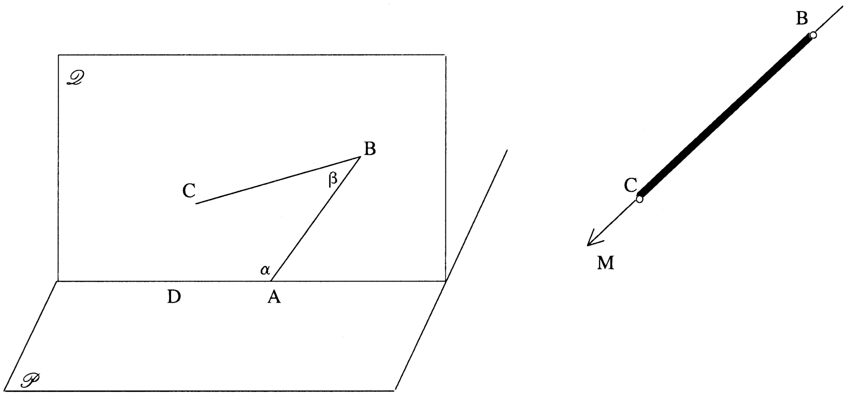


Fig. 1

Considérons $\alpha$ obtus. Soit $BK$ la perpendiculaire abaissée de $B$ sur le plan sécant; $BK$ est donc perpendiculaire à la base du compas. La nature de la courbe tracée dépend de l'angle $CBK$; on a

$$A\hat{B}K = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad C\hat{B}K = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

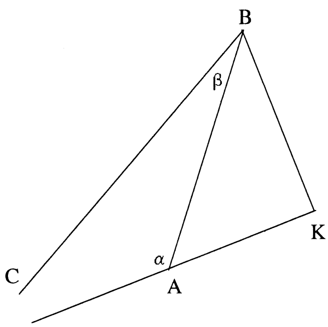


Fig. 2

Si donc

$C\hat{B}K < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta + \alpha < \pi$, la section est une ellipse;

$C\hat{B}K = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta + \alpha = \pi$, la section est une parabole;

$C\hat{B}K > \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta + \alpha > \pi$, la section est une hyperbole.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

L'idée d'al-Qūhī est que la nature de la courbe que l'on veut tracer sur un plan dépend de la position initiale du compas par rapport à ce plan. Cette position est caractérisée par la longueur $l$ de l'axe du compas, par l'angle $\beta$ de l'axe avec la branche mobile et par l'angle $\alpha$ de l'axe avec la base du compas. Il s'agit donc d'étudier la correspondance entre les éléments $(l, \beta, \alpha)$ d'une part et les éléments qui caractérisent la section conique: diamètre et côté droit pour l'ellipse et l'hyperbole, côté droit pour la parabole.

Al-Qūhī procède alors à l'établissement des propositions suivantes:

- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, alors le tire-ligne ne rencontre pas le plan $\mathscr{P}$ et il ne trace rien.
- Si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, la droite $BC$ engendre un plan qui coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant une droite qui sera tracée par le tire-ligne.
- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\beta < \dfrac{\pi}{2}$, la courbe tracée est alors un cercle de rayon $r = AB \operatorname{tg} \beta$.
- Si $\alpha = \beta < \dfrac{\pi}{2}$, la courbe tracée est alors une parabole d'axe $AD$ et de sommet $D$.
- Si $\alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, la première extrémité du tire-ligne décrit une branche d'hyperbole de sommet $D$ et l'autre extrémité décrit l'autre branche d'hyperbole de sommet $E$.
- Si $\beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, le tire-ligne tracera une ellipse.

Pour illustrer la démarche d'al-Qūhī, prenons l'exemple du dernier cas: considérons la nappe de surface conique d'axe $BA$ et d'angle au sommet $\beta$, engendrée par la demi-droite $BC$. Le plan $\mathscr{P}$ coupe toutes les génératrices de cette nappe; l'intersection est une ellipse d'axe $DE$. Le point $D$ est l'extrémité du tire-ligne quand il est dans le plan $\mathscr{Q}$, avec $\alpha$ et $\beta$ d'un même côté de $AB$. Le point $E$ est l'extrémité du tire-ligne, dans le plan $\mathscr{Q}$ également, quand $\alpha$ et $\beta$ sont de part et d'autre de $AB$. Au cours de la rotation de $BC$ autour de $AB$, le tire-ligne tracera l'ellipse tout entière.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

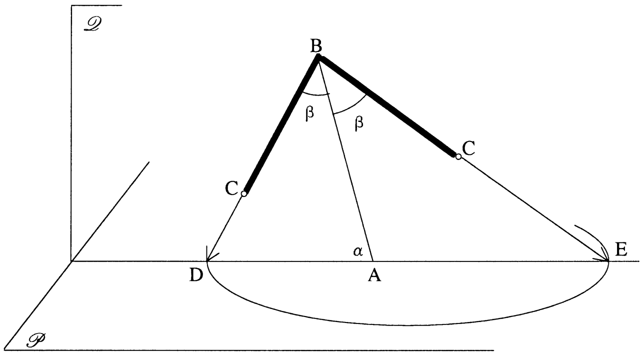


Fig. 3

Ainsi le compas parfait permet le tracé continu sur un plan donné d'une droite, d'un cercle ou d'une section conique quelconque, qu'ils soient rapportés à un axe ou à un diamètre. Les raisonnements et les constructions indiquées par al-Qūhī ne font en aucun cas intervenir les foyers, mais s'appuient sur les propriétés établies par Apollonius dans le premier livre des *Coniques* pour les sections planes d'un cône à base circulaire; propriétés qui concernent un diamètre, le côté droit qui lui est associé et l'angle formé par ce diamètre avec la direction des droites ordonnées.

Le second livre du traité est entièrement consacré à la solution des problèmes du tracé continu des courbes.

Al-Qūhī se donne, dans chaque problème, les éléments précédents pour la courbe qu'il veut tracer, et se demande ensuite comment déterminer la figure du compas parfait en précisant la grandeur des éléments. Prenons brièvement l'exemple de la parabole: tracer une parabole dont on se donne le sommet $B$, le diamètre $BC$, le côté droit $D$, l'angle $E$ des droites ordonnées qui correspondent au diamètre $BC$.

Deux cas se présentent selon que l'angle $E$ est droit ou non.

$E$ est d'abord droit; la droite $BC$ est alors l'axe de la parabole. Mais al-Qūhī avait démontré dans le premier livre du traité que dans ce cas il faut que $\alpha = \beta$. Si on se donne la longueur $\mathscr{A}$ de l'axe du compas, il faut que

$$\cos\alpha = \cos\beta = \sqrt{\frac{D^2}{16\mathscr{A}^2} + 1} - \frac{D}{4\mathscr{A}}.$$

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Il n'est pas question de reproduire ici le calcul d'al-Qūhī qui l'a amené à cette condition.[15] Rappelons seulement le début de ce calcul. Al-Qūhī commence par tracer un demi-cercle de diamètre quelconque $GH$ et prend sur ce diamètre le point $K$ défini par

$$\frac{GK^2}{GH.HK} = \frac{D^2}{4\mathscr{A}^2}.$$

On a $KI \perp GH$. L'angle $KHI$ sera l'angle cherché pour le compas. On fait glisser le tire-ligne jusqu'à ce que son extrémité rencontre la droite du centre. Le compas est alors représenté par le triangle $BLM$ tel que $LM$ de longueur $\mathscr{A}$ soit l'axe; le point $M$ est le centre, la droite du sommet est $LB$ si l'angle du sommet et l'angle du centre sont d'un même côté de l'axe $BM$; elle est $LN$ parallèle à $BM$ si ces angles sont alternes. On place la droite du centre $BM$ sur la droite $BC$ donnée. Si maintenant on fait tourner $LB$ autour de $LM$, le tire-ligne porté par $LB$ trace la parabole cherchée.

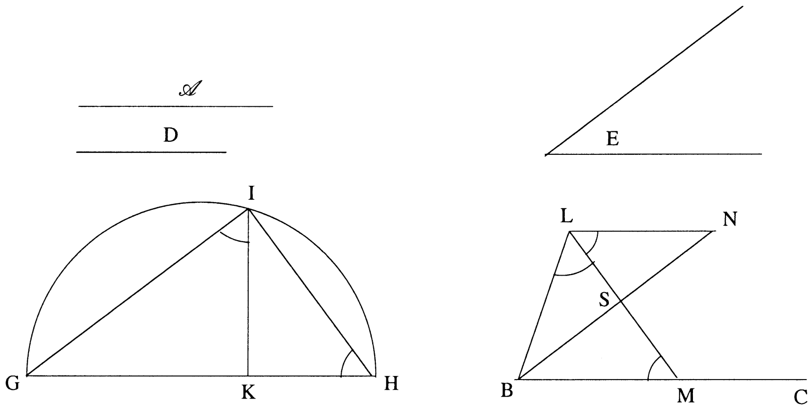


Fig. 4

Si maintenant l'angle $E$ est différent d'un angle droit, la droite $BC$ est dans ce cas un diamètre quelconque de la parabole cherchée. La méthode appliquée par al-Qūhī consiste à définir l'axe de cette parabole, son sommet et le côté droit qui lui correspond, pour se ramener au cas précédent.

