J. Inst. Math. Jussieu (2021) **20**(2), 423–515
doi:10.1017/S1474748019000227

INTÉGRALES ORBITALES SUR $GL(N, \mathbb{F}_q((t)))$

BERTRAND LEMAIRE

Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373 163 avenue de Luminy, Case 901, 13288 Marseille, France (Bertrand.Lemaire@univ-amu.fr)

(Reçu le 26 mai 2017; révisé le 30 mars 2019; accepté le 6 avril 2019; premiére publication en ligne le 14 mai 2019)

Abstract Let F be a non–Archimedean local field of characteristic $\geqslant 0$, and let $G = GL(N, F)$, $N \geqslant 1$. An element $\gamma \in G$ is said to be quasi–regular if the centralizer of γ in $M(N, F)$ is a product of field extensions of F. Let G_{qr} be the set of quasi–regular elements of G. For $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$, we denote by $\mathcal{O}_\gamma$ the ordinary orbital integral on G associated with γ. In this paper, we replace the Weyl discriminant $|D_G|$ by a normalization factor $\eta_G : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ which allows us to obtain the same results as proven by Harish–Chandra in characteristic zero : for $f \in C_c^\infty(G)$, the normalized orbital integral $I^G(\gamma, f) = \eta_G^{\frac{1}{2}}(\gamma)\mathcal{O}_\gamma(f)$ is bounded on G, and for $\epsilon > 0$ such that $N(N-1)\epsilon < 1$, the function $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ is locally integrable on G.

Résumé Soit F un corps local non archimédien de caractéristique $\geqslant 0$, et soit $G = GL(N, F)$, $N \geqslant 1$. Un élément $\gamma \in G$ est dit quasi régulier si le centralisateur de γ dans $M(N, F)$ est un produit d'extensions de F. Soit G_{qr} l'ensemble des éléments quasi réguliers de G. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$, on note $\mathcal{O}_\gamma$ l'intégrale orbitale ordinaire sur G associée à γ. On remplace ici le discriminant de Weyl $|D_G|$ par un facteur de normalisation $\eta_G : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ permettant d'obtenir les mêmes résultats que ceux prouvés par Harish-Chandra en caractéristique nulle : pour $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale normalisée $I^G(\gamma, f) = \eta_G^{\frac{1}{2}}(\gamma)\mathcal{O}_\gamma(f)$ est bornée sur G, et pour $\epsilon > 0$ tel que $N(N-1)\epsilon < 1$, la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur G.

Mots clefs: intégrale orbitale; discriminant de Weyl; strate simple; élément minimal

2010 *Classification mathématique par sujets* : 22E50

Table des matières

L'auteur a bénéficié d'une subvention de l'Agence nationale de la recherche, projet ANR-13-BS01-00120-02 FERPLAY

1. Introduction

1.1. Il semble maintenant nécessaire d'établir la formule des traces (resp. tordue) pour les groupes réductifs connexes sur un corps de fonctions, puis d'essayer ensuite de la stabiliser, comme il a été fait pour les corps de nombres [12, 13]. La tâche s'annonce longue et laborieuse, et il n'est pas clair qu'il soit aujourd'hui possible de la mener à bien en toute généralité, c'est-à-dire sans restriction sur la caractéristique du corps de base. Rappelons par exemple que les travaux de Ngô Bao Châu sur le lemme fondamental supposent que la caractéristique du corps de base est grande par rapport au rang du groupe. C'est bien sûr du côté géométrique de la formule des traces que des phénomènes nouveaux apparaissent. Globalement, il est raisonnable d'espérer que les arguments, une fois compris, soient plus simples pour les corps de fonctions que pour les corps de nombres. Localement en revanche, la théorie des intégrales orbitales en caractéristique $p > 0$ pour un groupe réductif connexe quelconque est encore à écrire, et la formule des traces locale semble pour l'instant hors de portée (sauf si $p \gg 1$). Cet article est en quelque sorte une illustration de cette affirmation : d'un côté, il ouvre la voie vers une formule des traces locale pour $GL(N, \mathbb{F}_q((t)))$; de l'autre, il laisse imaginer la nature des difficultés à surmonter si l'on veut établir une telle formule en caractéristique $p > 0$ pour un groupe plus général.

1.2. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique quelconque, et soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On s'intéresse ici à la théorie des intégrales orbitales sur $G(F)$, dans le cas où $\mathrm{car}(F) = p > 0$. Les résultats démontrés dans cet article concernent exclusivement le groupe $G = GL(N)$ et ne sont vraiment nouveaux que si p divise N. Mais revenons, pour cette introduction seulement, au cadre général : G quelconque et $\mathrm{car}(F) \geqslant 0$. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal, ν la valuation sur F normalisée par $\nu(F^\times) = \mathbb{Z}$ et $|\ |$ la valeur absolue normalisée sur F. On munit $G(F)$ de la topologie $\mathfrak{p}$-adique (c'est-à-dire celle définie par F) et on fixe une mesure de Haar dg sur $G(F)$. On note l le rang de G, c'est-à-dire la dimension des tores maximaux de G. On suppose $l \geqslant 1$. Un élément $\gamma \in G$ est dit (absolument) semi-simple régulier si son centralisateur connexe G_γ est un tore. On note $G_{\mathrm{reg}} \subset G$ le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers. C'est un ouvert non vide de G, défini sur F. En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Fixons une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et identifions G à $G(\overline{F})$, $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}(\overline{F})$, etc. Pour $\gamma \in G$, on note $D_G(\gamma) \in \overline{F}$ le coefficient de t^l dans le polynôme $\det_{\overline{F}}(t + 1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g})$. On a

$$G_{\mathrm{reg}} = \{\gamma \in G : D_G(\gamma) \neq 0\}.$$

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}(F)$. Le tore $T = G_\gamma$ est défini sur F et on peut munir $T(F)$ d'une mesure de Haar $dt = dg_\gamma$. L'orbite $\{g^{-1}\gamma g : g \in G(F)\}$ est fermée dans $G(F)$ et on note $\mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_\gamma^G$ la distribution sur $G(F)$ définie par

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\tfrac{dg}{dt}, \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F)).$$

Soit $A_T = A_\gamma$ le sous-tore F-déployé maximal de T. On munit le groupe $A_T(F)$ de la mesure de Haar da qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal $A_T(\mathfrak{o})$ de $A_T(F)$. Le groupe quotient $A_T(F)\backslash T(F)$ est compact et on peut normaliser la mesure dt en imposant la condition $\mathrm{vol}(A_T(F)\backslash T(F), \frac{dt}{da}) = 1$. On a donc

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{A_T(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\tfrac{dg}{da}, \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F)).$$

L'élement $D_G(\gamma)$ appartient à F, et en notant $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{g}$ le sous-espace formé des points fixes sous Ad_γ (qui coïncide avec l'algèbre de Lie de T), on a

$$D_G(\gamma) = \det_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_\gamma(F)).$$

On note $I^G(\gamma, \cdot)$ la distribution sur $G(F)$ définie par

$$I^G(\gamma, f) = |D_G(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(f), \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F)). \tag{1}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

On sait d'après Harish-Chandra que pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'application $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est localement constante sur $T(F) \cap G_{\mathrm{reg}}$.

Le facteur de normalisation $|D_G|^{\frac{1}{2}}$ introduit en (1) est bien sûr motivé par la formule d'intégration de Weyl : pour toute fonction localement intégrable θ sur $G(F)$, définie sur $G_{\mathrm{reg}}(F)$ et telle que $\theta(g^{-1}\gamma g) = \theta(\gamma)$ pour $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}(F)$ et $g \in G(F)$, et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a

$$\int_{G(F)} \theta(g) f(g) dg = \sum_T |W^G(T)|^{-1} \int_{T(F)} |D_G(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \theta(\gamma) I^G(\gamma, f) d\gamma, \qquad (2)$$

où T parcourt les tores maximaux de G définis sur F, pris modulo conjugaison par $G(F)$, $|W^G(T)|$ est le cardinal du groupe de Weyl $N_G(T)/T$ de G et $d\gamma$ est la mesure de Haar normalisée sur $T(F)$.

1.3. On a aussi la variante sur $\mathfrak{g}(F)$ de l'intégrale orbitale normalisée définie en 1.2.(1). Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $D_{\mathfrak{g}}(X)$ le coefficient de t^l dans le polynôme $\det_{\overline{F}}(t - \mathrm{ad}_X; \mathfrak{g})$ et on pose

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} = \{X \in \mathfrak{g} : D_{\mathfrak{g}}(X) \neq 0\}.$$

C'est un ouvert non vide de $\mathfrak{g}$, défini sur F. Pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, l'élément $D_{\mathfrak{g}}(X)$ appartient à F, et en posant $\mathfrak{g}_X = \ker(\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$, on a

$$D_{\mathfrak{g}}(X) = \det_F(-\mathrm{ad}_X; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_X(F)).$$

Pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on note $I^{\mathfrak{g}}(X, \cdot)$ la distribution sur $\mathfrak{g}(F)$ définie par

$$I^{\mathfrak{g}}(X, \mathfrak{f}) = |D_{\mathfrak{g}}(X)|^{\frac{1}{2}} \int_{A_X(F)\backslash G(F)} \mathfrak{f}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X)) \frac{dg}{da}, \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)). \qquad (1)$$

Ici A_X est le sous-tore F-déployé maximal A_T du centralisateur connexe $T = G_X$ de X dans G et da est la mesure de Haar sur $A_X(F)$ qui donne le volume 1 à $A_X(\mathfrak{o})$. On a bien sûr aussi l'analogue sur $\mathfrak{g}(F)$ de la formule d'intégration de Weyl 1.2.(2).

1.4. On suppose dans ce numéro que F est de caractéristique nulle. Rappelons quelques résultats bien connus, dus à Harish-Chandra. La somme sur T dans 1.2.(2) est finie – pour cela, il n'est pas nécessaire de déranger Harish-Chandra ! – et d'après [3, theo. 14], pour tout tore maximal T de G défini sur F et toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'application $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est localement bornée sur $T(F) \cap G_{\mathrm{reg}}$:

(1) pour toute partie compacte Ω de $T(F)$, on a $\sup_{\gamma \in \Omega \cap G_{\mathrm{reg}}} |I^G(\gamma, f)| < +\infty$.

Le résultat suivant [3, theo. 15] est indispensable pour l'étude des intégrales pondérées sur $G(F)$:

(2) il existe $\epsilon > 0$ tel que la fonction $|D_G|^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur $G(F)$.

Compte tenu de (1) et de 1.2.(2), Harish-Chandra déduit (2) de :

(3) pour chaque tore maximal T de G défini sur F, il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction $|D_G|^{-\epsilon}$ est localement intégrable sur $T(F)$.

Revenons à la propriété (1). Il suffit pour l'obtenir de prouver que pour chaque $t \in T(F)$, il existe un voisinage ouvert compact Ω de t dans $T(F)$ tel que $\sup_{\gamma \in \Omega \cap G_{\mathrm{reg}}} |I^G(\gamma, f)| < +\infty$. Notons $H = G_t$ le centralisateur connexe de t dans G et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Soit ω_t l'ensemble des $\delta \in H(F)$ tels que $\det_F(1 - \mathrm{Ad}_{t\delta}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{h}(F)) \neq 0$. Puisque t est semi-simple, on a la décomposition $\mathfrak{g}(F) = (1 - \mathrm{Ad}_t)(\mathfrak{g}(F)) \oplus \mathfrak{h}(F)$. De plus, ω_t est un voisinage ouvert et $H(F)$-invariant de 1 dans $H(F)$, et l'application

$$\delta : G(F) \times \omega_t \to (g, h) \mapsto g^{-1}thg$$

est partout submersive. On peut donc appliquer le principe de submersion d'Harish-Chandra et « descendre » toute distribution $G(F)$-invariante au voisinage de t dans $G(F)$ – par exemple une intégrale orbitale – en une distribution $H(F)$-invariante au voisinage de 1 dans $H(F)$. On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_t$ de 1 dans $T(F)$ vérifiant la propriété : pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, il existe une fonction $f^H \in C_c^\infty(\mathcal{V}_t)$ telle que pour tout $\delta \in \mathcal{V}_t$ tel que $t\delta \in G_{\mathrm{reg}}$, on a l'égalité

$$\mathcal{O}_{t\delta}(f) = \mathcal{O}_\delta^H(f^H).$$

Or $tH(F) \cap G_{\mathrm{reg}} \subset tH_{\mathrm{reg}}(F)$ et

$$\det_F(1 - \mathrm{Ad}_{t\delta}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{h}(F)) = D_G(t\delta)D_H(\delta)^{-1},$$

par conséquent l'égalité $\mathcal{O}_{t\delta}(f) = \mathcal{O}_\delta^H(f^H)$ s'écrit aussi

$$I^G(t\delta, f) = |\det_F(1 - \mathrm{Ad}_{t\delta}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{h}(F))|^{\frac{1}{2}} I^H(\delta, f^H).$$

Comme l'application

$$\delta \mapsto \det_F(1 - \mathrm{Ad}_{t\delta}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{h}(F))$$

est bornée au voisinage de 1 dans $T(F)$, par récurrence sur la dimension de G (et translation $\delta \mapsto t^{-1}\delta$ si $t \in Z(G)$), on est ramené pour obtenir (1) à prouver que :

(4) l'application $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est bornée au voisinage de 1 dans $T(F)$.

Via l'application exponentielle, on peut passer à l'algèbre de Lie. En notant $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T, (4) est impliqué par le résultat suivant [3, theo. 13] :

(5) pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on a $\sup_{\gamma \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}} |I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})| < +\infty$.

Comme pour (4) $\Rightarrow$ (1), on obtient (5) par récurrence sur $\dim_{\overline{F}}(\mathfrak{g}_t)$ pour $t \in \mathfrak{t}(F)$, grâce à la propriété d'homogénéité des germes de Shalika [4, §8] (voir aussi [8, 17.14]). Revenons à G. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'application $T(F) \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ obtenue en posant $I^G(\gamma, f) = 0$ pour $\gamma \in T(F) \smallsetminus (T(F) \cap G_{\mathrm{reg}})$ est à support compact (c'est une conséquence du lemme 39 de [3]). On en déduit que la propriété (1) se renforce en :

(6) pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a $\sup_{\gamma \in T(F) \cap G_{\mathrm{reg}}} |I^G(\gamma, f)| < +\infty$.

Le passage de (5) à (1) *via* la submersion δ et l'application $f \mapsto f^H$ est appelé « descente centrale au voisinage d'un élément semi-simple » ou, plus simplement [8], « descente semi-simple »[1]. Par descente semi-simple, Harish-Chandra ramène aussi (3) au résultat suivant :

1. Pour $G = GL(N)$ et F de caractéristique > 0, nous aurons à généraliser cette construction au voisinage d'éléments t qui ne sont pas semi-simples mais seulement d'orbite fermée – voir 1.8.(2).

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

(7) pour chaque tore maximal T de G défini sur F, il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction $|D_{\mathfrak{g}}|^{-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{t}(F)$.

1.5. On suppose maintenant que F est de caractéristique $p > 0$. Alors la généralisation des résultats rappelés en 1.4 se heurte à plusieurs obstacles. Parmi ceux-là :

– les tores maximaux de G définis sur F, modulo conjugaison par $G(F)$, peuvent former un ensemble infini. On ne peut donc pas se contenter d'une borne sur chaque T, comme en 1.4.(1), 1.4.(6) ou 1.4.(3), il faut en plus contrôler ces bornes de manière à ce que la somme sur les T dans 1.2.(2) converge ;

– la présence d'éléments $t \in G(F)$ qui ne sont pas semi-simples (sur $\overline{F}$) mais néanmoins tels que l'orbite $\mathcal{O}_{G(F)}(\gamma) = \{g^{-1}tg : g \in G(F)\} \subset G(F)$ est fermée pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique. Au voisinage de tels éléments, la descente centrale telle qu'on l'a rappelée en 1.4 ne fonctionne plus ;

– les classes de conjugaison unipotentes dans $G(F)$ peuvent former un ensemble infini et la théorie des germes de Shalika ne s'applique pas dans ce cas (il faudrait l'écrire autrement). De plus, le passage à l'algèbre de Lie pose problème, car on ne dispose pas d'une application exponentielle comme en caractéristique nulle.

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les premiers exemples : les groupes $\mathcal{G} = GL(2, F)$ et $\mathcal{G}' = SL(2, F)$, avec $F = \mathbb{F}_2((t))$. Les classes de conjugaison de tores maximaux de $\mathcal{G}$ sont classifiées par les classes d'isomorphisme d'extensions quadratiques séparables de F, qui sont en nombre infini. De plus, il y a aussi les extensions inséparables. Si $E \subset M(2, F)$ est une extension quadratique inséparable de F, et si $\gamma = \omega_E$ est une uniformisante de E, alors l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_\gamma$ a les mêmes propriétés qu'une « vraie » intégrale orbitale semi-simple régulière (elliptique). Pourtant sur $\overline{F}$, l'élément γ dégénère puisqu'il se décompose en $\gamma = zu$ avec $z \in Z(G; \overline{F})$ et $u \in G(\overline{F})$ unipotent. Dans $\mathcal{G}'$, on peut vérifier que tous les éléments sont séparables, mais les classes de conjugaison unipotentes non triviales sont classifiées par l'ensemble $F^\times/(F^\times)^2$, qui est infini. Quant à la descente centrale, les difficultés nouvelles apparaissent au voisinage des éléments inséparables qui sont contenus dans un sous-groupe de Levi propre (sur F). Pour que de tels éléments existent, il faut que le groupe ambiant soit un peu plus gros que $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}'$: par exemple le groupe $GL(4, F)$ et l'élément γ plongé diagonalement dans le sous-groupe de Levi $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ de $GL(4, F)$.

1.6. Revenons à $\mathrm{car}(F) \geqslant 0$ et décrivons les résultats contenus dans ce papier. Changeons de notations : dorénavant, on fixe un entier $N \geqslant 1$, un F-espace vectoriel V de dimension N, et on pose $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_F(V)$ et $G = \mathrm{Aut}_F(V)$. Un élément $\gamma \in \mathfrak{g}$ est dit *fermé* si la F-algèbre $F[\gamma]$ est un produit d'extensions de F, *pur* si la F-algèbre $F[\gamma]$ est un corps, *quasi régulier* s'il est fermé et si $\dim_F(F[\gamma]) = N$, *quasi régulier elliptique* s'il est quasi régulier et pur. Si de plus γ est *séparable*, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique $\zeta_\gamma \in F[t]$ de γ est produit de polynômes irréductibles et séparables sur F, alors il est fermé si et seulement si il est (absolument) semi-simple, et il est quasi régulier, resp. quasi régulier elliptique, si et seulement s'il est semi-simple régulier, resp. semi-simple régulier elliptique, au sens habituel (cf. 1.4). On note $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, l'ensemble des éléments quasi réguliers, resp.

quasi réguliers elliptiques, de $\mathfrak{g}$. Pour $\star = \mathrm{qr}, \mathrm{qre}$, on pose $G_\star = G \cap \mathfrak{g}_\star$. Un élément $\gamma \in \mathfrak{g}$ est fermé si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_G(\gamma) = \{g^{-1}\gamma g : g \in G\}$ est fermée dans $\mathfrak{g}$ (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique).

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$. La F-algèbre $F[\gamma]$ coïncide avec le centralisateur $\mathfrak{g}_\gamma = \{x \in \mathfrak{g} : \gamma x - x\gamma = 0\}$ de γ dans $\mathfrak{g}$. Écrivons $\mathfrak{g}_\gamma = E_1 \times \cdots \times E_r$ pour des extensions E_i de F, notons A_γ le sous-tore déployé maximal $F^\times \times \cdots \times F^\times$ de $G_\gamma = G \cap \mathfrak{g}_\gamma$ et $M = M(\gamma)$ le centralisateur de A_γ dans G. Alors M est un produit de groupes linéaires sur F et γ est quasi régulier elliptique dans M. Pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on définit comme suit l'intégrale normalisée

$$I^G(\gamma, f) = \eta_G(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma(f). \tag{1}$$

On note dg, resp. da, la mesure de Haar sur G, resp. A_γ, qui donne le volume 1 à $GL(N, \mathfrak{o})$, resp. au sous-groupe compact maximal $\mathfrak{o}^\times \times \cdots \times \mathfrak{o}^\times$ de A_γ, et l'on pose

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{A_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) \frac{dg}{da}.$$

On pose

$$\eta_G(\gamma) = \eta_M(\gamma) |\mathrm{det}_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m})|,$$

où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$ est l'algèbre de Lie de M, et l'on définit $\eta_M(\gamma)$ par produit à partir du cas elliptique suivant. Si $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, alors $E = F[\gamma]$ est une extension de F de degré N et l'on pose

$$\eta_G(\gamma) = q^{-f(\tilde{c}_F(\gamma) + e - 1)}$$

où e, resp. f, est l'indice de ramification, resp. le degré résiduel, de l'extension E/F, et où $\tilde{c}_F(\gamma)$ est un invariant défini comme suit. On commence par supposer que γ appartient à l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_E$ de E et l'on pose

$$\{x \in \mathfrak{o}_E : x\mathfrak{o}_E \subset \mathfrak{o}[\gamma]\} = \mathfrak{p}_E^{c_F(\gamma)}.$$

Pour $z \in \mathfrak{o} \smallsetminus \{0\}$, on a $c_F(z\gamma) = e(N-1)\nu(z) + c_F(\gamma)$, ce qui permet de définir $\tilde{c}_F(\gamma)$ en général : on choisit $z \in F^\times$ tel que $z\gamma \in \mathfrak{o}_E$ et l'on pose $c_F(\gamma) = c_F(z\gamma) - e(N-1)\nu(z)$. On pose aussi $\tilde{c}_F(\gamma) = c_F(\gamma) - (N-1)\nu_E(\gamma)$. Par construction, on a $\tilde{c}_F(z\gamma) = \tilde{c}_F(\gamma)$ pour tout $z \in F^\times$. On vérifie que si γ est séparable, c'est-à-dire si l'extension E/F est séparable, alors on a

$$\tilde{c}_F(\gamma) = \tfrac{1}{f}(\nu(D_G(\gamma)) - \delta),$$

où δ est le discriminant de E/F, et donc

$$\eta_G(\gamma) = |D_G(\gamma)| q^{\delta - f(e-1)}.$$

On reconnaît l'exposant de Swan $\delta - f(e-1) \geqslant 0$ de E/F.

On définit aussi la variante sur $\mathfrak{g}$ de l'intégrale orbitale normalisée (1) : pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$, on pose

$$I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}), \tag{2}$$

où la distribution $\mathcal{O}_\gamma$ sur $\mathfrak{g}$ est définie de la même manière que celle sur G, et le facteur de normalisation $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)$ est donné par $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |\mathrm{det}_F(-\mathrm{ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m})| \eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$ avec $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$ et, si $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, par $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = q^{-f(c_F(\gamma) - (e-1))}$.

1.7. Les deux principaux résultats prouvés ici, qui généralisent ceux d'Harish-Chandra en caractéristique nulle (cf. 1.4), sont les suivants :

(1) pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a $\sup_{\gamma \in G_{\mathrm{qr}}} |I^G(\gamma, f)| < +\infty$,

où l'intégrale orbitale normalisée $I^G(\gamma, f) = \eta_G(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma(f)$ est celle définie en 1.6.(1). Quant au facteur de normalisation $\eta_G : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$, il vérifie :

(2) pour tout $\epsilon > 0$ tel que $N(N-1)\epsilon < 1$, la fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma \mapsto \eta_G(\gamma)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur G.

En réalité, on prouve d'abord la variante sur $\mathfrak{g}$ de ces deux résultats :

(3) pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on a $\sup_{\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}} |I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})| < +\infty$;

(4) pour tout $\epsilon > 0$ tel que $N(N-1)\epsilon < 1$, la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma \mapsto \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{g}$.

1.8. On l'a dit en 1.5, l'une des principales difficultés est ici la descente centrale au voisinage d'un élément fermé qui n'est pas semi-simple. Soit $\beta \in G$ un élément fermé. Par descente parabolique standard, on se ramène facilement au cas où β est pur. Posons $E = F[\beta]$, $d = \frac{N}{[E:F]}$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$. Ainsi $\mathfrak{b}$ est le commutant de E, c'est-à-dire le centralisateur de β, dans $\mathfrak{g}$. Si l'extension E/F est inséparable, l'intersection $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b}$ n'est pas nulle, par conséquent l'inclusion $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) + \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ est stricte et la méthode d'Harish-Chandra (descente semi-simple) ne fonctionne plus. On modifie cette méthode comme on l'a fait en [9] pour prouver l'intégrabilité locale des caractères. En gros, l'idée consiste à choisir un « bon » supplémentaire de $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$. Pour cela, on fixe une corestriction modérée $s_0 : A(E) \to E$ sur $A(E) = \mathrm{End}_F(E)$ relativement à E/F et un élément $x_0 \in \mathfrak{A}(E) = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\{\mathfrak{p}_E^i : i \in \mathbb{Z}\})$ tel que $s_0(x_0) = 1$. On fixe aussi un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ (que l'on choisira minimal pour cette propriété) et une (W, E)-décomposition $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$, avec $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$. Cette décomposition induit une (W, E)-décomposition $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ et l'on pose $x = x_0 \otimes 1 \in \mathfrak{A}$. Pour ces notions, dues à Bushnell-Kutzko [1], on renvoie à 3.3. Le supplémentaire en question est le sous-espace $x_0 \otimes \mathfrak{b} = x\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$. On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ tel que l'application

$$\delta : G \times x\mathcal{V} \to G, \ (g, b) \mapsto g^{-1}(\beta + xb)g \tag{1}$$

est partout submersive. On peut donc appliquer le principe de submersion d'Harish-Chandra et « descendre » toute distribution G-invariante T au voisinage de β dans G en une distribution $\widetilde{\vartheta}_T$ sur $x\mathcal{V}$. Mais cette dernière n'est pas invariante sous l'action du groupe $H = \mathrm{Aut}_E(V)$ par conjugaison (d'ailleurs $x\mathcal{V}$ lui-même n'est pas H-invariant). On peut cependant en déduire, par un procédé de recollement [9], une distribution H-invariante θ_T sur $\mathfrak{b}$. Signalons que dans cette construction, l'élément x n'appartient pas à $\mathfrak{b}$, sauf si l'extension E/F est modérément ramifiée (donc en particulier séparable), auquel cas on peut prendre $x_0 = 1$. On est donc ramené à déterminer la distribution θ_T sur $\mathfrak{b}$ lorsque $T = \mathcal{O}_\gamma$ pour un élément $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$ de la forme $\gamma = \beta + xb$ avec $b \in \mathcal{V}$, et aussi à calculer le facteur de normalisation $\eta_G(\gamma)$ pour un tel élément

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

γ. C'est la partie la plus difficile de ce travail : elle occupe les sections 3 et 4. Dans la section 3, on prouve que si $\mathcal{V}$ est suffisamment petit, alors pour $b \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, l'élément γ appartient à G_{qre} et la distribution $\theta_{\mathcal{O}_\gamma}$ est égale $\lambda\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ pour une constante λ ne dépendant que de β (et pas de b). Ici $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ est l'intégrale orbitale sur $\mathfrak{b}$ définie par b, normalisée comme plus haut en remplaçant $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{b}$. De plus, le facteur de normalisation $\eta_G^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ est égal à $\mu\eta_{\mathfrak{b}}^{\frac{1}{2}}(b)$ pour une constante μ ne dépendant elle aussi que de β (et pas de b). On en déduit en particulier que pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathcal{V})$ telle que

$$I^G(\beta + xb, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}), \quad b \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}. \tag{2}$$

Dans la section 4, on prouve que cette construction est compatible aux applications « terme constant » (sur G et sur $\mathfrak{b}$), ce qui entraîne que l'égalité (1) est vraie pour tout $b \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$.

Notons que la construction est relativement explicite. En particulier ,on ne se contente pas d'affirmer l'existence du voisinage $\mathcal{V}$, on en produit un qui est en quelque sorte optimal : l'ensemble ${}^H\mathcal{V} = \{h^{-1}bh : h \in H,\, b \in \mathcal{V}\}$ est le plus gros possible, et il est *fermé* dans $\mathfrak{g}$. L'étude de la distribution $\theta_{\mathcal{O}_\gamma}$ consiste d'une part à prouver que pour $b, b' \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, on a $\mathcal{O}_H(b) = \mathcal{O}_H(b')$ si et seulement si $\mathcal{O}_G(\beta + xb) = \mathcal{O}_G(\beta + xb')$, d'autre part à calculer la différentielle de la submersion δ en $(1, b)$ pour chaque $b \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$. On se ramène, par une récurrence assez compliquée, au cas où l'élément b est le plus simple possible, c'est-à-dire E-*minimal* au sens de Bushnell-Kutzko (cf. 2.2). D'ailleurs, cette construction pourrait avoir des implications intéressantes, puisqu'on prouve au passage que tout élément quasi régulier elliptique de G admet une décomposition − en un certain sens « unique » − en termes d'éléments quasi réguliers elliptiques F_i-minimaux de $\mathrm{End}_{F_{i+1}}(F_i)$ pour une suite d'extensions $(F_0 = F[\gamma], \ldots, F_m)$ de F (cf. 3.8). Notons que si la caractéristique résiduelle p de F ne divise pas N (et aussi si $N = p$), toutes les extensions F_i/F $(i > 0)$ sont modérément ramifiées, et il est possible de les choisir de telle manière que $F_m \subset \cdots \subset F_1 \subset F_0$. Mais c'est un cas très particulier : si $p < N$ divise N, il n'est en général pas possible de les choisir de cette manière.

1.9. Par descente centrale, on est donc ramené à l'étude des intégrales orbitales $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ pour $\gamma \in \mathfrak{g}$ proche de 0 dans $\mathfrak{g}$. On dispose pour cela des germes de Shalika associés aux orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$, lesquels vérifient une propriété d'homogénéité particulièrement utile. Cette étude fait l'objet de la section 5. En caractéristique nulle, Kottwitz a exposé la théorie des germes de Shalika de manière très claire dans [8]. Notre contribution est ici minime, puisque nous n'avons eu qu'à adapter son travail. La propriété d'homogénéité des germes de Shalika (normalisés) permet de leur associer des fonctions sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. Par descente centrale et homogénéité, on prouve que ces fonctions sont localement bornées sur $\mathfrak{g}$. On en déduit que les intégrales orbitales normalisées sont elles aussi localement bornées sur $\mathfrak{g}$, puis, grâce à un argument de support relativement simple (cf. 3.2), qu'elles sont bornées sur $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire 1.7.(3). On prouve 1.7.(4) de la même manière. Dans la section 6, on en déduit les mêmes résultats sur G, c'est-à-dire 1.7.(1) et 1.7.(2).

1.10. Pour les caractères, on peut prouver un résultat analogue à 1.7.(1). Précisément, soit

π une représentation complexe lisse irréductible de G. À π est associée une distribution Θ_π sur G, donnée par $\Theta_\pi(f) = \mathrm{trace}(\pi(f))$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, où $\pi(f)$ est l'opérateur sur l'espace de π défini par $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$. On sait que cette distribution Θ_π est localement constante sur G_{qr} et localement intégrable sur G [9] : il existe une fonction localement constante $\theta_\pi : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\Theta_\pi(f) = \int_G f(g)\theta_\pi(g)dg,$$

l'intégrale étant absolument convergente. Notons que le caractère-distribution Θ_π dépend de la mesure de Haar dg sur G, mais que la fonction caractère θ_π n'en dépend pas. Comme pour les intégrales orbitales, on peut prouver [2] que la fonction caractère normalisée

$$G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C},\ \gamma \mapsto I^G(\pi, \gamma) = \eta_G(\gamma)^{\frac{1}{2}}\theta_\pi(\gamma)$$

est localement bornée sur G. Compte tenu des constructions de [9] – en partie reprises ici (cf. 1.8) –, cela revient à prouver, par descente parabolique puis descente centrale au voisinage d'un élément pur de G, que les transformées de Fourier normalisées des intégrales orbitales nilpotentes sur $\mathfrak{g}$, qui sont des fonctions localement constantes sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, sont bornées sur $\mathfrak{g}$. Or ces transformées de Fourier sont des fonctions bien plus faciles à calculer, et donc à majorer, que les germes de Shalika (cf. [6]).

1.11. Un joli papier de J.-P. Serre [16] est à l'origine de ce travail. L'auteur y prouve une « formule de masse », valable en toute caractéristique : $\sum_E q^{-(\delta(E/F)-(N-1))} = N$, où E/F parcourt les sous-extensions totalement ramifiées de degré N de F^{sep}/F pour une clôture séparable de F^{sep} de F et $\delta(E/F)$ est le discriminant de E/F. Cette formule de masse est rappelée dans la section 2 et étendue à toutes les sous-extensions de degré N de F^{sep}/F. Jointe à 1.7.(1) et à la formule d'intégration de Weyl, elle entraîne l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}} : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ sur G. Sil' on remplace G par le groupe multiplicatif $D^\times$ d'une algèbre à divison de centre F et de degré N^2 sur F, alors 1.7.(1) est pratiquement immédiat par compacité. Pour $G = GL(N, F)$, on peut donc en déduire 1.7.(1) pour les fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ qui s'obtiennent par transfert à partir de celles sur $D^\times$ – c'est-à-dire les fonctions cuspidales sur G –, mais cette approche ne permet pas de traiter les autres fonctions (rappelons qu'en caractéristique nulle, une intégrale orbitale semi-simple régulière elliptique s'écrit comme une combinaison linéaire de caractères de représentations elliptiques mais aussi de caractères pondérés). Curieusement, la formule de masse de Serre, qui semblait au départ cruciale pour l'étude de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}}$, s'est révélée au bout du compte inutile, puisque l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}}$ est impliquée par celle de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$, obtenue sans utiliser la formule de masse.

Signalons que le facteur de normalisation $\eta_G^{\frac{1}{2}}$ apparaît pour le groupe $G = GL(2, F)$ dans le livre de Jacquet-Langlands [7], l'un des (trop) rares textes sur la question écrit en caractéristique $\geqslant 0$.

2. Nous donnerons ailleurs une démonstration détaillée de ce résultat, le présent article étant déjà suffisamment long.

Je remercie vivement le rapporteur pour sa lecture minutieuse du manuscrit.

2. Des invariants (rappels)

2.1. Extensions

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle p. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$ et κ le corps résiduel $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Ce dernier est un corps fini de cardinal $q = p^r$ pour un entier $r \geqslant 1$ et un nombre premier p. On note ν la valuation sur F normalisée par $\nu(F^\times) = \mathbb{Z}$ et $|\ |$ la valeur absolue sur F donnée par $|x| = q^{-\nu(x)}$.