Reprenons la démarche d'al-Qūhī. Par un point $G$ pris sur l'un des côtés de l'angle donné $E$, on mène $GH$ perpendiculaire à l'autre côté en $H$; soit $I$ le milieu de $EH$. On pose

[15] Cf. *Geometry and Geometrical Optics.*

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{EG^2}{GH \cdot HI} = \frac{D}{N};$$

ce qui définit la longueur $N$.

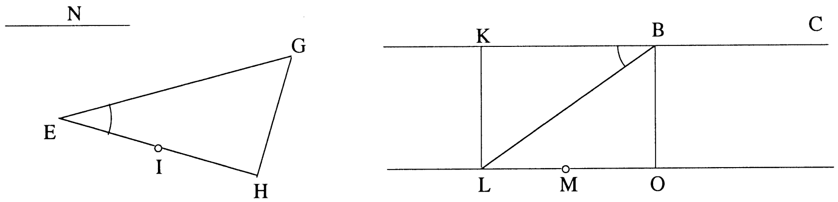


Fig. 5

Prenons maintenant un point $K$ sur le prolongement de $CB$, tel que $K\hat{B}L = G\hat{E}H$, $KL \perp BC$ et $KL = N$ (les triangles $LKB$ et $GHE$ sont semblables, de plus $LK = N$; le triangle $LKB$ est donc connu, la longueur $KB$ est connue, $KB = \frac{N}{\mathrm{tg}\hat{E}}$).

Soit $O$ tel que $LO \,//\, BC$ et $BO \,//\, KL$, et $M$ le milieu de $LO$. On définit une longueur $S$ par $\frac{OB}{S} = \frac{OM}{OB}$. On sait alors tracer avec le compas dont l'axe a pour longueur $\mathscr{A}$ la parabole de diamètre $MO$, de sommet $M$ et de côté droit $S$, telle que l'angle du diamètre $LO$ avec la droite ordonnée soit droit, c'est-à-dire que $MO$ est son axe, comme al-Qūhī l'avait établi dans le premier cas. Cette parabole passe par $B$, car $OB^2 = S \,.\, OM$ (abscisse $OM$, ordonnée $OB$). Il est évident que $BC$ parallèle à l'axe $MO$ est un diamètre.

Il reste cependant à montrer que le côté droit associé à $BC$ est $D$ et que l'angle de l'ordonnée avec l'axe est l'angle $E$, c'est-à-dire que $BL$ est tangente en $B$ à la parabole.

Prenons $(Mx, My)$ comme repère, la parabole d'axe $Mx$ et de côté droit $S$ a pour équation $y^2 = Sx$.

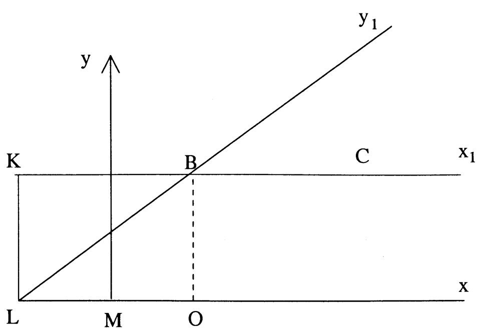


Fig. 6

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Le sommet $M$ de la parabole est le milieu de $OL$, donc la droite $BL$ est tangente en $B$ à la parabole (*Coniques*, I.33).

Dans le repère $(Bx_1, By_1)$, axes obliques, on a pour équation $y_1^2 = Tx_1$, si $T$ est son côté droit. Les coordonnées de $M$ sont $x_1 = LM$, $y_1 = LB$, d'où $LB^2 = T \,.\, LM$. Montrons que $T = D$.

On a $KL = N$, d'où

$$LB = \frac{N}{\sin E} \quad \text{et} \quad LM = \frac{1}{2} LO = \frac{1}{2} \frac{N}{\operatorname{tg} E};$$

on a

$$T = 2N \frac{\operatorname{tg} E}{\sin^2 E} = N \frac{GE^2}{GH.HI} = D.$$

Al-Qūhī traite ensuite de manière analogue le problème: tracer une hyperbole connaissant son diamètre transverse, le côté droit associé, l'angle formé par le diamètre transverse et la droite ordonnée, la longueur de l'axe étant donnée.

Il passe ensuite au problème de tracer dans un plan donné une ellipse, connaissant un diamètre, le côté droit associé et l'angle formé par ce diamètre avec sa droite ordonnée.

Dans tous ces problèmes, il montre que les angles $\alpha$ et $\beta$ sont connus, et ainsi le compas parfait est déterminé.

Notons que les trois problèmes traités par al-Qūhī correspondent aux propositions I. 52, 53, 54, 55, 56 des *Coniques* d'Apollonius.[16] Tout indique en effet qu'al-Qūhī a pris, à titre d'exercice si l'on peut dire, les problèmes de la fin du premier livre des *Coniques*, où Apollonius examinait la construction des sections coniques, pour montrer comment on peut procéder à leur tracé continu à l'aide du compas parfait. Peut-être voulait-il ainsi montrer que les nouveaux instruments et les nouvelles méthodes sont à la fois nécessaires et efficaces pour la solution des problèmes d'Apollonius lui-même.

## FORMES DU COMPAS PARFAIT ET TRACÉ CONTINU: AL-SIJZĪ

Al-Sijzī ne part pas comme Ibn Sahl de la propriété du foyer et de la directrice, mais comme al-Qūhī de la définition des sections coniques comme sections planes. Il part donc des *Coniques* d'Apollonius, avec l'intention de concevoir un instrument pour

[16] Cf. *Geometry and Geometrical Optics*.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

tracer aussi bien les courbes coniques que le cercle et la droite. Cet instrument est "le compas parfait" (*al-birkār al-tāmm*), inventé par al-Qūhī. Il est composé de trois parties: 1) un axe $AB$; 2) une branche rectiligne $AC$ qui peut pivoter autour du point $A$ de façon à faire varier l'angle $BAC$ et qui peut également tourner autour de l'axe $AB$; 3) une base de forme plane, articulée en $B$ à l'axe $AB$ et que l'on pose sur le plan sur lequel on veut tracer la courbe. Tout dépend donc de l'angle $BAC = \alpha$ formé par l'axe avec la branche $AC$ du compas, et de l'angle $\beta$ de l'axe $AB$ avec la base du compas.

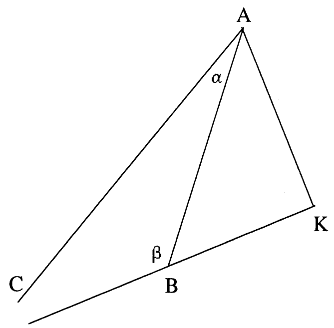


Fig. 7

Considérons $\beta$ obtus. Soit $AK$ la perpendiculaire abaissée de $A$ sur le plan sécant; $AK$ est donc perpendiculaire à la base du compas. La nature de la courbe tracée dépend de l'angle $CAK$.

Al-Sijzī commence en effet son opuscule par rappeler, en faisant référence au traité d'Apollonius, la nature des sections planes d'une surface conique suivant la position du plan sécant par rapport à la surface conique, pour aborder ensuite la composition du compas parfait, et expliquer enfin la génération à l'aide de celui-ci des trois sections coniques et du cercle.

Ainsi, si l'axe $AB$ est fixe, l'angle $BAC$ invariable en grandeur, alors $AC$ engendre par sa rotation une surface conique de révolution. Si $AB$ est en plus perpendiculaire à $BC$, le triangle rectangle $ABC$ engendre un cône de révolution dont la base est un cercle.

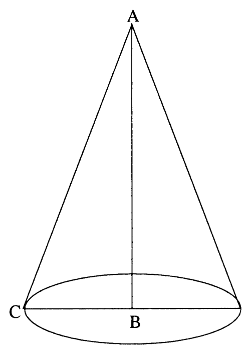


Fig. 8

On se donne un cercle $DE$ de centre $G$ et un plan $P$ incliné par rapport au plan du cercle $DE$. Soit le point $A$ le sommet du

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

compas; supposons *AB* fixe sur l'axe du cercle *DE*, la base du compas dans le plan *P*, et la branche *AC* en rotation autour de cet axe de façon que son prolongement rencontre le cercle *DE*. Si l'on suppose que l'on peut régler de façon certaine la longueur de *AC* pour que son extrémité *C* soit dans le plan *P*, alors cette extrémité trace dans le plan *P* une section conique.