Soit E une extension finie de F. On définit de la même manière, en les affublant d'un indice E, les objets $\mathfrak{o}_E$, $\mathfrak{p}_E$, $\kappa_E = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}_E$, $q_E = |\kappa_E|$... On pose aussi $U_E = U_E^0 = \mathfrak{o}_E^\times$ et $U_E^k = 1 + \mathfrak{p}_E^k$ $(k \geqslant 1)$. On note $e(E/F)$, resp. $f(E/F)$, l'indice de ramification, resp. le degré résiduel, de E/F. La valuation normalisée $\nu_F = \nu$ sur F se prolonge de manière unique en une valuation sur E, que l'on note encore ν_F. Cette dernière est reliée à la valuation normalisée ν_E sur E par l'égalité $\nu_E = e(E/F)\nu_F$. On a donc

$$|x|_E = q_E^{-\nu_E(x)} = q^{-[E:F]\nu_F(x)}, \quad x \in E^\times.$$

Supposons l'extension E/F séparable. On note $N_{E/F} : E^\times \to F^\times$, resp. $T_{E/F} : E \to F$, l'homomorphisme norme, resp. trace. On a

$$\nu_E(x) = \frac{1}{f(E/F)}\nu(N_{E/F}(x)), \quad x \in E^\times.$$

L'homomorphisme $T_{E/F}$ est surjectif et la forme bilinéaire $E \times E \to F$, $(x, y) \mapsto T_{E/F}(x)$ est non dégénérée. Soit $\mathfrak{D}_{E/F}$ la différente de E/F, c'est-à-dire l'inverse de l'idéal fractionnaire $\mathfrak{D}_{E/F}^-$ de $\mathfrak{o}_E$ donné par

$$\mathfrak{D}_{E/F}^- = \{x \in E : \mathrm{Tr}_{E/F}(xy) \in \mathfrak{o},\ \forall y \in \mathfrak{o}_E\}.$$

On note $\delta(E/F)$ l'exposant du discriminant de E/F, c'est-à-dire l'entier $\geqslant 0$ donné par $\delta(E/F) = \nu(N_{E/F}(x))$ pour un (*i.e.* pour tout) élément $x \in E^\times$ tel que $\mathfrak{D}_{E/F} = x\mathfrak{o}_E$. On sait [17, III, §7, prop. 13] que

$$\delta(E/F) \geqslant f(E/F)(e(E/F) - 1) \tag{1}$$

avec égalité si et seulement si l'extension E/F est *modérément ramifiée*, c'est-à-dire si son indice de ramification $e(E/F)$ est premier à p. On note $\sigma(E/F)$ l'entier défini par

$$\sigma(E/F) = \frac{\delta(E/F)}{f(E/F)} - (e(E/F) - 1). \tag{2}$$

On a donc $\sigma(E/F) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $(e(E/F), p) = 1$, où (a, b) désigne le plus grand commun diviseur de a et b.

2.2. L'invariant $\tilde{k}_F(\gamma)$

Soit $\gamma \neq 0$ un élément algébrique sur F. Alors $E = F[\gamma]$ est une extension finie de F, et l'on pose $e = e(E/F)$, $f = f(E/F)$ et $n = ef$.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

L'ensemble $\{\mathfrak{p}_E^i : i \in \mathbb{Z}\}$ des idéaux fractionnaires de $\mathfrak{o}_E$ est une chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux dans E (vu comme un F-espace vectoriel de dimension n). Pour chaque entier k, cette chaîne définit un $\mathfrak{o}$-réseau $\mathfrak{P}^k(E) = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^k(\{\mathfrak{p}_E^i\})$ dans $A(E) = \mathrm{End}_F(E)$, donné par

$$\mathfrak{P}^k(E) = \{u \in A(E) : u(\mathfrak{p}_E^i) \subset \mathfrak{p}_E^{i+k},\ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{P}^0(E)$ est un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $A(E)$, et c'est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $A(E)$ normalisé par $E^\times$ (pour l'identification naturelle $E^\times \subset \mathrm{Aut}_F(E)$). De plus, $\mathfrak{P}(E) = \mathfrak{P}^1(E)$ est le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}(E)$ – c'est donc, en particulier, un idéal fractionnaire de $\mathfrak{A}(E)$ – et pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathfrak{P}^k(E) = \mathfrak{P}(E)^k$. Soit $\mathrm{ad}_\gamma : A(E) \to A(E)$ l'homomorphisme adjoint, donné par

$$\mathrm{ad}_\gamma(u) = \gamma u - u\gamma, \quad u \in A(E).$$

En [1, 1.4.5, 1.4.11] est défini un invariant $k_0(\gamma, \mathfrak{A}(E)) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, que l'on note ici $k_F(\gamma)$. Rappelons sa définition. Si $E = F$, on pose $k_F(\gamma) = -\infty$; sinon, $k_F(\gamma)$ est le plus petit $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'inclusion

$$\mathfrak{P}^k(E) \cap \mathrm{ad}_\gamma(A(E)) \subset \mathrm{ad}_\gamma(\mathfrak{A}(E)).$$

On pose $n_F(\gamma) = -\nu_E(\gamma) \in \mathbb{Z}$ et

$$\tilde{k}_F(\gamma) = k_F(\gamma) + n_F(\gamma) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}. \tag{1}$$

L'élément γ est dit *F-minimal* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

– l'entier $n_F(\gamma)$ est premier à l'indice de ramification $e(E/F)$;
– pour une (*i.e.* pour toute) uniformisante ϖ de F, l'élément $\varpi^{-\nu_E(\gamma)}\gamma^e + \mathfrak{p}_E$ de κ_E engendre l'extension κ_E sur κ.

En particulier, tout élément de $F^\times$ est F-minimal. D'après [1, 1.4.15], si $E \neq F$, on a :

(2) $\tilde{k}_F(\gamma) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si γ est F-minimal.

2.3. L'invariant $\tilde{c}_F(\gamma)$

Continuons avec les hypothèses et les notations de 2.2. Supposons de plus que γ appartient à $\mathfrak{o}_E$. Alors $\mathfrak{o}[\gamma]$ est un sous-anneau de $\mathfrak{o}_E$ et le sous-ensemble $(\mathfrak{o}[\gamma] : \mathfrak{o}_E) \subset \mathfrak{o}_E$ – appelé conducteur de $\mathfrak{o}[\gamma]$ dans $\mathfrak{o}_E$ – défini par

$$(\mathfrak{o}[\gamma] : \mathfrak{o}_E) = \{x \in \mathfrak{o}_E : x\mathfrak{o}_E \subset \mathfrak{o}[\gamma]\}$$

est un idéal de $\mathfrak{o}_E$. On note $c_F(\gamma) \geqslant 0$ l'exposant de cet idéal, c'est-à-dire que l'on pose

$$(\mathfrak{o}[\gamma] : \mathfrak{o}_E) = \mathfrak{p}_E^{c_F(\gamma)}.$$

Soit $\phi_\gamma \in F[t]$ le polynôme minimal de γ sur F et soit $\phi'_\gamma \in F[t]$ la dérivée de ϕ_γ. D'après [17, III, §6, cor. 1], on a :

(1) si l'extension E/F est séparable, alors $(\mathfrak{o}[\gamma], \mathfrak{o}_E) = \phi'_\gamma(\gamma)\mathfrak{D}_{E/F}^-$.

On en déduit que

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

(2) pour $z \in \mathfrak{o} \smallsetminus \{0\}$, on a $c_F(z\gamma) = e(n-1)\nu(z) + c_F(\gamma)$.

En effet, pour $z \in \mathfrak{o} \smallsetminus \{0\}$, on a $\phi'_{z\gamma}(z\gamma) = z^{n-1}\phi'_\gamma(\gamma)$. Si l'extension E/F séparable – par exemple si F est de caractéristique nulle –, d'après (1), on a

$$c_F(z\gamma) - c_F(\gamma) = \nu_E(z^{n-1}) = e(n-1)\nu(z),$$

d'où (2). Si F est de caractéristique p, le résultat se déduit de celui en caractéristique nulle par la théorie des corps locaux proches [2].

On ne suppose plus que γ appartient à $\mathfrak{o}_E$. Grâce à (2), on peut encore définir l'invariant $c_F(\gamma)$: on choisit un élément $z \in \mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$ tel que $z\gamma \in \mathfrak{o}_E$ et l'on pose

$$c_F(\gamma) = c_F(z\gamma) - e(n-1)\nu(z).$$

D'après (2), l'entier $c_F(\gamma)$ est bien défini (c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix de z). On pose

$$\tilde{c}_F(\gamma) = c_F(\gamma) + (n-1)n_F(\gamma). \tag{3}$$

Par construction, on a

$$\tilde{c}_F(z\gamma) = \tilde{c}_F(\gamma), \quad z \in F^\times. \tag{4}$$

Remarque 1. Choisissons un élément $z \in F^\times$ tel que $z\gamma \in \mathfrak{o}_E \smallsetminus \mathfrak{p}_E^e$. Posons $\gamma' = z\gamma$. Puisque $c_F(\gamma') \geqslant 0$ et $n_F(z\gamma) = -\nu_E(\gamma') \geqslant 1 - e$, on a

$$\tilde{c}_F(\gamma) = \tilde{c}_F(\gamma') \geqslant -(n-1)(e-1).$$ ■

Soit $\mathrm{Ad}_\gamma : A(E) \to A(E)$ l'automorphisme $u \mapsto \gamma u \gamma^{-1}$. On pose

$$D_F(\gamma) = \begin{cases} \det_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; A(E)/E) & \text{si } E \neq F \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a

$$D_F(\gamma^{-1}) = (-1)^{n(n-1)} D_F(\gamma),$$

et $D_F(\gamma) \neq 0$ si et seulement si l'extension E/F est séparable. On a aussi :

(5) si l'extension E/F est séparable, alors $\tilde{c}_F(\gamma) = \frac{1}{f}(\nu(D_F(\gamma)) - \delta(E/F))$.

Montrons (5). Supposons l'extension E/F séparable et posons $\delta = \delta(E/F)$. On a

$$D_F(\gamma) = N_{E/F}(\gamma^{1-n}\phi'_\gamma(\gamma)),$$

d'où

$$\nu(D_F(\gamma)) = \nu \circ N_{E/F}(\gamma^{1-n}\phi'_\gamma(\gamma)) = f\nu_E(\gamma^{1-n}\phi'_\gamma(\gamma)).$$

D'autre part, d'après (1), on a

$$c_F(\gamma) = \nu_E(\phi'_\gamma(\gamma)) - \frac{\delta}{f}.$$

On en déduit que

$$\nu(D_F(\gamma)) = f(1-n)\nu_E(\gamma) + fc_F(\gamma) + \delta,$$

puis que

$$\frac{1}{f}(\nu(D_F(\gamma)) - \delta) = (1-n)\nu_E(\gamma) + c_F(\gamma) = \tilde{c}_F(\gamma).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Remarque 2. Supposons que l'extension E/F est totalement ramifiée (mais pas forcément séparable) et soit ϖ_E une uniformisante de E. C'est un élément F-minimal, et puisque $\mathfrak{o}[\varpi_E] = \mathfrak{o}_E$, on a $c_F(\varpi_E) = 0$ et $\tilde{c}_F(\varpi_E) = 1 - n$. Si de plus l'extension E/F est séparable, alors d'après (5), on a $\nu(D_F(\varpi_E)) = \delta + 1 - n$. ■

2.4. La « formule de masse » de Serre

Pour toute extension finie E de F, on note $w(E/F)$ le nombre de F-automorphismes de E. Si F'/F est la sous-extension non ramifiée maximale de E/F, on a donc $w(E/F) = f(E/F)w(E/F')$.

Fixons un entier $n \geqslant 1$ et une clôture séparable F^{sep} de F. Soit $\boldsymbol{\mathcal{E}}(n)$ l'ensemble des sous-extensions de degré n de F^{sep}/F. Pour chaque entier $e \geqslant 1$ divisant n, soit $\boldsymbol{\mathcal{E}}_e(n)$ le sous-ensemble de $\boldsymbol{\mathcal{E}}(n)$ formé des extensions E/F telles que $e(E/F) = e$. Lorsque n est premier à p, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n(n)$ est fini de cardinal n. Si F est de caractéristique p et p divise n, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n(n)$ est infini. En général, d'après Serre [16], on a la *formule de masse*

$$\sum_{E \in \boldsymbol{\mathcal{E}}_n(n)} q^{-\sigma(E/F)} = n, \tag{1}$$

où (rappel) $\sigma(E/F) = \delta(E/F) - (n-1)$. Notons $\mathcal{E}(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-extensions de degré n de F^{sep}/F et $\mathcal{E}_n(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}(n)$ formé des extensions qui sont totalement ramifiées. Pour chaque $E \in \mathcal{E}_n(n)$, il y a exactement $\frac{n}{w(E/F)}$ éléments de $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n(n)$ dans la classe E. La formule (1) s'écrit donc aussi

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_n(n)} \frac{1}{w(E/F)} q^{-\sigma(E/F)} = 1. \tag{2}$$

Remarque 1. Dans [16], Serre donne deux preuves de la formule (2). La première consiste en gros à compter les polynômes d'Eisenstein de degré n (cela devrait en principe pouvoir se déduire des résultats de Krasner, mais l'approche de Serre est plus directe). La seconde, très courte, est une simple application de la formule d'intégration de Hermann Weyl : on fixe une algèbre à division D de centre F et de dimension n^2 sur F. L'ensemble des uniformisantes de D est un ouvert compact de $D^\times$ (c'est un espace principal homogène, à gauche et à droite, sous le groupe des unités de $D^\times$). La formule d'intégration de Weyl appliquée à la fonction caractéristique de cet ensemble donne le résultat. ■

Fixons un entier $e \geqslant 1$ divisant n et posons $f = \frac{n}{e}$. Notons F'/F la sous-extension non ramifiée de degré f de F^{sep}. Soit $\mathcal{E}'(e)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-extensions de degré e de F^{sep}/F' et soit $\mathcal{E}'_e(e)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}'(e)$ formé des extensions qui sont totalement ramifiées. D'après (2), on a

$$\sum_{E \in \mathcal{E}'_e(e)} \frac{1}{w(E/F')} q_{F'}^{-\sigma(E/F')} = 1.$$

Or $\mathcal{E}'_e(e) = \mathcal{E}_e(n)$ et, pour $E \in \mathcal{E}_e(n)$, on a $w(E/F') = \frac{1}{f} w(E/F)$ et $\delta(E/F') = \frac{1}{f}\delta(E/F)$, d'où $\sigma(E/F') = \sigma(E/F)$. On obtient

$$\sum_{E\in\mathcal{E}_e(n)} \frac{1}{w(E/F)} q_{F'}^{-\sigma(E/F)} = \frac{1}{f},$$

avec

$$q_{F'}^{-\sigma(E/F)} = q^{-f\sigma(E/F)} = q^{-(\delta(E/F)-(n-f))}.$$

En sommant sur tous les entiers $e \geqslant 1$ divisant n, on obtient

$$\sum_{E\in\mathcal{E}(n)} \frac{1}{w(E/F)} q_E^{-\sigma(E/F)} = \sum_{e|n} \frac{e}{n}. \tag{3}$$

Remarque 2. La formule (2), ainsi que la formule (3) qui en est issue, s'appuient sur la propriété vérifiée par toute uniformisante ϖ_E dans une extension totalement ramifiée E/F de degré n (remarque 2 de 2.3) : $|D_F(\varpi_E)|q^{\sigma(E/F)} = 1$. Plus généralement, pour $E \in \mathcal{E}(n)$, notant $E_*^\times$ l'ensemble des $\gamma \in E^\times$ tels que $F[\gamma] = E$, on définit la fonction

$$E_*^\times \to \mathbb{R}_{>0},\ \gamma \mapsto |D_F(\gamma)|q_E^{\sigma(E/F)}.$$

On peut la prolonger en une fonction sur $D^\times$, où D est une algèbre à division de centre F et de dimension n^2 sur F, et aussi – plus intéressant encore ! – en une fonction sur $GL(n, F)$. C'est essentiellement l'étude de ce prolongement qui nous intéresse ici. ■

3. Descente centrale au voisinage d'un élément pur

3.1. Éléments quasi réguliers elliptiques

On fixe un entier $N \geqslant 1$ et un F-espace vectoriel V de dimension N. On pose $G = \mathrm{Aut}_F(V)$ et $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_F(V)$, et on munit G et $\mathfrak{g}$ de la topologie definie par F (*i.e.* $\mathfrak{p}$-adique). On note $Z = F^\times$ le centre de G et $\mathfrak{z} = F$ celui de $\mathfrak{g}$. Pour $\gamma \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}_\gamma = \{x \in \mathfrak{g} : \gamma x - x\gamma = 0\}$ le centralisateur de γ dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire le commutant dans $\mathfrak{g}$ de la sous-F-algèbre $F[\gamma] \subset \mathfrak{g}$, et $\det(\gamma)$ le déterminant $\det_F(v \mapsto \gamma v; V)$. Un élément γ de $\mathfrak{g}$ est dit :

- *fermé* (ou *F-fermé*) si $F[\gamma]$ est un produit $E_1 \times \cdots \times E_d$ d'extensions E_i de F ;
- *pur* (ou *F-pur*) si $F[\gamma]$ est une extension de F ;
- *quasi régulier* si $F[\gamma]$ est un produit $E_1 \times \cdots \times E_d$ d'extensions E_i de F tel que $\sum_{i=1}^d [E_i : F] = N$;
- *quasi régulier elliptique* si $F[\gamma]$ est une extension de degré N de F.

Remarque 1. Un élément $\gamma \in \mathfrak{g}$ est fermé si et seulement si l'orbite $\{g^{-1}\gamma g : g \in G\}$ est fermée dans $\mathfrak{g}$ (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique) – cf. [10, 2.3.2]. Parmi les éléments fermés $\gamma \in \mathfrak{g}$, il y a ceux qui sont (absolument) semi-simples, c'est-à-dire tels que $F[\gamma]$ est un produit $E_1 \times \cdots \times E_d$ d'extensions *séparables* E_i de F. On aurait pu aussi appeler *quasi semi-simples* les éléments fermés de $\mathfrak{g}$, mais comme il existe déjà une notion d'élément (absolument) quasi semi-simple différente de celle d'élément fermé introduite ici, on a préféré ne pas le faire. Pour la même raison, on a choisi d'abandonner la terminologie de Bourbaki (reprise dans [10]) : rappelons que les éléments fermés, resp. semi-simples, du présent article sont dans Bourbaki appelés semi-simples, resp. absolument semi-simples. ■

Si γ est un élément fermé de $\mathfrak{g}$, alors en notant e_i l'idempotent primitif associé à E_i dans la décomposition $F[\gamma] = E_1 \times \cdots \times E_d$ et V_i le sous-F-espace vectoriel $e_i(V)$ de V, on a $E_i \subset \mathrm{End}_F(V_i)$ et

$$\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_d, \quad \mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{E_i}(V_i).$$

En particulier, on a $\sum_{i=1}^d [E_i : F] \dim_{E_i}(V_i) = N$, et γ est pur, resp. quasi régulier, si et seulement si $d = 1$, resp. $\dim_{E_i}(V_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, d$ (cette dernière condition est bien sûr équivalente à $\mathfrak{g}_\gamma = F[\gamma]$). Un élément quasi régulier de $\mathfrak{g}$ est quasi régulier elliptique si et seulement si il est pur. Soit γ un élément quasi régulier de $\mathfrak{g}$. Posons $F[\gamma] = E_1 \times \cdots \times E_d$ et écrivons $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_i \in E_i$. Pour $i = 1, \ldots, d$, γ_i est un élément quasi régulier elliptique de $A(E_i) = \mathrm{End}_F(E_i)$. On note $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ l'ensemble des éléments quasi réguliers de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ le sous-ensemble formé des éléments elliptiques. On pose $G_{\mathrm{qr}} = G \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et $G_{\mathrm{qre}} = G \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$. Notons que si $N = 1$, alors $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}} = \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} = \mathfrak{g}$ et $G_{\mathrm{qre}} = G_{\mathrm{re}} = G$; en revanche, si $N > 1$, alors $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \supsetneq G_{\mathrm{qr}}$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}} = G_{\mathrm{qre}}$. On définit comme suit une filtration décroissante $k \mapsto G_{\mathrm{qre}}^k$ de G_{qre} : pour $k \in \mathbb{R}$, on pose

$$G_{\mathrm{qre}}^k = \{\gamma \in G_{\mathrm{qre}} : \nu_F(\gamma) \geqslant k\}.$$

Les « sauts » de cette filtration sont les éléments de $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$: pour $k \in \mathbb{R}$, l'inclusion

$$\bigcup_{k'>k} G_{\mathrm{qre}}^{k'} \subset G_{\mathrm{qre}}^k$$

est stricte si et seulement si $k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$.

On commence par quelques rappels sur les $\mathfrak{o}$-ordres héréditaires dans $\mathfrak{g}$ (cf. [1, 1.1]). On fixe un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire minimal (ou d'Iwahori) $\mathfrak{A}_{\min}$ dans $\mathfrak{g}$ et un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire maximal $\mathfrak{A}_{\max}$ dans $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{A}_{\min}$. Rappelons que $\mathfrak{A}_{\min}$ est le stabilisateur $\mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\mathcal{L})$ d'une chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_i : i \in \mathbb{Z}\}$ dans V telle que $\mathcal{L}_{i+1} \subsetneq \mathcal{L}_i$ et $\mathfrak{p}\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i+N}$. Cette chaîne est unique à translation des indices près, et quitte à changer l'indexation, on peut supposer que $\mathfrak{A}_{\max} = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\{\mathcal{L}_{Ni}\})$ $(= \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}(\mathcal{L}_0))$. Pour chaque entier $e \geqslant 1$ divisant N, on note $\mathfrak{A}_e$ l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire principal dans $\mathfrak{g}$ de période $e(\mathfrak{A}_e|\mathfrak{o}) = e$ tel que $\mathfrak{A}_{\min} \subset \mathfrak{A}_e \subset \mathfrak{A}_{\max}$. On a donc $\mathfrak{A}_e = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\{\mathcal{L}_{(N/e)i}\})$. Ces $\mathfrak{o}$-ordres héréditaires principaux $\mathfrak{A}_e$ dans $\mathfrak{g}$ sont dits *standards*. Ils forment un système de représentants des classes de G-conjugaison d'$\mathfrak{o}$-ordres héréditaires principaux dans $\mathfrak{g}$.

Soit $e \geqslant 1$ un entier divisant N. On note $\mathfrak{P}_e$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}_e$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a donc $\mathfrak{p}^k\mathfrak{A}_e = \mathfrak{P}_e^{ke}$. On note $U_e^0 = U^0(\mathfrak{A}_e)$ le sous-groupe (compact, ouvert) de G défini par $U_e^0 = \mathfrak{A}_e^\times$, $K_e = K(\mathfrak{A}_e)$ le normalisateur de $\mathfrak{A}_e$ dans G et, pour chaque entier $k \geqslant 1$, $U_e^k = U^k(\mathfrak{A}_e)$ le sous-groupe distingué de K_e défini par $U_e^k = 1 + \mathfrak{P}_e^k$. Alors U_e^0 est l'unique sous-groupe compact maximal de K_e. Notons que pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\{\det(\gamma) : \gamma \in \mathfrak{P}_e^k\} = \mathfrak{p}^{k\frac{N}{e}}. \tag{1}$$

Pour tous entiers e, $e' \geqslant 1$ tels que $e|N$ et $e'|e$, on a les inclusions

$$\mathfrak{A}_{\min} \subset \mathfrak{A}_e \subset \mathfrak{A}_{e'} \subset \mathfrak{A}_{\max}$$

et

$$\mathfrak{P}_{\max} \subset \mathfrak{P}_{e'} \subset \mathfrak{P}_e \subset \mathfrak{P}_{\min}.$$

Plus généralement, en posant $a = e/e'$, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a les inclusions

$$\mathfrak{P}_e^{ak} \subset \mathfrak{P}_{e'}^k \subset \mathfrak{P}_e^{a(k-1)+1}. \tag{2}$$

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. Posons $E = F[\gamma]$. L'inclusion $E \subset \mathfrak{g}$ identifie V à un E-espace vectoriel de dimension 1 et le choix d'un vecteur non nul $v \in V$ identifie $\mathfrak{g} = \mathrm{End}_F(V)$ à $A(E)$. Soit $\mathfrak{A}_\gamma$ l'$\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ correspondant à $\mathfrak{A}(E)$ *via* cette identification. Il est principal, de période $e(\mathfrak{A}_\gamma|\mathfrak{o}) = e(E/F)$ et ne dépend pas du choix du vecteur v : c'est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$. On note $\mathfrak{P}_\gamma$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}_\gamma$, et l'on pose $U_\gamma^0 = \mathfrak{A}_\gamma^\times$, $K_\gamma = K(\mathfrak{A}_\gamma)$ et $U_\gamma^k = 1 + \mathfrak{P}_\gamma^k$ $(k \geqslant 1)$. Notons que

$$\nu_E(\gamma) = k \Leftrightarrow \gamma \in \mathfrak{P}_\gamma^k \smallsetminus \mathfrak{P}_\gamma^{k+1}. \tag{3}$$

Si $\mathfrak{A}_\gamma = \mathfrak{A}_{e(E/F)}$, on dit que γ est *en position standard.*

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus petit grand entier inférieur ou égal à a, et $\lceil a \rceil = -\lfloor -a \rfloor$ le plus petit entier supérieur ou égal à a. Pour une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{g}$, on pose ${}^G\mathfrak{X} = \{g^{-1}\gamma g : g \in G,\ x \in \mathfrak{X}\}$.

Lemme 1. *Pour $k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$, on a*

$$G_{\mathrm{qre}}^k = \bigcup_{e|N} G_{\mathrm{qre}} \cap {}^G(\mathfrak{P}_e^{\lfloor ek - \frac{e}{N} \rfloor + 1}).$$

Démonstration. Commençons par l'inclusion $\subset$. Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}^k$. Quitte à remplacer γ par $g^{-1}\gamma g$ pour un élément $g \in G$, on peut supposer γ en position standard. Posons $E = F[\gamma]$, $e = e(E/F)$ et $f = f(E/F)$ $(= \frac{N}{e})$. On a $\nu_E(\gamma) = e\nu_F(\gamma) \geqslant ek \in \frac{1}{f}\mathbb{Z}$. Comme $\nu_E(\gamma) \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\nu_E(\gamma) \geqslant \lfloor ek + \tfrac{f-1}{f} \rfloor = \lfloor ek - \tfrac{1}{f} \rfloor + 1.$$

D'où l'inclusion $\subset$, d'après (3).

Montrons l'inclusion $\supset$. Soit $\gamma \in {}^G(\mathfrak{P}_e^{\lfloor ek - \frac{e}{N} \rfloor + 1})$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$ et un entier $e \geqslant 1$ divisant N. Posons $f = \frac{N}{e}$. D'après (1), on a

$$\nu_F(\gamma) = \tfrac{1}{N}\nu(\det(\gamma)) \geqslant \tfrac{1}{e}(\lfloor ek - \tfrac{1}{f} \rfloor + 1).$$

Écrivons $ek = r + \frac{t}{f}$ avec $r, t \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant t \leqslant f - 1$. On a donc $\lfloor ek - \frac{1}{f} \rfloor = r + \lfloor \frac{t-1}{f} \rfloor$. Comme $\nu_F(\gamma) \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, on obtient que $\nu_F(\gamma) \geqslant \frac{1}{e}(r+1) > k$ si $t > 0$ et $\nu_F(\gamma) \geqslant \frac{r}{e} = k$ si $t = 0$. D'où l'inclusion $\supset$. $\square$

Lemme 2. *Pour $k \in \frac{1}{N} + \mathbb{Z}$, on a*

$$G_{\mathrm{qre}}^k = G_{\mathrm{qre}} \cap {}^G(\mathfrak{P}_{\min}^{Nk}).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Puisque $\mathfrak{P}_{\min}^{Nk}=\mathfrak{P}_N^{\lfloor Nk-\frac{N}{N}\rfloor+1}$, d'après le lemme 1, on a l'inclusion $\supset$. Écrivons $k=\frac{1}{N}+c$ avec $c\in\mathbb{Z}$. Pour chaque entier $e\geqslant 1$ divisant N, on a $\lfloor ek-\frac{e}{N}\rfloor+1=ec+1$ et

$$\mathfrak{P}_e^{\lfloor ek-\frac{e}{N}\rfloor+1}=\mathfrak{P}_e^{ec+1}=\mathfrak{p}^c\mathfrak{P}_e\subset\mathfrak{p}^c\mathfrak{P}_{\min}=\mathfrak{P}_{\min}^{Nc+1}=\mathfrak{P}_{\min}^{Nk}.$$

D'où, à nouveau d'après le lemme 1, l'inclusion $\subset$. $\square$

On définit, comme on l'a fait pour G, une filtration décroissante $k\mapsto\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}^k$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$: pour $k\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}^k=\{\gamma\in\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}:\nu_F(\gamma)\geqslant k\}.$$

Notons que si $N=1$, on a $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}^k=\mathfrak{p}^{\lceil k\rceil}$.

Remarque 2. Pour un entier $n\geqslant 1$ et un polynôme unitaire $\zeta\in F[t]$ de degré n, disons $\zeta(t)=\sum_{i=0}^n a_it^i$, on note $C(\zeta)\in M(n,F)$ la matrice compagnon de ζ définie par

$$C(\zeta)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Via le choix d'une $\mathfrak{o}$-base de $\mathcal{L}$ (cf. [1, 1.1.7]), identifions $\mathfrak{g}$ à $M(N,F)$ et $\mathfrak{A}_{\min}$ à la sous-$\mathfrak{o}$-algèbre de $\mathrm{M}(N,\mathfrak{o})$ formée des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{P}_{\min}$ est la sous-$\mathfrak{o}$-algèbre de $\mathrm{M}(N,\mathfrak{o})$ formée des matrices *strictement* triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}$. Pour $\gamma\in\mathfrak{g}$, notons $\zeta_{\gamma,1},\dots,\zeta_{\gamma,r}$ les invariants de similitude (diviseurs élémentaires) de γ :

- pour $i=1,\dots,r=r_\gamma$, $\zeta_{\gamma,i}\in F[t]$ est un polynôme unitaire de degré $N_i=N_{\gamma,i}$;
- pour $i=2,\dots,r$, $\zeta_{\gamma,i}$ divise $\zeta_{\gamma,i-1}$;
- $\zeta_{\gamma,1}$ est le polynôme minimal de γ ;
- $\zeta_\gamma=\prod_{i=1}^r\zeta_{\gamma,i}$ est le polynôme caractéristique de γ.

On note $\tilde\gamma\in\mathfrak{g}$ la matrice diagonale par blocs de taille $N_1,\dots,N_r$, définie par

$$\tilde\gamma=\mathrm{diag}(C(\zeta_{\gamma,1}),\dots,C(\zeta_{\gamma,r})).$$

D'après le théorème de décomposition de Frobenius, un élément $\gamma'\in\mathfrak{g}$ est dans la classe de G-conjugaison de γ si et seulement si $\tilde\gamma=\tilde\gamma'$, *i.e.* si et seulement si $r_{\gamma'}=r$ et $\zeta_{\gamma',i}=\zeta_{\gamma,i}$ pour $i=1,\dots,r$. Écrivons $\zeta_\gamma(t)=\sum_{j=0}^N a_{\gamma,j}t^j$. Pour $j=0,\dots,N-1$, on a

$$a_{g^{-1}\gamma g,j}=a_{\gamma,j},\quad g\in G,\tag{4}$$

et

$$a_{z\gamma,j}=z^{N-j}a_{\gamma,j},\quad z\in Z=F^\times.\tag{5}$$

On en déduit que pour $k\in\mathbb{Z}$, on a

$$\{\gamma\in\mathfrak{g}:\nu(a_{\gamma,j})\geqslant(N-j)k+1,\ j=0,\dots,N-1\}={}^G(\mathfrak{P}_{\min}^{Nk+1}).\tag{6}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

En effet, puisque pour une uniformisante ϖ de F, on a ${}^G(\mathfrak{P}_{\min}^{Nk+1}) = \varpi^k({}^G(\mathfrak{P}_{\min}))$, d'après (5), il suffit de vérifier (6) pour $k = 0$. Si $\gamma \in \mathfrak{P}_{\min}$, alors $\overline{\gamma} = \gamma \pmod{\mathfrak{p}}$ est un élément nilpotent de $M(N, \kappa)$, et comme $\zeta_\gamma \pmod{\mathfrak{p}} \in \kappa[t]$ coïncide avec le polynôme caractéristique $\zeta_{\overline{\gamma}} = t^N \in \kappa[t]$ de $\overline{\gamma}$, les coefficients $a_{\gamma,j}$ $(j = 0, \ldots, N-1)$ appartiennent à $\mathfrak{p}$. D'après (4), on a donc l'inclusion $\supset$ dans (6) pour $k = 0$. Réciproquement, si $\gamma \in \mathfrak{g}$ est tel que $\nu(a_{\gamma,j}) \geqslant 1$ pour $j = 0, \ldots, N-1$, alors $\zeta_\gamma \pmod{\mathfrak{p}} = t^N$. Puisque l'anneau $\mathfrak{o}[t]$ est factoriel et que les polynômes $\zeta_{\gamma,1}, \ldots, \zeta_{\gamma,r_\gamma} \in F[t]$ sont unitaires (donc en particulier primitifs), ils appartiennent tous à $\mathfrak{o}[t]$ et on a $\zeta_{\gamma,i} \pmod{\mathfrak{p}} = t^{N_{\gamma,i}}$ pour $i = 1, \ldots, r_\gamma$, par conséquent le représentant standard $\tilde{\gamma}$ appartient à $\mathfrak{P}_{\min}$. On a donc aussi l'inclusion $\subset$ dans (6) pour $k = 0$. ■

Notons que l'on peut retrouver le lemme 2 à partir de (6). De plus, d'après (6), pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

(7) ${}^G(\mathfrak{P}_{\min}^{Nk+1})$ est un voisinage ouvert *fermé* et G-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}$.

3.2. Parties compactes modulo conjugaison

Une partie X de G, resp. $\mathfrak{g}$, est dite *compacte modulo conjugaison* (dans G, resp. $\mathfrak{g}$) s'il existe une partie compacte Ω de G, resp. $\mathfrak{g}$, telle que X est contenue dans ${}^G\Omega = \{g^{-1}\gamma g : g \in G,\ \gamma \in \Omega\}$. La caractérisation des parties compactes modulo conjugaison (dans $\mathfrak{g}$) donnée dans [8, 5.2] ne fonctionne plus ici, du fait de la présence possible d'éléments fermés qui ne sont pas semi-simples. On procède donc autrement [3].

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note $F[t]_n$ la variété $\mathfrak{p}$-adique formée des polynômes unitaires de degré n et $q_n : F[t]_n \to F^n$ l'isomorphisme de variétés $\mathfrak{p}$-adiques donné par

$$q_n(\zeta) = (a_{n-1}, \ldots, a_0), \quad \zeta(t) = \textstyle\sum_{i=0}^n a_i t^i.$$

On note $F^\times \times F^n \to F^n$, $(z, \boldsymbol{a}) \mapsto z \cdot \boldsymbol{a}$ l'action de $F^\times$ sur F^n déduite de l'action de $F^\times$ sur $F[t]_n$ donnée par $(z, \zeta) \mapsto z \cdot \zeta$ avec $(z \cdot \zeta)(t) = z^n \zeta(z^{-1}t)$. On a donc

$$z \cdot \boldsymbol{a} = (za_{n-1}, z^2 a_{n-2}, \ldots, z^n a_0), \quad \boldsymbol{a} = (a_{n-1}, \ldots, a_0) \in F^n,\ z \in F^\times.$$

On note aussi $F[t]_n^*$ la sous-variété $\mathfrak{p}$-adique ouverte de $F[t]_n$ formée des polynômes qui ne sont pas divisibles par t et $q_n^* : F[t]_n^* \to F^{n-1} \times F^\times$ l'isomorphisme de variétés $\mathfrak{p}$-adiques déduit de q_n par restriction.

Reprenons les notations de la remarque 2 de 3.1, ainsi que l'identification $\mathfrak{g} = M(N, F)$ donnée par le choix d'un $\mathfrak{o}$-base de $\mathcal{L}$. Soit $\pi = \pi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \to F[t]_N$ l'application polynôme caractéristique $\gamma \mapsto \zeta_\gamma$. Elle est surjective et elle se restreint en une application surjective $\pi_G : G \to F[t]_N^*$. On dispose d'une section $\sigma : F[t]_N \to \mathfrak{g}$ donnée par l'application matrice compagnon $\zeta \mapsto C(\zeta)$. On a $\sigma(F[t]_N^*) \subset G$. D'après [10, 2.3], pour $\zeta \in F[t]_N^*$, la fibre $\pi^{-1}(\zeta)$ au-dessus de ζ – qui est une partie fermée dans G – est une union finie de G-orbites, égale à la fermeture $\overline{\mathcal{O}_G(C(\zeta))}$ de $\mathcal{O}_G(C(\zeta))$ dans G (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique). Parmi ces G-orbites, $\mathcal{O}_G(C(\zeta))$ est l'unique de dimension maximale et il y en a une seule de dimension minimale, qui est l'unique G-orbite fermée (dans G) contenue

3. Les résultats contenus dans ce numéro sont bien connus, mais comme nous n'avons pas trouvé de référence utilisable, nous avons préféré les redémontrer ici.

dans $\pi^{-1}(\zeta)$. De même, pour $\zeta \in F[t]_N$, la fibre $\pi^{-1}(\zeta)$ au–dessus de ζ est une union finie de G-orbites, égale à la fermeture $\overline{\mathcal{O}_G(C(\zeta))}$ de $\mathcal{O}_G(C(\zeta))$ dans $\mathfrak{g}$.

Rappelons que pour $\gamma \in \mathfrak{g}$, on a défini dans la remarque 2 de 3.1 un représentant standard $\tilde{\gamma} \in \mathcal{O}_G(\gamma)$. Pour $\zeta \in F[t]_N$, on note R_ζ l'ensemble (fini) des représentants standards $\tilde{\gamma}$ des éléments $\gamma \in \pi^{-1}(\zeta)$. On a donc $\pi^{-1}(\zeta) = \coprod_{\tilde{\gamma} \in R_\zeta} \mathcal{O}_G(\tilde{\gamma})$.

On note $\Pi = \Pi_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to F^N$ l'application composée $q_N \circ \pi$ et $\Pi_G : G \to F^{N-1} \times F^\times$ sa restriction à G.

Lemme 1. *Soit X une partie de $\mathfrak{g}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est une partie compacte modulo conjugaison (dans $\mathfrak{g}$) ;*

(ii) *il existe une partie compacte Ω de $\mathfrak{g}$ telle que X est contenue dans la fermeture $\overline{{}^G\Omega}$ de ${}^G\Omega$ dans $\mathfrak{g}$ (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique) ;*

(iii) *$\Pi_{\mathfrak{g}}(X)$ est une partie bornée dans F^N.*

Démonstration. On a clairement $(i) \Rightarrow (ii)$, et puisque l'application Π est continue, on a aussi $(ii) \Rightarrow (iii)$. Il suffit donc de prouver que $(iii) \Rightarrow (i)$. Supposons que $\Pi(X)$ est une partie bornée dans F^N. Alors il existe un entier k tel que $\Pi(X)$ est contenue dans la partie ouverte compacte $\varpi^k \cdot \mathfrak{o}^N$ de F^N (pour l'action de $F^\times$ sur F^N introduite plus haut), où ϖ est une uniformisante de F. Pour $\gamma \in \Pi^{-1}(\varpi^k \cdot \mathfrak{o}^N)$, l'expression des coefficients $a_{\gamma,i}$ du polynôme caractéristique de γ en termes des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \overline{F}$ de γ (chaque valeur propre étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité), entraîne la relation

$$\nu_F(\lambda_i) \geqslant k, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

En effet, supposons qu'il existe une valeur propre λ_i telle que $\nu_F(\lambda_i) < k$, et notons $d \geqslant 1$ le nombre de valeurs propres λ_j qui vérifient cette propriété. Alors ou bien $d = N$, ce qui contredit l'inégalité $\nu(a_{\gamma,0}) \geqslant kN$; ou bien $d < N$, et en supposant que les λ_i sont ordonnés de telle manière que $\nu(\lambda_j) < k$ pour $j = 1, \ldots, d$, on a les relations

$$\nu_F(\lambda_1 \cdots \lambda_d) < kd, \quad \nu(a_{N-d}) \geqslant kd.$$

Cela entraîne l'existence d'un « mot » de longueur d, disons $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d}$ avec $i_j \in \{1, \ldots, N\}$, $i_j \neq i_{j'}$ si $j \neq j'$ et $\{i_1, \ldots, i_d\} \neq \{1, \ldots, d\}$, tel que

$$\nu_F(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d}) = \nu(\lambda_1 \cdots \lambda_d).$$

Cela n'est possible que s'il existe une valeur propre λ_j, $j \geqslant d+1$, telle que $\nu(\lambda_j) < k$; contradiction. De (1), on déduit que pour tout $\zeta \in q_N^{-1}(\varpi^k \cdot \mathfrak{o}^N)$ et tout polynôme $\xi \in F[t]_n$ divisant ζ, on a $q_n(\xi) \in \varpi^k \cdot \mathfrak{o}^n$. Posant $k' = \inf\{k, Nk\}$, cela entraîne que le représentant standard $\tilde{\gamma} \in \mathcal{O}_G(\gamma)$ appartient à $\mathfrak{p}^{k'} M(N, \mathfrak{o}) = \mathfrak{P}_{\max}^{k'}$. On a donc

$$X \subset \Pi^{-1}(\varpi^k \cdot \mathfrak{o}^N) \subset {}^G(\mathfrak{P}_{\max}^{k'}),$$

et le lemme est démontré. □

Remarque 1. Du lemme 1, on déduit en particulier que l'on peut choisir des voisinages ouverts fermés et G-invariants du cône nilpotent dans $\mathfrak{g}$ aussi petits que l'on veut, ce que l'on savait déjà d'après 3.1.(7). Précisément, si Λ est un $\mathfrak{o}$-réseau dans $\mathfrak{g}$, alors il existe un voisinage ouvert fermé et G-invariant X de $\Pi^{-1}(0^N)$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $X \subset {}^G\Lambda$. En effet, d'après le lemme 1, on a $\Pi^{-1}(\mathfrak{o}^N) \subset {}^G(\mathfrak{A}_{\max})$. Soit un entier $k \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{P}_{\max}^k \subset \Lambda$. Alors $X = \Pi^{-1}(\varpi^k \cdot \mathfrak{o}^N)$ convient. ■

Avant de poursuivre, rappelons quelques faits élémentaires sur la structure de $F[t]_n^*$, $n \geqslant 1$. Pour $\zeta \in F[t]_n^*$, on peut écrire $\zeta = \prod_{i=1}^r f_i^{d_i}$ pour des polynômes irréductibles $f_i \in F[t]_{n_i}^*$ et des entiers $d_i \geqslant 1$ tels que $\sum_{i=1}^r n_i d_i = n$. Pour chaque entier k, notons $\mathcal{V}_k(\zeta)$ l'ensemble des polynômes $\zeta' \in F[t]_n$ tels que, posant $\zeta(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ et $\zeta' = \sum_{i=1}^n a_i' t^i$, on a $a_i' - a_i \in \mathfrak{p}^k$ pour $i = 0, \dots, n-1$. C'est un voisinage ouvert compact de ζ dans $F[t]_n$. Puisque $a_{\zeta,0} \neq 0$, la condition $k > \nu(a_{\zeta,0})$ assure que $\mathcal{V}_k(\zeta)$ est contenu dans $F[t]_n^*$. D'après [10, 2.5], si l'entier k est suffisamment grand, alors pour tout $\zeta' \in \mathcal{V}_k(f)$, on a :

- $\zeta' = \prod_{i=1}^r \zeta_i'$ pour des polynômes $\zeta_i' \in F[t]_{n_i d_i}^*$;
- pour $i = 1, \dots, r$ et pour toute composante irréductible f_i' de ζ_i', le degré de ζ_i' est divisible par $n_i = \deg(f_i)$.

La première propriété est une conséquence du lemme de Hensel et la seconde est une variante du lemme de Krasner (cf. [10, 2.5.1]). On note k_ζ le plus petit entier $k > \nu(a_{\zeta,0})$ vérifiant ces deux propriétés. On en déduit que pour tout entier m, il existe un plus petit entier $k_\zeta(m) \geqslant k_\zeta$ tel que pour tout $\zeta' \in \mathcal{V}_{k_\zeta(m)}(\zeta)$, on a :

- pour tout polynôme unitaire h' divisant ζ', il existe un unique polynôme unitaire h divisant ζ tel que $h' \in \mathcal{V}_m(h)$.

Le voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_{k_\zeta(m)}(\zeta)$ de ζ dans $F[t]_n$ est contenue dans $F[t]_n^*$, par conséquent h' appartient à $F[t]_{\deg(h)}^*$. Si de plus on suppose, ce qui est toujours possible, que pour tout polynôme unitaire h divisant ζ, on a $m > \nu(a_{h,0})$, alors le voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_m(h)$ de h dans $F[t]_{\deg(h)}$ est contenu dans $F[t]_{\deg(h)}^*$.

Le lemme 2 est la version sur G du lemme 1. Le lemme 3 est une conséquence de la preuve du lemme 2, qui nous servira plus loin.

Lemme 2. *Soit X une partie de G. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est une partie compacte modulo conjugaison (dans G) ;*

(ii) *il existe une partie compacte Ω de G telle que X est contenu dans la fermeture $\overline{{}^G\Omega}$ de ${}^G\Omega$ dans G (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique) ;*

(iii) *$\Pi_G(X)$ est une partie bornée dans $F^{N-1} \times F^\times$.*

Démonstration. Comme pour le lemme 1, les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont claires. Il suffit donc de prouver que$(iii) \Rightarrow (i)$. Supposons que $\Pi_G(X)$ est une partie bornée dans $F^{N-1} \times F^\times$. Pour $\zeta \in F[t]_N^*$, notons m_ζ le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que pour tout $\gamma \in \pi^{-1}(\zeta)$, on a $\tilde{\gamma} + \mathfrak{P}_{\max}^m \subset \tilde{\gamma} U_{\max}^1$ avec $U_{\max}^1 = 1 + \mathfrak{P}_{\max}$. Un tel m_ζ existe car l'ensemble $R_\zeta = \{\tilde{\gamma} : \gamma \in \pi^{-1}(\zeta)\}$ est fini. On peut recouvrir $\pi(X)$ par des ouverts compacts de $F[t]_N^*$ de la forme $\mathcal{V}_k(\zeta)$ avec $\zeta \in F[t]_N^*$ et $k \geqslant k_\zeta(m_\zeta)$:

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

$$\pi(X) \subset \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{V}_{k_j}(\zeta_j), \quad \zeta_j \in F[t]_N^*,\ k_j \geqslant k_{\zeta_j}(m_{\zeta_j}).$$

Il suffit de vérifier que pour un tel ouvert compact $\mathcal{V}_k(\zeta) \subset F[t]_N^*$, la partie $\pi^{-1}(\mathcal{V}_k(\zeta))$ est compacte modulo conjugaison dans G. Cela résulte des définitions : pour $\gamma' \in \pi^{-1}(\mathcal{V}_k(\zeta))$, la condition $k \geqslant k_\zeta(m_\zeta)$ assure l'existence d'un élément $\gamma \in \pi^{-1}(\zeta)$ – bien déterminé à conjugaison près dans G – tel que

$$\tilde{\gamma}' \in \tilde{\gamma} + \mathfrak{P}_{\max}^{m_\zeta} \subset \tilde{\gamma} U_{\max}^1.$$

On a donc l'inclusion

$$\pi^{-1}(\mathcal{V}_k(\zeta)) \subset {}^G\big(\textstyle\bigcup_{\tilde{\gamma} \in R_\zeta} \tilde{\gamma} U_{\max}^1\big),$$

et le lemme est démontré. □

Lemme 3. *Soit $\beta \in G$ un élément fermé et soit J un sous-groupe ouvert compact de G. Il existe un voisinage ouvert fermé et G-invariant X de β dans G tel que $X \subset {}^G(\beta J)$.*

Démonstration. D'après la preuve du lemme 2, pour tout polynôme $\zeta \in F[t]_N^*$ et tout système de représentants $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\} \subset G$ des G-orbites $\mathcal{O}_G(\gamma)$ contenues dans $\pi^{-1}(\zeta)$, il existe une partie X ouverte fermée et G-invariante dans G telle que $X \subset \bigcup_{j=1}^s {}^G(\gamma_j J)$. En effet, pour $j = 1, \dots, s$, on écrit $\gamma_j = g_j^{-1} \tilde{\gamma}_j g_j$ avec $g_j \in G$. Posons $J' = \bigcap_{j=1}^s g_j J g_j^{-1}$ et choisissons un entier $m \geqslant 1$ tel que pour $j = 1, \dots, s$, on a $\tilde{\gamma}_j + \mathfrak{P}_{\max}^m \subset \tilde{\gamma}_j J'$. Enfin, choisissons un entier $k \geqslant k_\zeta(m)$ et prenons $X = \pi^{-1}(\mathcal{V}_k(\zeta))$. Alors (d'après la preuve du lemme 2) on a

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{s} {}^G(\tilde{\gamma}_j + \mathfrak{P}_{\max}^m) \subset \bigcup_{j=1}^{s} {}^G(\tilde{\gamma}_j J') \subset \bigcup_{j=1}^{s} {}^G(\gamma_j J).$$

Prenons $\zeta = \zeta_\beta$ et $\gamma_1 = \beta$. Pour toute G-orbite $\mathcal{O} \subset \pi^{-1}(\zeta)$, puisque la fermeture $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ dans G contient $\mathcal{O}_G(\beta)$, le voisinage ouvert compact βJ de β dans G rencontre $\mathcal{O}$. On peut donc, pour $j = 2, \dots, s$, choisir l'élément γ_j dans βJ. D'où le lemme. □

Remarque 2. Si Ω est une partie ouverte compacte de $\mathfrak{g}$, resp. G, pour que ${}^G\Omega$ soit fermé dans $\mathfrak{g}$, resp. G, il suffit que ${}^G\Omega = \Pi^{-1}(\Pi(\Omega))$. Cette égalité est vérifiée si et seulement si pour tout $\gamma \in \Omega$, il existe un élément fermé (dans $\mathfrak{g}$) $\gamma' \in \Omega \cap \overline{\mathcal{O}_G(\gamma)}$. En effet, si ${}^G\Omega = \Pi^{-1}(\Pi(\Omega))$, alors pour $\gamma \in \Omega$, on a $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma)} \subset \Pi^{-1}(\Pi(\gamma)) \subset {}^G\Omega$. D'autre part, si $\gamma' \in \Omega$ est un élément fermé (dans $\mathfrak{g}$), pour tout voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_{\gamma'}$ de γ' dans $\mathfrak{g}$ contenu dans Ω, on a $\Pi^{-1}(\Pi(\gamma')) \subset {}^G(\mathcal{V}_{\gamma'}) \subset {}^G\Omega$. ■

3.3. Des (W, E)-décompositions

Pour un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire (pas forcément principal) $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ son radical de Jacobson, $K(\mathfrak{A})$ son normalisateur dans G et $\{U^k(\mathfrak{A}) : k \geqslant 0\}$ la suite de sous-groupes ouverts compacts distingués de $K(\mathfrak{A})$ définie par

$$U^0(\mathfrak{A}) = U(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\times,$$

$$U^k(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^k, \quad k \geqslant 1.$$

Soit E/F une extension telle que $E \subset \mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$. Soit W un sous-F-espace vectoriel de V tel que l'application naturelle $E \otimes_F W \to V$ (induite par l'inclusion $W \subset V$ et par l'action de E sur V donnée par l'inclusion $E \subset \mathfrak{g}$) est un isomorphisme. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de $(A(E), \mathfrak{b})$-bimodules

$$\tau_W = \tau_{W,E} : A(E) \otimes_E \mathfrak{b} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g} \tag{1}$$

appelé (W, E)-*décomposition de* $\mathfrak{g}$ (cf. [1, 1.2.6]). Précisons l'isomorphisme (1). L'extension E de F s'identifie naturellement à un sous-corps maximal de $A(E)$ et le choix de W induit un homomorphisme injectif de F-algèbres

$$\iota_W = \iota_{W,E} : A(E) \to \mathfrak{g}$$

qui prolonge l'inclusion $E \subset \mathfrak{g}$. En considérant $A(E)$ comme un (E, E)-bimodule, on a une identification naturelle $A(E) = A(E) \otimes_E E$. D'autre part, l'isomorphisme de E-espaces vectoriels $E \otimes_F W \simeq V$ induit un isomorphisme de E-algèbres

$$E \otimes_F \mathrm{End}_F(W) = \mathrm{End}_E(E \otimes_F W) \simeq \mathfrak{b}.$$

En le combinant avec l'isomorphisme de F-algèbres

$$A(E) \otimes_F \mathrm{End}_F(W) = \mathrm{End}_F(E \otimes_F W) \simeq \mathfrak{g},$$

on obtient l'isomorphisme (1). Concrètement, pour $a \in A(E)$, $e \in E$ et $w \in W$, on a

$$\iota_W(a)(e \otimes w) = a(e) \otimes w,$$

et pour $b \in \mathfrak{b}$, on a

$$\tau_W(a \otimes b) = \iota_W(a)b.$$

Remarque 1. Soit E'/F une extension telle que $E' \subset A(E)$. On suppose que E' est un sous-corps maximal de $A(E)$. Le sous-F-espace vectoriel $W' = F$ de E engendre E sur E' (c'est-à-dire que l'application naturelle $E' \otimes_F W' \to E$ est un isomorphisme) et l'homomorphisme injectif de F-algèbres $\iota = \iota_{W',E'} : A(E') \to A(E)$ est un isomorphisme. D'autre part, comme l'application naturelle $E' \otimes_F W \to V$ est un isomorphisme, on a aussi une (W, E')-décomposition de $\mathfrak{g}$

$$\tau_{W,E'} : A(E') \otimes_{E'} \mathfrak{b}' \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{b}' = \mathrm{End}_{E'}(W).$$

Posons $\mathfrak{a} = \mathrm{End}_F(W)$. L'isomorphisme ι se prolonge naturellement en un isomorphisme de F-algèbres

$$\tau_{W,E,E'} : A(E') \otimes_{E'} \mathfrak{b}' = A(E') \otimes_F \mathfrak{a} \xrightarrow{\simeq} A(E) \otimes_F \mathfrak{a} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}.$$

Il vérifie

$$\tau_{W,E} \circ \tau_{W,E,E'} = \tau_{W,E'},$$

et c'est le seul isomorphisme de F-algèbres $A(E') \otimes_{E'} \mathfrak{b}' \xrightarrow{\simeq} A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ qui vérifie l'égalité ci-dessus. ■

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Rappelons qu'une *corestriction modérée sur* $\mathfrak{g}$ *relativement à* E/F est un homomorphisme de $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$-bimodules $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ tel que $\boldsymbol{s}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$ pour tout $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^{\times}$. D'après [1, 1.3.4], une telle corestriction modérée $\boldsymbol{s}$ sur $\mathfrak{g}$ existe et elle est unique à multiplication près par un élément de $\mathfrak{o}_E^{\times}$. De plus, pour tout $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^{\times}$, de radical de Jacobson $\mathfrak{P}$, on a

$$\boldsymbol{s}(\mathfrak{P}^k) = \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{b}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'après [1, 1.3.9], si $\boldsymbol{s}_E : A(E) \to E$ est une corestriction modérée sur $A(E)$ relativement à E/F, alors – pour l'identification $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ donnée par (1) – $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_E \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F, et d'après la propriété d'unicité, toute corestriction modérée sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F est de cette forme.

Fixons un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^{\times}$ et posons $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$. C'est un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{b}$. Posons $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$. D'après [1, 1.2.4], on a

$$\mathfrak{Q}^k = \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{b}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et les périodes $e(\mathfrak{A}|\mathfrak{o})$ et $e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$ sont reliées par l'égalité

$$e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E) = \frac{e(\mathfrak{A}|\mathfrak{o})}{e(E/F)}.$$

Écrivons $\mathfrak{A} = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\mathcal{L})$ pour une chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux $\mathcal{L} = \{L_i\}$ dans V. Puisque $\mathfrak{A}$ est normalisé par $E^{\times}$, chaque $\mathfrak{o}$-réseau L_i est en réalité un $\mathfrak{o}_E$-réseau. Supposons de plus que W est engendré sur F par une $\mathfrak{o}_E$-base de $\mathcal{L}$ (cf. [1, 1.1.7]). Alors d'après [1, 1.2.10], pour $k \in \mathbb{Z}$, l'isomorphisme (1) se restreint en un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(E), \mathfrak{B})$-bimodules

$$\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{Q}^k \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{P}^k \tag{2}$$

En particulier, pour $k = 0$, on a un isomorphisme de $(\mathfrak{A}(E), \mathfrak{B})$-bimodules

$$\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A} \tag{3}$$

appelé (W, E)-*décomposition de* $\mathfrak{A}$.

Remarque 2. L'application $\mathfrak{B}_1 \mapsto \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}_1$ est une bijection de l'ensemble des $\mathfrak{o}_E$-ordres héréditaires dans $\mathfrak{b}$ sur l'ensemble des $\mathfrak{o}$-ordres héréditaires $\mathfrak{A}_1$ dans $\mathfrak{g}$ de la forme $\mathfrak{A}_1 = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}}^0(\mathcal{L}_1)$ pour une chaîne de $\mathfrak{o}_E$-réseaux $\mathcal{L}_1$ possédant une $\mathfrak{o}_E$-base qui engendre W sur F, de bijection réciproque $\mathfrak{A}_1 \mapsto \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{b}$.

Remarque 3. Soit E'/F une extension telle que $E' \subset A(E)$. On suppose que E' est un sous-corps maximal de $A(E)$ et que $E'^{\times}$ normalise $\mathfrak{A}(E)$. Alors $\mathfrak{A}(E)$ est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $A(E)$ normalisé par $E'^{\times}$. On a donc $e(E'/F) = e(E/F)$ et $f(E'/F) = f(E/F)$, et pour $k \in \mathbb{Z}$, le $\mathfrak{o}$-réseau $\mathfrak{p}_E^k$ dans E est un $\mathfrak{o}_{E'}$-réseau (c'est donc un $\mathfrak{o}_{E'}$-module libre de rang 1). De plus, avec les notations de la remarque 2, l'isomorphisme de F-algèbres $\iota : A(E') \xrightarrow{\simeq} A(E)$ se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{A}(E') \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}(E)$. Identifions E' au sous-corps $\tau_{W,E}(E' \otimes 1)$ de $\tau_{W,E}(A(E) \otimes_E \mathfrak{b}) = \mathfrak{g}$. On a donc aussi l'identification

$$E' = \tau_{W,E'}(E' \otimes 1) \subset \tau_{W',E'}(A(E') \otimes_{E'} W) = \mathfrak{g}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Chaque $\mathfrak{o}_E$-réseau L_i dans V de la chaîne $\mathcal{L}=\{L_i\}$ définissant $\mathfrak{A}$ est aussi un $\mathfrak{o}_{E'}$-réseau. Par conséquent, l'$\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ est normalisé par $E'^{\times}$, et posant $\mathfrak{B}'=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b}'$, la (W,E')-décomposition $\tau_{W,E'}:A(E')\otimes_{E'}\mathfrak{b}'\xrightarrow{\simeq}\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ se restreint en une (W,E')-décomposition $\mathfrak{A}(E')\otimes_{\mathfrak{o}_{E'}}\mathfrak{B}'\xrightarrow{\simeq}\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$. On en déduit que l'isomorphisme de F-algèbres $\tau_{W,E,E'}:A(E')\otimes_{E'}\mathfrak{b}'\xrightarrow{\simeq}A(E)\otimes_E\mathfrak{b}$ se restreint en un isomorphisme

$$\mathfrak{A}(E')\otimes_{\mathfrak{o}_{E'}}\mathfrak{B}'\xrightarrow{\simeq}\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{B}. \qquad \blacksquare$$

3.4. Une submersion

Soit $\beta\in\mathfrak{g}$ un élément pur. Posons $E=F[\beta]$ et $\mathfrak{b}=\mathrm{End}_E(V)$. Fixons un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^{\times}$, posons $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b}$ et identifions $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{B}$ *via* le choix d'une (W,E)-décomposition de $\mathfrak{A}$ – cf. 3.3.(3). Posons $\mathfrak{P}=\mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{Q}=\mathrm{rad}(\mathfrak{B})$. On a donc les identifications

$$\mathfrak{g}=A(E)\otimes_E\mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{P}^k=\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{Q}^k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A})=\{x\in\mathfrak{A}:\mathrm{ad}_\beta(x)\in\mathfrak{P}^k\}\subset\mathfrak{A}.$$

C'est un $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$-biréseau dans $\mathfrak{g}$, qui vérifie $\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A})\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$. D'après [1, 1.4.4], on a

$$\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A})=\mathfrak{B},$$

et pour k suffisamment grand, on a $\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A})\subset\mathfrak{B}+\mathfrak{P}$. Si $E\neq F$, on note $k_0(\beta,\mathfrak{A})$ le plus grand entier k tel que $\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A})\not\subset\mathfrak{B}+\mathfrak{P}$; sinon, on pose $k_0(\beta,\mathfrak{A})=-\infty$. De manière équivalente [1, 1.4.11.(iii)], si $E\neq F$, $k_0(\beta,\mathfrak{A})$ est le plus petit entier k tel que $\mathfrak{P}^k\cap\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g})\subset\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{A})$. Pour tous entiers k, r tels que $k\geqslant k_0(\beta,\mathfrak{A})$ et $r\geqslant 1$, on a l'égalité [1, 1.4.9]

$$\mathfrak{N}_{k+r}(\beta,\mathfrak{A})=\mathfrak{B}+\mathfrak{Q}^r\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A}). \tag{1}$$

Rappelons qu'en 2.2, on a posé $k_F(\beta)=k_0(\beta,\mathfrak{A}(E))$. D'après [1, 1.4.13], on a

$$\mathfrak{N}_{e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)k}(\beta,\mathfrak{A})=\mathfrak{N}_k(\beta,\mathfrak{A}(E))\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{B},\quad k\in\mathbb{Z},$$

et

$$k_0(\beta,\mathfrak{A})=e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)k_F(\beta).$$

Soit $\nu_{\mathfrak{A}}:\mathfrak{g}\to\mathbb{Z}$ la « valuation sur $\mathfrak{g}$ » définie par la filtration $\{\mathfrak{P}^k:k\in\mathbb{Z}\}$, donnée par

$$\nu_{\mathfrak{A}}(x)=k\Leftrightarrow x\in\mathfrak{P}^k\smallsetminus\mathfrak{P}^{k+1}.$$

On a

$$\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)=\nu_E(\beta)e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)\ (=-n_F(\beta)e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)),$$

par conséquent si $E\neq F$, on a $k_0(\beta,\mathfrak{A})\geqslant\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$ si et seulement si $k_F(\beta)\geqslant\nu_E(\beta)$, avec égalité si et seulement si β est F-minimal [1, 1.4.15] (cf. 2.2).

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Fixons une corestriction modérée $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F et un élément $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}$ tel que $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = 1$. Puisque $\boldsymbol{s}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{b}$ et $\ker(\boldsymbol{s}) = \mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g})$, on a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) \oplus \boldsymbol{x}\mathfrak{b}. \tag{2}$$

Pour tout entier $k \geqslant k_0(\beta, \mathfrak{A})$, la décomposition (2) se précise en [1, 1.4.7]

$$\mathfrak{P}^k = \mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{N}_k(\beta, \mathfrak{A})) \oplus \boldsymbol{x}\mathfrak{Q}^k. \tag{3}$$

Remarque. L'ensemble des $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}$ tels que $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = 1$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{A}$. Or $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}_\beta(A(E)) \otimes_E \mathfrak{b}$, et comme $\mathfrak{B}$ est un $\mathfrak{o}_E$-module libre, on a

$$\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{A} = \mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}) = (\mathrm{ad}_\beta(A(E)) \cap \mathfrak{A}(E)) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}.$$

Écrivons $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$, où $\boldsymbol{s}_0 : A(E) \to E$ est une corestriction modérée sur $A(E)$ relativement à E/F. L'ensemble des $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{A}(E)$ tels que $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}_0) = 1$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{ad}_\beta(A(E)) \cap \mathfrak{A}(E)$, et pour un tel $\boldsymbol{x}_0$, on a $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}_0 \otimes 1) = 1$. ■

Proposition. *On suppose $E \neq F$. L'application*

$$\delta : G \times \mathfrak{Q}^{k_0(\beta,\mathfrak{A})+1} \to G,\ (g, b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$$

est partout submersive.

Démonstration. Posons $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$. Puisque $\delta(g, b) = g^{-1}\delta(1, b)g$, il suffit de prouver que pour tout $b_1 \in \mathfrak{Q}^{k_0+1}$, la différentielle $d\delta_{(1,b_1)}$ de δ en le point $(1, b_1)$ est surjective. Fixons un élément $b_1 \in \mathfrak{Q}^{k_0+1}$. En identifiant l'espace tangent à $G \times \mathfrak{Q}^{k_0+1}$ au point $(1, b_1)$ à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{b}$ et l'espace tangent à G au point $\gamma_1 = \beta + \boldsymbol{x}b_1$ à $\mathfrak{g}$, la différentielle $d\delta_{(1,b_1)} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ s'écrit

$$d\delta_{(1,b_1)}(y, b) = \gamma_1 y - y\gamma_1 + \boldsymbol{x}b.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathfrak{Q}^{i-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})\mathfrak{Q}^{i-k_0}$, on a

$$\gamma_1 y - y\gamma_1 \equiv \mathrm{ad}_\beta(y) \pmod{\mathfrak{P}^{i+1}}.$$

Comme d'après (3) on a la décomposition $\mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})) \oplus \boldsymbol{x}\mathfrak{Q}^{k_0} = \mathfrak{P}^{k_0}$, on obtient que

$$d\delta_{(1,b_1)}(\mathfrak{Q}^{i-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) \times \mathfrak{Q}^i) + \mathfrak{P}^{i+1} = \mathfrak{P}^i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Par approximations successives, on en déduit que

$$d\delta_{(1,b_1)}(\mathfrak{Q}^{i-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) \times \mathfrak{Q}^i) = \mathfrak{P}^i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, $d\delta_{(1,b_1)}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{g}$ et la proposition est démontrée. □

3.5. Raffinement

Une *strate dans* $\mathfrak{g}$ est par définition un quadruplet $[\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$, où $\mathfrak{A}$ est un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$, n et r sont deux entiers tels que $n > r$, et γ est un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\nu_{\mathfrak{A}}(\gamma) \geqslant -n$. Une telle strate équivaut donc à la donnée d'un élément $\gamma + \mathfrak{P}^{-r}$ dans le groupe quotient $\mathfrak{P}^{-n}/\mathfrak{P}^{-r}$, où l'on a posé $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$. D'ailleurs, deux strates $[\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$ et $[\mathfrak{A}', n', r', \gamma']$ dans $\mathfrak{g}$ sont dites *équivalentes* si $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, $n' = n$, $r' = r$ et si $\gamma' - \gamma \in \mathfrak{P}^{-r}$. On rappelle la définition de strate *pure*, resp. *simple*, dans $\mathfrak{g}$ [1, 1.5.5].

Définition. Une strate $[\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est dite :

– *pure* si l'élément γ est pur, $F[\gamma]^\times$ normalise $\mathfrak{A}$ et $\nu_{\mathfrak{A}}(\gamma) = -n$;

– *simple* si elle est pure et si $r < -k_0(\gamma, \mathfrak{A})$.

Remarque 1. Soit $[\mathfrak{A}, n, n-1, \gamma]$ une strate simple dans $\mathfrak{g}$. On a $\nu_{\mathfrak{A}}(\gamma) = -n$ et $n - 1 < -k_0(\gamma, \mathfrak{A})$. Si de plus $F[\gamma] \neq F$, comme on a aussi $-n \leqslant k_0(\gamma, \mathfrak{A})$, cette inégalité est une égalité. Dans tous les cas, l'élément γ est F-minimal. ■

À une strate dans $\mathfrak{g}$ de la forme $[\mathfrak{A}, n, n-1, \gamma]$ est associé comme suit un polynôme caractéristique $\phi_\gamma = \phi_{[\mathfrak{A},n,n-1,\gamma]} \in \kappa[t]$. Rappelons sa définition [1, 2.3]. On pose $e = e(\mathfrak{A}|\mathfrak{o})$, $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$, on choisit une uniformisante ϖ de F etl' on note $\delta = (e, n) \geqslant 1$ le plus grand diviseur commun de e et n. Alors $y_\gamma = \varpi^{n/\delta}\gamma^{e/\delta} + \mathfrak{P}$ est un élément de $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$, qui ne dépend que de la classe d'équivalence de la strate $[\mathfrak{A}, n, n-1, \gamma]$. Si $\mathfrak{A} = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}}(\mathcal{L})$ pour une chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux $\mathcal{L} = \{L_i\}$ dans V, on a les identifications

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{P} = \coprod_{i=0}^{e-1} \mathrm{End}_\kappa(L_i/L_{i+1}) \subset \mathrm{End}_\kappa(L_0/\mathfrak{p}L_0),$$

et on note $\phi_\gamma \in \kappa[t]$ le polynôme caractéristique de $y_\gamma \in \mathrm{End}_\kappa(L_0/\mathfrak{p}L_0)$ – à ne pas confondre avec le polynôme caractéristique $\zeta_\gamma \in F[t]$ du F-endomorphisme γ de V. Tout comme l'élément y_γ, il ne dépend que de la classe d'équivalence de la strate $[\mathfrak{A}, n, n-1, \gamma]$.

Soit $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ une strate simple dans $\mathfrak{g}$. On a donc $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$ et

$$r < \inf\{-k_0(\beta, \mathfrak{A}), n\}.$$

Posons $E = F[\beta]$, $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$ et notons $\mathfrak{B}$ l'$\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{b}$. Puisque $k_0(\beta, \mathfrak{A}) = k_F(\beta)e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$ et $n = n_F(\beta)e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$, on a

$$\frac{r}{e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)} < \inf(-k_F(\beta), n_F(\beta)\}.$$

Posons $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$. Fixons une corestriction modérée $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F. La proposition suivante est due à Bushnell-Kutzko [1, 2.2.3] et son corollaire est prouvé dans [10, 5.3.2].