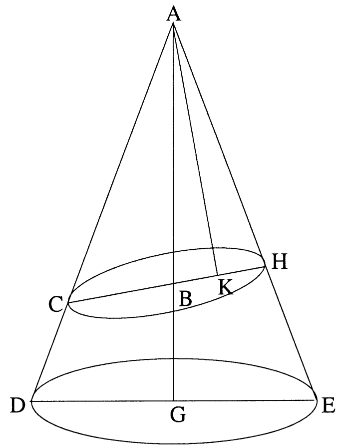


Fig. 9.1

Le plan *P* est supposé perpendiculaire au plan *AGE* et sa position est définie par son intersection avec ce plan. Si cette intersection est telle que la droite *CH*, alors dans la rotation de *AC* le point *C* décrira une ellipse d'axe *CH* (Fig. 9.1). Si l'intersection est une droite *IJ* parallèle à la position initiale de *AC* dans le plan *AGE*, alors le point *C* décrira une parabole *DIM* d'axe *IJ* (Fig. 9.2). Si enfin l'intersection *IJ* n'est pas parallèle à la position initiale de *AC* mais rencontre *AC* au-delà de *A*, le point *C* décrira une hyperbole d'axe *IJ* (Fig. 9.3).

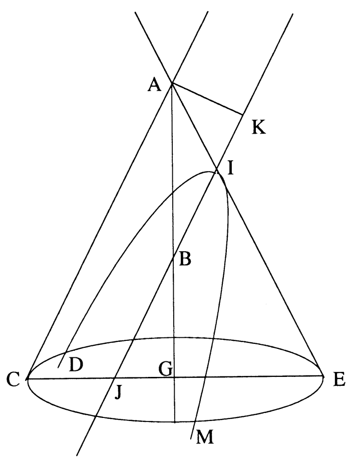


Fig. 9.2

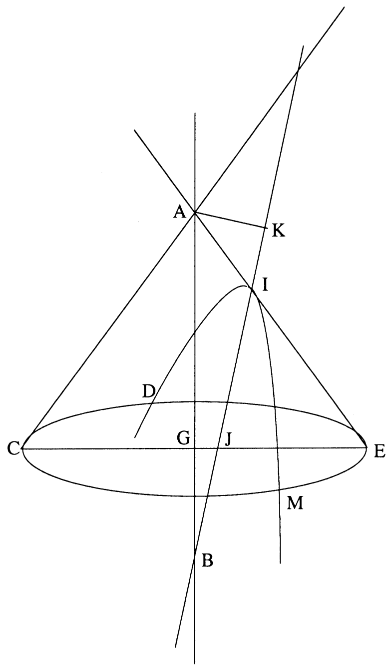


Fig. 9.3

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Al-Sijzī passe ensuite à l'explication de la construction du compas. Les idées essentielles portent sur la façon d'articuler les deux tiges (l'axe et la branche du compas), sur les dispositifs permettant de régler leur angle et enfin sur les moyens d'allonger ou de raccourcir l'axe ou la branche qui porte le tire-ligne.

Al-Sijzī présente trois constructions successives. Dans la première, on considère deux tubes $AN$ et $AS$ articulés au point $A$, qui est le sommet du compas. Dans le tube $AN$ se trouve une tige $AB$ qui sera l'axe du compas et dans le tube $AS$ la tige $AC$ qui portera le tire-ligne. On doit supposer les rayons des tubes suffisamment petits pour que la même lettre $A$ désigne à la fois l'intersection des deux tiges, l'extrémité du tube $AN$ et celle du tube $AS$. L'articulation des deux tubes au point $A$ doit permettre au tube $AS$ de tourner autour de $A$ pour qu'on puisse choisir l'angle $BAC$ et permettre à $AS$ d'être entraîné avec le tube $AN$ dans le mouvement de rotation autour de l'axe $AB$.

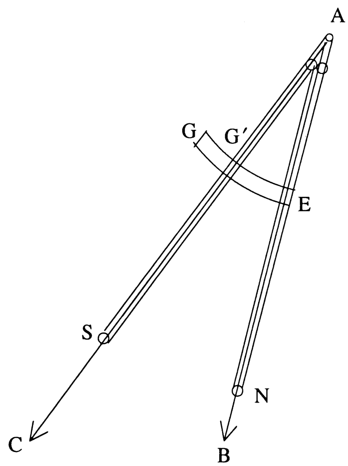


Fig. 10

Al-Sijzī considère ensuite un arc $GE$ du cercle de centre $A$. Il écrit:

Nous construisons ensuite un arc tel que $GE$, sur la tige $AB$ dont un point est sur un appui par lequel les côtés $G$ et $E$ s'élèvent et s'abaissent vers le sommet et la base; la construction en est facile, soit par un ressort, soit en faisant glisser une règle dans une encoche ou par tout autre procédé facile qui nous convienne.[17]

[17] Cf. *infra*, p. 40.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

La description comporte à l'évidence quelque obscurité; mais on pourrait imaginer un arc qui traverse deux encoches $E$ et $G'$ respectivement sur les deux parois du tube $AN$ et du tube $AS$ et qui glisse sur deux rainures sur ces parois. Il faut cependant qu'il y ait un dispositif qui permette de bloquer à tout moment le glissement et l'écartement choisi pour les deux tubes, avant de faire tourner le tube $AS$ qui contient le tire-ligne avec un angle $BAC$ de grandeur fixe. Si l'arc $EG'$ est gradué, l'angle $BAC$ est mesuré par le rapport de l'arc $EG'$ à $AE$. Il suffit en fait de fixer l'arc $EG$ dans une encoche $E$ faite dans la paroi du tube $AN$ et de le faire glisser dans une encoche $G'$ faite dans la paroi du tube $AS$ et de mettre un dispositif sur l'encoche $G'$ pour bloquer l'écartement. Comme le texte est quelque peu hésitant et ne comporte aucune figure, il est très difficile de se faire une idée définitive de la position de cet arc.

Al-Sijzī indique une première méthode pour régler la longueur de la tige $AB$, axe du compas. On suppose que la tige $AB$ est coupée au point $P$, c'est-à-dire qu'elle est séparée en deux parties, la partie $AP$ que l'on suppose fixe et la partie $PB$ que l'on peut faire glisser dans le tube $AN$ à l'aide d'un piton ou d'une manette placée au point $P$. Dans ce cas, il est possible de passer de la position $PB$ à la position $P_1B_1$. Ceci suppose qu'il existe une fente rectiligne dans la paroi du tube $AN$ pour que le piton $P$ glisse dans cette fente. L'axe du compas atteint alors la longueur $AB_1$ qui correspond à la distance voulue pour amener la pointe $B_1$ de l'axe sur le plan sur lequel on veut tracer la section conique.

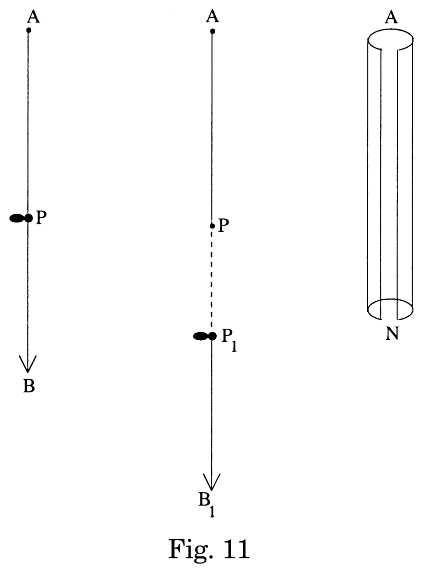


Fig. 11

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Il reste que dans ce premier exemple, al-Sijzī n'indique pas comment faire glisser la tige $AC$, support du tire-ligne.

Dans la deuxième partie, al-Sijzī indique comment faire glisser le support du tire-ligne. Il donne ensuite une méthode pour régler la longueur de l'axe du compas. Les notations changent dans cet exemple. Le compas comprend un tube $AH$ dans lequel se trouve une tige $AB$ qui sera l'axe du compas et un tube $AD$ dans lequel glisse une tige $E$ qui doit avoir un tire-ligne à chaque extrémité. Soit $E$ un point de cette tige qui n'est pas une de ses extrémités, mais correspond à la position d'un piton qui permettra de faire glisser le tire-ligne dans un sens ou dans l'autre en suivant une fente rectiligne faite dans la paroi du tube. On pourra ainsi, lorsque l'on veut tracer une section plane sur un plan $\Pi$, maintenir la pointe du tire-ligne en contact avec ce plan.