Proposition 1. *Soit $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ une strate simple dans $\mathfrak{b}$ telle que $E[b]$ $(= F[\beta, b])$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$. Soit $\gamma = \beta + y$ pour un $y \in \mathfrak{P}^{-r}$ tel que $\boldsymbol{s}(y) = b$. La strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, et l'extension $F[\gamma]/F$ vérifie $e(F[\gamma]/F) = e(E[b]/F)$ et $f(F[\gamma]/F) = f(E[b]/F)$. En particulier, $F[\gamma]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$. De plus, on a*

$$k_F(\gamma) = \begin{cases} -r = k_E(b) & \text{si } E[b] \neq E \\ k_0(\beta, \mathfrak{A}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Corollaire 1. *Soit $\boldsymbol{s}_b : \mathfrak{b} \to E[b]$ une corestriction modérée sur $\mathfrak{b}$ relativement à $E[b]/E$. Il existe une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_\gamma : \mathfrak{g} \to F[\gamma]$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à $F[\gamma]/F$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathfrak{P}^k$, on a*

$$\boldsymbol{s}_\gamma(y) \equiv \boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}(y) \pmod{\mathfrak{P}^{k+1}}.$$

Remarque 2. D'après le corollaire 1, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a les égalités

$$\mathfrak{p}^k_{F[\gamma]} + \mathfrak{P}^{k+1} = \mathfrak{p}^k_{E[b]} + \mathfrak{P}^{k+1}$$

et

$$\ker(s_\gamma|_{\mathfrak{P}^k}) + \mathfrak{P}^{k+1} = \ker(s_b \circ s|_{\mathfrak{P}^k}) + \mathfrak{P}^{k+1}.$$

Via les identifications naturelles

$$(\mathfrak{p}^k_{F[\gamma]} + \mathfrak{P}^{k+1})/\mathfrak{P}^{k+1} = \mathfrak{p}^k_{F[\gamma]}/\mathfrak{p}^{k+1}_{F[\gamma]},$$

on a donc une identification (naturelle) $\mathfrak{p}^k_{F[\gamma]}/\mathfrak{p}^{k+1}_{F[\gamma]} = \mathfrak{p}^k_{E[b]}/\mathfrak{p}^{k+1}_{E[b]}$, et cette dernière coïncide avec celle donnée par l'isomorphisme $\mathfrak{p}^k_{E[b]}/\mathfrak{p}^{k+1}_{E[b]} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{p}^k_{F[\gamma]}/\mathfrak{p}^{k+1}_{F[\gamma]}$ déduit, par restriction et passage aux quotients, de l'application $E[b] \to F[\gamma]$, $y \mapsto s_\gamma(\tilde{x} y)$; où $\tilde{x}$ est un élément de $\mathfrak{A}$ tel que $s_b \circ s(\tilde{x}) = 1$. ∎

La strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \beta + y]$ est un *raffinement* de la strate simple $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$, de *strate dérivée associée* la strate simple $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$. Nous allons voir plus loin (3.6) que tout élément $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$ définit une strate simple $[\mathfrak{A}_\gamma, n, r-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ avec $r = -k_F(\gamma)$, que l'on peut réaliser comme un raffinement de la forme ci-dessus.

Identifions $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}$ *via* le choix d'une (W, E)-décomposition de $\mathfrak{A}$ – cf. 3.3.(3). Soit $s_0 : A(E) \to E$ la corestriction modérée sur $A(E)$ relativement à E/F telle que $s = s_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$. Fixons un élément $x_0 \in \mathfrak{A}(E)$ tel que $s_0(x_0) = 1$. Posons $x = x_0 \otimes 1 \in \mathfrak{A}$. On a donc $s(x) = 1$. La proposition suivante est une simple variante de la proposition 1 : le choix particulier de $y = x_0 \otimes b$ permet de supprimer l'hypothèse selon laquelle $E[b]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$.

Proposition 2. *Soit* $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ *une strate simple dans* $\mathfrak{b}$ *etsoit* $\gamma = \beta + x_0 \otimes b$. *La strate* $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ *dans* $\mathfrak{g}$ *est simple, et l'extension* $F[\gamma]/F$ *vérifie* $e(F[\gamma]/F) = e(E[b]/F)$ *et* $f(F[\gamma]/F) = f(E[b]/F)$. *De plus, on a*

$$k_0(\gamma, \mathfrak{A}) = \begin{cases} -r = k_0(b, \mathfrak{B}) & \text{si } E[b] \neq E \\ k_0(\beta, \mathfrak{A}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On a $\gamma = \beta + xb$. Posons $E_1 = E[b]$, $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{End}_E(E_1)$ et $\mathfrak{b}_1 = \mathrm{End}_{E_1}(V)$. Soit $\mathfrak{A}_1$ l'$\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire $\mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_E}(\{\mathfrak{p}^i_{E_1}\})$ dans $\mathfrak{a}_1$ et soit $\mathfrak{B}_1$ l'$\mathfrak{o}_{E_1}$-ordre héréditaire $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{b}_1$ dans $\mathfrak{b}_1$. Identifions $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{A}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1$ *via* le choix d'une (W_1, E_1)-décomposition de $\mathfrak{B}$. On a donc les identifications

$$\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1.$$

D'autre part, en identifiant $\mathfrak{A}(E_1)$ à $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1$ *via* le choix d'une (X, E)-décomposition de $\mathfrak{A}(E_1)$, on a aussi les identifications

$$\mathfrak{g} = A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1.$$

Soit $s_1 : A(E_1) \to \mathfrak{a}_1$ la corestriction modérée $s_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{a}_1}$ sur $A(E_1)$ relativement à E/F. L'élément $x_1 = x_0 \otimes 1$ de $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1$ vérifie $s_1(x_1) = 1$ et l'élément $x_1 \otimes 1$ de

$\mathfrak{A}(E_1)\otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}}\mathfrak{B}_1$ coïncide avec $\boldsymbol{x}$. Écrivons $b = a_1 \otimes 1$ avec $a_1 \in \mathfrak{a}_1$ et posons $\gamma_1 = \beta + \boldsymbol{x}_1 a_1 \in A(E_1)$. Posons $e_1 = e(\mathfrak{B}_1|\mathfrak{o}_{E_1})$, $n_1 = n/e_1$ et $r_1 = r/e_1$. Puisque $k_0(b,\mathfrak{B}) = e_1 k_E(b)$, la strate $[\mathfrak{A}_1, r_1, r_1 - 1, a_1]$ dans $\mathfrak{a}_1$ est simple et a_1 est E-minimal. On a

$$k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1)) = k_F(\beta) e(\mathfrak{A}_1|\mathfrak{o}_E) = k_F(\beta) e(E_1/E).$$

Comme $e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E) = e(E_1/E)e_1$, puisque $r < \inf\{-k_0(\beta,\mathfrak{A}), n\}$, on a

$$r_1 < \inf\{-k_0(\beta,\mathfrak{A}_1), n_1\}.$$

En particulier, la strate $[\mathfrak{A}(E_1), n_1, r_1, \beta]$ dans $A(E_1)$ est simple. Puisque E_1 est un sous-corps maximal de $A(E_1)$, d'après la proposition 1, la strate $[\mathfrak{A}(E_1), n_1, r_1 - 1, \gamma_1]$ dans $A(E_1)$ est simple, et l'extension $E_1' = F[\gamma_1]$ de F vérifie $e(E_1'/F) = e(E_1/F)$ et $f(E_1'/F) = f(E_1/F)$. De plus, on a

$$k_0(\gamma_1, \mathfrak{A}(E_1)) = \begin{cases} -r_1 = k_0(b, \mathfrak{A}_1) & \text{si } E_1 \neq E \\ k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1)) & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'élément $\gamma_1 \otimes 1$ de $A(E_1)\otimes_{E_1}\mathfrak{b}_1$ coïncide avec γ et l'extension $K = F[\gamma]$ de F est isomorphe à E_1'. On a donc $e(K/F) = e(E_1/F)$ et $f(K/F) = f(E_1/F)$. D'autre part, comme on a $k_0(\gamma,\mathfrak{A}) = e_1 k_0(\gamma_1, \mathfrak{A}(E_1))$, $k_0(\beta,\mathfrak{A}) = e_1 k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1))$ et $k_0(b,\mathfrak{B}) = e_1 k_0(b,\mathfrak{A}_1)$, on a aussi

$$k_0(\gamma, \mathfrak{A}) = \begin{cases} -r = k_0(b, \mathfrak{B}) & \text{si } E_1 \neq E \\ k_0(\beta, \mathfrak{A}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

La strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est pure, donc simple, et la proposition est démontrée. □

Remarque 3. Sous les hypothèses de la proposition 2, si $E_1 = E$, on a $k_0(b,\mathfrak{B}) = -\infty$ et $k_0(\gamma,\mathfrak{A}) = k_0(\beta,\mathfrak{A})$, avec $k_0(\beta,\mathfrak{A}) > -(r-1)$ si $E \neq F$ et $k_0(\beta,\mathfrak{A}) = -\infty$ sinon. ■

Corollaire 2. *Soit $\boldsymbol{s}_b : \mathfrak{b} \to \mathrm{End}_{E[b]}(V)$ une corestriction modérée sur $\mathfrak{b}$ relativement à $E[b]/E$. Il existe une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_\gamma : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{F[\gamma]}(V)$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à $F[\gamma]/F$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathfrak{P}^k$, on a*

$$\boldsymbol{s}_\gamma(y) \equiv \boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}(y) \pmod{\mathfrak{P}^{k+e}};$$

où l'on a posé $e = e(\mathfrak{A}\cap \mathrm{End}_{E[b]}(V)|\mathfrak{o}_{E[b]})$.

Démonstration. Continuons avec les notations de la démonstration de la proposition 2. La corestriction modérée $\boldsymbol{s}_b : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}_1$ sur $\mathfrak{b}$ relativement à E_1/E s'écrit $\boldsymbol{s}_b = \boldsymbol{s}_{a_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}_1}$, où $\boldsymbol{s}_{a_1} : \mathfrak{a}_1 \to E_1$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{a}_1$ relativement à E_1/E. Soit $\boldsymbol{s}_1 : A(E_1) \to \mathfrak{a}_1$ la corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{a}_1}$ sur $A(E_1) = A(E)\otimes_E \mathfrak{a}_1$ relativement à E/F. D'après le corollaire 1, il existe une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_{\gamma_1} : A(E_1) \to F[\gamma_1]$ sur $A(E_1)$ relativement à $F[\gamma_1]/F$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y_1 \in \mathfrak{P}^k(E_1)$, on a

$$\boldsymbol{s}_{\gamma_1}(y_1) \equiv \boldsymbol{s}_{a_1} \circ \boldsymbol{s}_1(y_1) \pmod{\mathfrak{P}^{k+1}(E_1)}$$

avec

$$\boldsymbol{s}_{a_1} \circ \boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}_0 \otimes \boldsymbol{s}_{a_1} : A(E)\otimes_E \mathfrak{a}_1 = A(E_1) \to E_1.$$

On a les identifications

$$\mathfrak{g} = A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1.$$

Elles sont données par une (X_1, E_1)-décomposition $\tau_{X_1,E_1} : A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ qui se restreint en une (X_1, E_1)-décomposition $\mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$. Posons $E_1' = F[\gamma_1]$. D'après la remarque 3 de 3.3, le groupe $E_1'^{\times}$ normalise $\mathfrak{A}(E_1)$, et l'on a $e(E_1'/F) = e(E_1/F)$ et $f(E_1'/F) = f(E_1/F)$. Posons $\mathfrak{b}_1' = \mathrm{End}_{E_1'}(V)$ et $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}_1'$. Puisque E_1' est un sous-corps maximal de $A(E_1)$, le sous-F-espace vectoriel $F \subset E_1$ engendre E_1 sur E_1' et l'inclusion $E_1' \subset A(E_1)$ se prolonge en un isomorphisme de F-algèbres $\iota : A(E_1') \xrightarrow{\simeq} A(E_1)$ – cf. la remarque 1 de 3.3. Posons $\mathfrak{Q}_1 = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_1)$ et $\mathfrak{Q}_1' = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_1')$. D'après la remarque 3 de 3.3, la (X_1, E_1')-décomposition $\tau_{X_1,E_1'} : A(E_1') \otimes_{E_1'} \mathfrak{b}_1' \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ se restreint en une (X_1, E_1')-décomposition $\mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$ et ι se prolonge naturellement en un isomorphisme de F-algèbres

$$\tau_{X_1,E,E'} : A(E_1') \otimes_{E_1'} \mathfrak{b}_1' \xrightarrow{\simeq} A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1 \tag{1}$$

qui est compatible à $\tau_{X_1,E_1'}$ et τ_{X_1,E_1}. De plus, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, ce dernier se restreint en un isomorphisme

$$\mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1'^k \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{Q}_1^k. \tag{2}$$

En particulier, pour $k = 0$, on a un isomorphisme

$$\mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{B}_1' \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1. \tag{3}$$

Identifions E_1' au sous-corps $\tau_{X_1,E_1}(E_1' \otimes 1) = \tau_{X_1,E_1'}(E_1' \otimes 1)$ de $\mathfrak{g}$. Rappelons que $\gamma = \gamma_1 \otimes 1$. On a donc $E_1' = F[\gamma]$. Notons $\boldsymbol{s}_\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}_1'$ l'application $((\boldsymbol{s}_{\gamma_1} \circ \iota) \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}_1'}) \circ \tau_{X_1,E_1'}^{-1}$ sur $\mathfrak{g}$. C'est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}$ relativement à E_1'/F. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $y_1' \otimes b_1' \in \mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1'^k$, posant $y = \tau_{X_1,E_1'}(y_1' \otimes b_1')$ et $y_1 = \iota(y_1')$, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_\gamma(y) &= \boldsymbol{s}_{\gamma_1}(y_1) b_1' \\ &\equiv \tau_{X_1,E_1'}(\iota^{-1}(\boldsymbol{s}_{a_1} \circ \boldsymbol{s}_1(y_1)) \otimes b_1') \pmod{\tau_{X_1,E_1'}(\mathfrak{P}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1')}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\tau_{X_1,E_1'}(\mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1'^k) = \mathfrak{P}^k$$

et

$$\tau_{X_1,E_1'}(\mathfrak{P}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1'^k) = \tau_{X_1,E_1'}(\mathfrak{A}(E_1') \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1'}} \mathfrak{Q}_1'^{k+e}) = \mathfrak{P}^{k+e},$$

le corollaire est démontré. □

Continuons avec les hypothèses de la proposition 2 : $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ est une strate simple dans $\mathfrak{b}$ $(= \mathrm{End}_E(V))$ et $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$. Posons $E_1 = E[b]$, $\mathfrak{b}_1 = \mathrm{End}_{E_1}(V)$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{Q}_1 = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_1)$. Posons $E_1' = F[\gamma]$. On sait que $E_1'^{\times}$ normalise $\mathfrak{A}$, et que $e(E_1'/F) = e(E_1/F)$ et $f(E_1'/F) = f(E_1/F)$. Posons $\mathfrak{b}_1' = \mathrm{End}_{E_1'}(V)$, $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}_1'$ et $\mathfrak{Q}_1' = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_1')$.

Posons aussi $e = e(\mathfrak{B}_1|\mathfrak{o}_{E_1})$ $(= e(\mathfrak{B}'_1|\mathfrak{o}_{E'_1}))$. D'après le corollaire 2, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a les égalités

$$\mathfrak{Q}'^k_1 + \mathfrak{P}^{k+e} = \mathfrak{Q}^k_1 + \mathfrak{P}^{k+e}$$

et

$$\ker(s_\gamma|_{\mathfrak{P}^k}) + \mathfrak{P}^{k+e} = \ker(s_b \circ s|_{\mathfrak{P}^k}) + \mathfrak{P}^{k+e}.$$

Comme dans la remarque 2, on en déduit une identification naturelle $\mathfrak{Q}'^k_1/\mathfrak{Q}'^{k+e}_1 = \mathfrak{Q}^k_1/\mathfrak{Q}^{k+e}_1$, qui coïncide avec celle donnée par l'isomorphisme de κ_{E_1} $(= \kappa_{E'_1})$-espaces vectoriels

$$\mathfrak{Q}^k_1/\mathfrak{Q}^{k+e}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{Q}'^k_1/\mathfrak{Q}'^{k+e}_1 \tag{4}$$

déduit (par restriction et passage aux quotients) de l'application $\mathfrak{b}_1 \rightarrow \mathfrak{b}'_1$, $b_1 \mapsto s_\gamma(\tilde{x} b_1)$; où $\tilde{x}$ est un élément de $\mathfrak{A}$ tel que $s_b \circ s(\tilde{x}) = 1$.

Proposition 3. *Soit un entier $s \leqslant r-1$ et soit $[\mathfrak{B}_1, s, s-1, c]$ une strate simple dans $\mathfrak{b}_1$ telle que $E_1[c]$ $(= E[b, c])$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}_1$. Soit $\bar{\gamma} = \gamma + z$ pour un élément $z \in \mathfrak{P}^{-s}$ tel que $s_b \circ s(z) = c$. La strate $[\mathfrak{A}, n, s-1, \bar{\gamma}]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, et l'extension $F[\bar{\gamma}]/F$ vérifie $e(F[\bar{\gamma}]/F) = e(E_1[c]/F)$ et $f(F[\bar{\gamma}]/F) = f(E_1[c]/F)$. En particulier, $F[\bar{\gamma}]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$. De plus, on a*

$$k_F(\bar{\gamma}) = \begin{cases} -s = k_{E_1}(c) & \textit{si } E_1[c] \neq E_1 \\ k_0(\gamma, \mathfrak{A}) & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. Puisque $s \leqslant r-1$, d'après la proposition 2, la strate $[\mathfrak{A}, n, s, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple. D'après le corollaire 2, il existe une corestriction modérée $s_\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}'_1$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à E'_1/F telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathfrak{P}^k$, on a

$$s_\gamma(y) \equiv s_b \circ s(y) \pmod{\mathfrak{P}^{k+e}}.$$

L'élément $c' = s_\gamma(z)$ appartient à $\mathfrak{Q}'^{-s}_1$, et si $E_1[c] \neq E_1$, les entiers s et e sont premiers entre eux. D'après (4), les polynômes caractéristiques $\phi_c \in \kappa_{E_1}[t]$ et $\phi_{c'} \in \kappa_{E'_1}[t]$ associés aux strates $[\mathfrak{B}_1, s, s-1, c]$ et $[\mathfrak{B}'_1, s, s-1, c']$ coïncident. Par conséquent, la strate $[\mathfrak{B}'_1, s, s-1, c']$ dans $\mathfrak{b}'_1$ est simple. Comme $E'_1[c']$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}'_1$, on peut appliquer la proposition 1. Remarquons que $e(E'_1[c']/F) = e(E_1[c]/F)$ et $f(E'_1[c']/F) = f(E_1[c]/F)$, et que $k_{E'_1}(c') = k_{E_1}(c)$. D'où le résultat. □

3.6. Approximation

Soit un élément $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. On suppose que γ *n'est pas F-minimal*. Posons $n = n_F(\gamma)$ $(= -\nu_{F[\gamma]}(\gamma))$ et $r = -k_F(\gamma)$. Puisque γ n'est pas F-minimal, on a $r > n$. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\gamma$ et $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\gamma$. On a donc $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\gamma)$. La strate $S_\gamma = [\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est pure, et d'après [1, 2.4.1], elle est équivalente à une strate simple $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$. Par définition, β est un élément de $\gamma + \mathfrak{P}^{-r}$. D'après *loc. cit.*, $e(F[\beta]/F)$ divise $e(F[\gamma]/F)$ et $f(F[\beta]/F)$ divise $f(F[\gamma]/F)$, et parmi les strates pures $[\mathfrak{A}, n, r, \beta']$ dans $\mathfrak{g}$ qui sont équivalentes à S_γ, les strates simples sont précisément celles qui minimisent le degré de l'extension $F[\beta']/F$, c'est-à-dire qui vérifient $[F[\beta'] : F] = [F[\beta] : F]$. De plus (*loc. cit.*), pour toute strate simple $[\mathfrak{A}, n, r, \beta']$ dans $\mathfrak{g}$ équivalente à S_γ, on a :

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

– $e(F[\beta']/F) = e(F[\beta]/F)$ et $f(F[\beta']/F) = f(F[\beta]/F)$;
– $k_F(\beta') = k_F(\beta)$.

Enfin (*loc. cit.*), si $\boldsymbol{s}_\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_\beta = \mathrm{End}_{F[\beta]}(V)$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}$ relativement à $F[\beta]/F$, alors la strate $[\mathfrak{A} \cap \mathfrak{g}_\beta, r, r-1, \boldsymbol{s}_\beta(\gamma - \beta)]$ dans $\mathfrak{g}_\beta$ est équivalente à une strate simple. C'est cette dernière assertion que l'on précise dans ce numéro.

Posons $E = F[\beta]$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$. Soit $\mathfrak{B}$ l'$\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{b}$ et soit $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$. On fixe une corestriction modérée $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F et un élément $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}$ tel que $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = 1$.

On pose $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ $(< -r)$ et $\mathfrak{N}_{k_0} = \mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})$.

Lemme 1. *On a*

$$\beta + \mathfrak{P}^{-r} = \{g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g : g \in 1 + \mathfrak{Q}^{-r-k_0}\mathfrak{N}_{k_0},\ b \in \mathfrak{Q}^{-r}\}.$$

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est claire, puisque d'après [1, 1.5.8], $1 + \mathfrak{Q}^{-r-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}$ est contenu dans le G-entrelacement de la strate simple $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$. Pour l'inclusion $\subset$, on procède par approximations successives. D'après les relations (1) et (3) de 3.4, pour $i > k_0$, on a

$$\mathfrak{P}^i = \mathrm{ad}_\beta(\mathfrak{Q}^{i-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}) \oplus \boldsymbol{x}\mathfrak{Q}^i.$$

Soit $X \in \mathfrak{P}^{-r}$ et soit $a = -r - k_0 > 0$. Écrivons $X = \mathrm{ad}_\beta(y) + \boldsymbol{x}b$ avec $y \in \mathfrak{Q}^a\mathfrak{N}_{k_0}$ et $b \in \mathfrak{Q}^{-r}$. On a

$$\begin{aligned}(1+y)(\beta+X)(1+y)^{-1} &\equiv \beta + X - (\mathrm{ad}_\beta(y) + \mathrm{ad}_X(y))(1+y)^{-1}\\ &\equiv \beta + \boldsymbol{x}b \pmod{\mathfrak{P}^{-r+a}}.\end{aligned}$$

Posons $g = (1+y)$ et écrivons $g(\beta+X)g^{-1} = \beta + \boldsymbol{x}b + X'$ pour un élément $X' \in \mathfrak{P}^{-r+a}$. Écrivons $X' = \mathrm{ad}_\beta(y') + \boldsymbol{x}b'$ avec $y' \in \mathfrak{Q}^{2a}\mathfrak{N}_{k_0}$ et $b' \in \mathfrak{Q}^{-r+a}$. On obtient de même

$$(1+y')(\beta+X')(1+y')^{-1} \equiv \beta + \boldsymbol{x}b' \pmod{\mathfrak{P}^{-r+3a}},$$

et donc

$$(1+y')(\beta+\boldsymbol{x}b+X')(1+y')^{-1} \equiv \beta + \boldsymbol{x}(b+b') \pmod{\mathfrak{P}^{-r+2a}}.$$

Posant $g' = 1 + y'$, $g_1 = g'g$ et $b_1 = b + b'$, on a donc

$$g_1(\beta+X)g_1^{-1} \equiv \beta + \boldsymbol{x}b_1 \pmod{\mathfrak{P}^{-r+2a}}.$$

L'élément g_1 appartient à $1 + \mathfrak{Q}^a\mathfrak{N}_{k_0}$ et l'élément b_1 appartient à $\mathfrak{Q}^{-r}$. Posons

$$\Omega = \{g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g : g \in 1 + \mathfrak{Q}^a\mathfrak{N}_{k_0},\ b \in \mathfrak{Q}^{-r}\}.$$

On a montré que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a l'inclusion

$$\beta + \mathfrak{P}^{-r} \subset \Omega + \mathfrak{P}^{-r+aj}.$$

Comme Ω est ouvert (d'après la proposition de 3.4) et compact dans G, pour j suffisamment grand, on a l'égalité $\Omega + \mathfrak{P}^{-r+aj} = \Omega$. D'où le lemme. □

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Identifions $\mathfrak{g}$ à $A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ *via* le choix d'une (W, E)-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$ – cf. 3.4 – et écrivons $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$, où $\boldsymbol{s}_0 : A(E) \to E$ est une corestriction modérée sur $A(E)$ relativement à E/F. Fixons un élément $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{A}(E)$ tel que $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}_0) = 1$ et prenons pour $\boldsymbol{x}$ l'élément $\boldsymbol{x}_0 \otimes 1$. D'après le lemme 1, il existe un élément $g \in 1 + \mathfrak{Q}^{-r-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}$ tel que $\gamma \in g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}\mathfrak{Q}^{-r})g$. Écrivons $\gamma = g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$ avec $b \in \mathfrak{Q}^{-r}$. Puisque $g \in U^1(\mathfrak{A})$ et $xb \in \mathfrak{P}^{-r}$, on a $g^{-1}\boldsymbol{x}bg \in \mathfrak{P}^{-r}$ et $\beta' = g^{-1}\beta g \in \gamma + \mathfrak{P}^{-r}$. La strate $[\mathfrak{A}, n, r, \beta']$ dans $\mathfrak{g}$ est simple et équivalente à $[\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$, et quitte à remplacer β par β', E par $E' = F[\beta']$, $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{b}' = \mathrm{End}_{E'}(V)$, l'identification $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ par $\mathfrak{g} = A(E') \otimes_{E'} \mathfrak{b}'$ (par transport de structure *via* $\mathrm{Int}_{g^{-1}}$), $\boldsymbol{x}_0$ par $g^{-1}\boldsymbol{x}_0 g$ et b par $g^{-1}bg$, on peut supposer que $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$.

On définit comme on l'a fait pour $\mathfrak{g}$, en remplaçant le corps de base F par E, les notions d'éléments quasi réguliers et quasi réguliers elliptiques de $\mathfrak{b}$. On note $\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$, resp. $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, l'ensemble des éléments quasi réguliers, resp. quasi réguliers elliptiques, de $\mathfrak{b}$.

Lemme 2. *L'élément b est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}$ et la strate $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$ est simple. En particulier, b est E-minimal.*

Démonstration. D'après [1, 2.4.1.(iii)], la strate $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$ est équivalente à une strate simple, disons $[\mathfrak{B}, r, r-1, c]$. Posons $E_1 = E[c]$. Si c est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire si E_1 est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$, alors d'après [1, 2.2.2], la strate $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$ est simple et $E[c]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$. Dans ce cas, b est un élément quasi régulier elliptique de $\mathfrak{b}$ et il est E-minimal.

Supposons (par l'absurde) que le sous-corps $E_1 \subset \mathfrak{b}$ ne soit pas maximal. Puisque la strate $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, on a $r < \inf\{-k_0(\beta, \mathfrak{A}), n\}$. On peut donc appliquer la proposition 2 de 3.5 : en posant $\gamma' = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes c$, la strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma']$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, $e(F[\gamma']/F) = e(E_1/F)$ et $f(F[\gamma']/F) = f(E_1/F)$, et

$$k_0(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes c, \mathfrak{A}) = \begin{cases} -r = k_0(c, \mathfrak{B}) & \text{si } E_1 \neq E \\ k_0(\beta, \mathfrak{A}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, $[F[\gamma'] : F]$ est strictement inférieur à $[F[\gamma] : F]$, ce qui est impossible puisque les strates $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ et $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma']$ dans $\mathfrak{g}$ sont simples et équivalentes. Le sous-corps $E_1 \subset \mathfrak{b}$ est donc forcément maximal, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Le lemme 2 est le point de départ du procédé d'approximation des éléments quasi réguliers elliptiques de $\mathfrak{g}$ par des éléments minimaux.

Soit un élément $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\gamma$ et $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\gamma$, $n = n_F(\gamma)$ et $r = \inf(-k_F(\gamma), n-1)$. On note $\boldsymbol{S}_\gamma$ la strate pure $[\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$. Si γ est F-minimal, *i.e.* si $r = n-1$, alors la strate $\boldsymbol{S}_\gamma$ est simple et il n'y a plus rien à faire. Sinon, on écrit $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_\beta \otimes b$ comme ci-dessus : β est un élément pur de $\mathfrak{g}$ telle que la strate $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple et équivalente à $\boldsymbol{S}_\gamma$; b est un élément quasi régulier elliptique de $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_{F[\beta]}(V)$ tel que la strate $[\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$ est simple ; $\boldsymbol{x}_\beta$ est un élément de $\mathfrak{A}(F[\beta])$ tel que $\boldsymbol{s}_\beta(\boldsymbol{x}_\beta) = 1$ pour une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_\beta : A(F[\beta]) \to F[\beta]$ sur $A(F[\beta])$ relativement à $F[\beta]/F$; $\boldsymbol{x}_\beta \otimes b$ est un élément de $\mathfrak{P}^{-r}$ pour l'identification $\mathfrak{g} = A(F[\beta]) \otimes_{F[\beta]} \mathfrak{b}$ donnée par le choix d'une $(W, F[\beta])$-décomposition de $\mathfrak{A}$. On pose $\gamma_1 = \beta$, $F_1 = F[\gamma_1]$, $\mathfrak{g}_1 = A(F_1)$ et $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_{\gamma_1}$. On a donc $\gamma = \gamma_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes b$. L'élément

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

γ_1 est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{g}_1$. Il définit comme ci-dessus une strate pure $\boldsymbol{S}_{\gamma_1} = [\mathfrak{A}_1, n_1, r_1, \gamma_1]$ dans $\mathfrak{g}_1$. Ici $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(F_1)$, $n_1 = n_F(\gamma_1)$ et $r_1 = \inf(-k_F(\gamma_1), n_1 - 1)$. Si γ_1 est F-minimal, *i.e.* si $r_1 = n_1 - 1$, on s'arrête là. Sinon, en remplaçant γ par γ_1 dans la construction précédente, on écrit $\gamma_1 = \gamma_2 + \boldsymbol{x}_2 \otimes b_1$ comme ci-dessus. Puisque $[F_1 : F] < N$, le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. D'où la proposition suivante.

Proposition. *Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. Il existe un entier $m \geqslant 0$ et des éléments $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ tels que :*

- *$\gamma_0 = \gamma$;*
- *(si $i < m$) γ_{i+1} est un élément F-pur de $A(F[\gamma_i])$;*
- *γ_m est F-minimal ;*

la suite $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ vérifiant les propriétés suivantes. Pour $i = 0, \dots, m$, posons :

- *$F_i = F[\gamma_i]$, $n_i = n_F(\gamma_i)$, $r_i = -k_F(\gamma_i)$;*
- *$\mathfrak{g}_i = A(F_i)$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(F_i)$ et $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}(F_i)$ $(= \mathrm{rad}(\mathfrak{A}_i))$;*
- *$\boldsymbol{S}_{\gamma_i} = [\mathfrak{A}_i, n_i, r_i, \gamma_i]$ – une strate pure dans $\mathfrak{g}_i$;*
- *(si $i < m$) $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{F_{i+1}}(F_i)$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{Q}_i = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_i)$.*

On identifie $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0$ via *le choix d'un vecteur $v \in V \smallsetminus \{0\}$ (on a donc $\mathfrak{A}_\gamma = \mathfrak{A}_0$, cf. 3.1), et si $i < m$, on identifie $\mathfrak{g}_i$ à $\mathfrak{g}_{i+1} \otimes_{F_{i+1}} \mathfrak{b}_i$* via *le choix d'une (W_i, F_{i+1})-décomposition $\mathfrak{A}_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F_{i+1}}} \mathfrak{B}_i \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{A}_i$ (on a un isomorphisme de F-espaces vectoriels $F_{i+1} \otimes_F W_i \simeq F_i$). La strate $\boldsymbol{S}_{\gamma_i}$ dans $\mathfrak{g}_i$ est équivalente à une strate simple $[\mathfrak{A}_i, n_i, r_i, \gamma_{i+1}]$ avec*

$$\gamma_i = \gamma_{i+1} + \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes b_i$$

pour un élément $b_i \in (\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qre}}$ tel que la strate $[\mathfrak{B}_i, r_i, r_i - 1, b_i]$ dans $\mathfrak{b}_i$ est simple, et un élément $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \mathfrak{A}_{i+1}$ tel que $\boldsymbol{s}_{\gamma_{i+1}}(\boldsymbol{x}_{i+1}) = 1$, où $\boldsymbol{s}_{\gamma_{i+1}} : \mathfrak{g}_{i+1} \to F_{i+1}$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}_{i+1}$ relativement à F_{i+1}/F. On a donc les décompositions

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_m \otimes_{F_m} \mathfrak{b}_{m-1} \otimes_{F_{m-1}} \mathfrak{b}_{m-2} \otimes \cdots \otimes_{F_1} \mathfrak{b}_0 \tag{1}$$

et (en identifiant $\mathfrak{g}_{i+1}$ à la sous-F-algèbre $\mathfrak{g}_{i+1} \otimes 1$ de $\mathfrak{g}_i$)

$$\gamma = \gamma_m + \boldsymbol{x}_m b_{m-1} + \boldsymbol{x}_{m-1} b_{m-2} + \cdots + \boldsymbol{x}_1 b_0. \tag{2}$$

Définition. Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. Toute suite $(\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ vérifiant les conditions de la proposition est appelée *suite d'approximation minimale de γ*. À une telle suite sont associées :

- une suite $(F_0, \dots, F_m)$ d'extensions F_i/F, $F_i = F[\gamma_i]$ – pour $i = 0, \dots, m$, on pose $\mathfrak{g}_i = A(F_i)$ et $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(F_i)$, et (si $i < m$) $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{F_{i+1}}(F_i)$ et $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{b}_i$;
- une suite $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m)$ d'éléments $\boldsymbol{x}_i \in \mathfrak{A}_i$ tels que $\boldsymbol{s}_{\gamma_i}(\boldsymbol{x}_i) = 1$ pour une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_{\gamma_i} : \mathfrak{g}_i \to F_i$ sur $\mathfrak{g}_i$ relativement à F_i/F ;
- une suite $(b_0, \dots, b_{m-1})$ d'éléments $b_i \in \mathfrak{b}_i$ tels que $\boldsymbol{x}_{i+1} \otimes b_i = \gamma_i - \gamma_{i+1}$, où pour $i = 0, \dots, m-1$, on a identifié $\mathfrak{g}_i$ à $\mathfrak{g}_{i+1} \otimes_{F_{i+1}} \mathfrak{b}_i$ *via* le choix d'une (W_i, F_{i+1})-décomposition $\mathfrak{A}_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F_{i+1}}} \mathfrak{B}_i \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{A}_i$.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

La suite $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ est appelée *suite des correcteurs* de la suite $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ et la suite $(b_0, \ldots, b_{m-1})$ est appelée *suite dérivée* de la suite $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$. La suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ est définie *via* le choix des corestrictions modérées $\boldsymbol{s}_{\gamma_i} : \mathfrak{g}_i \to F_i$. Si, pour $i = 0, \ldots, m-1$, on note $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$ la corestriction modérée $\boldsymbol{s}_{\gamma_{i+1}} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}_i} : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{b}_i$ sur $\mathfrak{g}_i$ relativement à F_{i+1}/F, alors la suite dérivée $(b_1, \ldots, b_m)$ est donnée par $b_i = \tilde{\boldsymbol{s}}_i(\gamma_i - \gamma_{i+1})$.