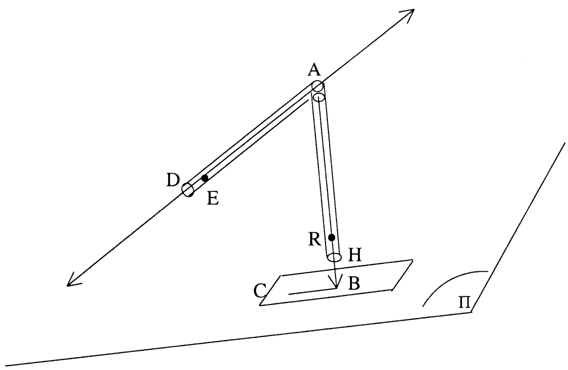


Fig. 12

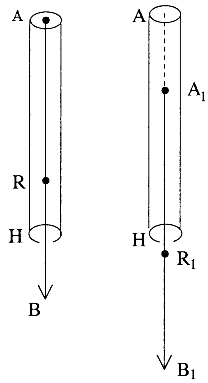


Fig. 13

Soit $A$ le sommet du compas et $B$ la pointe de son axe, la longueur $AB$ doit être choisie en fonction de la position du plan $\Pi$ et de la section que l'on veut tracer sur ce plan. On prend sur la tige $AB$ un point $R$ lié à la base $BC$ du compas, c'est-à-dire que la longueur $RB$ est constante. Pour faire varier la longueur $AB$, il faut que l'axe du compas puisse glisser dans le tube $AH$. C'est ainsi qu'il peut venir de la position initiale $ARB$ – où $A$ est à la fois le sommet du tube et l'extrémité de l'axe – à la position $A_1R_1B_1$ pour laquelle l'extrémité $A_1$ est différente de $A$, sommet du tube.

On peut donc supposer qu'au point $R$ de la tige $AB$ est fixé un piton qui permet de faire glisser la tige; on passe ainsi de la longueur $AB$ pour l'axe du compas à la longueur $AB_1$ ($AB_1 > AB$). Ainsi si le point $B$ n'est pas sur le plan $\Pi$, on peut pousser la tige jusqu'au point $B_1$ qui sera dans le plan $\Pi$.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Dans le troisième exemple, al-Sijzī considère deux tiges *AB* et *AD* et un tube *AH*. La tige *AB* passe dans ce tube et la tige *AD* est reliée en *A* au tube *AH* par une sorte de charnière qui doit permettre les deux mouvements de cette tige: une rotation autour du point *A* pour le choix de l'angle *BAD* et une rotation autour de l'axe *AB*, rotation que l'on obtient en faisant tourner le tube *AH* autour de l'axe.

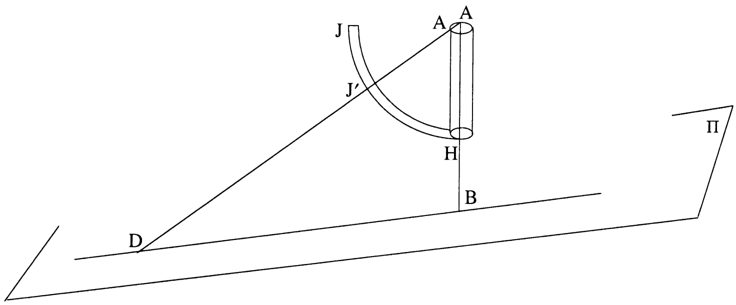


Fig. 14[18]

À ce tube est fixé au point *H* un arc de cercle *HJ* de centre *A* que la tige *AD* rencontre au point *J′* dont la position dépend du choix de l'angle *BAD*.

Quand on fait tourner le tube *AH* autour de l'axe *AB*, il entraîne l'arc *HJ* et la tige *AD*; les points *A*, *H*, *B*, *J* forment une figure invariable au cours de ce mouvement. Mais pour que le point *D*, dont la position initiale est supposée être dans le plan *Π* dans lequel on veut tracer la section, reste dans ce plan au cours de la rotation, il faut que la longueur *AD* varie, comme cela a été exposé dans le second exemple. La longueur de l'axe *AB* peut toujours être supposée fixe, ce qu'al-Sijzī suppose quand il écrit: "compas dont la tige n'est pas coupée en deux parties".

Al-Sijzī n'a pas parlé jusqu'ici de l'angle que forme l'axe *AB* du compas avec la droite *BD* qui est l'intersection du plan *Π* avec le plan *ABD* – qui correspond à la position initiale du compas – angle dont dépend la nature de la section, comme cela a été expliqué au début de ce traité. Al-Sijzī le mentionne ici en deux lignes lorsqu'il écrit: "et nous élevons le plan sur lequel on a besoin de tracer la section sur ce plan <plan *ABD*> selon l'angle d'une quelconque section parmi les sections".

[18] Notons que dans cette figure, la lettre *A* désigne à la fois l'intersection des deux tiges et le point d'appui de *AD* sur le tube.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Il s'agit donc de l'angle $ABD$. Mais, al-Sijzī ne donne pas de méthode pour déterminer cet angle ni pour le faire varier suivant le choix de la section.

## TRACÉ CONTINU DES SECTIONS SEMBLABLES À L'AIDE DU COMPAS PARFAIT

À la fin de ce court traité, al-Sijzī soulève le problème du tracé continu des sections coniques semblables en quelques mots. Il écrit: "notre but et l'intérêt qui nous est propre n'étaient pas les sections semblables à une quelconque section, à l'exception de ce qu'exigent les sections paraboliques…"; et il indique alors comment tracer une parabole à l'aide du dernier compas $BAD$ en rappelant que si l'on désigne par $BX$ l'intersection du plan $\Pi$ avec le plan $DAB$ qui est celui de la position initiale du compas, on doit avoir $BX \,//\, AD$.

Pour comprendre cette brève discussion d'al-Sijzī, revenons d'abord aux *Coniques* d'Apollonius. Dans la proposition VI.11, Apollonius montre que toutes les paraboles sont semblables: pour deux paraboles de côtés droits $c$ et $c'$, le rapport de similitude est $c'/c$. Dans la proposition VI.12, il montre que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses (ou deux hyperboles) de diamètres $d$ et $d'$ et de côtés droits $c$ et $c'$ soient semblables est que $(d/d') = (c/c')$, que l'on peut écrire $(c/d = c'/d')$.

Considérons d'abord le cas du tracé de la parabole. Supposons donné le plan $ABC$ correspondant à la position initiale du compas et supposons que dans ce plan l'axe $AB$ du compas est donné en position et en grandeur.

Le plan $\Pi$ sur lequel le compas peut tracer une section conique est perpendiculaire à ce plan suivant une droite $XBY$ sur laquelle se trouvera l'axe de la section. Posons $AB = l$, $A\hat{B}Y = \beta$, $B\hat{A}C = \alpha$. La question est donc la suivante: peut-on obtenir, avec ces hypothèses, deux sections semblables?

Or d'après Apollonius, on vient de le rappeler, toutes les paraboles sont semblables. Venons-en maintenant au plan $\Pi$ donné et au compas. En effet, si $\Pi$ est donné, $\beta$ est connu et $\alpha$ l'est également car $\alpha + \beta = \pi$. Déterminons le côté droit $c$ de cette parabole de sommet $I$. Soit $M$ le point de la courbe tel que $MB \perp IY$; on a alors $MB \perp AB$ (car $\Pi \perp ABC$) et $B\hat{A}M = B\hat{A}C = \alpha$; d'où

$$MB^2 = c \,.\, BI \text{ et } MB^2 = l^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\, \alpha;$$

or $BI = l/2 \cos \alpha$ (triangle isocèle $IAB$). On en tire

$$(*) \qquad c = 2l \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

En prenant pour l'axe $AB$ du compas une longueur $l'$ ($l' \neq l$ ou $l' = l$), on tracera dans $\Pi'$ défini par $A\hat{B}Y' = \beta'$ avec $\alpha' = \pi - \beta'$ une parabole de côté droit $c' = 2l' \dfrac{\sin^2 \alpha'}{\cos \alpha'}$, d'où le rapport de similitude $c'/c$. Ainsi on peut tracer par le compas deux sections paraboliques semblables dans un même plan $\Pi$, que la longueur de l'axe du compas reste la même ou varie.

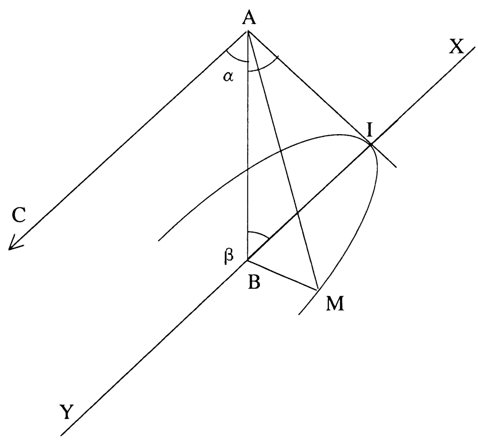


Fig. 15

On peut établir la même propriété pour toutes les sections coniques. Prenons d'abord l'exemple de l'ellipse. Supposons d'abord le compas dans la position initiale $BAC$ (plan $BAC \perp \Pi$) avec $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}C = \beta$, $\alpha + \beta < \pi$ et $AB = l$. On trace l'ellipse $\mathscr{E}$ d'axe $HC$. Allongeons maintenant l'axe du compas pour avoir le sommet au point $A'$ avec $A'B = l'$. Si on conserve l'angle $\alpha$ de deux branches $B\hat{A}'C' = B\hat{A}C = \alpha$, on obtient l'ellipse $\mathscr{E}'$ d'axe $H'C'$. Dans l'homothétie de centre $B$ et de rapport $k = (l'/l)$, le plan $\Pi$ est conservé et la surface conique de sommet $A$ a pour image la surface conique de sommet $A'$, donc les deux ellipses obtenues sont homothétiques dans l'homothétie $\left(B, \dfrac{l'}{l}\right)$.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

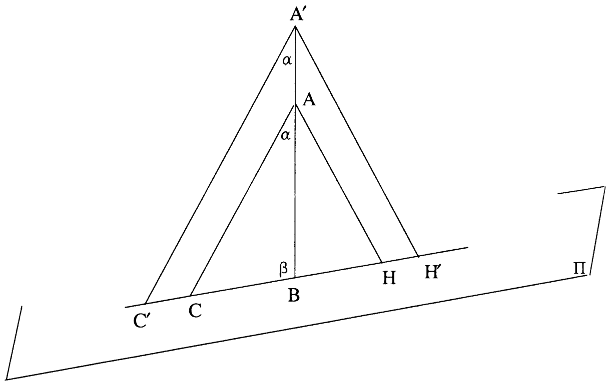


Fig. 16

Ce raisonnement s'applique aux trois sections coniques.

Pour obtenir maintenant deux sections coniques semblables dans deux plans parallèles $\Pi$ et $\Pi'$, on garde pour le compas le même sommet $A$ et le même angle $\alpha$ et on allonge l'axe $AB$ jusqu'au point $B'$ sur le plan $\Pi'$.

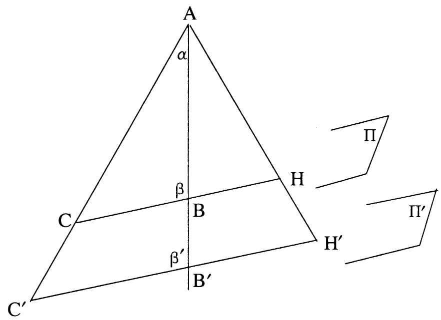


Fig. 17

Les sections obtenues sont homothétiques dans l'homothétie $\left(A, \dfrac{l'}{l}\right)$.

On peut montrer par ailleurs pour les sections semblables que si la longueur $l$ de l'axe $AB$ du compas est fixe, il est possible de tracer deux sections semblables sur deux plans distincts $\Pi$ et $\Pi'$ passant par le pied $B$ du compas:

1) pour la parabole, cela est immédiat. Pour deux plans $\Pi$ et $\Pi'$ définis respectivement par $\beta$ et $\beta'$, on aura $\alpha = \pi - \beta$ et $\alpha' = \pi - \beta'$; le calcul de leurs côtés droits a donné (*);

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

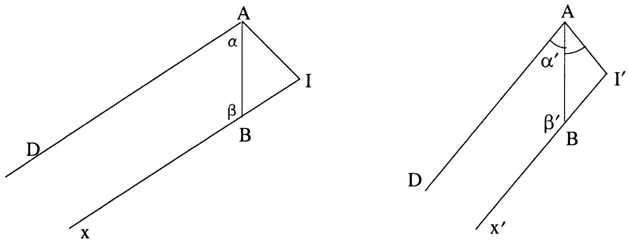


Fig. 18

2) pour l'ellipse (ou l'hyperbole), si $\alpha$ et $\beta$ sont les données relatives au plan $\Pi$, on ne peut pas prendre arbitrairement $\alpha'$ et $\beta'$ pour le plan $\Pi'$. Les angles $\alpha'$ et $\beta'$ doivent vérifier

$$\frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \alpha'} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}$$

avec en plus les conditions:

$\cos^2 \beta < \cos^2 \alpha < 1$; $\cos^2 \beta' < \cos^2 \alpha' < 1$ pour l'ellipse
et
$\cos^2 \alpha < \cos^2 \beta < 1$; $\cos^2 \alpha' < \cos^2 \beta' < 1$ pour l'hyperbole.

Si la longueur $l$ est variable, à toute section obtenue sur un plan $\Pi$ on peut associer une section homothétique sur tout plan $\Pi' // \Pi$. Ainsi une longueur variable pour l'axe du compas permet de choisir cette longueur en fonction des dimensions de la section que l'on veut tracer. Dans le cas de l'ellipse par exemple, le diamètre $d$ a pour expression

$$d = l \frac{\sin 2\alpha . \sin \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \qquad (\alpha + \beta < \pi);$$

et dans le cas de l'hyperbole, on a

$$d = l \frac{\sin 2\alpha . \sin \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}.$$

En conclusion, à la suite d'al-Qūhī, al-Sijzī établit d'une manière générale que la nature de la section conique que l'on veut tracer sur un plan $\Pi$ dépend de la position initiale du compas par rapport à ce plan. On a vu que cette position initiale dans un plan perpendiculaire au plan $\Pi$ est caractérisée par la longueur $l$ de l'axe du compas, l'angle $\alpha$ que fait cet axe avec la branche mobile du compas et l'angle $\beta$ que fait l'axe avec la base du compas qui se place dans le plan $\Pi$ donné. Mais al-Qūhī avait aussi étudié la correspondance entre les éléments $l$, $\alpha$, $\beta$ d'une part et les éléments qui caractérisent la section conique: diamètre et côté droit pour l'ellipse et l'hyperbole; côté droit pour la parabole. Il semble que si al-Sijzī n'avait pas refait cette étude dans ce court traité, c'est peut-être parce qu'al-Qūhī l'avait déjà achevée. En revanche, al-Sijzī de son côté soulève, brièvement certes, la question du tracé continu des sections semblables qui n'a pas été traitée par al-Qūhī; d'autre part il voulait exploiter toutes les possibilités de ce compas parfait inventé par son prédécesseur. C'est ainsi qu'il expose trois procédés – non indépendants – pour le tracé continu:

- Il donne un premier procédé pour faire varier la longueur de l'axe du compas sans mentionner la longueur de la deuxième branche qui porte le tire-ligne. Il sous-entend cependant que la pointe du tire-ligne doit rester en contact avec le plan sur lequel on veut tracer la section.
- Il donne un procédé pour faire glisser la tige qui porte le tire-ligne dans le tube qui est la deuxième branche du compas et il donne une deuxième méthode pour faire varier la longueur de l'axe.
- Dans un troisième procédé, la longueur de l'axe reste constante, la tige du tire-ligne est toujours supposée mobile.

Dans le premier et le troisième cas, il montre comment utiliser un arc de cercle adapté au tube que porte l'axe du compas pour mesurer l'angle formé par les deux branches. Mais il ne semble pas avoir donné de procédé permettant de déterminer l'angle du compas avec le plan sur lequel on trace la section.

L'idée d'al-Sijzī dans cet écrit est donc: quel que soit le modèle choisi, le compas parfait permet le tracé continu des trois sections coniques, les sections semblables en plus du cercle et de la droite.

## TRACÉ CONTINU ET CLASSIFICATION DES COURBES

La recherche sur le tracé continu, nous l'avons observé, répondait, entre autres raisons, à la nécessité pour les mathématiciens de l'époque de s'assurer de la continuité des courbes. Le seul moyen dont ils disposaient pour y parvenir était alors d'introduire le mouvement en géométrie. Or ces nouvelles préoccupations n'ont pas tardé à diriger cette même recherche vers le problème

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

majeur de la classification des courbes en fonction du type et du nombre des mouvements qui interviennent dans leur tracé. C'est là une recherche séminale, dont l'importance considérable qu'elle prendra ensuite mérite d'être soulignée.

Al-Qūhī distingue les courbes tracées par le compas parfait – droite, cercle, sections coniques – d'un nom générique: "les lignes *qiyāsiyya*" que nous rendons par "les lignes mesurables". Voici ce qu'il écrit au début de son livre:

> Il s'agit d'un traité sur l'instrument qu'on appelle compas parfait, qui comprend deux livres. Le premier porte sur la démonstration qu'il est possible de tracer par ce compas les lignes mesurables (*qiyāsiyya*), c'est-à-dire les droites, les contours des cercles, les contours des sections de cône – à savoir les paraboles, les hyperboles, les ellipses et les sections opposées.

Or ce terme "lignes mesurables" sera utilisé dans toute la tradition: on le retrouve chez al-Sijzī, al-Bīrūnī, Hibat Allāh al-Baghdādī, Ibn al-Ḥusayn[19] … Mais, dans sa traduction française, F. Woepcke a rendu ce même terme par "lignes régulières", jetant ainsi un voile sur cette question importante.[20]

L'adjectif pluriel *qiyāsiyya* est dérivé du verbe *qāsa, yaqīsu*, ou de *qāsa, yaqūsu*, qui tous deux expriment l'idée de mesure – d'où la traduction littérale: "les lignes mesurables".