Remarque 1. Fixé $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, la suite d'approximation minimale $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ de γ n'est pas unique, la suite d'extensions $(F_0, \ldots, F_m)$ de F définie par $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ n'est pas non plus unique, mais les invariants suivants le sont :

- l'entier $m \geqslant 0$, appelé « longueur » de la suite d'approximation minimale de γ, ou simplement « longueur » de γ ;
- les entiers $n_i = n_F(\gamma_i)$ et $r_i = -k_F(\gamma_i)$;
- les entiers $e_i = e(F_i/F)$ et $f_i = f(F_i/F)$.

L'élément F-minimal γ_m peut être central, c'est-à-dire que l'on peut avoir $F_m = F$. La longueur d'un élément de G_{qre} est inférieure ou égale au nombre de facteurs premiers de N (comptés avec multiplicité). Les éléments de longueur 0 sont les éléments F-minimaux.

Notons qu'il n'est en général pas possible de choisir la suite d'extensions $(F_0, \ldots, F_m)$ de F telle que $F_m \subset \cdots \subset F_0$. En effet (pour $i < m$), on a l'inclusion $F_{i+1} \subset F_i$ si et seulement si l'élément $\boldsymbol{x}_{i+1} \otimes b_i = \gamma_i - \gamma_{i+1}$ est dans F_i (et donc en particulier commute à γ_{i+1}), ce qui n'est possible que si l'extension F_{i+1}/F est *modérément ramifiée* [1, 2.2.6]. D'autre part, l'extension F_{i+1}/F est modérément ramifiée si et seulement si l'on peut prendre $\boldsymbol{x}_{i+1} = 1$ [1, 1.3.8]. En définitive, on peut choisir la suite d'extensions $(F_0, \ldots, F_m)$ telle que $F_m \subset \cdots \subset F_0$ si et seulement si l'on peut prendre la suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ égale à $(1, \ldots, 1)$, ce qui n'est possible que si toutes les extensions F_{i+1}/F $(i = 0, \ldots, m-1)$ sont *modérément ramifiées*, c'est-à-dire (puisque $e(F_{i+1}/F)$ divise $e(F_i/F)$) si $e_1 = e(F_1/F)$ est premier à la caractéristique résiduelle p de F. C'est donc toujours possible si p ne divise pas N, et aussi si $N = p$ (car dans ce cas, ou bien γ est F-minimal, ou bien $m = 1$ et $F_1 = F$). Si $p < N$ divise N, on construit facilement un contre-exemple (voir ci-dessous).

Si $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ est une suite d'approximation minimale de $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$ de suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ et de suite dérivée $(b_0, \ldots, b_{m-1})$, alors pour $k = 0, \ldots, m$, $(\gamma_k, \ldots, \gamma_m)$ est une suite d'approximation minimale de $\gamma_k \in A(F_k)^\times_{\mathrm{qre}}$ de suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ et de suite dérivée $(b_k, \ldots, b_{m-1})$. ■

Exemple. Si N est premier, les éléments de G_{qre} sont de longueur 0 ou 1. Les élements de longueur 1 sont de la forme $\gamma = z + \gamma'$ avec $z \in F^\times$ et $\gamma' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$ tels que $n_F(\gamma') = -k_F(\gamma)$ et $\nu_{F[\gamma]}(z) = -n_F(\gamma) < k_F(\gamma)$. Alors (γ, z) est une suite d'approximation minimale de γ. Supposons maintenant que $N = p_1 p_2$ avec p_i premier ($p_1 = p_2$ est permis). Soit $\beta \in G$ un élément pur tel que $\beta \notin G_{\mathrm{qre}}$. Posons $E = F[\beta]$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$. Comme $\beta \in A(E)^\times_{\mathrm{qre}}$ et $[E : F] \in \{1, p_1, p_2\}$, si β n'est pas F-minimal (ce qui implique $\beta \notin F^\times$), alors toute suite d'approximation minimale de β est de la forme (β, z) pour un $z \in F^\times$. Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

un élément E-minimal tel que

$$-\nu_E(b)\ \left(=\frac{n_E(b)}{e(E[b]/E)}\right) < \inf(-k_F(\beta), n_F(\beta)).$$

Posons $K = E[b] = F[\beta, b]$. Soit $\mathfrak{A}$ l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $K^\times$, et soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$. On a donc $e(E[b]/E) = e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$ et

$$-n_E(b) < \inf(-k_0(\mathfrak{A}, \beta), -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)).$$

Choisissons une (W, E)-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B} \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}$ et un élément $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{A}(E)$ tel que $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}_0) = 1$ pour une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0 : A(E) \to E$ sur $A(E)$ relativement à E/F (on peut prendre $\boldsymbol{x}_0 = 1$ si et seulement si l'extension E/F est modérément ramifiée). Alors l'élément $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$ appartient à G_{qre} et il est de longueur 1 ou 2 : si β est F-minimal, alors (γ, β) est une suite d'approximation minimale de γ ; et si (β, z) est une suite d'approximation minimale de β, alors (γ, β, z) est une suite d'approximation minimale de γ. Tous les éléments de G_{qre} qui ne sont pas F-minimaux sont obtenus de cette manière.

Remarque 2. Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$ et soit $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ une suite d'approximation minimale de γ de suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ et de suite dérivée $(b_0, \ldots, b_{m-1})$. Écrivons

$$\gamma = \gamma_m + \boldsymbol{x}_m b_{m-1} + \boldsymbol{x}_{m-1} b_{m-2} + \cdots + \boldsymbol{x}_1 b_0$$

comme en (2). Pour $i = 0, \ldots, m$, rappelons que l'on a posé $\mathfrak{g}_i = A(F_i)$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(F_i)$ et (si $i < m$) $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{F_{i+1}}(F_i)$ et $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{b}_i$, et que l'on a identifié $\mathfrak{g}_i$ à $\mathfrak{g}_{i+1} \otimes_{F_{i+1}} \mathfrak{b}_i$ *via* le choix d'une (W_i, F_{i+1})-décomposition $\mathfrak{A}_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F_{i+1}}} \mathfrak{B}_i \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{A}_i$. Si $\tilde{\boldsymbol{t}}_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{b}_i$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}_i$ relativement à F_{i+1}/F, alors on a $\tilde{\boldsymbol{t}}_i(\gamma_i - \gamma_{i+1}) = u_i b_i$ pour un élément $u_i \in \mathfrak{o}_{F_{i+1}}^\times$. La corestriction modérée $\tilde{\boldsymbol{s}}_i = \boldsymbol{s}_{\gamma_{i+1}} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}_i}$ sous-jacente à la définition de $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ est donc celle qui est normalisée par $u_i = 1$. Soit $s_i^{i+1} : \mathfrak{b}_i \to F_i$ la corestriction modérée sur $\mathfrak{b}_i$ relativement à F_i/F_{i+1} telle que

$$\boldsymbol{s}_i^{i+1} \circ \tilde{\boldsymbol{s}}_i = \boldsymbol{s}_{\gamma_i}.$$

Soit un élément $\boldsymbol{x}_i^{i+1} \in \mathfrak{B}_i$ tel que $\boldsymbol{s}_i^{i+1}(\boldsymbol{x}_i^{i+1}) = 1$. Alors l'élément $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \boldsymbol{x}_i^{i+1}$ de $\mathfrak{A}_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F_{i+1}}} \mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i$ vérifie $\boldsymbol{s}_{\gamma_i}(y_i) = 1$. Par conséquent, l'élément $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i$ appartient à $\ker(\boldsymbol{s}_{\gamma_i}) \cap \mathfrak{A}_i = \mathrm{ad}_{\gamma_i}(\mathfrak{g}_i) \cap \mathfrak{A}_i$. On pourrait essayer de s'arranger – mais nous ne le ferons pas ici – pour que la suite des correcteurs vérifie la condition supplémentaire : $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1} \otimes \boldsymbol{x}_i^{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, m-1$. ■.

3.7. Le résultat principal

On reprend la situation de 3.4. Soit $\beta \in \mathfrak{g}$ un élément pur. Posons $E = F[\beta]$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$. Fixons une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0 : A(E) \to E$ sur $A(E)$ relativement à E/F et un élément $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{A}(E)$ tel que $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}_0) = 1$. Notons H le groupe $\mathfrak{b}^\times = \mathrm{Aut}_E(V)$.

Fixons aussi un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal $\underline{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{b}$ et notons $\underline{\mathfrak{A}}$ l'$\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ tel que $\underline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{b} = \underline{\mathfrak{B}}$. Posons $\underline{\mathfrak{P}} = \mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{A}})$, $\underline{\mathfrak{Q}} = \mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}})$ $(= \underline{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{b})$ et $d = \frac{N}{[E:F]}$ $(= e(\underline{\mathfrak{B}}|\mathfrak{o}_E))$. Identifions $\mathfrak{g}$ à $A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ *via* le choix d'une $(\underline{W}, E)$-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \underline{\mathfrak{B}} \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathfrak{A}}$ de $\underline{\mathfrak{A}}$. Enfin, posons $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \otimes 1$ et $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Remarque 1. Pour tout $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ et tel que $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b}$ contient $\underline{\mathfrak{B}}$, l'identification $\mathfrak{g} = A(E)\otimes_E \mathfrak{b}$ induit par restriction une identification $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b})$. Mais ce ne sont pas les seuls $\mathfrak{A}$ qui vérifient cette propriété. Écrivons $\underline{\mathfrak{B}} = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_E}(\mathcal{R})$ pour une chaîne de $\mathfrak{o}_E$-réseaux $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i : i\in\mathbb{Z}\}$ dans V de période d. Alors $\underline{W}$ est le sous-F-espace vectoriel de V engendré par une $\mathfrak{o}_E$-base $\{\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_d\}$ de $\mathcal{R}$. Choisissons une uniformisante ϖ_E de E. Soit $\boldsymbol{W}_H$ le sous-groupe de H formé des éléments qui permutent la base $\{\underline{w}_i\}$ et soit $\boldsymbol{D}_H = \boldsymbol{D}_{H,\varpi_E}$ le sous-groupe de H formé des matrices diagonales (par rapport à la base $\{\underline{w}_i\}$) de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_E^{a_1},\dots,\varpi_E^{a_d})$ avec $a_i\in\mathbb{Z}$. Enfin, soit $\widetilde{\boldsymbol{W}}_H = \widetilde{\boldsymbol{W}}_{H,\varpi_E}$ le sous-groupe de H engendré par $\boldsymbol{W}_H$ et $\boldsymbol{D}_H$. Alors $\widetilde{\boldsymbol{W}}_H = \boldsymbol{W}_H \ltimes \boldsymbol{D}_H$ et l'on a la décomposition d'Iwahori

$$H = U(\underline{\mathfrak{B}})\widetilde{\boldsymbol{W}}_H U(\underline{\mathfrak{B}}).$$

Par construction, pour $w\in\boldsymbol{W}_H$, on a $w\boldsymbol{x}w^{-1} = \boldsymbol{x}$. D'autre part, d'après la remarque 2 de 3.3, pour tout $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ et tel que $w^{-1}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b})w\supset\underline{\mathfrak{B}}$ pour un $w\in\widetilde{\boldsymbol{W}}_H$, l'identification $A(E)\otimes_E\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ induit par restriction une identification

$$\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{b}) = \mathfrak{A}. \qquad \blacksquare$$

Comme en 3.1, pour $k\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}^k = \{h\in\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} : \nu_E(h)\geqslant k\}.$$

Les « sauts » de cette filtration $k\mapsto\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}^k$ de $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$ sont les éléments de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$. Notons que si $d=1$, *i.e.* si E est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{b} = E$, et pour $k\in\mathbb{Z}$, on a $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} = \mathfrak{p}_E^k$. Posons $\underline{k}_0 = k_0(\beta,\underline{\mathfrak{A}})$ et $\underline{n} = -\nu_{\underline{\mathfrak{A}}}(\beta)$. On a donc $\underline{k}_0 = k_F(\beta)d$ et $\underline{n} = n_F(\beta)d$, et d'après le lemme 2 de 3.1, si $k_F(\beta)\neq-\infty$ (c'est-à-dire si $E\neq F$), on a

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}^{k_F(\beta)+\frac{1}{d}} = \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}\cap{}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}). \tag{1}$$

Notons que si $k_F(\beta)\neq-\infty$ et si $b\in\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}^{k_F(\beta)+\frac{1}{d}}$ est tel que l'unique $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire $\mathfrak{B}_b$ dans $\mathfrak{b}$ normalisé par $E[b]^\times$ vérifie l'inclusion $\underline{\mathfrak{B}}\subset\mathfrak{B}_b$, alors $b\in\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$. En effet, posant $r = n_E(b)$ $(= -\nu_{E[b]}(b))$ et $e = e(E[b]/E)$, puisque $-\frac{r}{e} > k_F(\beta)$, on a $-r\geqslant ek_F(\beta)+1$. Notant $\mathfrak{Q}_b$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{B}_b$, on a donc $b\in\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)}\mathfrak{Q}_b$. Or $\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1} = \mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)}\underline{\mathfrak{Q}}$ et $\mathfrak{Q}_b\subset\underline{\mathfrak{Q}}$ (car $\underline{\mathfrak{B}}\subset\mathfrak{B}_b$).

Pour $\gamma\in\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{O}_G(\gamma)$ l'orbite $\{g^{-1}\gamma g : g\in G\}\subset G$. De même, pour $b\in\mathfrak{b}$, on note $\mathcal{O}_H(b)$ l'orbite $\{h^{-1}bh : h\in H\}\subset\mathfrak{b}$. Le lemme suivant a été prouvé en [10, 5.4.2] grâce à la proposition de 3.4, comme conséquence du principe de submersion d'Harish-Chandra (précisément, de la construction de l'application $T\mapsto\vartheta_T$ que nous rappellerons en 3.9). Notons que dans *loc. cit.*, on travaille avec un $\mathfrak{o}_E$-ordre maximal dans $\mathfrak{b}$ au lieu de l'$\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal $\underline{\mathfrak{B}}$, mais cela n'a aucune incidence sur le résultat.

Lemme. *Soit b, $b'\in\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$. On a*

$$\mathcal{O}_H(b') = \mathcal{O}_H(b)\Rightarrow\mathcal{O}_G(\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b') = \mathcal{O}_G(\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b).$$

La proposition suivante généralise un résultat obtenu dans la démonstration de [10, 5.4.3], où l'on se limitait aux éléments de $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$ qui sont E-minimaux.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Proposition. *On suppose $E \neq F$.*

(i) *Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$. L'élément $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$ appartient à G_{qre}, on a $e(F[\gamma]/F) = e(E[b]/F)$ et $f(F[\gamma]/F) = f(E[b]/F)$, et*

$$k_F(\gamma) = \begin{cases} k_E(b) & \text{si } [E:F] < N \\ k_F(\beta) & \text{sinon} \end{cases}.$$

(ii) *Soit $b,\ b' \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$. On a*

$$\mathcal{O}_G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b') = \mathcal{O}_G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b) \Leftrightarrow \mathcal{O}_H(b') = \mathcal{O}_H(b).$$

Démonstration. Puisque $E \neq F$, on a $k_F(\beta) \geqslant -n_F(\beta)$ avec égalité si et seulement si β est F-minimal. Commençons par prouver (i). Puisqu'il existe un $h \in H$ tel que $h\mathfrak{B}_b h^{-1}$ contient $\underline{\mathfrak{B}}$, quitte à remplacer b par hbh^{-1}, on peut grâce au lemme supposer que $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}_b$. Notons tout d'abord que si $b = 0$, ce qui n'est possible que si E est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$, alors il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer $b \neq 0$. Posons $E_0 = E[b]$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_b$. Soit $\mathfrak{A}$ l'$\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ tel que $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{B}$. C'est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E_0^\times$, et puisque $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$, on a l'identification $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}$. Posons $r = n_E(b)$ $(= -\nu_{E_0}(b))$, $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ et $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$. On a $k_0 = k_F(\beta)e(E_0/E)$ et $n = n_F(\beta)e(E_0/E)$, et $k_0 \geqslant -n$ avec égalité si et seulement si β est F-minimal. Puisque

$$\frac{-r}{e(E_0/E)} = \nu_E(b) \geqslant k_F(\beta) + \frac{1}{d},$$

on a

$$-r \geqslant k_F(\beta)e(E_0/E) + \frac{e(E_0/E)}{d} = k_0 + \frac{1}{f(E_0/E)} > k_0.$$

Considérons la strate pure $[\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$. Si elle est simple, c'est-à-dire si b est E-minimal, comme $r < -k_0 \leqslant n$, on peut appliquer la proposition 1 de 3.5 : la strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, $e(F[\gamma]/F) = e(E_0/F)$ et $f(F[\gamma]/F) = f(E_0/F)$, et

$$k_0(\gamma, \mathfrak{A}) = \begin{cases} -r = k_0(b, \mathfrak{B}) = k_E(b) & \text{si } E_0 \neq E \\ k_0 = k_F(\beta) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans ce cas, on a $[F[\gamma]/F] = [E_0 : F] = N$, c'est-à-dire que γ est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{g}$ et $E_0 = E$ si et seulement si $[E : F] = N$.

Supposons maintenant que b n'est pas E-minimal. On a donc $E_0 \neq E$ et $k_E(b) > -r$. Posons $s = -k_E(b)$ et considérons la strate pure $[\mathfrak{B}, r, s, b]$ dans $\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$. D'après les lemmes 1 et 2 de 3.6, on peut écrire b sous la forme $b = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c$ avec :

- b_1 est un élément E-pur de $\mathfrak{B}$ tel que la strate $[\mathfrak{B}, r, s, b_1]$ dans $\mathfrak{b}$ est simple et équivalente à $[\mathfrak{B}, r, s, b]$;
- c est un élément quasi régulier elliptique de $\mathfrak{b}_1 = \mathrm{End}_{E_1}(V)$, $E_1 = E[b_1]$, tel que la strate $[\mathfrak{B}_1, s, s-1, c]$ dans $\mathfrak{b}_1$ est simple, où l'on a posé $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{b}_1$;
- $\boldsymbol{y}_1$ est un élément de $\mathfrak{A}_1 = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_E}(\{\mathfrak{p}^i_{E_1}\})$ tel que $\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{y}_1) = 1$ pour une corestriction modérée $\boldsymbol{t}_1 : \mathfrak{a}_1 \to E_1$ sur $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{End}_E(E_1)$ relativement à E_1/E ;

– $\boldsymbol{y}_1 \otimes c$ est un élément de $\mathfrak{Q}^{-s}$ pour l'identification $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1$ donnée par le choix d'une (W_1, E_1)-décomposition $\mathfrak{A}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{B}$ de $\mathfrak{B}$.

De plus, $e(E[b]/E) = e(E_1[c]/E)$ et $f(E[b]/E) = f(E_1[c]/E)$, et puisque $E_1[c] \neq E_1$ (car $[E_1 : E] < d$ et c est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}_1$), on a

$$k_E(b) = k_0(b, \mathfrak{B}) = -s = k_0(c, \mathfrak{B}_1) = k_{E_1}(c).$$

On a les identifications

$$\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1.$$

D'autre part, en identifiant $A(E_1)$ à $A(E) \otimes_E \mathfrak{a}_1$ *via* le choix d'une (X, E)-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}(E_1)$ de $A(E_1)$, on a aussi les identifications

$$\mathfrak{g} = A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1. \tag{2}$$

L'élément b_1 s'écrit $b_1 = a_1 \otimes 1$ avec $a_1 \in \mathfrak{a}_1$. Notons γ_1 l'élément $\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes a_1$ de $A(E) \otimes_{E_1} \mathfrak{a}_1$, G_1 le groupe $A(E_1)^\times = \mathrm{Aut}_F(E_1)$ et H_1 le groupe $\mathfrak{a}_1^\times = \mathrm{Aut}_E(E_1)$. Posons $N_1 = [E_1 : F]$, $e_1 = e(\mathfrak{B}_1 | \mathfrak{o}_{E_1})$, $r_1 = \frac{r}{e_1}$, $k_1 = \frac{k_0}{e_1}$ et $n_1 = \frac{n}{e_1}$. On a $k_1 = k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1))$, $n_1 = -\nu_{\mathfrak{A}(E_1)}(\beta)$, et puisque $\nu_{\mathfrak{B}}(b_1) = -r$, on a

$$\nu_{\mathfrak{A}_1}(a_1) = \frac{\nu_{\mathfrak{B}}(b_1)}{e_1} = -r_1.$$

La strate $[\mathfrak{A}_1, r_1, r_1 - 1, a_1]$ dans $\mathfrak{a}_1$ est simple, et comme $r_1 < -k_1 \leqslant n_1$, on peut appliquer la proposition 1 de 3.5 : la strate $[\mathfrak{A}(E_1), n_1, r_1 - 1, \gamma_1]$ dans $A(E_1)$ est simple, $e(F[\gamma_1]/F) = e(E_1/F)$ et $f(F[\gamma_1]/F) = f(E_1/F)$, et puisque $E_1 \neq E$, on a

$$k_0(\gamma_1, \mathfrak{A}(E_1)) = -r_1 = k_0(a_1, \mathfrak{A}_1) = k_E(a_1).$$

En particulier, on a $[F[\gamma_1]/F] = [E_1 : F] = N_1$, l'élément γ_1 est quasi régulier elliptique dans $A(E_1)$ et

$$k_F(\gamma_1) = k_E(a_1).$$

Il s'agit maintenant de remonter à G. Notons β_1 l'élément $\gamma_1 \otimes 1$ de $A(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{b}_1$ et $\boldsymbol{x}_1$ l'élément $\boldsymbol{x}_0 \otimes \boldsymbol{y}_1$ de $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(E_1)$. Écrivons

$$\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes (b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c) = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c.$$

Soit $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ la corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$ sur $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ relativement à E/F et soit $\boldsymbol{s}_{b_1} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}_1$ la corestriction modérée $\boldsymbol{t}_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}_1}$ sur $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1$ relativement à E_1/E. On a $\boldsymbol{s}_{b_1} \circ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}_1 \otimes c) = c$. D'autre part, on a $k_0(\beta_1, \mathfrak{A}) = k_F(\beta_1)e_1$, et comme $E_1[c]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}_1$ tel que $E_1[c]^\times$ normalise $\mathfrak{B}_1$, on a $e_1 = e(E_1[c]/E_1)$. Puisque

$$s = -k_E(b) < r < -k_0 < n$$

et

$$r = r_1 e_1 = -k_E(a_1)e_1 = -k_F(\beta_1)e_1 = -k_0(\beta_1, \mathfrak{A}),$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

on peut appliquer la proposition 1 de 3.5 : la strate $[\mathfrak{A}, n, s-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, $e(F[\gamma]/F) = e(E_1[c]/F)$ et $f(F[\gamma]/F) = f(E_1[c]/F)$, et puisque $E_1[c] \neq E_1$, on a

$$k_0(\gamma, \mathfrak{A}) = -s = k_0(c, \mathfrak{B}_1) = k_{E_1}(c).$$

Comme $e(E_1[c]/E) = e(E[b]/E)$ et $f(E_1[c]/E) = f(E[b]/E)$, on a $e(F[\gamma]/F) = e(E[b]/F)$ et $f(F[\gamma]/F) = f(E[b]/F)$. Comme $k_{E_1}(c) = k_E(b)$, on a aussi

$$k_0(\gamma, \mathfrak{A}) = k_E(b).$$

Cela achève la démonstration du point (i).

Prouvons (ii). L'implication $\Leftarrow$ est une conséquence du lemme. Prouvons l'implication $\Rightarrow$. Comme pour le point (i), on peut grâce au lemme supposer que b et b' vérifient les inclusions $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}_b$ et $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}_{b'}$. Posons $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$ et $\gamma' = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'$. On suppose que $\mathcal{O}_G(\gamma') = \mathcal{O}_G(\gamma)$. On suppose aussi dans un premier temps que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. Posons $E_0 = E[b]$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_b$. Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}$ l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E_0^\times$. Posons $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$ et $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$. Posons $r = n_E(b)$ $(= -\nu_{E_0}(b))$, $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ et $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$. On a vu (cf. le début de la démonstration du point (i)) que $-r > k_0 \geqslant -n$. Considérons la strate pure $\boldsymbol{S}_b = [\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ dans $\mathfrak{b}$. En remplaçant b par b', on définit de la même manière $E_0' = E[b']$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{b'}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{P}'$, les entiers r', k_0' et n', et la strate pure $\boldsymbol{S}_{b'} = [\mathfrak{B}', r', r'-1, b']$ dans $\mathfrak{b}$. La strate pure $\boldsymbol{S}_\gamma = [\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$, resp. $\boldsymbol{S}_{\gamma'} = [\mathfrak{A}', n', r'-1, \gamma']$, dans $\mathfrak{g}$ est un raffinement de la strate simple $\boldsymbol{S} = [\mathfrak{A}, n, r, \beta]$, resp. $\boldsymbol{S}' = [\mathfrak{A}, n', r', \beta]$, de strate dérivée $\boldsymbol{S}_b$, resp. $\boldsymbol{S}_{b'}$. Posons $\mathfrak{N}_{k_0} = \mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathfrak{N}'_{k_0'} = \mathfrak{N}_{k_0'}(\beta, \mathfrak{A}')$. D'après [1, 1.5.12], le G-entrelacement formel

$$\mathcal{I}_G(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}') = \{g \in G : g^{-1}(\beta + \mathfrak{P}^{-r})g \cap (\beta + \mathfrak{P}'^{-r'}) \neq \emptyset\}$$

coïncide avec

$$(1 + \mathfrak{Q}^{-r-k_0}\mathfrak{N}_{k_0})H(1 + \mathfrak{Q}'^{-r'-k_0'}\mathfrak{N}'_{k_0'}).$$

Soit $g \in G$ tel que $\gamma' = g^{-1}\gamma g$. Puisque $g \in \mathcal{I}_G(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}')$, on peut écrire $g = (1+y)h(1+y')$ avec $y \in \mathfrak{Q}^{-r-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}$, $y' \in \mathfrak{Q}^{-r'-k_0'}\mathfrak{N}'_{k_0'}$ et $h \in H$. Posons $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \otimes 1$ et $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$. L'égalité $\gamma g - g\gamma' = 0$ s'écrit

$$(\beta + \boldsymbol{x}b)(1+y)h(1+y') - (1+y)h(1+y')(\beta + \boldsymbol{x}b') = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1+y)^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)(1+y)h - h(1+y')(\beta + \boldsymbol{x}b')(1+y')^{-1} = 0.$$

Posant $a = -r - k_0 > 0$ et $a' = -r' - k_0' > 0$, on en déduit que

$$(\mathrm{ad}_\beta(y) + \boldsymbol{x}b)h - h(\mathrm{ad}_\beta(-y') + \boldsymbol{x}b') \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{-r+a}h + h\mathfrak{P}'^{-r'+a}}.$$

En appliquant $\boldsymbol{s}$ (rappelons que $\mathfrak{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ est un homomorphisme de $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$-bimodule et que $\boldsymbol{s}(\mathfrak{P}^k) = \mathfrak{Q}^k$ et $\boldsymbol{s}(\mathfrak{P}') = \mathfrak{Q}'^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$), on obtient

$$bh - hb' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Q}^{-r+a}h + h\mathfrak{Q}'^{-r'+a'}},$$

c'est-à-dire
$$h^{-1}(b + \mathfrak{Q}^{-r+a})h \cap (b' + \mathfrak{Q}'^{-r'+a'}) \neq \emptyset.$$
En particulier, h appartient au H-entrelacement formel $\mathfrak{I}_H(\boldsymbol{S}_b, \boldsymbol{S}_{b'})$. Posons $e = e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$ $(= e(E_0/E))$ et $e' = e(\mathfrak{B}'|\mathfrak{o}_E)$ $(= e(E'_0/E))$.

Remarque 2. Soit $\phi_b \in \kappa_E[t]$, resp. $\phi_{b'} \in \kappa_E[t]$, le polynôme caractéristique de la strate $\boldsymbol{S}_b$, resp. $\boldsymbol{S}_{b'}$. Comme les strates pures $\boldsymbol{S}_b$ et $\boldsymbol{S}_{b'}$ dans $\mathfrak{b}$ sont équivalentes à des strates simples, d'après [1, 2.6.3], on a $\frac{r}{e} = \frac{r'}{e'}$ et $\phi_b = \phi_{b'}$. Si la strate $\boldsymbol{S}_b$ est simple, c'est-à-dire si b est E-minimal, alors puisque $E_0 = E[b]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$, le polynôme caractéristique $\phi_b \in \kappa_E[t]$ se factorise en $\phi_b = \phi_0^e$ pour un polynôme $\phi_0 \in \kappa_E[t]$ irréductible sur κ_E. De l'égalité $\phi_{b'} = \phi_0^e$, on déduit que e' divise e. Mais puisque b est E-minimal, l'entier $r = n_E(b)$ est premier à l'indice de ramification e, par conséquent l'égalité $r = \frac{e}{e'}r'$ n'est possible que si $e' = e$ et $r' = r$. ■

D'après la remarque 2, on a $e = e'$ si b est E-minimal. En réalité, d'après le point (i), l'égalité $e = e'$ est toujours vérifiée, que b soit E-minimal ou non, c'est-à-dire que la strate $\boldsymbol{S}_b$ dans $\mathfrak{b}$ soit simple ou non : on a $e = \frac{e(F[\gamma]/F)}{e(E/F)}$ et $e' = \frac{e(F[\gamma']/F)}{e(E/F)}$, et comme par hypothèse γ et γ' sont conjugués dans G, on a $e(F[\gamma]/F) = e(F[\gamma']/F)$. Les $\mathfrak{o}_E$-ordres héréditaires principaux $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ dans $\mathfrak{b}$ sont donc conjugués par un élément de H, et quitte à remplacer b' par un élément $b'' \in \mathcal{O}_H(b')$ tel que $\mathfrak{B}_{b''} = \mathfrak{B}$ – ce qui, d'après le lemme, laisse inchangée l'orbite $\mathcal{O}_G(\gamma')$ –, on peut supposer que $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$. Comme les strates pures $\boldsymbol{S}_b = [\mathfrak{B}, r, r-1, b]$ et $\boldsymbol{S}_{b'} = [\mathfrak{B}, r, r-1, b']$ s'entrelacent dans H, d'après [1, 2.6.1], il existe un élement $u \in U(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^\times$ tel que $b' \in u^{-1}bu + \mathfrak{Q}^{-r+1}$. Quitte à remplacer b' par $ub'u^{-1}$, on peut donc supposer que les strates $\boldsymbol{S}_b$ et $\boldsymbol{S}_{b'}$ sont équivalentes. Si la strate $\boldsymbol{S}_b$ est simple, puisque $E_0 = E[b]$ est un sous-corps maximal de $\mathfrak{b}$, la strate $\boldsymbol{S}_{b'}$ l'est aussi.

Supposons que la strate $\boldsymbol{S}_b$ ne soit pas simple et montrons que l'on peut se ramener au cas où elle l'est. Soit une strate simple $[\mathfrak{B}, r, r-1, b_1]$ dans $\mathfrak{b}$ équivalente à $\boldsymbol{S}_b$. L'élément b_1 est E-minimal et l'on a $b,\ b' \in b_1 + \mathfrak{Q}^{-r+1}$. Posons $E_1 = E[b_1]$, $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{End}_E(E_1)$ et $\mathfrak{b}_1 = \mathrm{End}_{E_1}(V)$. Soit $\mathfrak{A}_1$ l'$\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire $\mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_E}(\{\mathfrak{p}^i_{E_1}\})$ dans $\mathfrak{a}_1$ et soit $\mathfrak{B}_1$ l'$\mathfrak{o}_{E_1}$-ordre héréditaire $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{b}_1$ dans $\mathfrak{b}_1$. Posons $\mathfrak{Q}_1 = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_1)$. Identifions $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1$ *via* le choix d'une (W_1, E_1)-décomposition $\mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{B}$ de $\mathfrak{B}$. On a les identifications
$$\mathfrak{g} = A(E) \otimes_A \mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{B}_1.$$
Fixons une corestriction modérée $\boldsymbol{t}_1 : \mathfrak{a}_1 \to E_1$ sur $\mathfrak{a}_1$ relativement à E_1/E et un élément $\boldsymbol{y}_1 \in \mathfrak{A}_1$ tel que $\boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{y}_1) = 1$. Puisque $k_0(b_1, \mathfrak{B}) = -r$, d'après le lemme 1 de 3.6, il existe des éléments $v,\ v' \in 1 + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{N}_{-r}(b_1, \mathfrak{B})$ et $c,\ c' \in \mathfrak{B}_1^{-r+1}$ tels que $v^{-1}bv = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c$ et $v'^{-1}b'v' = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c'$. Quitte à remplacer b par vbv^{-1} et b' par $v'b'v'^{-1}$, on peut supposer que $b = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c$ et $b' = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c'$. L'élément c, resp. c', est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}_1$. En effet, si ce n'est pas le cas, c est contenu dans une sous-E_1-algèbre parabolique propre $\mathfrak{p}_1$ de $\mathfrak{b}_1$ et b appartient à la sous-E-algèbre parabolique propre $\mathfrak{a}_1 \otimes_{E_1} \mathfrak{p}_1$ de $\mathfrak{b}$, ce qui contredit le fait que b est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}$. Écrivons $b_1 = a_1 \otimes 1$ avec $a_1 \in \mathfrak{a}_1$. Identifions $A(E_1)$ à $A(E) \otimes_E \mathfrak{a}_1$ *via* le choix d'une (X, E)-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}(E_1)$ de $\mathfrak{A}(E_1)$. On a les identifications
$$\mathfrak{g} = A(E_1) \otimes_{E_1} \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{b}_1.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Notons γ_1 l'élément $\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes a_1$ de $A(E) \otimes_{E_1} \mathfrak{a}_1$. Posons $N_1 = [E_1 : F]$, $e_1 = e(\mathfrak{B}_1 | \mathfrak{o}_{E_1})$, $r_1 = \frac{r}{e_1}$, $k_1 = \frac{k_0}{e_1}$ et $n_1 = \frac{n}{e_1}$. On a $k_1 = k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1))$, $n_1 = -\nu_{\mathfrak{A}(E_1)}(\beta)$, et puisque $\nu_{\mathfrak{B}}(b_1) = -r$, on a $\nu_{\mathfrak{A}_1}(a_1) = -r_1$. La strate $[\mathfrak{A}_1, r_1, r_1 - 1, a_1]$ dans $\mathfrak{a}_1$ est simple, et comme $r_1 < -k_1 \leqslant n_1$, on peut appliquer la proposition 1 de 3.5 : la strate $[\mathfrak{A}(E_1), n_1, r_1 - 1, \gamma_1]$ dans $A(E_1)$ est simple, $e(F[\gamma_1]/F) = e(E_1/F)$ et $f(F[\gamma_1]/F) = f(E_1/F)$, et

$$k_0(\gamma_1, \mathfrak{A}(E_1)) = \begin{cases} -r_1 = k_0(a_1, \mathfrak{A}_1) = k_E(a_1) & \text{si } E_1 \neq E \\ k_1 = k_0(\beta, \mathfrak{A}(E_1)) & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, on a $[F[\gamma_1]/F] = N_1$ et γ_1 est quasi régulier elliptique dans $A(E_1)$. Notons β_1 l'élément $\gamma_1 \otimes 1$ de $A(E_1) \otimes_{\mathfrak{o}_{E_1}} \mathfrak{b}_1$ et $\boldsymbol{x}_1$ l'élément $\boldsymbol{x}_0 \otimes \boldsymbol{y}_1$ de $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}(E_1)$. Écrivons

$$\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes (b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c) = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c$$

et (de la même manière)

$$\gamma' = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c'.$$

Soit $\boldsymbol{s}_1 : A(E_1) \to E_1$ la corestriction modérée sur $A(E_1) = A(E) \otimes_E \mathfrak{a}_1$ relativement à E_1/F donnée par $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}_0 \otimes \boldsymbol{t}_1$. On a donc $\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x}_1) = 1$. On distingue deux cas.