Ce même terme *qiyāsī* (au singulier) a aussi un sens figuré: il se dit d'une dame qui marche de façon régulière. Or c'est précisément ce sens figuré que F. Woepcke a retenu lorsqu'il parle des "lignes régulières". Cette traduction n'est guère satisfaisante, non seulement parce qu'elle privilégie le sens figuré sans nécessité, mais en raison de son ambiguïté et de son imprécision. Si l'on veut parler d'une courbe régulière au sens où on l'entend depuis le XIXᵉ siècle, il faudrait alors exclure la droite. Or celle-ci est précisément du nombre de ces lignes *qiyāsiyya*, d'après al-Qūhī.

Que veut alors dire al-Qūhī par "lignes mesurables"? Selon la terminologie de la géométrie de l'époque, ce sont des lignes, c'est-à-dire des grandeurs, soumises à la théorie des proportions. Tel est précisément le sens entendu par al-Qūhī: il s'agit donc de lignes engendrées par un seul mouvement continu – celui de la branche du compas parfait – et auxquelles la théorie des proportions peut s'appliquer. C'est le cas de la droite et du cercle,

[19] Voir *Geometry and Geometrical Optics*.
[20] Woepcke, "Trois traités arabes sur le compas parfait", p. 69.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

mais aussi des trois sections coniques caractérisées par les *symptomata* ou par les propriétés du foyer et de la directrice.

Al-Qūhī vient ainsi d'établir une classification des courbes: celles qui sont mesurables, et les autres. Mais il vient aussi de dépasser une distinction ancrée dans la tradition, entre la droite d'une part et les courbes (dont le cercle) d'autre part.

Non seulement al-Sijzī a-t-il saisi ces acquis d'al-Qūhī, mais il va encore les confirmer. Ainsi, dans un livre intitulé *L'initiation à la géométrie* (*al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa*), il procède à différentes classifications. Lorsqu'il en arrive aux lignes, il distingue trois espèces: les lignes mesurables (la droite, le cercle et les sections coniques); les lignes non-mesurables mais qui ont un ordre (*niẓām*) et une régularité (*tartīb*); enfin les lignes non mesurables, qui n'ont ni ordre ni régularité. Selon al-Sijzī, les premières sont engendrées par un seul mouvement continu et sont "géométriques", c'est-à-dire qu'on les utilise en géométrie. Les secondes sont engendrées par deux mouvements continus, elles ne sont plus "géométriques", mais elles sont "mécaniques". Les troisièmes, elles aussi engendrées par deux mouvements continus, ne sont même pas mécaniques. L'exemple qu'il donne des courbes mécaniques est l'hélice cylindrique. Il s'agit en effet d'une courbe gauche engendrée par un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe et par une translation uniforme parallèle à l'axe. Voici ce qu'il écrit:

Quant à la courbe, l'hélice cylindrique (*al-khaṭṭ al-lawlabī*), qui est utilisée dans la mécanique (*al-ḥiyal*) et non pas dans la géométrie, car elle est non mesurable (*ghayr qiyāsī),* mais a un ordre et une régularité, elle est engendrée par le mouvement du point suivant une droite et suivant un cercle, communément avec le cylindre.[21]

Il poursuit

Voici sa figure: soit le cylindre *ABCD* dont les deux bases sont *AB* et *CD*. Si nous imaginons que le point *A* se meut par des mouvements uniformes suivant la droite *AC* et que le cylindre tourne autour des deux centres de ses bases avec des mouvements uniformes, il s'engendre la ligne *AEGHID* qui est une hélice cylindrique. Quant à la ligne qui n'a pas d'ordre, elle n'a donc ni

[21] Al-Sijzī, *Kitāb al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa*, MS Chester Beatty 3652, fols. 2v-8r, fol. 4r. Voir l'édition critique de la totalité du texte dans R. Rashed et P. Crozet, *L'œuvre mathématique d'al-Sijzī*, à paraître.

وأما الخط اللولبي، وهو المستعمل في الحيل لا في الهندسة، لأنه غير قياسي، لكن له نظام وترتيب،
فهو يحدُث من حركة النقطة على الخط المستقيم وعلى الدائرة باشتراك الأسطوانة.

limite,[22] ni extrémité, et elle n'est utilisée dans aucun des arts; c'est pourquoi elle n'est ni décrite ni définie.

Al-Sijzī trace l'hélice cylindrique, mais ne donne aucun exemple pour les courbes non mesurables sans ordre ni régularité. Peut-être avait-il à l'esprit des courbes comme la quadratrice ou la spirale.

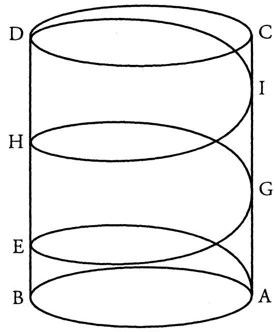


Fig. 19

Il n'y a donc pas l'ombre d'un doute sur le sens de la distinction entre courbes mesurables et courbes non mesurables. Si besoin est, on trouve une preuve supplémentaire de la signification de ces termes dans l'usage qu'en fait al-Sijzī lorsqu'il définit les angles: les angles non mesurables sont précisément les angles curvilignes et l'angle de contingence, alors que les angles mesurables sont ceux que nous pouvons étudier à l'aide de la théorie des proportions.[23]

Cette recherche séminale sur la classification des courbes à l'aide de la notion de mouvement et du nombre des mouvements, ainsi que la séparation entre courbes géométriques et courbes mécaniques selon qu'il est ou non possible de leur appliquer la théorie des proportions, est d'une importance majeure pour l'histoire de la géométrie, et notamment de la géométrie algébrique beaucoup plus tard. Toute la question est de savoir ce que fut la destinée de ce chapitre dans les mathématiques postérieures aux Xe-XIe siècles, chapitre des débuts duquel nous venons ici d'ébaucher l'histoire.

[22] *ḥadd,* qui se traduit également par "définition".
[23] Al-Sijzī, *Kitāb al-Madkhal ilā 'ilm al-handasa*, MS Chester Beatty 3652, fol. 8r.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

Rampur, MS 3698, fol. 104r.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

*Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux*

103v

# Traité sur la construction du compas parfait qui est le compas des coniques

## déterminé par Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʻAbd al-Jalīl

Nous voulons construire un compas à l'aide duquel nous tracerons les trois sections coniques mentionnées par Apollonius dans son livre des *Coniques*. Mais, comme nous avons besoin de ce compas pour tracer ces sections, il nous faut décrire ces trois sections, intersections d'un plan sécant au cône et de sa surface latérale, à l'exception du plan sécant passant par le sommet du cône, car, à partir d'un plan sécant au cône passant par son sommet, s'engendre un triangle rectiligne, comme cela a été montré dans ce livre.

La surface commune au plan sécant à la surface latérale du cône et au cône se présente de trois manières; soit il[24] coupe le cône de sorte qu'il le partage en deux parties et que l'intersection soit ou un cercle ou une <surface> convexe, c'est-à-dire un cercle allongé,[25] soit il le coupe de sorte que l'intersection dans la direction de la base se prolonge avec la surface latérale du cône vers l'infini. Cette section est de deux sortes, selon que son plan se prolonge suivant une ligne droite parallèle au côté[26] du cône ou suivant une droite qui ne lui est pas parallèle. Il ne peut se produire de l'intersection de la surface latérale du cône avec un plan quelconque qui le coupe d'autre section que celles que nous avons mentionnées. C'est pour cette raison qu'Apollonius a examiné les propriétés de ces sections.

Si on a une surface <plane> quelconque donnée, sur laquelle on trace une ligne à l'aide d'un compas dont la base ou bien est sur la surface ou bien n'est pas sur elle, alors on produira une certaine ligne en faisant tourner la droite du tire-ligne[27] en augmentant le côté du cône[28]; et si on a besoin de l'augmenter, alors il (le tire-ligne) trace sur la surface une section conique.

[24] Le plan.

[25] Il s'agit de l'ellipse. C'est ainsi que les Banū Mūsā l'ont nommé; voir *Les mathématiques infinitésimales du* IX*e au* XI*e siècle,* vol. I: *Fondateurs et commentateurs* (London, 1996).

[26] Droite parallèle à une génératrice quelconque.

[27] C'est-à-dire par la rotation de la branche du compas qui engendre une surface conique.

Le tire-ligne qu'al-Qūhī appelle *al-mikhaṭṭ*, est nommé par al-Sijzī "la ligne conique" *al-khaṭṭ al-makhrūṭī*; nous le rendrons par tire-ligne.

[28] Voir commentaire (réglage de la longueur du tire-ligne porté par le bras du compas).

بسم الله الرحمن الرحيم ١٠٣–ظ

# رسالة في عمل البركار التام وهو بركار المخروط

## استخراج

## أحمد بن محمد بن عبد الجليل

نريد أن نعمل بركاراً نعمل به القطوع الثلاثة التي ذكرها أبلونيوس في كتابه في *المخروطات*. ولأن البركار نحتاجُ أن نعملَ به هذه القطوع، فينبغي أن نَصِفَ القطوع الثلاثة المشتركة بين السطح القاطع للمخروط وبين بسيطه، سوى ⟨السطح القاطع⟩ الذي يجوزُ على رأس المخروط، لأن السطحَ القاطع لبسيط المخروط الجائزَ على رأسه، إنما يحدث عنه المثلثُ المستقيم الخطوط، كما بُين في ذلك الكتاب.

والسطح المشترك بين السطح القاطع لبسيط المخروط وبين [بسيط] المخروط على ثلاثة أوجه: إمّا أن يقطعَ المخروطَ قطعًا يقسمه بقسمين، ويكون الفصل المشترك إمّا دائرةً وإمّا محدبًا، أعني دائرة مستطيلة؛ وإما أن يقطعه، ويجوز الفصل المشترك نحو القاعدة مع بسيط المخروط إلى غير نهاية؛ ويكون هذا القطع على وجهين: إما أن يكون سطحه جائزاً على خط مستقيم موازٍ لضلع المخروط، وإما على خط غير موازٍ له. ولا يقع من الفصل المشترك بين بسيط المخروط وبين سطح ما يفصله قطعٌ سوى ما ذكرناه. فلهذه العلة فحص أبلونيوس عن خواص هذه القطوع.

إذا كان سطح ما مفروضًا، ورُسم عليه خطٌ ببركار، قاعدتُه إما على السطح وإما ليست عليه، فإنه يقع خط ما بإدارة خط مخروطي بتزايد ضلع المخروط؛ وإذا احتاج إلى تزايده، فإنه يرسم على السطح قطعًا مخروطيًا.

20 مفروضًا: مفروض.

Mais, puisque Eutocius a mentionné dans son livre *Les deux moyennes* la construction d'un compas dont on a besoin pour les sections coniques d'après Isidore – selon ce qu'il a raconté à propos de celui-ci – et qu'il a construit cet instrument découvert par notre maître Isidore de Milet, auteur des *Mécaniques*, qui est le livre qu'Isidore de Milet a décrit dans son livre où il a commenté le livre de Héron sur *Les lignes des voûtes*, il nous faut construire cet instrument en raison de son extrême difficulté et du besoin qu'on en a, particulièrement pour les constructions mentionnées dans le livre d'Apollonius sur les *Coniques*, et pour les instruments par lesquels on trace les ombres et les astrolabes plans.

Nous voulons construire un compas à l'aide duquel on obtient les trois sections du cône.

Supposons deux droites $AB$ et $AC$ qui entourent un angle $A$ et sup-
104r posons / un cercle $DE$ de centre $G$. Étant donné que, si nous imaginons que la droite $AC$ – le point $A$ étant fixé – se meut à partir de sa position initiale d'un mouvement de rotation[29] jusqu'à ce qu'elle revienne à sa position initiale, alors elle trace une surface conique <Fig. 9.1>. Si nous élevons une perpendiculaire, comme $AB$, alors il est possible que $AC$ trace par son mouvement[30] une <surface> conique dont la base est un cercle <Fig. 8>.

Si nous imaginons que la droite $AC$ – le point $A$ étant fixé[31] – se meut autour du cercle $DE$ et que son plan est incliné par rapport au plan $HC$, alors, par sa rotation, elle trace sur le plan $HC$ une ligne qui entoure un cercle allongé qui est la figure[32] conique qu'Apollonius a appelée ellipse, c'est-à-dire "le déficient".

Si on a un plan, tel $IJ$, dont on obtient l'extension en le prolongeant dans toutes les directions, le côté conique $AC$ n'étant pas dans la direction de $C$[33]; et si l'on fait tourner $AC$ suivant l'angle $A$, le point $A$ étant fixé, jusqu'à ce qu'elle soit coupée par le plan $IJ$ suivant une ligne $IDM$, alors, si la perpendiculaire au plan $IJ$ menée à partir du point $A$ de la droite $AC$ est perpendiculaire à $AC$, c'est une parabole, et si elle ne lui est pas perpendiculaire, c'est une hyperbole <Fig. 9.1 et 9.2>.

[29] Rotation autour de la droite $AB$ dont la position est fixe.

[30] Il s'agit du mouvement de $AC$ ou du mouvement du triangle rectangle $ABC$ autour de l'axe $AB$.

[31] Il faut supposer que l'on fixe, non seulement le point $A$, mais l'axe $AB$ tout entier.

[32] Littéralement: surface.

[33] On considère la génératrice $AC$; on a par conséquent la demi-droite $[AC)$ et son prolongement au-delà de $A$.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

ولأن أوطوقيوس قد ذكرَ في كتابه *الموسطين* عملَ بركار تحتاج إليه قِطعُ المخروطي عن اسيدورس، وحكاه عنه، ‹و›أنه عمل هذه الآلة التي استخرجها اسيدورس معلمنا صاحب *المجانيقي* الذي هو ‹من أهل ملط›، وهو الكتاب الذي وصفه في كتابه الذي فسر فيه كتاب إيرن في *الخطوط الطاقية*، فينبغي أن نعمل هذه الآلة لشدة المشقة والحاجة إليها، وخاصة للأعمال المذكورة في كتاب أبلونيوس في *المخروطات*، وفي الآلات التي ترسم الأظلال والأسطرلابات المسطحة.

نريد أن نعمل بركاراً يمكن عنه قطوع المخروط الثلاثة.

فلنفرض خطي ا ب ا جـ يحيطان بزاوية ا، ولنفرض / دائرة د ه على ١٠٤-و مركز ز. فمن أجل أنا إذا توهمنا خط ا جـ يتحرك، بثبات نقطة ا من موضعه، حركةً دوريةً إلى أن يعود إلى موضعه، فإنه يرسم بسيطًا مخروطيًا.

فإنا إذا عملنا عموداً مثل ا ب، ‹فـ›ا جـ أمكن لنا بحركته أن يرسم مخروطًا [يكن] قاعدته تكون دائرة.

وإذا توهمنا أن خط ا جـ يتحرك، بثبات نقطة ا، حول دائرة د ه، وسطحَه مائلٌ عن سطح ح جـ، فإنه يرسم بدورانه في سطح ح جـ ‹خطًا يحيط بدائرة مستطيلة› وهو السطح المخروطي الذي سماه أبلونيوس اليبسيس، أي الناقص.

وإذا كان سطح مثل ط ي، ومدّه يكون إذا خرج من كل جهة، ‹و›لم يكن ضلع ا جـ المخروطي نحو جهة جـ، وأدير ا جـ على زاوية ا، بثبات نقطة ا، حتى يقطعه سطح ط ي مثلاً على ‹خط› ط د م، فإنه إن كان العمود المخرج من ‹نقطة ا من› خط ا جـ على سطح ط ي عموداً على ا جـ، فهو القطع المكافئ، وإن لم يكن عموداً عليه فهو زائد.

1 إليه: الى – 2 اسيدورس: السندورس – 3 اسيدورس: السندورس – 6 إليها: اليه – 10 من: في – 13 عموداً: عمودين – 15 أن: كان – 17 ‹خطًا ... مستطيلة›: نجد مكان هذه العبارة كلمات غير مقروؤة – 19 جهة: الجهة – 21 على: مثل / ط د م: ل د م – 22 من: في.

Il est possible de construire avec un tel instrument une section conique et <de déterminer> son diamètre et son côté droit; il est également possible de tracer à l'aide d'un tel instrument une section qui soit égale à deux sections[34] de position et de grandeur connues.

Il nous faut maintenant montrer comment façonner un compas à l'aide duquel on puisse tracer ces sections. Façonnons une tige[35]; soit *AB*. Plaçons à son sommet un tube; soit *AN*. Lions à l'extrémité de celui-ci un autre tube; soit *AS*. Il nous est possible de réaliser cela à l'aide d'une cheville, ou de tout autre chose, de sorte que le tube *AN* tourne autour de la tige *AB* et que le tube *AS* tourne avec lui; et cela pour faire une tige qui glisse à l'intérieur du tube *AS* et sur laquelle se trouve <le point> *C*. Il nous est possible de faire cela; en effet cette tige facilite la rotation du compas sur la surface latérale, selon les distances des différents points au sommet du cône <Fig. 10>.

Nous construisons ensuite un arc tel que *GE*, sur la tige *AB* dont un point est sur un appui par lequel les côtés *G* et *E* s'élèvent et s'abaissent vers le sommet et la base; la construction en est facile, soit par un ressort, soit en faisant glisser une règle dans une encoche ou par tout autre procédé facile qui nous convienne.