- *Premier cas* : $E_1 = E$. En ce cas, $F[\beta_1] = F[\beta]$ et $k_0(\beta_1, \mathfrak{A}) = k_0(\beta, \mathfrak{A})$, et le passage de l'écriture $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$, resp. $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'$, à l'écriture $\gamma = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c$, resp. $\gamma' = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c'$, a pour effet de faire croître la valuation de b, resp. b'. On a en effet $n_E(b) = n_E(b') = r$, et par construction on obtient $n_E(c) = n_E(c') < r$.
- *Second cas* : $E_1 \neq E$. En ce cas, le passage de l'écriture $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$, resp. $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'$, à l'écriture $\gamma = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c$, resp. $\gamma' = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c'$, a pour effet de faire croître le degré de l'extension $F[\beta]/F$. On a donc $[F[\beta_1, c] : F[\beta_1]] < [F[\beta, b] : F[\beta]]$.

Si l'élément c est $F[\beta_1]$-minimal, alors l'élément c' l'est aussi (même argument que plus haut pour b et b') et on s'arrête là : pour montrer que b et b' sont conjugués dans $H = \mathrm{Aut}_E(V)$, il suffit de montrer que c et c' le sont dans $H_1 = \mathrm{Aut}_{E_1}(V)$. Sinon, on refait la même opération avec le couple (c, c'). Le processus s'arrête au bout d'un nombre fini de fois. En effet, le second cas ne peut se produire qu'un nombre fini de fois par un argument de dimension. Quant au premier cas, supposons par l'absurde qu'il se produise un nombre infini de fois. Compte tenu du fait que le second cas ne peut se produire qu'un nombre fini de fois, cela implique qu'il existe un élément pur $\delta \in \mathfrak{g}$ avec $[F[\delta] : F] < N$ – ce δ est le β_1 du processus obtenu lors de la dernière occurrence du cas 2 – tel que pour tout entier k, l'intersection $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap (\delta U_{F[\delta]} + \mathfrak{P}^k)$ n'est pas vide. Cela signifie que $\delta U_{F[\delta]}$ rencontre la fermeture $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma)}$ de l'orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ dans $\boldsymbol{G}$. Or cette dernière est fermée, et comme tout élément de $\mathcal{O}_G(\gamma)$ est quasi régulier (elliptique), on a forcément $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap F[\delta]^\times = \emptyset$; contradiction. En définitive, on s'est ramené au cas où b est E-minimal, et donc à celui où les strates $\boldsymbol{S}_b$ et $\boldsymbol{S}_{b'}$ dans $\mathfrak{b}$ sont simples et équivalentes, ce que l'on suppose désormais.

Prouvons que b et b' sont conjugués dans H. Pour cela, montrons que pour chaque entier $j \geqslant 1$, il existe un élément $u_j \in U(\mathfrak{B})$ tel que $u_j b' u_j^{-1} - b \in \mathfrak{Q}^{-r+j}$. Le cas $j = 1$ ayant déjà été traité (on peut prendre $u_1 = 1$ puisque l'on a déjà conjugué b' dans $U(\mathfrak{B})$ de manière à ce que les strates $\boldsymbol{S}_b$ et $\boldsymbol{S}_{b'}$ dans $\mathfrak{b}$ soient équivalentes), on procède par récurrence sur j. Fixons un entier $j \geqslant 1$ et supposons qu'un tel u_j existe. On a déjà posé $E_0 = E[b]$. Posons $K_0 = F[\gamma]$. La strate $[\mathfrak{A}, n, r-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ est simple, K_0 est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$ et $k_F(\gamma)$ est donné par le point (i). Soit $\boldsymbol{s}_b : \mathfrak{b} \to E_0$ une corestriction modérée sur $\mathfrak{b}$ relativement à E_0/E. D'après le corollaire de 3.5, il existe une corestriction modérée $s_\gamma : \mathfrak{g} \to K_0$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à K_0/F telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathfrak{P}^k$, on a

$$\boldsymbol{s}_\gamma(y) \equiv \boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}(y) \pmod{\mathfrak{P}^{k+1}}.$$

Écrivons $u_j b' u_j^{-1} = b + c$ avec $u_j \in U(\mathfrak{B})$ et $c \in \mathfrak{Q}^{-r+j}$. Puisque $\mathcal{O}_G(\gamma') = \mathcal{O}_G(\gamma)$, d'après le lemme, il existe un $g \in G$ tel que $g^{-1}\gamma g = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes (b+c) = \gamma + \boldsymbol{x}c$. Posons $t = \nu_{\mathfrak{A}}(g)$. Comme

$$\mathrm{ad}_\gamma(g) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{t-r+j}},$$

d'après [1, 2.1.1], l'élément g appartient à $\mathfrak{p}_{K_0}^t \mathfrak{N}_{-r+j}(\gamma, \mathfrak{A})$. D'autre part, on a $k_F(\gamma) \leqslant -r$ (avec égalité si et seulement si $E_0 \neq E$) d'où, d'après 3.4.(1),

$$\mathfrak{N}_{-r-j}(\gamma, \mathfrak{A}) = \mathfrak{o}_{K_0} + \mathfrak{p}_{K_0}^{-r+j-k_F(\gamma)} \mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma, \mathfrak{A}) \subset \mathfrak{o}_{K_0} + \mathfrak{P}^j.$$

Écrivons $g = \alpha + y$ avec $\alpha \in \mathfrak{p}_{K_0}^t$ et $y \in \mathfrak{P}^{t+j}$. Puisque $\nu_{\mathfrak{A}}(g) = t$, l'élément α appartient à $\mathfrak{p}_{K_0}^t \smallsetminus \mathfrak{p}_{K_0}^{t+1}$ et l'on a

$$0 = \gamma(\alpha + y) - (\alpha + y)(\gamma + \boldsymbol{x}c) \equiv \mathrm{ad}_\gamma(y) - \alpha \boldsymbol{x} c \pmod{\mathfrak{P}^{t-r+2j}}.$$

En appliquant $\boldsymbol{s}_\gamma$, on obtient que $\boldsymbol{s}_\gamma(\alpha \boldsymbol{x} c) = \alpha \boldsymbol{s}_\gamma(\boldsymbol{x}c)$ appartient à $\mathfrak{p}_{K_0}^{t-r+2j}$, et donc que $\boldsymbol{s}_\gamma(\boldsymbol{x}c)$ appartient à $\mathfrak{p}_{K_0}^{-r+2j} \subset \mathfrak{p}_{K_0}^{-r+j+1}$. On en déduit que

$$\boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}c) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{-r+j+1}},$$

et donc que $\boldsymbol{s}_b \circ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}c) = \boldsymbol{s}_b(c)$ appartient à $\mathfrak{P}^{-r+j+1} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{Q}^{-r+j+1}$. Puisque $k_E(b) \leqslant -r$ (avec égalité si $E_0 \neq E$), d'après [1, 1.4.10], il existe un $a \in \mathfrak{P}_{E_0}^j \mathfrak{N}_{-r}(b, \mathfrak{B})$ $(\subset \mathfrak{Q}^j)$ tel que

$$c \equiv \mathrm{ad}_b(a) \pmod{\mathfrak{Q}^{-r+j+1}}.$$

Alors on a

$$(1+a)^{-1} b (1+a) \equiv b + c \pmod{\mathfrak{Q}^{-r+j+1}},$$

et puisque $(1+a) \in U(\mathfrak{B})$, en posant $u_{j+1} = (1+a)u_j$, on obtient que $u_{j+1} b' u_{j+1}^{-1} - b$ appartient à $\mathfrak{Q}^{-r+j+1}$. L'hypothèse de récurrence est donc vraie au cran $j+1$. Pour tout entier $j \geqslant 1$, on a donc

$$\mathcal{O}_H(b') \cap (b + \mathfrak{Q}^{-r+j}) \neq \emptyset.$$

Cela implique que b appartient à la fermeture $\overline{\mathcal{O}_H(b')}$ de l'orbite $\mathcal{O}_H(b')$ dans $\mathfrak{b}$. Puisque cette dernière est fermée dans $\mathfrak{b}$, on a l'égalité $\mathcal{O}_H(b') = \mathcal{O}_H(b)$.

On a prouvé l'implication $\Rightarrow$ du point (ii) dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$. Si $b = b' = 0$, il n'y a rien à démontrer. Reste à prouver que si $b \neq 0$, alors $b' \neq 0$. Supposons par l'absurde que $b \neq 0$ et $b' = 0$. Puisque $b' = 0 \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, E est un sous-corps maximal de $\mathfrak{g}$ et $E[b] = E = \mathfrak{b}$. Posons $r = -\nu_E(b)$. Soit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\beta$ l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

normalisé par $E^\times$. Puisque $k_F(\gamma) = k_F(\beta) < -r$ et $\gamma' = \beta$, les strates $\boldsymbol{S} = [\mathfrak{A}, n, r, \gamma]$ et $\boldsymbol{S'} = [\mathfrak{A}, n, r, \gamma']$ dans $\mathfrak{g}$ sont simples et équivalentes. Comme elles s'entrelacent dans G, on montre comme plus haut qu'il existe un élément $h \in H = E^\times$ tel que

$$bh - hb' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_E^{-r+a}h + h\mathfrak{p}_E^{-r+a}}$$

avec $a = -r - k_F(\beta) > 0$. Mais cela signifie que $b \in \mathfrak{p}_E^{-r+a}$, ce qui est impossible puisque $\nu_E(b) = -r$.

Cela achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 3. Le lemme a été utilisé plusieurs fois dans la preuve de la proposition : pour l'implication $\Leftarrow$ du point (ii) bien sûr, mais aussi pour passer des éléments de $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$ aux éléments $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}^{k_F(\beta)+\frac{1}{d}}$ tels que $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}_b$. Il a aussi une conséquence que nous utiliserons plus loin :

(3) l'ensemble ${}^G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1})$ est ouvert *fermé* et G-invariant dans G.

En effet, posons $\mathfrak{X} = {}^G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1})$. D'après la proposition de 3.4, c'est un ouvert (clairement G-invariant) de G. Soit $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$ pour un élément $b \in \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$. Puisque d'après 3.1.(7), l'ensemble ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1})$ est ouvert fermé et H-invariant dans $\mathfrak{b}$, on peut choisir un élément fermé (dans $\mathfrak{b}$) b' qui appartient à $\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1} \cap \overline{\mathcal{O}_H(b)}$. D'après le lemme, l'élément $\gamma' = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'$ appartient à $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma)}$. Montrons que γ' est fermé (dans $\mathfrak{g}$). Si $b' \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, c'est vrai puisque d'après la proposition, $\gamma' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$. Sinon, quitte à conjuguer b' dans H, on peut supposer qu'il existe une décomposition $V = V_1 \times \cdots \times V_s$ où V_i est un sous-E-espace vectoriel de V de dimension d_i, telle que, en posant $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_E(V_i)$ et $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_s$, on a :

- $\underline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{m}_* = \underline{\mathfrak{B}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathfrak{B}}_s$ où $\underline{\mathfrak{B}}_i$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal dans $\mathfrak{b}_i$;
- $\underline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{m} = \underline{\mathfrak{A}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathfrak{A}}_s$ où $\underline{\mathfrak{A}}_i$ est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}_i$ normalisé par $E^\times$ tel que $\underline{\mathfrak{A}}_i \cap \mathfrak{b}_i = \underline{\mathfrak{B}}_i$;
- la $(\underline{W}, E)$-décomposition $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \underline{\mathfrak{B}} \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathfrak{A}}$ de $\underline{\mathfrak{A}}$ se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} (\underline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{m}_*) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{m}$;
- l'élément b' appartient à $\mathfrak{m}_*$ et, pour chaque i, la composante b_i de b sur $\mathfrak{b}_i$ appartient à $(\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}_i^{\underline{k}_{i,0}+1}$ où $\underline{\mathfrak{Q}}_i$ est le radical de Jacobson de $\underline{\mathfrak{B}}_i$ et $\underline{k}_{i,0} = k_F(\beta)d_i$ $(= k_0(\beta, \underline{\mathfrak{A}}_i))$.

Pour des détails sur ces décompositions, voir plus loin (4.3). Ainsi l'élément γ' appartient à $\mathfrak{m}$ et, pour chaque i, la composante $\gamma'_i = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'_i$ de γ' sur $\mathfrak{g}_i$ appartient à $(\mathfrak{g}_i)_{\mathrm{qre}}$. Donc γ' est fermé dans $\mathfrak{m}$ et aussi dans $\mathfrak{g}$. On a prouvé que pour tout $\gamma \in \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$, il existe un élément fermé (dans $\mathfrak{g}$) γ' qui appartient à $(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}) \cap \overline{\mathcal{O}_G(\gamma)}$. D'après la remarque 2 de 3.2, cela prouve (3). ■

3.8. Une conséquence du résultat principal

Soit un élément $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$ et soit $(\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ une suite d'approximation minimale de γ, de suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ et de suite dérivée $(b_0, \ldots, b_{m-1})$ – cf. la définition de 3.6. On note $(F_0, \ldots, F_m)$ la suite d'extensions de F définie par

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

$F_i = F[\gamma_i]$, et pour $i = 0,\ldots,m$, on note n_i, r_i, e_i, f_i les entiers définis comme dans la remarque 1 de 3.6. On pose $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(F_i)$ et $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(F_i)$, et (si $i < m$) $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{F_{i+1}}(F_i)$ et $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{b}_i$. On a identifié $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0$ *via* le choix d'un vecteur non nul $v \in V$ et, pour $i = 0,\ldots,m-1$, on a identifié $\mathfrak{g}_i$ à $\mathfrak{g}_{i+1} \otimes_{F_{i+1}} \mathfrak{b}_i$ *via* le choix d'une (W_i, F_{i+1})-décomposition $\mathfrak{A}_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F_{i+1}}} \mathfrak{B}_i \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{A}_i$. Avec ces identifications, on a l'égalité $\boldsymbol{x}_{i+1} \otimes b_i = \gamma_i - \gamma_{i+1}$. On a aussi l'égalité (comme F_{i+1}-espaces vectoriels) $F_{i+1} \otimes_F W_i = F_i$.

Soit aussi un autre élément $\gamma' \in G_{\mathrm{qre}}$ et soit $(\gamma'_0 = \gamma, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{m'})$ une suite d'approximation minimale de γ', de suite des correcteurs $(\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_m)$ et de suite dérivée $(b'_0, \ldots, b'_{m-1})$. Elle définit comme ci-dessus une suite d'extensions $(F'_0, \ldots, F'_{m'})$, des entiers n'_i, r'_i, e'_i, f'_i, des algèbres $\mathfrak{g}'_i$ et $\mathfrak{A}'_i$, et (si $i < m$) $\mathfrak{b}'_i$ et $\mathfrak{B}'_i$. On a identifié $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}'_0$ *via* le choix d'un vecteur non nul $v' \in V$ et, pour $i = 0,\ldots,m-1$, on a identifié $\mathfrak{g}'_i$ à $\mathfrak{g}'_{i+1} \otimes_{F'_{i+1}} \mathfrak{b}'_i$ *via* le choix d'une (W'_i, F'_{i+1})-décomposition $\mathfrak{A}'_{i+1} \otimes_{\mathfrak{o}_{F'_{i+1}}} \mathfrak{B}'_i \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{A}'_i$ de $\mathfrak{A}'_i$.

Définition. Les suites $(\gamma'_0, \ldots, \gamma'_{m'})$ et $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ sont dites *(G-)équivalentes* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $m' = m$;
- pour $i = 0,\ldots,m$, on a $n'_i = n_i$ et $r'_i = r_i$;
- il existe une suite d'isomorphismes de F-espaces vectoriels $\iota_i : F_i \xrightarrow{\simeq} F'_i$ ($i = 0,\ldots,m$) qui sont *compatibles* au sens où (pour $i < m$), en identifiant F_{i+1} au sous-F-espace vectoriel $F_{i+1} \otimes 1$ de $F_{i+1} \otimes_F W_i = F_i$ et F'_{i+1} au sous-F-espace vectoriel $F'_{i+1} \otimes 1$ de $F'_{i+1} \otimes_F W'_i = F'_i$, on a $\iota_{i+1} = \iota_i|_{F_{i+1}}$, et tels que pour $i > 0$, ι_i est un *isomorphisme de F-extensions*. On note $\boldsymbol{\alpha}_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g}'_i$ l'isomorphisme de F-algèbres donné par $\boldsymbol{\alpha}_i(g) = \iota_i \circ g \circ \iota_i^{-1}$. Pour $i = 0,\ldots,m-1$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ induit par restriction un isomorphisme de F_{i+1}-algèbres $\boldsymbol{\beta}_i : \mathfrak{b}_i \to \mathfrak{b}'_i$ (pour la structure de F_{i+1}-algèbre sur $\mathfrak{b}'_i$ déduite de l'isomorphisme de F-extensions $\iota_{i+1} = F_{i+1} \xrightarrow{\simeq} F'_{i+1}$). Par construction, les $\boldsymbol{\alpha}_i$ sont compatibles aux identifications $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{i+1} \otimes_{F_{i+1}} \mathfrak{b}_i$ et $\mathfrak{g}'_i = \mathfrak{g}'_{i+1} \otimes_{F'_{i+1}} \mathfrak{b}'_i$, au sens où pour $i = 0,\ldots,m-1$, on a $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \otimes \boldsymbol{\beta}_i$;
- pour $i = 0,\ldots,m-1$, on a $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}(\boldsymbol{x}_{i+1}) = \boldsymbol{x}'_{i+1}$ et $\boldsymbol{\beta}_i(b_i) \in \mathcal{O}_{H'_i}(b'_i)$ avec $H'_i = (\mathfrak{b}'_i)^\times$;
- $\boldsymbol{\alpha}_m(\gamma_m) \in \mathcal{O}_{G'_m}(\gamma'_m)$ avec $G'_m = (\mathfrak{g}'_m)^\times$.

Remarque 1. Si les suites d'approximation minimale $(\gamma'_0, \ldots, \gamma'_{m'})$ et $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ sont équivalentes, alors pour $i = 0,\ldots,m' = m$, on a $e'_i = e_i$ et $f'_i = f_i$. En effet, pour $i > 0$, c'est une conséquence de l'existence de l'ismorphisme de F-extensions $\iota_i : F_i \xrightarrow{\simeq} F'_i$. Pour $i = 0$, on a $\gamma = \gamma_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes b_0$ et $\gamma' = \gamma'_1 + \boldsymbol{x}'_1 \otimes b'_0$, $e(F_0/F) = e(F_1[b_0]/F)$ et $e(F'_0/F) = e(F'_1[b'_0]/F)$, $f(F_0/F) = f(F_1[b_0]/F)$ et $f(F'_0/F) = f(F'_1[b'_0]/F)$. Or, puisque $\boldsymbol{\beta}_0(b_0) \in \mathcal{O}_{H'_0}(b'_0)$, on a

$$e(F_1[b_0]/F) = e(F_1[b_0]/F_1)e_1 = e(F'_1[b'_0]/F'_1)e'_1 = e(F'_1[b'_0]/F).$$

De la même manière, on obtient $f(F_1[b_0]/F) = f(F'_1[b'_0]/F)$. ∎

Remarque 2. Pour $i = 0,\ldots,m-1$, soit $\tilde{\boldsymbol{s}}_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{b}_i$ la corestriction modérée sur $\mathfrak{g}_i$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

relativement à F_{i+1}/F normalisée par $\tilde{\mathfrak{s}}_i(\gamma_i-\gamma_{i+1})=b_i$ – cf. la remarque 1 de 3.6. De même, pour $i=0,\dots,m'-1$, soit $\tilde{\mathfrak{s}}'_i:\mathfrak{g}'_i\to\mathfrak{b}'_i$ la corestriction modérée sur $\mathfrak{g}'_i$ relativement à F'_{i+1}/F normalisée par $\tilde{\mathfrak{s}}'_i(\gamma'_i-\gamma'_{i+1})=b'_i$. Si les suites $(\gamma_0,\dots,\gamma_m)$ et $(\gamma'_0,\dots,\gamma'_{m'})$ sont équivalentes, alors pour $i=0,\dots,m-1$, l'application $\tilde{\boldsymbol{t}}'_i=\boldsymbol{\beta}_i\circ\tilde{\mathfrak{s}}_i\circ\boldsymbol{\alpha}_i^{-1}:\mathfrak{g}'_i\to\mathfrak{b}'_i$ est une corestriction modérée sur $\mathfrak{g}'_i$ relativement à F'_{i+1}/F. On a donc $\tilde{\boldsymbol{t}}'_i=u'_{i+1}\tilde{\mathfrak{s}}'_i$ pour un élément $u'_{i+1}\in\mathfrak{o}_{F'_{i+1}}^{\times}$. Puisque $\gamma'_i-\gamma'_{i+1}=\boldsymbol{x}'_{i+1}\otimes b'_i$ avec $\boldsymbol{x}'_{i+1}=\boldsymbol{\alpha}_{i+1}(\boldsymbol{x}_{i+1})$ et $b'_i=h_i'^{-1}\boldsymbol{\beta}_i(b_i)h'_i$ pour un élément $h'_i\in H'_i$, posant $h_i=\boldsymbol{\beta}_i^{-1}(h'_i)\in H_i=\mathfrak{b}_i^{\times}$, on obtient

$$\tilde{\boldsymbol{t}}'_i(\gamma'_i-\gamma'_{i+1})=\boldsymbol{\beta}_i\circ\tilde{\mathfrak{s}}_i(\boldsymbol{x}_{i+1}\otimes h_i^{-1}b_ih_i)=\boldsymbol{\beta}_i(h_i^{-1}b_ih_i)=b'_i=\tilde{\mathfrak{s}}'_i(\gamma'_i-\gamma'_{i+1}).$$

Par conséquent, $u'_{i+1}=1$ et $\tilde{\boldsymbol{t}}'_i=\tilde{\mathfrak{s}}'_i$. En d'autres termes, les corestrictions modérées $\tilde{\mathfrak{s}}_i$ et $\tilde{\mathfrak{s}}'_i$ sont compatibles aux isomorphismes $\boldsymbol{\alpha}_i$ et $\boldsymbol{\beta}_i$: on a l'égalité $\tilde{\mathfrak{s}}'_i\circ\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i\circ\tilde{\mathfrak{s}}_i:\mathfrak{g}_i\to\mathfrak{b}'_i$. ■

Proposition. *On a $\mathcal{O}_G(\gamma')=\mathcal{O}_G(\gamma)$ si et seulement si il existe des suites d'approximation minimale $(\gamma'_0,\dots,\gamma'_{m'})$ de γ' et $(\gamma_0,\dots,\gamma_m)$ de γ qui sont équivalentes.*

Démonstration. Si $\mathcal{O}_G(\gamma')=\mathcal{O}_G(\gamma)$, on écrit $\gamma'=g^{-1}\gamma g$ pour un $g\in G$. Alors toute suite d'approximation minimale $(\gamma_0,\dots,\gamma_m)$ de γ définit, par transport de structure *via* l'automorphisme $\mathrm{Int}_{g^{-1}}$ de G, une suite d'approximation minimale de γ' qui lui est équivalente.

En sens inverse, on raisonne par récurrence sur la longueur m des suites d'approximation minimale. Pour $m=0$, l'assertion est claire : si les suites d'approximation minimale $(\gamma'=\gamma'_0)$ et $(\gamma=\gamma_0)$ sont équivalentes, alors (par définition) γ' et γ sont conjugués dans G.

Supposons $m\geqslant 1$ et l'assertion que l'on veut prouver vraie pour les suites d'approximation minimale de longueur $\leqslant m-1$. Supposons aussi que les suites d'approximation minimale $(\gamma'_0,\dots,\gamma'_{m'})$ de γ' et $(\gamma_0,\dots,\gamma_m)$ de γ sont équivalentes. On a donc $m'=m$. Posons $F_0=F[\gamma]$, $F'_0=F[\gamma']$, $F_1=F[\gamma_1]$ et $F'_1=F[\gamma'_1]$. Par hypothèse, on a un isomorphisme de F-espaces vectoriels $\iota_0:F_0\xrightarrow{\simeq}F'_0$ induisant par restriction un isomorphisme de F-extensions $\iota_1:F_1\xrightarrow{\simeq}F'_1$ (pour les identifications $F_1=F_1\otimes 1\subset F_0$ et $F'_1=F'_1\otimes 1\subset F'_0$). Pour $i=0,\,1$, posons $\mathfrak{g}_i=A(F_i)$ et $\mathfrak{g}'_i=A(F'_i)$, et notons $\boldsymbol{\alpha}_i:\mathfrak{g}_i\to\mathfrak{g}'_i$ l'isomorphisme de F-algèbres induit par ι_i. Posons aussi $\mathfrak{b}_0=\mathrm{End}_{F_1}(F_0)$ et notons $\boldsymbol{\beta}_0:\mathfrak{b}_0\to\mathfrak{b}'_0$ l'isomorphisme de F_1-algèbres induit par (ι_0,ι_1). On a des identifications $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_1\otimes_{F_1}\mathfrak{b}_0$ et $\mathfrak{g}'_0=\mathfrak{g}'_1\otimes_{F'_1}\mathfrak{b}'_0$. Écrivons $\gamma=\gamma_1+\boldsymbol{x}_1\otimes b_0$ et $\gamma'=\gamma'_1+\boldsymbol{x}'_1\otimes b'_0$. Par hypothèse, on a $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}_1\otimes\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}'_1$ et $\boldsymbol{\beta}_0(b_0)\in\mathcal{O}_{H'_0}(b'_0)$ avec $H'_0=(\mathfrak{b}'_0)^{\times}$. Identifions F'_0 à F_0 *via* ι_0. Cela revient aussi à identifier F'_1 à F_1, $\mathfrak{g}'_1$ à $\mathfrak{g}_1$, $\boldsymbol{x}'_1$ à $\boldsymbol{x}_1$ et $\mathfrak{b}'_0$ à $\mathfrak{b}_0$. Posons $G_1=\mathrm{Aut}_F(F_1)$. Comme les suites d'approximation minimale $(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ de γ_1 et $(\gamma'_1,\dots,\gamma'_m)$ de γ'_1 sont G_1-équivalentes et de longueur $m-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un élément $g_1\in G_1$ tel que $\gamma'_1=g_1^{-1}\gamma_1g_1$. Quitte à remplacer γ'_1 par $g_1\gamma'_1g_1^{-1}$, ce qui revient à remplacer γ' par $g\gamma'g^{-1}$ avec $g=g_1\otimes 1\in G$, et aussi la suite d'approximation minimale $(\gamma'_0=\gamma',\dots,\gamma'_m)$ de γ' par celle s'en déduisant par transport de structure *via* l'automorphisme Int_g de G, on peut supposer que $\gamma'_1=\gamma_1$. On peut alors appliquer le point (ii) de la proposition de 3.7 : les éléments $\gamma=\gamma_1+\boldsymbol{x}_1\otimes b_0$ et $\gamma'=\gamma_1+\boldsymbol{x}_1\otimes b'_0$ sont conjugués dans G. □

3.9. Le principe de submersion

Reprenons les hypothèses et les notations de 3.7. En particulier, $E=F[\beta]$ pour un élément pur $\beta\in\mathfrak{g}$ et $H=\mathrm{Aut}_E(V)$. On a les identifications

$$\mathfrak{g}=A(E)\otimes_E\mathfrak{b},\quad \underline{\mathfrak{P}}^k=\mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\underline{\mathfrak{Q}}^k\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

On a fixé une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0:A(E)\rightarrow E^\times$ relativement à E/F et un élément $\boldsymbol{x}_0\in\mathfrak{A}(E)$ tel que $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}_0)=1$. On pose $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_0\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$ et $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0\otimes 1$.

Comme dans la proposition de 3.7, on suppose $E\neq F$. On veut descendre une distribution G-invariante au voisinage de β dans G en une distribution H-invariante au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$. On reprend pour cela la construction de [9] (voir aussi [10, 5.4]), qui est une variante du principe de submersion d'Harish-Chandra. D'après la proposition de 3.4, l'application

$$\delta: G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}\rightarrow G,\ (g,\boldsymbol{x}b)\mapsto g^{-1}(\beta+\boldsymbol{x}b)g$$

est partout submersive (pour les constructions à suivre, on a préféré remplacer $\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ par $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$). Fixons une mesure de Haar dg sur G et une mesure de Haar $\mathfrak{d}b'$ sur $\mathfrak{b}$. D'après le principe de submersion d'Harish-Chandra, il existe une unique application linéaire surjective

$$C^\infty_{\mathrm{c}}(G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})\rightarrow C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathrm{Im}(\delta)),\ \phi\mapsto\phi^\delta,$$

telle que, pour toute fonction $\phi\in C^\infty_{\mathrm{c}}(G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ et toute fonction $f\in C^\infty(\mathrm{Im}(\delta))$, on a

$$\iint_{G\times\mathfrak{b}}\phi(g,\boldsymbol{x}b')f(\delta(g,\boldsymbol{x}b'))dg\mathfrak{d}b'=\int_G\phi^\delta(g)f(g)dg.$$

On déduit (cf. [9, 2.3.1]) que pour toute distribution G-*invariante*, c'est-à-dire invariante par conjugaison, T sur G, il existe une unique distribution $\widetilde{\vartheta}_T$ sur $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ telle que pour toute fonction $\phi\in C^\infty_{\mathrm{c}}(G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, on a

$$\langle\phi_\delta,\widetilde{\vartheta}_T\rangle=\langle\phi^\delta,T\rangle,\tag{1}$$

où la fonction $\phi_\delta\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ est donnée par

$$\phi_\delta(\boldsymbol{x}b')=\int_G\phi(g,\boldsymbol{x}b')dg.$$

Bien sûr, si T et T' sont deux distributions G-invariantes sur G qui coïncident sur l'ouvert $\mathrm{Im}(\delta)$ de G, alors les distributions $\widetilde{\vartheta}_T$ et $\widetilde{\vartheta}_{T'}$ sur $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ sont égales.

À une distribution G-invariante T sur G, on associe comme en [9] une distribution H-invariante ϑ_T sur ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$. Rappelons la construction. Soit une fonction $\varphi\in C^\infty_{\mathrm{c}}({}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}))$. Elle se décompose en

$$\varphi=\sum_{h\in H}\varphi_h\tag{2}$$

avec $\varphi_h\in C^\infty_{\mathrm{c}}(h\,\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}h^{-1})$ et $\varphi_h=0$ sauf pour un nombre fini de h. Pour $h\in H$, on note $\widetilde{\varphi}_h\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ la fonction $(\varphi_h\circ\mathrm{Ad}_h)\circ\boldsymbol{s}$ sur $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ et l'on pose

$$\langle\varphi,\vartheta_T\rangle=\sum_{h\in H}\langle\widetilde{\varphi}_h,\widetilde{\vartheta}_T\rangle.\tag{3}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

D'après [9] (voir aussi [10, 5.4]), la quantité $\langle \varphi, \vartheta_T \rangle$ ne dépend pas de la décomposition (2) choisie, et la distribution ϑ_T sur ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ ainsi définie est H-invariante. Le *support* de cette distribution ϑ_T est par définition l'ensemble des $b \in {}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ tels que pour tout voisinage ouvert U_b de b dans ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, la restriction de ϑ_T à U_b n'est pas nulle. C'est une partie fermée de ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, que l'on note $\mathrm{Supp}(\vartheta_T)$. D'après la remarque 2 de 3.1, ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ est une partie fermée dans $\mathfrak{b}$. Par conséquent, $\mathrm{Supp}(\vartheta_T)$ est aussi une partie fermée dans $\mathfrak{b}$ et l'on peut prolonger ϑ_T par 0 sur $\mathfrak{b} \smallsetminus \mathrm{Supp}(\vartheta_T)$. On obtient ainsi une distribution H-invariante sur $\mathfrak{b}$, de support $\mathrm{Supp}(\vartheta_T)$, que l'on note θ_T.

On peut aussi, comme en [9, 2.3], se restreindre aux distributions sur $\mathfrak{b}$ à support dans un voisinage ouvert fermé et H-invariant Ω de 0 dans $\mathfrak{b}$ contenu dans ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$. Fixons un tel voisinage Ω (on peut choisir Ω aussi petit que l'on veut – cf. la remarque de 3.2). Pour une distribution G-invariante T sur G, on note θ_T^Ω la distribution H-invariante sur $\mathfrak{b}$ à support dans Ω définie par

$$\langle \mathfrak{f}, \theta_T^\Omega \rangle = \langle \mathfrak{f}|_\Omega, \vartheta_T \rangle, \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{b}). \tag{4}$$

Bien sûr, si $\mathrm{Supp}(\vartheta_T) \subset \Omega$, on a $\theta_T^\Omega = \theta_T$.