Si nous façonnons cela, il nous est alors possible d'obtenir à l'aide de ce compas une ellipse à la distance que nous voulons, suivant la grandeur de ce compas et suivant l'angle et l'inclinaison que nous voulons.

Si nous coupons la tige *AB*, par exemple au point *P*, et si nous le lions par une cheville ou par un procédé quelconque, il nous sera alors possible d'abaisser l'extrémité de la tige *AB*, ou de l'élever, jusqu'au plan *IJ*. Posons la base du compas sur le plan *IJ*, soit entre *B* et *C*. La nécessité nous l'impose ainsi si nous élevons le plan *IJ* suivant l'angle que nous voulons. Grâce à cela il nous sera possible de construire une hyperbole ou une parabole sur ce plan.

Autre façonnement du compas: nous prenons une tige au sommet de laquelle il y a le tube *AH*, et à l'extrémité *A* le tube *AD* qui lui est lié par une cheville ou par autre chose, qui <l'>écarte ou <le> rapproche de la tige *AB*. Nous faisons une tige régulière, soit *E*, de sorte que cette tige glisse dans le tube *AD* <Fig. 12>.

[34] Il s'agit ici des deux branches d'hyperbole obtenues dans le plan défini par la droite *IJ* de la figure 9.3.

[35] Litt.: perpendiculaire.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

وقد يمكن أن يعمل بهذه الآلة قطعٌ مخروطي وقطرُه ومنتصبُ ضلعه. ويمكن أن يُرسم بهذه الآلة قطعٌ يساوي قطعين معلومي الوضع والقدر.

فينبغي الآن أن نبين كيفية عمل بركار يمكن أن نرسم به هذه القطوع: نعمل عموداً مثل ا ب، ونجعل في رأسه أنبوبة مثل ا ن، ونشد في طرفها أنبوبة أخرى مثل ا س. يمكن لنا عملُ ذلك بنرماذجة أو غيرها، بعد أن تدور أنبوبة ا ن حول عمود ا ب، وتُدير معه أنبوبة ا س لكي نعمل عموداً يجري في جوف أنبوبة ا س عليه جـ. ويمكن لنا عمل ذلك؛ وإنما يكون هذا العمود يسهّل إدارة البركار على البسيط بأبعاد النقط المختلفة من رأس المخروط.

ثم نعمل قوساً مثل ز ه على عمود ا ب منه نقطة هي على مركز به ترتفع وتنخفض جهتا ز ه نحو الرأس والقاعدة، وعملها سهلٌ إما بلولب وإما بجري مسطرة في خرق أو بأي عمل أردنا سهل.

فإذا فعلنا ذلك، فقد يمكن لنا من هذا البركار قطع ناقصٍ على أي بعد أردنا، بمقدار ما يمكن بهذا البركار وعلى أي زاوية أو انحراف أردناً.

فإذا قطعنا عمود ا ب مثلاً على نقطة ف، وربطنا بنرماذجة أو بحيلة ما، فقد يمكن لنا أن نخفض رأس عمود ا ب أو نرفعه إلى سطح ط ي. ونضع قاعدة البركار على سطح ط ي، مثل بين ب <وجـ>؛ هذا وقت الضرورة، إذا رفعنا سطح ط ي على أي زاوية أردنا. فقد يمكن لنا بهذا عمل القطع الزائد والمكافئ عليه.

عمل البركار الآخر: نتخذ عموداً في رأسه أنبوبة ا ح، وعلى طرف ا أنبوبة ا د مشدودة عليه بنرماذجة أو غيرها، تنفتح وتقرب نحو عمود ا ب، ونجعل عموداً مستوياً عليه ه، ويكون هذا العمود يتحرك في أنبوبة ا د.

1 ومنتصب: قد تقرأ المنتصب – 4 رأسه: راس – 6 حول: فى– 9 من: على – 10 قوساً: قسا / منه: فـه / به: ر ه – 11 جهتا: جهتى / ز: د – 13 قطع ناقص: قطعا ناقصا – 14 زاوية: غير مقرؤة والمعنى يثبت ذلك – 21 ا ح: ا حـ – 22 مشدودة: مسددة / غيرها: غيره.

Si tu veux construire une section avec ce compas, tu écartes le tube *AD* pour qu'il entoure avec le tube *AH* un angle et tu introduis la tige *E* dans le tube *AD*. Tu fais *BR* lié à *CB* par une cheville ou par autre chose; *AR* s'élève ou s'abaisse, au moment de l'action.

Il faut que l'on fasse sortir à partir du point *B* le tiers *AR* par exemple, car l'extrémité *B* n'est pas sur le plan au moment de l'action.

L'action: posons <sur ce plan> autant de points selon nos besoins et faisons tourner le tube *AD* dans lequel il y a la tige *E*; que la tige *E* monte et descende selon la variation des distances <des points> du plan au point *A*[36]; ceci est évident, comme nous l'avons décrit pour le premier compas.

Troisième manière de façonner le compas: faisons la tige *AB* et à son sommet plaçons un cercle *HJ* lié à l'extrémité d'un tube *HA*; nous construisons une tige *AD* liée par une cheville au sommet de la tige *BA* pour qu'elle s'appuie sur elle au moment de l'action et telle que les deux extrémités *B* et *D* soient sur le plan au moment de l'action <Fig. 14>. Il nous est possible de construire la section conique selon un angle quelconque qui se forme lorsqu'on élève le point *J* ou qu'on l'abaisse par le mouvement de la tige *DA* sur le plan *BAD*, et sur ce plan nous
104v élevons le plan sur lequel nous avons besoin de tracer la section, / selon l'angle d'une quelconque section parmi ces sections. Nous effectuons la construction par le compas dont la tige n'est pas divisée en deux parties.

Mais puisque notre but et l'intérêt qui nous est propre n'étaient pas les sections semblables à une quelconque section, à l'exception de ce qu'exigent les sections paraboliques, il nous faut donc placer *AB* comme nous l'avons indiqué et écarter la tige *AD* suivant un angle, de sorte que l'un des deux côtés du triangle soit parallèle à la droite qui est sur le plan coupé par le triangle. Cela nous est possible. Ce qu'il fallait démontrer.

Le traité de la construction du compas des coniques est achevé.

[36] La tige *E* glisse dans le tube *AD* de sorte que la distance du point *A* à son extrémité qui doit rester dans le plan puisse varier.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press

فإذا أردت أن تعمل قطعاً بهذا البركار، فلتفتح أنبوبة ا د لتحيط مع أنبوبة ا ح ‹بزاوية›، ولتُدخِل عمود ه في أنبوبة ا د وتعمل ب ر مشدودة على جـ ب بنرماذجة أو غيرها، فيُرفع ا ر ويُخفض وقتَ العمل.

وينبغي أن يخرج من نقطة ب ثلث ا ر مثلاً، لأن ليس طرف ب على السطح وقتَ العمل.

والعمل: ولنضع نقطاً بمقدار ما نحتاج، ولندر أنبوبة ا د وفيها عمود ‹ه› وليصعد عمود ه ويهبط باختلاف بعد السطح عن نقطة ا، وذلك ظاهر كما وصفنا في البركار الأول.

وجه ثالث من عمل البركار: وهو أن نعمل عمود ا ب وفي رأسه نضع دائرة ح ي [في رأسه] مشدودة في طرف أنبوبة ح ا، ونعمل عمود ا د مشدوداً بنرماذجة في رأس عمود ب ا ليكون معتمداً عليه وقتَ العمل، ويكون طرفا ب د على السطح وقتَ العمل، ويمكن لنا عمل القطع على أي زاوية تكون بأن تُرفع نقطة ي وتخفض بحركة عمود د ا على سطح ب ا د، ونرفع السطح الذي نحتاج إلى أن نرسم القطع عليه على ذلك السطح / بزاوية أي قطع شئنا من هذه القطوع، ١٠٤-ظ ونعمل بالبركار الذي يكون عموده غير مقسوم بقسمين.

ولما لم يكن غرضنا ومُخَصَّنا على القطع الشبيهة بقطع ما عدا ‹ما› يحتاج إلى هذه القطوع المكافئة، فينبغي أن يوضع ا ب على ما بيناه ونفتح عمود ا د على زاوية، يكون ضلعا المثلث الذي يكون أحد ضلعيه موازياً للخط المستقيم على السطح الذي يقطعه المثلث، ويمكن لنا ذلك؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت رسالة عمل بركار المخروط

2 ا ح: ا حـ – 3 غيرها: غيره / فيُرفع: ارتفع – 7 نقطاً: نقطه / وفيها: وفيه – 12 ا د: ا ل – 13 طرفا: طرفى – 14 ي: آر – 15 د ا: ط ا – 19 المكافئة: لمكافى – 20 ا د: ا ه / المثلث: للمثلث.

https://doi.org/10.1017/S0957423903003023 Published online by Cambridge University Press