Rappelons que d'après [10, 4.3.5], on a le

Lemme. *Soit* $\mathfrak{A}$ *un* $\mathfrak{o}$*-ordre héréditaire dans* $\mathfrak{g}$ *normalisé par* $E^\times$ *et soit* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{b}$*. Posons* $\mathfrak{P} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ *et* $\mathfrak{Q} = \mathrm{rad}(\mathfrak{B})$*. Pour tout entier* $i > k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$*, on a*

$$\{g \in G : g^{-1}\beta g \in \beta + \mathfrak{P}^i\} = H(1 + \mathfrak{Q}^{i-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})).$$

Fixons une mesure de Haar dz sur le centre $Z = F^\times$ de G. On peut prendre pour dz la mesure qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal U_F de Z, mais ce n'est pas vraiment nécessaire. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on note dg_γ la mesure de Haar sur $G_\gamma = F[\gamma]^\times$ telle que $\mathrm{vol}(Z\backslash G_\gamma, \frac{dg_\gamma}{dz}) = 1$, c'est-à-dire celle telle que

$$e(F[\gamma]/F)\mathrm{vol}(U_{F[\gamma]}, dg_\gamma) = \mathrm{vol}(U_F, dz),$$

et l'on note $\mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_\gamma^G$ la distribution (G-invariante) sur G définie par

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}, \quad f \in C_c^\infty(G).$$

On a donc

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{Z\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dz}, \quad f \in C_c^\infty(G).$$

On définit aussi une constante $v_F(\gamma) = v_F(\gamma, \frac{dg}{dg\gamma}) > 0$ par la formule

$$v_F(\gamma) = \mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times(1 + \mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma, \mathfrak{A}_\gamma)), \tfrac{dg}{dg_\gamma}\Big). \tag{5}$$

Fixons une mesure de Haar dh sur H et une mesure de Haar dz_E sur le centre $Z_H = E^\times$ de H. On peut prendre pour dh la mesure $\mathfrak{d}^\times b' = \frac{\mathfrak{d}b'}{|\det(b')|_E^d}$ associée à $\mathfrak{d}b'$ et pour dz_E la mesure telle que $\mathrm{vol}(F^\times\backslash E^\times, \frac{dz_E}{dz}) = 1$, mais ce n'est pas nécessaire pour

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

l'instant – voir la proposition de 3.10. De la même manière, pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, on note dh_b la mesure de Haar sur $H_b = E[b]^\times$ telle que $\mathrm{vol}(Z_H \backslash H_b, \frac{dh_b}{dz_E}) = 1$, c'est-à-dire telle que $e(E[b]/E)\mathrm{vol}(U_{E[b]}, dh_b) = \mathrm{vol}(U_E, dz_E)$, et $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ la distribution (H-invariante) sur $\mathfrak{b}$ définie par

$$\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}) = \int_{H_b \backslash H} \mathfrak{f}(h^{-1}bh) \tfrac{dh}{dh_b}, \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{b}).$$

On a donc

$$\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}) = \int_{Z_H \backslash H} \mathfrak{f}(h^{-1}bh) \tfrac{dh}{dz_E}, \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{b}).$$

On définit aussi une constante $v_E(b) = v_E(b, \frac{dh}{dh_b}) > 0$ par la formule

$$v_E(b) = \mathrm{vol}\Big(E[b]^\times(1 + \mathfrak{p}_{E[b]}\mathfrak{N}_{k_E(b)}(b, \mathfrak{B}_b)), \tfrac{dh}{dh_b}\Big). \tag{6}$$

Notons que si $E[b] = E$, alors $E[b]^\times(1 + \mathfrak{p}_{E[b]}\mathfrak{N}_{k_E(b)}(b, \mathfrak{B}_b)) = E^\times$ $(= H)$ et $v_E(b)$ n'est autre que le rapport des mesures $\frac{dh}{dh_b}$, c'est-à-dire (compte tenu de la normalisation de dh_b) $\mathrm{vol}(U_E, dh)\mathrm{vol}(U_E, dz_E)^{-1}$.

Remarque 1. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, la distribution $f \mapsto v_F(\gamma)^{-1}\mathcal{O}_\gamma(f)$ sur G ne dépend pas du choix des mesures de Haar. D'après le lemme, pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, la constante $v_F(\gamma)$ est le volume (pour la mesure $\frac{dg}{dg_\gamma}$ sur $F[\gamma]^\times \backslash G$) de l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^{-1}\gamma g$ appartient à $\gamma + \mathfrak{P}_\gamma^{k_F(\gamma)+1} = \gamma U^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}(\mathfrak{A}_\gamma)$. Ce lemme est à la base de ce que, dans [10], nous avons maladroitement appelé la normalisation « J » des intégrales orbitales sur G. Cette normalisation « J » consiste à choisir les mesures dg et dg_γ (pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$) de telle manière que le facteur de normalisation $v_F(\gamma)$ soit égal à 1. Nous y reviendrons plus loin (3.10). ■

On a posé $d = \frac{N}{[E:F]}$. Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on pose

$$k_F(\beta, b) \; (= k_F(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b)) = \begin{cases} k_E(b) & \text{si } E[b] \neq E \\ k_F(\beta) & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note $\mathfrak{A}_{\beta,b}$ l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $F[\beta, b]^\times = E[b]^\times$ et $\mathfrak{B}_b$ l'unique $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{b}$ normalisé par $E[b]^\times$. On a donc $\mathfrak{A}_{\beta,b} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{B}_b$ et $\mathfrak{A}_{\beta,b}$ est aussi l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $F[\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b]^\times$. On pose $\mathfrak{P}_{\beta,b} = \mathrm{rad}(\mathfrak{A}_{\beta,b})$, $\mathfrak{Q}_b = \mathrm{rad}(\mathfrak{B}_b)$,

$$n_F(\beta, b) \; (= -\nu_{\mathfrak{A}_{\beta,b}}(\beta)) = n_F(\beta)e(\mathfrak{B}_b|\mathfrak{o}_E),$$

et

$$\tilde{k}_F(\beta, b) \; (= \tilde{k}_F(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b)) = n_F(\beta, b) + k_F(\beta, b) \geqslant 0.$$

Soit

$$I_G^H(\beta, b) = \frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}_b^{k_F(\beta,b)+1}, \mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U^{\tilde{k}_F(\beta,b)+1}(\mathfrak{A}_{\beta,b}), dg)}. \tag{7}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Proposition. *Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ et soit $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$. On a* $\mathrm{Supp}(\vartheta_{\mathcal{O}_\gamma}) = \mathcal{O}_H(b)$ *et la distribution H-invariante $\theta_{\mathcal{O}_\gamma}$ sur $\mathfrak{b}$ est donnée par*

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = I_G^H(\beta, b) \frac{v_F(\gamma)}{v_E(b)} \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}.$$

Démonstration. Commençons par prouver que le support de la distribution $\vartheta_{\mathcal{O}_\gamma}$ sur ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ est égal à $\mathcal{O}_H(b)$. Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de G et soit $f_{\mathcal{K}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{K}$ divisée par $\mathrm{vol}(\mathcal{K}, dg)$. Soit $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}))$. Décomposons φ en $\varphi = \sum_{h \in H} \varphi_h$ comme en (2). Par définition de $\vartheta_{\mathcal{O}_\gamma}$, on a

$$\langle \varphi, \vartheta_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle = \sum_{h \in H} \mathcal{O}_\gamma((f_{\mathcal{K}} \otimes \widetilde{\varphi}_h)^\delta) = \mathcal{O}_\gamma\Big(\sum_{h \in H} (f_{\mathcal{K}} \otimes \widetilde{\varphi}_h)^\delta\Big),$$

puis, par linéarité de l'application $\phi \mapsto \phi^\delta$,

$$\langle \varphi, \vartheta_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle = \mathcal{O}_\gamma\bigg(\bigg[f_{\mathcal{K}} \otimes \Big(\sum_{h \in H} \widetilde{\varphi}_h\Big)\bigg]^\delta\bigg).$$

Si de plus $\varphi > 0$, alors $[f_{\mathcal{K}} \otimes (\sum_{h \in H} \widetilde{\varphi}_h)]^\delta > 0$ et, notant $Y \subset \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ le support de la fonction $\sum_{h \in H} \varphi_h \circ \mathrm{Ad}_h$, on a $\langle \varphi, \vartheta_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle \neq 0$ si et seulement si

$$\delta(\mathcal{K} \times \boldsymbol{x} Y) \cap \mathcal{O}_G(\gamma) \neq \emptyset,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\{\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b' : b' \in Y\} \cap \mathcal{O}_G(\gamma) \neq \emptyset.$$

Puisque $\vartheta_{\mathcal{O}_\gamma}$ est une distribution H-invariante, son support contient l'orbite $\mathcal{O}_H(b)$, et il est égal à cette orbite si et seulement si pour tout $b' \in \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a

$$\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b' \in \mathcal{O}_G(\gamma) \Rightarrow b' \in \mathcal{O}_H(b). \tag{8}$$

Si l'élément b' n'est pas quasi régulier elliptique (dans $\mathfrak{b}$), alors il est contenu dans une sous-E-algèbre parabolique propre de $\mathfrak{b}$, et $\gamma' = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b'$ est contenu dans une sous-F-algèbre parabolique propre de $\mathfrak{g}$, ce qui entraîne que $\gamma' \notin \mathcal{O}_G(\gamma)$. D'autre part, si $b' \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, l'implication (8) est vraie d'après la proposition de 3.7. On a donc prouvé que le support de la distribution $\vartheta_{\mathcal{O}_\gamma}$ est égal à $\mathcal{O}_H(b)$.

On vient de voir que la distribution H-invariante $\theta_{\mathcal{O}_\gamma}$ sur $\mathfrak{b}$ vérifie $\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = \alpha \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ pour une constante $\alpha > 0$. Calculons cette constante α. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\beta,b}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_b$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\beta,b}$ et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_b$. Posons $s = \inf\{-k_E(b), n_E(b)\}$. On a donc $-s = k_E(b)$ si $E[b] \neq E$, et $-s = \nu_E(b)$ sinon. Soit φ, resp. $\widetilde{\varphi}$, la fonction caractéristique de $b + \mathfrak{Q}^{-s+1}$, resp. $\boldsymbol{x}(b + \mathfrak{Q}^{-s+1})$. Si $E[b] \neq E$, d'après le lemme, on a

$$\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\varphi) = v_E(b). \tag{9}$$

Si $E[b] = E$, l'égalité (9) reste vraie. En effet, dans ce cas, on a $E^\times(1 + \mathfrak{p}_E \mathfrak{N}_{k_E(b)}(b, \mathfrak{B})) = E^\times$ et

$$\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}(b) \tfrac{dh}{dh_b} = \mathfrak{f}(b) \tfrac{\mathrm{vol}(U_E, dh)}{\mathrm{vol}(U_E, dz_E)}, \quad \mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{b})\,;$$

en particulier, pour $\mathfrak{f} = \varphi$, puisque $\varphi(b) = 1$, on a bien $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\varphi) = v_E(b)$.

Posons $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ et notons $\mathcal{K}$ le sous-groupe $1 + \mathfrak{Q}^{-s-k_0+1}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A})$ de $U^1(\mathfrak{A})$. D'après la preuve de [10, 5.4.3], pages 73–74, qui utilise [10, 5.3.4], on a

$$\delta(\mathcal{K} \times \boldsymbol{x}(b + \mathfrak{Q}^{-s+1})) = \gamma + \mathfrak{P}^{-s+1}$$

et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\gamma + \mathfrak{P}^{-s+1})$, on a

$$\int_{\mathcal{K}\times\mathfrak{Q}^{-s+1}} f \circ \delta(g, \boldsymbol{x}(b+b'))dg\mathfrak{d}b' = \int_{\mathcal{K}\times\mathfrak{Q}^{-s+1}} f(\gamma + \mathrm{Ad}_\beta(1-g) + \boldsymbol{x}b')dg\mathfrak{d}b'.$$

Notons $\mathbf{1}_\mathcal{K}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{K}$ et prenons pour f la fonction caractéristique de $\gamma + \mathfrak{P}^{-s+1}$. On obtient

$$(\mathbf{1}_\mathcal{K} \otimes \widetilde{\varphi})^\delta = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{K}, dg)\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{-s+1}, \mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(\gamma + \mathfrak{P}^{-s+1}, dg)} f.$$

Posons $n = n_F(\beta, b)$. Puisque $n = -\nu_\mathfrak{A}(\gamma)$, on a $\gamma + \mathfrak{P}^{-s+1} = \gamma U^{n-s+1}(\mathfrak{P})$ et

$$\mathrm{vol}(\gamma + \mathfrak{P}^{-s+1}, dg) = \mathrm{vol}(U^{n-s+1}(\mathfrak{P}), dg).$$

D'autre part, on a

$$(\mathbf{1}_\mathcal{K} \otimes \widetilde{\varphi})_\delta = \mathrm{vol}(\mathcal{K}, dg)\widetilde{\varphi}.$$

D'après (1), on obtient

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \frac{\mathrm{vol}(U^{n-s+1}(\mathfrak{P}), dg)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{-s+1}, \mathfrak{d}b')} \langle \widetilde{\varphi}, \widetilde{\vartheta}_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle.$$

Or on a

$$\langle \widetilde{\varphi}, \widetilde{\vartheta}_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle = \langle \varphi, \theta_{\mathcal{O}_\gamma} \rangle = \alpha \mathcal{O}_b^\mathfrak{b}(\varphi),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{-s+1}, \mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U^{n-s+1}(\mathfrak{P}), dg)} \mathcal{O}_\gamma(f) = \alpha \mathcal{O}_b^\mathfrak{b}(\varphi). \tag{10}$$

Enfin, à nouveau d'après le lemme, on a

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times(1 + \mathfrak{p}_{F[\gamma]}^{-s-k_F(\gamma)+1}\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma, \mathfrak{A})), \tfrac{dg}{dg_\gamma}\Big). \tag{11}$$

Si $E[b] \neq E$, alors $-s = k_F(\gamma) = k_E(b)$ et $\mathcal{O}_\gamma(f) = v_F(\gamma)$, et grâce à (9) et (10), on obtient la valeur annoncée pour la constante α. Reste à traiter le cas $E[b] = E$. En ce cas, on a $-s = \nu_E(b)$ et $k_F(\gamma) = k_F(\beta)$, et posant $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\gamma, \mathfrak{A})$, le volume à droite de l'égalité (11) est égal à

$$v_F(\gamma) \frac{[\mathfrak{p}_{F[\gamma]} : \mathfrak{p}_{F[\gamma]}^{-s-k_F(\beta)+1}]}{[\mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N} : \mathfrak{p}_{F[\gamma]}^{-s-k_F(\beta)+1}\mathfrak{N}]},$$

ou encore à

$$v_F(\gamma) \frac{[\mathfrak{o}_E : \mathfrak{p}_E^{-s-k_F(\beta)}]}{[\mathfrak{A} : \mathfrak{P}^{-s-k_F(\beta)}]}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Le terme à gauche de l'égalité (10) est donc égal à

$$v_F(\gamma)\frac{[\mathfrak{o}_E:\mathfrak{p}_E^{-s-k_F(\beta)}]}{[\mathfrak{A}:\mathfrak{P}^{-s-k_F(\beta)}]}\frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E^{-s+1},\mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U^{n-s+1}(\mathfrak{A}),dg)},$$

ou encore à

$$v_F(\gamma)\frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)+1},\mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U^{n+k_F(\beta)+1}(\mathfrak{A}),dg)}=v_F(\gamma)I_G^H(\beta,b).$$

On conclut grâce à (9). □

Corollaire. *Supposons que* β *soit quasi régulier elliptique (dans* G*),* i.e. *que* E *est un sous-corps maximal de* $\mathfrak{g}$ *(on a donc* $\mathfrak{b}=E$*,* i.e. $d=1$*). Alors pour* $b\in\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)+1}$*, posant* $\gamma=\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b$*, on a*

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma}=\frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)+1},\mathfrak{d}b')v_F(\beta)}{\mathrm{vol}(U^{\tilde{k}_F(\beta)+1}(\mathfrak{A}_\beta),dg)}\boldsymbol{\delta}_b,$$

où $\boldsymbol{\delta}_b$ *désigne la mesure de Dirac au point* b*.*

Démonstration. Soit $b\in\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)+1}$ et soit $\gamma=\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b$. Puisque $E[b]=E=\mathfrak{b}$, on a $k_F(\gamma)=k_F(\beta)$. De plus, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_\gamma$ est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$, et d'après [1, 2.1.3], on a $\mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma,\mathfrak{A})=\mathfrak{p}_E\mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta,\mathfrak{A})$, d'où $v_F(\gamma)=v_F(\beta)$. Enfin, pour $\mathfrak{f}\in C_{\mathrm{c}}^\infty(E)$, d'après la démonstration de la proposition, on a $\theta_b^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f})=\mathfrak{f}(b)v_E(b)$. D'où le corollaire. □

Remarque 2. La proposition a pour conséquence que pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$ à support contenu dans l'ouvert $\mathrm{Im}(\delta)$ de G, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}}\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ telle que pour tout $b\in\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}\cap\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma=\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b$, on a l'égalité

$$\mathcal{O}_{\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b}(f)=I_G^H(\beta,b)\frac{v_F(\gamma)}{v_E(b)}\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(f^{\mathfrak{b}}). \tag{12}$$

En effet, puisque l'application $C_{\mathrm{c}}^\infty(G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})\rightarrow C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathrm{Im}(\delta))$, $\phi'\mapsto\phi'^\delta$ est surjective, il suffit d'écrire $f=\phi^\delta$ pour une fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G\times\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ et de prendre pour $f^{\mathfrak{b}}$ la fonction $b'\mapsto\phi_\delta(\boldsymbol{x}b')$. D'ailleurs, sans l'hypothèse selon laquelle le support de f est contenu dans $\mathrm{Im}(\delta)$, en remplaçant f par $f_\Xi=f|_\Xi$ pour un voisinage ouvert fermé et G-invariant Ξ de β dans $\mathrm{Im}(\delta)$ – un tel voisinage existe d'après le lemme 3 de 3.2 –, on obtient le même résultat pourvu que dans l'égalité (12), on se limite aux éléments $b\in\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}\cap\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ tels que $\gamma=\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b$ appartient à Ξ. Comme d'après 3.7.(3), l'ensemble $\mathrm{Im}(\delta)={}^G(\beta+\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ est ouvert *fermé* et G-invariant dans G, cette limitation n'en est pas une : on peut prendre $\Xi=\mathrm{Im}(\delta)$. ■

Remarque 3. D'après le corollaire et la remarque 2, pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, la fonction

$$G_{\mathrm{qre}}\rightarrow\mathbb{C},\quad \gamma\mapsto\mathcal{O}_\gamma(f)$$

est localement constante. ■

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

3.10. Intégrales orbitales normalisées

Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, considérons maintenant le facteur de normalisation $\mu_F(\gamma)$ défini par

$$\mu_F(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times(1+\mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma)),\ \frac{dg}{dg_\gamma}\Big)}{\mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times U^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}(\mathfrak{A}_\gamma),\ \frac{dg}{dg_\gamma}\Big)} & \text{si } N>1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{1}$$

Notons que la quantité $\mu_F(\gamma)$ ne dépend pas de la mesure G-invariante $\frac{dg}{dg_\gamma}$ sur l'espace quotient $G_\gamma\backslash G$ utilisée pour la définir. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on a :

(2) $\mu_F(\gamma) \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si γ est minimal.

En effet, c'est évident si $N=1$, et si $N>1$, posant $k=k_F(\gamma)$ et $\tilde{k}=\tilde{k}_F(\gamma)$, on a l'inclusion

$$\mathfrak{o}_{F[\gamma]} + \mathfrak{P}_\gamma^{\tilde{k}} \subset \mathfrak{N}_k(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma),$$

et $\mu_F(\gamma)$ n'est autre que l'indice $[\mathfrak{N}_k(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma) : \mathfrak{o}_{F[\gamma]} + \mathfrak{P}_\gamma^{\tilde{k}}]$. En particulier, $\mu_F(\gamma)\geqslant 1$. Si $\tilde{k}=0$, *i.e.* si γ est minimal, alors $\mathfrak{N}_k(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma)=\mathfrak{A}_\gamma$ et cet indice vaut 1. Si $\tilde{k}\geqslant 1$, alors $\mathfrak{P}_\gamma^{\tilde{k}} \subset \mathfrak{P}_\gamma$, et comme $\mathfrak{N}_k(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma) \not\subset \mathfrak{o}_{F[\gamma]}+\mathfrak{P}_\gamma$, l'inclusion $\mathfrak{o}_{F[\gamma]} + \mathfrak{P}_\gamma^{\tilde{k}} \subset \mathfrak{N}_k(\gamma,\mathfrak{A}_\gamma)$ est stricte.

Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, posons $e_\gamma = e(F[\gamma]/F)$, $f_\gamma = f(F[\gamma]/F)$ et (si l'extension E/F est séparable) $\delta_\gamma = \delta(F[\gamma]/F)$. On a donc $e_\gamma f_\gamma = N$. Soit $\eta_G : G_{\mathrm{qre}} \to \mathbb{R}_{>0}$ la fonction définie par

$$\eta_G(\gamma) = q^{-f_\gamma(\tilde{c}_F(\gamma)+e_\gamma-1)}, \tag{3}$$

où l'invariant $\tilde{c}_F(\gamma)$ a été défini en 2.3. D'après 2.3.(5), on a :

(4) si l'extension $F[\gamma]/F$ est séparable, alors $\eta_G(\gamma) = |D_F(\gamma)|q^{\delta_\gamma-(N-f_\gamma)}$.

Lemme 1. *Soit $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$. On a*

$$\eta_G(\gamma)\mu_F(\gamma) = 1.$$

Démonstration. Si $N=1$, alors $\eta_G(\gamma)=\mu_F(\gamma)=1$ et il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $N>1$. Soit $K=F[\gamma]$. Posons $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_\gamma$ et $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma,\mathfrak{A})$, et choisissons une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_\gamma : \mathfrak{g}\to K$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à K/F. Alors d'après [1, 1.4.10], pour $m\in\mathbb{Z}$, on a la suite exacte courte

$$0 \to \mathfrak{p}_K^m\backslash\mathfrak{p}_K^m\mathfrak{N} \xrightarrow{-\mathrm{ad}_\gamma} \mathfrak{P}^{k_F(\gamma)+m} \xrightarrow{s_\gamma} \mathfrak{p}_K^{k_F(\gamma)+m} \to 0. \tag{5}$$

Rappelons que l'on a posé $\tilde{k}_F(\gamma) = k_F(\gamma)+n_F(\gamma)\geqslant 0$. Pour $m=1$, on en déduit la suite exacte courte

$$0 \to \mathfrak{p}_K\backslash\mathfrak{p}_K\mathfrak{N} \xrightarrow{1-\mathrm{Ad}_\gamma} \mathfrak{P}^{\tilde{k}_F(\gamma)+1} \xrightarrow{s_\gamma} \mathfrak{p}_K^{\tilde{k}_F(\gamma)+1} \to 0. \tag{6}$$

Supposons l'extension K/F séparable et notons $\sigma_\gamma = \frac{\delta_\gamma}{f_\gamma}-(e_\gamma-1)$ son exposant de Swan. D'après [1, 1.3.8.(ii)], on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_\gamma(\mathfrak{g})\oplus K$, et notant $\boldsymbol{p}_K : \mathfrak{g}\to K$ la projection orthogonale par rapport à cette décomposition, on peut prendre pour $\boldsymbol{s}_\gamma$

l'application $y \mapsto \varpi_K^{\sigma_\gamma} p_K$, où ϖ_K est une uniformisante de K. Puisque $K^\times \cap (1+\mathfrak{p}_K\mathfrak{N}) = U_K^1$ et $K^\times \cap U^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}(\mathfrak{A}) = U_K^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}$, de la suite exacte (6), on déduit l'égalité

$$|D_F(\gamma)|\mathrm{vol}\Big(K^\times(1+\mathfrak{p}_K\mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma,\mathfrak{A})), \tfrac{dg}{dg_\gamma}\Big) = q^{-f_\gamma\sigma_\gamma}\mathrm{vol}\Big(K^\times U^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}(\mathfrak{A})), \tfrac{dg}{dg_\gamma}\Big).$$

Or $q^{-f_\gamma\sigma_\gamma} = q^{-(\delta_\gamma-(N-f_\gamma))}$, d'où l'égalité du lemme dans le cas où γ est séparable (d'après (4)). Si γ n'est pas séparable, ce qui n'est possible que si F est de caractéristique p, on déduit le résultat de la caractéristique nulle *via* la théorie des corps proches [2, 11]. $\square$

Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, notons $f \mapsto I^G(\gamma, f)$ la distribution normalisée sur G définie par

$$I^G(\gamma, f) = \eta_G(\gamma)^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{O}_\gamma(f). \tag{7}$$

Tout comme $\mathcal{O}_\gamma$, elle dépend du choix d'une mesure G-invariante $\frac{dg}{dg_\gamma}$ sur l'espace quotient $G_\gamma\backslash G$, et comme on a normalisé dg_γ par $\mathrm{vol}(F^\times\backslash F[\gamma]^\times, \frac{dg_\gamma}{dz}) = 1$, elle ne dépend en réalité que des choix de dg et dz.

Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, on définira plus loin (3.11.(9)) une distribution normalisée

$$\mathfrak{f} \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})$$

sur $\mathfrak{g}$, qui est une variante naturelle de la distribution normalisée sur G définie par (7). On définira aussi (3.11.(1)) une variante additive $\mu_F^+(\gamma)$ de la constante définie par (1), qui vérifie l'analogue de l'égalité du lemme 1 (3.11.(5)) : $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)\mu_F^+(\gamma) = 1$. Notons que si $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$ (*i.e.* si $N > 1$, ou si $N = 1$ et $\gamma \neq 0$), les constantes $\mu_F(\gamma)$ et $\mu_F^+(\gamma)$ sont liées par la formule (3.11.(2)) : $\mu_F^+(\gamma) = q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)(1-N)}\mu_F(\gamma)$.

Reprenons maintenant les hypothèses et les notations de 3.9 : β est un élément pur de G tel que $E = F[\beta] \neq F$, $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$ et $H = \mathrm{Aut}_E(V)$. On pose $d = \frac{N}{[E:F]}$. En particulier, on a forcément $N > 1$, mais on peut avoir $d = 1$ (si β est quasi régulier elliptique). Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, on définit comme en 3.11 la distribution normalisée $\mathfrak{f} \mapsto I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f})$ sur $\mathfrak{b}$, *i.e.* on pose

$$I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}) = \eta_{\mathfrak{b}}(b)^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}). \tag{8}$$

Puisque $\beta \in A(E)_{\mathrm{qre}}^\times$ et $E \neq F$, on peut définir $\mu_F(\beta)$ tout comme on a défini $\mu_F(\gamma)$ pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, c'est-à-dire en posant

$$\mu_F(\beta) = \frac{\mathrm{vol}(E^\times(1+\mathfrak{p}_E\mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta, \mathfrak{A}(E))), d\bar{g}_E)}{\mathrm{vol}(E^\times U^{k_F(\beta)+n_F(\beta)+1}(\mathfrak{A}(E)), d\bar{g}_E)},$$

où $d\bar{g}_E$ est une mesure de Haar sur $E^\times\backslash A(E)^\times$. On définit aussi la variante additive $\mu_F^+(\beta)$ de $\mu_F(\beta)$ en posant

$$\mu_F^+(\beta) = \frac{\mathrm{vol}(E + \mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta, \mathfrak{A}(E)), \mathfrak{d}\bar{g}_E)}{\mathrm{vol}(E + \mathfrak{P}^{k_F(\beta)}(E)), \mathfrak{d}\bar{g}_E)},$$

où $\mathfrak{d}\bar{g}_E$ est une mesure de Haar sur $A(E)/E$. Les constantes $\mu_F(\beta)$ et $\mu_F^+(\beta)$ sont liées par la formule (3.11.(2)) : $\mu_F^+(\beta) = q_E^{n_F(\beta)(1-[E:F])}\mu_F(\beta)$.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Lemme 2. *Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a*

$$\mu_F(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b) = q_E^{n_F(\beta)(d^2-d)} \mu_F(\beta)^{d^2} \mu_E^+(b).$$

En particulier, la fonction $b \mapsto \eta_G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b)\eta_{\mathfrak{b}}(b)^{-1}$ est constante sur $\mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$.

Démonstration. Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ et soit $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$. Quitte à remplacer b par un conjugué dans H, on peut supposer que $\mathfrak{B}_b$ contient $\underline{\mathfrak{B}}$. On a donc l'identification $\mathfrak{A}_{\beta,b} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}_b$. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\beta,b}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_b$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\beta,b}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_b$ et $n = n_F(b, \beta)$. Posons aussi $k = k_F(b, \beta)$ et $\tilde{k} = \tilde{k}_F(b, \beta)$ $(= k + n)$. Enfin, posons $\mathfrak{N}_\gamma = \mathfrak{N}_k(\gamma, \mathfrak{N})$ et (si $d > 1$) $\mathfrak{N}_b = \mathfrak{N}_k(b, \mathfrak{B})$. Il s'agit de prouver que la quantité $\lambda = \mu_F(\gamma)\mu_E^+(b)^{-1}$ ne dépend que de β (et pas de b) et de la calculer. Posons aussi $\lambda^+ = \mu_F^+(\gamma)\mu_E^+(b)^{-1}$.

Supposons $d = 1$ (il faut bien commencer !). Alors $\mu_E^+(b) = 1$ et

$$\lambda = \frac{\mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times(1 + \mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma), \frac{dg}{dg_\gamma}\Big)}{\mathrm{vol}\Big(F[\gamma]^\times U^{\tilde{k}+1}(\mathfrak{A}), \frac{dg}{dg_\gamma}\Big)} = \frac{\mathrm{vol}(1 + \mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma, dg)}{\mathrm{vol}(U^{\tilde{k}+1}(\mathfrak{A}), dg)} \frac{\mathrm{vol}(U_{F[\gamma]}^{\tilde{k}+1}, dg_\gamma)}{\mathrm{vol}(U_{F[\gamma]}^1, dg_\gamma)}.$$

Puisque $k = k_F(\beta)$ et $\tilde{k} - k = n = n_F(\beta)$, et que $\mathfrak{A}$ est l'unique $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$, le terme $\mathrm{vol}(U^{\tilde{k}+1}(\mathfrak{A}), dg)$ ne dépend pas de b. D'autre part, puisque les strates $[\mathfrak{A}, n, -k-1, \beta]$ et $[\mathfrak{A}, n, -k-1, \gamma]$ dans $\mathfrak{g}$ sont simples et équivalentes, posant $\mathfrak{N}_\beta = \mathfrak{N}_k(\beta, \mathfrak{A})$, on a $\mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma = \mathfrak{p}_E\mathfrak{N}_\beta$ [1, 2.1.3], et le terme $\mathrm{vol}(1 + \mathfrak{p}_{F[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma, dg)$ ne dépend pas de b. Enfin, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(U_{F[\gamma]}^{\tilde{k}+1}, dg_\gamma)}{\mathrm{vol}(U_{F[\gamma]}^1, dg_\gamma)} = [\mathfrak{o}_{F[\gamma]} : \mathfrak{p}_{F[\gamma]}^{\tilde{k}}]^{-1} = [\mathfrak{o}_E : \mathfrak{p}_E^{\tilde{k}}]^{-1}.$$

En définitive, on a montré que $\lambda = \mu_F(\beta)$.

Supposons maintenant $d > 1$. Posons $E_0 = E[b]$ et $K = F[\gamma]$, et supposons tout d'abord que b est E-minimal. Alors on a $\mathfrak{N}_b = \mathfrak{B}$, $k = -n_E(b)$ et

$$\mu_E^+(b) = \frac{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^k]}{[\mathfrak{o}_{E_0} : \mathfrak{p}_{E_0}^k]} = q_{E_0}^{k(d-1)}.$$

D'autre part, posant $k_0 = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ et $\tilde{k}_0 = k_0 + n$, on a [1, 1.4.9]

$$\mathfrak{N}_\gamma = \mathfrak{N}_k(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{Q}^{k-k_0}\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}),$$

d'où

$$\mu_F(\gamma) = \frac{[\mathfrak{N}_\gamma : \mathfrak{P}^{\tilde{k}}]}{[\mathfrak{o}_K : \mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]} = \frac{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^{k-k_0}][\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) : \mathfrak{P}^{\tilde{k}_0}]}{[\mathfrak{o}_K : \mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]}.$$

On obtient

$$\lambda = [\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) : \mathfrak{P}^{\tilde{k}_0}] \frac{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^{k-k_0}]}{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^k]} \frac{[\mathfrak{o}_{E_0} : \mathfrak{p}_{E_0}^k]}{[\mathfrak{o}_K : \mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]}.$$

Or on a $[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^{k-k_0}] = \frac{[\mathfrak{B}:\mathfrak{Q}^{k+n}]}{[\mathfrak{B}:\mathfrak{Q}^{\tilde{k}_0}]}$, d'où

$$\lambda = \frac{[\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) : \mathfrak{P}^{\tilde{k}_0}]}{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^{\tilde{k}_0}]} \frac{[\mathfrak{B} : \mathfrak{Q}^n]}{[\mathfrak{o}_{E_0} : \mathfrak{p}_{E_0}^n]}.$$

Puisque $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_F(\beta)e(\mathfrak{B}|\mathfrak{o}_E)$ avec $\tilde{k}_F(\beta) = k_F(\beta) + n_F(\beta)$, on a

$$\mathfrak{P}^{\tilde{k}_0} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{Q}^{\tilde{k}_0} = \mathfrak{P}^{\tilde{k}_F}(\beta)(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}.$$

Or on a aussi

$$\mathfrak{N}_{k_0}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta, \mathfrak{A}(E)) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B},$$

et comme $\mathfrak{B}$ est un $\mathfrak{o}_E$-module libre de rang d^2, le terme $\frac{[\mathfrak{N}_{k_0}(\beta,\mathfrak{A}):\mathfrak{P}^{\tilde{k}_0}]}{[\mathfrak{B}:\mathfrak{Q}^{\tilde{k}_0}]}$ vaut

$$\frac{[\mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta, \mathfrak{A}(E)) : \mathfrak{P}^{\tilde{k}_F(\beta)}(E)]^{d^2}}{[\mathfrak{o}_E : \mathfrak{p}_E^{\tilde{k}_F(\beta)}]^{d^2}} = \mu_F(\beta)^{d^2}.$$

Quant au terme $\frac{[\mathfrak{B}:\mathfrak{Q}^n]}{[\mathfrak{o}_{E_0}:\mathfrak{p}_{E_0}^n]}$, il vaut $q_{E_0}^{n(d-1)} = q_E^{n_F(\beta)(d^2-d)}$. On obtient donc (dans le cas où b est E-minimal)

$$\lambda = q_E^{n_F(\beta)(d^2-d)} \mu_F(\beta)^{d^2}. \tag{9}$$

On en déduit (toujours dans le cas où b est E-minimal)

$$\lambda^+ = q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)(1-N)} \lambda = q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)(1-N)} q_E^{n_F(\beta)(d^2-d)} q_E^{n_F(\beta)([E:F]-1)d^2} \mu_F^+(\beta)^{d^2}.$$

Or $q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)} = q_E^{n_F(\beta)d}$, d'où (toujours dans le cas où b est E-minimal)

$$\lambda^+ = \mu_F^+(\beta)^{d^2}. \tag{10}$$

Supposons maintenant que b n'est pas E-minimal (on a donc forcément $E[b] \neq E$, *i.e.* $d > 1$). Alors on reprend la première partie de la preuve de la proposition de 3.7. On pose $r = n_E(b)$ – on a donc $k = k_E(b) > -r$ – et l'on considère la strate pure $[\mathfrak{B}, r, -k, b]$ dans $\mathfrak{b}$. On écrit $b = b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c$ comme dans *loc. cit.* En particulier, la strate $[\mathfrak{B}, r, -k, b_1]$ dans $\mathfrak{b}$ est simple et équivalente à $[\mathfrak{B}, r, -k, b]$, l'extension $E_1 = E[b_1]$ de E vérifie $[E_1 : E] < d$, et c est un élément quasi régulier elliptique et E_1-minimal de $\mathfrak{b}_1 = \mathrm{End}_{E_1}(V)$. De plus, avec les identifications de *loc. cit.*, l'élément γ s'écrit

$$\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0(b_1 + \boldsymbol{y}_1 \otimes c) = \beta_1 + \boldsymbol{x}_1 \otimes c,$$

et l'on a

$$k_F(\beta_1) = \begin{cases} k_E(b_1) & \text{si } E_1 \neq E \\ k_F(\beta) & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$k \; (= k_E(b)) = k_{E_1}(c) = -n_{E_1}(c).$$

Par récurrence sur la dimension, on peut supposer que le résultat que l'on veut démontrer est vrai pour le couple (β, b_1) : posant $d_1 = [E_1 : E]$, d'après (9), on a

$$\mu_F(\beta_1)\mu_E^+(b_1)^{-1} = \mu_F(\beta)^{d_1^2} q_E^{n_F(\beta)(d_1^2-d_1)}. \tag{11}$$

Puisque c est E_1-minimal, le résultat est vrai pour le couple (β_1, c) : posant $d' = \frac{d}{d_1}$, on a

$$\mu_F(\gamma)\mu_{E_1}^+(c)^{-1} = \mu_F(\beta_1)^{d'^2} q_{E_1}^{n_F(\beta_1)(d'^2-d')},$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

d'où, puisque $q_{E_1}^{n_F(\beta_1)} = q_E^{n_F(\beta)d_1}$ et $d_1 d' = d$,

$$\mu_F(\gamma)\mu_{E_1}^+(c)^{-1} = \mu_F(\beta_1)^{d'^2} q_E^{n_F(\beta)d(d'-1)}. \tag{12}$$

En réalité, *a priori* le couple (β_1, c) n'est pas exactement de la forme voulue, puisque l'élément c n'appartient pas à $\mathrm{End}_{E'_1}(V)$, $E'_1 = F[\beta_1]$. Mais d'après le lemme 1 de 3.6, on peut toujours se ramener à un élément de la forme voulue en conjugant γ dans $U^1(\mathfrak{A})$. On obtient un élément de la forme voulue $\beta_1 + \boldsymbol{x}'_1 \otimes c'$, avec c' quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{b}'_1 = \mathrm{End}_{E'_1}(V)$ et E'_1-minimal (d'après le corollaire 1 de 3.5), et cette opération n'affecte pas la valeur de $\mu_{E_1}^+(c)$: on a $\mu_{E'_1}^+(c') = \mu_{E_1}^+(c)$. Comme on a aussi $q_{E_1} = q_{E'_1}$, on en déduit (12). Reste à traiter le couple (b_1, c). Si $E_1 \neq E$, alors puisque c est E-minimal, d'après (10), on a

$$\mu_E^+(b)\mu_{E_1}^+(c)^{-1} = \mu_E^+(b_1)^{d'^2}. \tag{13}$$

Si $E_1 = E$, *i.e.* si $d_1 = 1$, alors l'égalité (13) reste vraie, puisque dans ce cas on a $\mu_E^+(b_1) = 1$, $k_E(c) = k_E(b) = k$ et $\mathfrak{N}_k(b, \mathfrak{B}) = \mathfrak{N}_k(c, \mathfrak{B})$, d'où $\mu_E^+(b)\mu_{E_1}^+(c)^{-1} = 1$. En rassemblant les égalités (11), (12) et (13), on obtient la formule cherchée pour λ. □

Compte tenu du lemme 2, la proposition suivante et son corollaire sont de simples conséquences de la proposition de 3.9.

Proposition. *Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$, on a*

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = \lambda \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}.$$

Si de plus les mesures $\mathfrak{d}b'$ sur $\mathfrak{b}$ et dh sur H sont associées, c'est-à-dire vérifient $dh = \mathfrak{d}^\times b'$, et si les mesures de Haar dz sur $Z = F^\times$ et dz_E sur $Z_E = E^\times$ vérifient $\mathrm{vol}(F^\times \backslash E^\times, \frac{dz_E}{dz}) = 1$, *alors cette constante λ vaut*

$$(q_E^{n_F(\beta)}\mu_F(\beta))^{d^2} = |\beta|_E^d \tfrac{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}{\eta_G(\gamma)}.$$

Démonstration. Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ et soit $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$. D'après la proposition de 3.9, on a

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = I_G^H(\beta, b)\frac{v_F(\gamma)}{v_E(b)}\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}.$$

D'après le lemme 2, il suffit de montrer qu'il existe une constante μ (indépendante de b), telle que

$$I_G^H(\beta, b)\frac{v_F(\gamma)}{v_E(b)} = \mu\frac{\mu_F(\gamma)}{\mu_E^+(b)}.$$

Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\beta,b}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_b$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\beta,b}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_b$ et $n = n_F(b, \beta)$. Posons aussi $k = k_F(b, \beta)$ et $\tilde{k} = \tilde{k}_F(b, \beta)$, $K = F[\gamma]$ et $E_0 = E[b]$. On a

$$\frac{v_F(\gamma)}{\mathrm{vol}(U^{\tilde{k}+1}(\mathfrak{A}), dg)} = \frac{\mu_F(\gamma)}{\mathrm{vol}(U_K^{\tilde{k}+1}, dg_\gamma)} = \mu_F(\gamma)\frac{[\mathfrak{o}_K : \mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]}{\mathrm{vol}(U_K^1, dg_\gamma)}. \tag{14}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Posons
$$c=\frac{e(E/F)\mathrm{vol}(U_E,dz_E)}{\mathrm{vol}(U_F,dz)}\ \Big(=\mathrm{vol}(F^\times\backslash E^\times,\tfrac{dz_E}{dz})\Big).$$

Commençons par supposer $d=1$. Alors $\mathfrak{b}=E$, $\mu_E^+(b)=1$ et
$$\frac{v_E(b)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{k+1},\mathfrak{d}b')}=\frac{v_E(b)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E^{k+1},\mathfrak{d}b')}=\mu_E^+(b)\frac{\mathrm{vol}(U_E,dh)}{\mathrm{vol}(U_E,dz_E)}\frac{[\mathfrak{o}_E:\mathfrak{p}_E^k]}{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E,\mathfrak{d}b')}. \tag{15}$$

On a $e(K/F)=e(E/F)$ et $f(K/F)=f(E/F)$, par conséquent le volume $\mathrm{vol}(U_K^1,dg_\gamma)$ est égal à
$$(q_E-1)^{-1}\mathrm{vol}(U_K,dg_\gamma)=(q_E-1)^{-1}c^{-1}\mathrm{vol}(U_E,dz_E).$$

D'autre part, comme $k=k_F(\beta)$, $n=n_F(\beta)$, $\frac{[\mathfrak{o}_K:\mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]}{[\mathfrak{o}_E:\mathfrak{p}_E^k]}=[\mathfrak{o}_E:\mathfrak{p}_E^n]=q_E^n$ et
$$\mathrm{vol}(U_E,dh)=(q_E-1)\mathrm{vol}(U_E^1,dh),$$
en combinant (14) et (15), on obtient
$$I_G^H(\beta,b)\frac{v_F(\gamma)}{v_E(b)}=c\,q_E^n\frac{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_E,\mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U_E^1,dh)}\frac{\mu_F(\gamma)}{\mu_E^+(b)}.$$

Supposons maintenant $d>1$ et posons $\mathfrak{N}_b=\mathfrak{N}_k(b,\mathfrak{B})$. Alors on a
$$\frac{v_E(b)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{k+1},\mathfrak{d}b')}=\frac{\mathrm{vol}(1+\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b,dh)}{\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b)\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{k+1},\mathfrak{d}b')}=\frac{[\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b:\mathfrak{Q}^{k+1}]}{\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b)}\frac{\mathrm{vol}(1+\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b,dh)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b,\mathfrak{d}b')}.$$

Or $[\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b:\mathfrak{Q}^{k+1}]=[\mathfrak{N}_b:\mathfrak{Q}^k]=\mu_E^+(b)[\mathfrak{o}_{E_0}:\mathfrak{p}_{E_0}^k]$ et $\frac{\mathrm{vol}(1+\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b,dh)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{p}_{E_0}\mathfrak{N}_b,\mathfrak{d}b')}=\frac{\mathrm{vol}(U^1(\mathfrak{B}),dh)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q},\mathfrak{d}b')}$, d'où
$$\frac{v_E(b)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}^{k+1},\mathfrak{d}b')}=\mu_E^+(b)\frac{[\mathfrak{o}_{E_0}:\mathfrak{p}_{E_0}^k]}{\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b)}\frac{\mathrm{vol}(U^1(\mathfrak{B}),dh)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q},\mathfrak{d}b')}. \tag{16}$$

Puisque $e(E_0/F)=e(K/F)$ et $f(E_0/F)=e(K/F)$, on a (comme dans le cas $d=1$)
$$\mathrm{vol}(U_K^1,dg_\gamma)=(q_{E_0}-1)^{-1}\mathrm{vol}(U_K,dg_\gamma)$$
et
$$\mathrm{vol}(U_K,dg_\gamma)=e(E_0/F)^{-1}\mathrm{vol}(U_F,dz)=c^{-1}e(E_0/E)^{-1}\mathrm{vol}(U_E,dz_E),$$
d'où
$$\mathrm{vol}(U_K^1,dg_\gamma)=c^{-1}\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b).$$

On en déduit que
$$\frac{[\mathfrak{o}_K:\mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]}{\mathrm{vol}(U_K^1,dg_\gamma)}=c\frac{[\mathfrak{o}_{E_0}:\mathfrak{p}_{E_0}^{\tilde{k}}]}{\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b)}=c\frac{[\mathfrak{o}_{E_0}:\mathfrak{p}_{E_0}^k]}{\mathrm{vol}(U_{E_0}^1,dh_b)}[\mathfrak{p}_K^k:\mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]$$
avec
$$[\mathfrak{p}_K^k:\mathfrak{p}_K^{\tilde{k}}]=q_K^n=q^{f(K/F)n_F(\beta)e(E_0/E)}=q_E^{n_F(\beta)d}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

D'autre part, si $\underline{\mathfrak{B}}$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal $\mathfrak{b}$ tel que $\underline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$, posant $\underline{\mathfrak{Q}} = \mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}})$, on a $\frac{\mathrm{vol}(U^1(\mathfrak{B}), dh)}{\mathrm{vol}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{d}b')} = \frac{\mathrm{vol}(U^1(\underline{\mathfrak{B}}), dh)}{\mathrm{vol}(\underline{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{d}b')}$, et cette quantité ne dépend pas de b. En combinant (14) et (16), on obtient

$$I_G^H(\beta, b)\frac{\mu_F(\gamma)}{\mu_E(b)} = c\, q_E^{n_F(\beta)d} \frac{\mathrm{vol}(\underline{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{d}b')}{\mathrm{vol}(U^1(\underline{\mathfrak{B}}), dh)} \frac{\mu_F(\gamma)}{\mu_E^+(b)}.$$

La dernière assertion résulte de la formule du lemme 2, puisque si $dh = \mathfrak{d}^\times b'$, on a $\mathrm{vol}(U^1(\underline{\mathfrak{B}}), dh) = \mathrm{vol}(\underline{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{d}b')$, avec $U^1(\underline{\mathfrak{B}}) = U_E^1 = 1 + \mathfrak{p}_E$ et $\underline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{p}_E$ si $d = 1$. Cela achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 1. La mesure de Haar $\mathfrak{d}b'$ sur $\mathfrak{b}$ est utilisée pour « descendre » une distribution G-invariante au voisinage de β dans G en une distribution H-invariante au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire pour définir l'application $T \mapsto \theta_T$, alors que la mesure de Haar dh sur $H = \mathfrak{b}^\times$ est utilisée pour définir les intégrales orbitales quasi régulières elliptiques sur $\mathfrak{b}$. Pour définir l'application $T \mapsto \theta_T$, on est passé du groupe G à l'algèbre de Lie de H *via* l'application $X \mapsto 1 + X$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$. Il est donc naturel d'imposer que les mesures de Haar $\mathfrak{d}b'$ sur $\mathfrak{b}$ et dh sur H soient associées. D'autre part, on a normalisé les intégrales orbitales quasi régulières elliptiques sur G à l'aide d'une mesure de Haar dz sur $Z = F^\times$. La normalisation naturelle de cette mesure est $\mathrm{vol}(U_F, dz) = 1$. De même pour H, *vu comme groupe réductif connexe sur* E, la normalisation naturelle des intégrales orbitales quasi régulières elliptique sur $\mathfrak{b}$ est celle donnée par la mesure de Haar dz_E sur $Z_H = E^\times$ telle que $\mathrm{vol}(U_E, dz_E) = 1$. En ce cas, on a l'égalité $\mathrm{vol}(F^\times \backslash E^\times, \frac{dz_E}{dz}) = e(E/F)$. En revanche, imposer la condition $\mathrm{vol}(F^\times \backslash E^\times, \frac{dz_E}{dz}) = 1$ consiste à voir H comme le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique défini sur F (obtenu comme restriction à la Weil d'un groupe algébrique réductif connexe défini et déployé sur E) et Z comme la composante F-déployée de Z_H : pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, on demande que dh_b soit la mesure de Haar sur $H_b = E[b]^\times$ telle que $\mathrm{vol}(F^\times \backslash H_b, \frac{dh_b}{dz}) = 1$, c'est-à-dire telle que

$$e([E[b]/F)\mathrm{vol}(U_{E[b]}, dh_b) = \mathrm{vol}(U_F, dz)\ (= 1). \qquad \blacksquare$$

Corollaire. (i) *Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a l'égalité*

$$I^G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}).$$

(ii) *Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, la fonction $G_{\mathrm{qre}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est localement constante.*

Démonstration. On obtient le point (i) comme dans la remarque 2 de 3.9 (en utilisant le fait que $\mathrm{Im}(\delta)$ est ouvert fermé et G-invariant dans G : pour $f \in C_c^\infty(G)$, la fonction $f|_{\mathrm{Im}(\delta)}$ appartient à $C_c^\infty(\mathrm{Im}(\delta))$. Quant au point (ii), il suffit de voir que si $\beta \in G_{\mathrm{qre}}$ (*i.e.* si $d = 1$), alors pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b$, on a $\mu_F(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b) = \mu_F(\beta)$ et $\mu_E^+(b) = 1$. On peut alors appliquer le point (i), en remarquant que pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{b})$ et tout élément $b \in \mathfrak{b} = E$, on a $I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}) = \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}) = \frac{\mathrm{vol}(U_E, dh)}{\mathrm{vol}(U_E, dz_E)}\mathfrak{f}(b)$. □

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Remarque 2. Les résultats de cette section 3 ne concernent que les éléments quasi réguliers *elliptiques* au voisinage d'un élément pur. On verra en 4.3 et 4.4 que l'on peut les étendre à tous les éléments quasi réguliers au voisinage d'un élément fermé. ■

3.11. Variante sur l'algèbre de Lie

Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, on peut définir comme en 3.10.(7) une distribution normalisée $\mathfrak{f} \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ sur $\mathfrak{g}$. On commence par définir la distribution $\mathfrak{f} \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}) = \mathcal{O}_\gamma^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f})$ sur $\mathfrak{g}$ comme on a défini la distribution $\mathcal{O}_\gamma$ sur G, c'est-à-dire en intégrant la fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ sur l'orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ grâce à la mesure $\frac{dg}{dg_\gamma}$ sur $G_\gamma \backslash G$, où dg_γ est la mesure de Haar sur $F[\gamma]^\times$ telle que $\mathrm{vol}(F^\times \backslash F[\gamma]^\times, \frac{dg_\gamma}{dz}) = 1$. Notons que si $F[\gamma] = \mathfrak{g}$ (ce qui n'est possible que si $N = 1$, *i.e.* si $\mathfrak{g} = F$), alors on a $\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}) = \mathrm{vol}(U_F, dg)\mathfrak{f}(\gamma)$. On pose

$$\mu_F^+(\gamma) = \begin{cases} \frac{\mathrm{vol}(F[\gamma] + \mathfrak{N}_{k_F(\gamma)}(\gamma, \mathfrak{A}_\gamma), d\bar{y})}{\mathrm{vol}(F[\gamma] + \mathfrak{P}_\gamma^{k_F(\gamma)}, d\bar{y})} & \text{si } N > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{1}$$

où $d\bar{y}$ est une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}/F[\gamma]$. La quantité $\mu_F^+(\gamma)$ peut être vue comme une version « additive » de $\mu_F(\gamma)$. Notons (si $N > 1$) que l'exposant $\tilde{k}_F(\gamma)$ dans l'expression au dénominateur de $\mu_F(\gamma)$ a été remplacé dans celle au dénominateur de $\mu_F^+(\gamma)$ par un exposant $k_F(\gamma) = \tilde{k}_F(\gamma) - n_F(\gamma)$, ce qui traduit l'égalité $\gamma U^{\tilde{k}_F(\gamma)+1}(\mathfrak{A}_\gamma) = \gamma + \mathfrak{P}_\gamma^{k_F(\gamma)+1}$. On vérifie (si $N > 1$) que

$$\mu_F^+(\gamma) = q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)(1-N)} \mu_F(\gamma) \tag{2}$$

avec

$$q_{F[\gamma]}^{n_F(\gamma)(1-N)} = q^{f_\gamma n_F(\gamma)(1-N)} = |\det(\gamma)|^{1-N}.$$

Soit $\eta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}} \to \mathbb{R}_{>0}$ la fonction définie par

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = \begin{cases} q^{-f_\gamma(c_F(\gamma) + e_\gamma - 1)} & \text{si } N > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{3}$$

où l'invariant $c_F(\gamma)$ a été défini en 2.3. Rappelons que si $\gamma \neq 0$ (donc en particulier si $N > 1$), on a $c_F(\gamma) = \tilde{c}_F(\gamma) - (N-1)n_F(\gamma)$. On a donc (si $N > 1$, et même si $N = 1$ et $\gamma \neq 0$, c'est-à-dire si $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$)

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = q^{f_\gamma n_F(\gamma)(N-1)} \eta_G(\gamma) = |\det(\gamma)|^{N-1} \eta_G(\gamma). \tag{4}$$

D'après le lemme 1 de 3.10, pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on a

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) \mu_F^+(\gamma) = \eta_G(\gamma) \mu_F(\gamma) = 1. \tag{5}$$

Enfin, pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, on pose

$$D_F^+(\gamma) = \begin{cases} \det_F(-\mathrm{ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma) & \text{si } N > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{6}$$

Si $N > 1$, on a donc

$$D_F^+(\gamma) = \det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma) \det_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma) = \det(\gamma)^{N-1} D_F(\gamma). \tag{7}$$

D'après (4), on a (pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$) :

(8) si l'extension $F[\gamma]/F$ est séparable, alors $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |D_F^+(\gamma)|q^{\delta_\gamma - (N - f_\gamma)}$.

D'ailleurs, pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$ (séparable ou non), on peut en déduire l'égalité $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)\mu_F^+(\gamma) = 1$ comme dans la preuve du lemme 1 de 3.10, grâce à la suite exacte 3.10.(5) pour $m = 1$. Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, on note $\mathfrak{f} \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ la distribution normalisée sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}). \tag{9}$$

D'après (4), pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on a $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |\det(\gamma)|^{N-1}\eta_G(\gamma)$. Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a $\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b = \beta(1 + \beta^{-1}(\boldsymbol{x}_0 \otimes b))$ avec $\beta^{-1}(\boldsymbol{x}_0 \otimes b) \in \mathfrak{P}_\gamma$, par conséquent

$$|\det(\gamma)| = |\det(\beta)|.$$

En voyant $\mathrm{Im}(\delta) \subset G$ comme un ensemble ouvert fermé et G-invariant *dans* $\mathfrak{g}$, on en déduit la variante sur $\mathfrak{g}$ du corollaire de 3.10.

Corollaire. (i) *Pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, il existe une fonction $\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a l'égalité*

$$I^{\mathfrak{g}}(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b, \mathfrak{f}) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}).$$

(ii) *Pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ est localement constante.*

4. Descente centrale : le cas général

4.1. Descente parabolique

Pour $\gamma \in G$, on note $D_G(\gamma)$ le coefficient de t^N dans le polynôme $\det_F(t + 1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g})$ et l'on pose

$$G_{\mathrm{r}} = \{\gamma \in G : D_G(\gamma) \neq 0\}.$$

Un élément $\gamma \in G$ est dans G_{r} si et et seulement si son centralisateur G_γ est un tore, c'est-à-dire si et seulement si il est (semi-simple) régulier. On a l'inclusion $G_{\mathrm{r}} \subset G_{\mathrm{qr}}$ et G_{r} est l'ensemble des éléments quasi réguliers *séparables* de G, c'est-à-dire ceux tels que $F[\gamma]$ est un produit $E_1 \times \cdots \times E_r$ d'extensions séparables E_i/F. On pose $G_{\mathrm{re}} = G_{\mathrm{r}} \cap G_{\mathrm{qre}}$. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on a donc $D_G(\gamma) = D_F(\gamma)$. De la même manière, pour $\gamma \in \mathfrak{g}$, on note $D_{\mathfrak{g}}(\gamma)$ le coefficient de t^N dans le polynôme $\det_F(t - \mathrm{ad}_\gamma; \mathfrak{g})$, et l'on note

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{r}} = \{\gamma \in \mathfrak{g} : D_{\mathfrak{g}}(\gamma) \neq 0\} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$$

l'ensemble des éléments (semi-simples) réguliers de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$. Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$, on a donc $D_{\mathfrak{g}}(\gamma) = D_F^+(\gamma)$. Si $N = 1$, on a $G_{\mathrm{re}} = G_{\mathrm{r}} = G_{\mathrm{qr}} = G$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}} = \mathfrak{g}_{\mathrm{r}} = \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} = \mathfrak{g}$. En général, les inclusions $G_{\mathrm{r}} \subset G_{\mathrm{qr}}$, resp. $G_{\mathrm{re}} \subset G_{\mathrm{qre}}$, et $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, sont strictes. L'une d'elles est une égalité si et seulement si les trois autres le sont, ce qui n'est possible que si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathrm{car}(F) = 0$;
- $\mathrm{car}(F) = p > 0$ et p ne divise pas N.

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

On étend naturellement ces définitions à tout groupe H isomorphe à un produit fini de groupes linéaires $GL(d_i, E_i)$ pour des extensions finies E_i/F – rappelons qu'un élément $\gamma \in G$ est fermé, au sens où son orbite $\mathcal{O}_G(\gamma)$ fermée dans G pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique, si et seulement si son centralisateur $H = G_\gamma$ est de cette forme (cf. la remarque 1 de 3.1) –, donc en particulier à toute composante de Levi $H = M$ d'un sous-groupe parabolique de G.

Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, on a défini en 3.10.(7) une distribution normalisée $f \mapsto I^G(\gamma, f)$. On étend comme suit cette définition à tout élément $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$. Pour un tel γ, on a $F[\gamma] = E_1 \times \cdots \times E_r$ pour des extensions E_i/F telles que $\sum_{i=1}^r [E_i : F] = N$. Soit $A_\gamma = F^\times \times \cdots \times F^\times \subset F[\gamma]^\times$ le sous-tore déployé maximal du centralisateur $G_\gamma = F[\gamma]^\times$ de γ dans G et soit $M = M(\gamma)$ le centralisateur $Z_G(A_\gamma)$ de A_γ dans G. On note da_γ la mesure de Haar sur A_γ qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal $U_F \times \cdots \times U_F$ de A_γ et dg_γ la mesure de Haar sur G_γ telle que $\mathrm{vol}(A_\gamma \backslash G_\gamma, \frac{dg_\gamma}{da_\gamma}) = 1$. On pose

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g) \frac{dg}{dg_\gamma}, \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G).$$

Écrivons $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ avec $\gamma_i \in E_i^\times$ et posons

$$\eta_M(\gamma) = \prod_{i=1}^r \eta_{G_i}(\gamma_i), \quad G_i = \mathrm{Aut}_F(E_i).$$

Notons $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$ le centralisateur $Z_{\mathfrak{g}}(A(\gamma))$ de $A(\gamma)$ dans $\mathfrak{g}$ et posons

$$\eta_G(\gamma) = |D_{M \backslash G}(\gamma)| \eta_M(\gamma)$$

avec

$$D_{M \backslash G}(\gamma) = \det_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m}).$$

Enfin, on pose

$$I^G(\gamma, f) = \eta_G(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma(f), \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G).$$

Remarque. D'après 3.10.(4), si γ est *séparable*, c'est-à-dire si $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$, on a

$$\eta_G(\gamma) = |D_G(\gamma)| q^{\sum_{i=1}^r \delta_{\gamma_i} - f_{\gamma_i}(e_{\gamma_i} - 1)}$$

avec

$$D_G(\gamma) = \det_F(1 - \mathrm{Ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma).$$

En ce cas, on a

$$D_{M \backslash G}(\gamma) = D_G(\gamma) D_M(\gamma)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M et de radical unipotent U et soit K un sous-groupe ouvert compact maximal de G en « bonne position » par rapport à (P, A), $A = Z(M)$, c'est-à-dire tel que

$$P \cap K = (M \cap K)(U \cap K).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Soit dm, du, dk, des mesures de Haar sur M, U, K, normalisées de telle manière que

$$\int_G f(g)dg = \iiint_{M\times U\times K} f(muk)dmdudk, \quad f \in C_c^\infty(G). \tag{1}$$

Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on note $f_P \in C_c^\infty(M)$ le terme K-invariant (ou terme constant) de f suivant P défini par

$$f_P(m) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \iint_{K\times U} f(k^{-1}muk)dkdu, \quad m \in M, \tag{2}$$

où $\delta_P : P \to q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}^\times$ est le caractère module usuel défini par $d(p'pp'^{-1}) = \delta_P(p')dp$ pour une (*i.e.* pour toute) mesure de Haar, à gauche ou à droite, dp sur P. On note $\mathcal{O}_\gamma^M$ la distribution sur M définie par

$$\mathcal{O}_\gamma^M(f) = \int_{G_\gamma\backslash M} f(m^{-1}\gamma m)\tfrac{dm}{dg_\gamma}, \quad f \in C_c^\infty(M),$$

et l'on note $I^M(\gamma, \cdot)$ la distribution normalisée sur M donnée par

$$I^M(\gamma, \cdot) = \eta_M(\gamma)^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma^M.$$

Alors on a la formule de descente bien connue

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = |D_{M\backslash G}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma^M(f_P), \quad f \in C_c^\infty(G). \tag{3}$$

D'où la formule de descente entre intégrales orbitales normalisées

$$I^G(\gamma, f) = I^M(\gamma, f_P), \quad f \in C_c^\infty(G). \tag{4}$$

Par construction, l'élément γ est quasi régulier elliptique dans M. On va voir plus loin que la formule (4) reste vraie pour tout élément $\gamma \in M \cap G_{\mathrm{qr}}$ (d'ailleurs, on pourrait le voir tout de suite, après avoir étendu la fonction η_M à M_{qr} comme on l'a fait pour G : il suffit de voir que la formule de descente (3) reste vraie si $Z_G(A_\gamma) \subset M$).

On fixe une paire de Borel (P_0, A_0) de G et l'on note U_0 le radical unipotent de P_0. On fixe aussi un sous-groupe compact maximal K de G en bonne position par rapport à (P_0, A_0). On suppose désormais, ce qui est loisible, que la mesure de Haar dg sur G vérifie

$$\mathrm{vol}(K, dg) = 1,$$

et l'on note dk la restriction de dg à K.

Un sous-groupe parabolique P de G est dite *standard* s'il contient P_0. On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}_G$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standards de G, et pour $P \in \mathcal{P}$, on note U_P le radical unipotent de P, M_P la composante de Levi de P contenant A_0 et $A_P = Z(M_P) \subset A_0$ le centre de M_P. Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, le groupe K est en bonne position par rapport à la paire parabolique (P, A_P) de G, c'est-à-dire que l'on a la décomposition

$$K \cap P = (K \cap M_P)(K \cap U_P).$$

On prend comme mesures de Haar $dm = dm_P$ sur M_P et $du = du_P$ sur U_P, celles qui donnent le volume 1 à $M_P \cap K$ et à $U_P \cap K$. Alors on a la formule (1) pour ces mesures. Le groupe M_P est un produit de groupes linéaires sur F. Comme pour G, on définit l'ensemble $(M_P)_{\mathrm{qr}}$ des éléments quasi réguliers de M_P, le sous-ensemble $(M_P)_{\mathrm{qre}} \subset (M_P)_{\mathrm{qr}}$ des éléments quasi réguliers elliptiques de M_P et le facteur de normalisation $\eta_{M_P} : (M_P)_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$. Pour $\gamma \in (M_P)_{\mathrm{qr}}$, on note $I^{M_P}(\gamma, \cdot)$ la distribution normalisée $\eta_{M_P}(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma^{M_P}$ sur M_P définie par la mesure $\frac{dm}{dm_{P,\gamma}}$ sur $M_{P,\gamma}\backslash M_P$ définie comme suit. Soit $A_{P,\gamma}$ le sous-tore déployé maximal du centralisateur $M_{P,\gamma}$ de γ dans M_P et soit $da_{P,\gamma}$ la mesure de Haar sur $A_{P,\gamma}$ qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de $A_{P,\gamma}$. Alors $dm_{P,\gamma}$ est la mesure de Haar sur $M_{P,\gamma}$ telle que

$$\mathrm{vol}(A_{P,\gamma}\backslash M_{P,\gamma}, \tfrac{dm_{P,\gamma}}{da_{P,\gamma}}) = 1.$$

On a l'inclusion

$$M_P \cap G_{\mathrm{qr}} \subset (M_P)_{\mathrm{qr}}$$

et l'égalité

$$(M_P)_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}} = \{\gamma \in G_{\mathrm{qr}} : M(\gamma) = M_P\}.$$

Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on note $f_P \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M_P)$ le terme K-invariant de f suivant P défini comme en (2) par du_P et dk. Plus généralement, pour $Q \in \mathcal{P}$ tel que $P \subset Q$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M_Q)$, on note $f_{P\cap M_Q} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M_P)$ le terme $(K \cap M_Q)$-invariant de f suivant $P \cap M_Q$, défini de la même manière en utilisant les mesures de Haar normalisées par le sous-groupe compact maximal $K \cap M_Q$ de M_Q. On a la propriété de transitivité

$$f_P = (f_Q)_{P\cap M_Q}, \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G). \tag{5}$$

D'après (4) et (5), pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on a la formule de descente

$$I^G(\gamma, f) = I^{M_P}(\gamma, f_P), \quad \gamma \in M_P \cap G_{\mathrm{qr}}. \tag{6}$$

D'ailleurs, plus généralement, pour $Q \in \mathcal{P}$ tel que $P \subset Q$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M_Q)$, on a la formule de descente

$$I^{M_Q}(\gamma, f) = I^{M_P}(\gamma, f_{P\cap M_Q}), \quad \gamma \in M_P \cap (M_Q)_{\mathrm{qr}}. \tag{7}$$

Puisque

$$G_{\mathrm{qr}} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} {}^G((M_P)_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}}), \tag{8}$$

d'après (6) – ou d'après (4) –, l'étude des intégrales orbitales quasi régulières normalisées de G se ramène à celle des intégrales orbitales quasi régulières elliptiques des sous-groupes de Levi M_P de G. Pour $P \in \mathcal{P}$, l'ensemble ${}^G((M_P)_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}})$ est ouvert dans G. On en déduit, d'après (8), la formule de descente (6), et le point (ii) du corollaire de 3.10, que pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on a :

(9) la fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est localement constante.

Pour $P \in \mathcal{P}$, le groupe M_P est un produit de groupes linéaires sur F. On peut donc définir, par produit comme on l'a fait pour G, la filtration $\{(M_P)_{\mathrm{qre}}^k : k \in \mathbb{R}\}$ de $(M_P)_{\mathrm{qre}}$. On pose

$$G_{\mathrm{qr}}^k = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} {}^G((M_P)_{\mathrm{qre}}^k \cap G_{\mathrm{qr}}), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

4.2. Variante sur l'algèbre de Lie (suite)

On a bien sûr la variante sur $\mathfrak{g}$ des constructions précédentes. Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, on pose

$$\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}) = \int_{G_\gamma \backslash G} \mathfrak{f}(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}, \quad \mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g}),$$

où les mesures dg sur G et dg_γ sur $G_\gamma = F[\gamma]^\times$ sont normalisées comme en 4.1. Notons que si $F[\gamma] = \mathfrak{g}$, ce qui n'est possible que si $N = 1$, alors $dg_\gamma = dg$ et $\mathcal{O}_\gamma = \boldsymbol{\delta}_\gamma$ (mesure de Dirac au point γ). On note encore A_γ le sous-tore déployé maximal de $F[\gamma]^\times$, $M = M(\gamma)$ le centralisateur de $A(\gamma)$ dans G et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$ le centralisateur de $A(\gamma)$ dans $\mathfrak{g}$. Écrivons $F[\gamma] = E_1 \times \cdots \times E_r$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ avec $\gamma_i \in E_i$ et posons

$$\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma) = \prod_{i=1}^r \eta_{\mathfrak{g}_i}(\gamma_i), \quad \mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(E_i),$$

et

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$$

avec

$$D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma) = \det{}_F(-\mathrm{ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m}).$$

Enfin, on pose

$$I^{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}, \gamma) = \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}), \quad \mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g}).$$

Remarque 1. D'après 3.11.(8), si γ est *séparable*, c'est-à-dire si $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{r}}$, on a

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|q^{\sum_{i=1}^r \delta_i - f_i(e_i-1)}$$

avec $?_i =?(E_i/F)$ et

$$D_{\mathfrak{g}}(\gamma) = \det{}_F(-\mathrm{ad}_\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma).$$

En ce cas, on a

$$D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma) = D_{\mathfrak{g}}(\gamma)D_{\mathfrak{m}}(\gamma)^{-1}.$$

■

Remarque 2. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{qr}}$, on a

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |\det(\gamma)|^{N-1}\eta_G(\gamma).$$

En effet, si $\gamma \in G_{\mathrm{qre}}$, cela résulte des définitions (cf. 3.11). En général, posant $M = M(\gamma)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$, on a $\gamma \in M_{\mathrm{qre}}$. Précisément, $M = G_1 \times \cdots \times G_r$ avec $G_i = \mathrm{Aut}_F(V_i)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r$ avec $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$, pour une décomposition $V = V_1 \times \cdots \times V_r$. L'élément γ s'écrit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ avec $\gamma_i \in (G_i)_{\mathrm{qre}}$. Pour $i = 1, \ldots, r$, on a donc

$$\eta_{\mathfrak{g}_i}(\gamma_i) = |\det(\gamma_i)|^{N_i-1}\eta_{G_i}(\gamma_i), \quad N_i = \dim_F(V_i).$$

Ici $\det(\gamma_i)$ est le déterminant $\det_F(v \mapsto \gamma_i v; V_i)$ et $\det(\gamma_i)^{N_i-1} = \det_F(y \mapsto y\gamma_i; \mathfrak{g}_i/(\mathfrak{g}_i)_{\gamma_i})$. Par produit, on obtient

$$\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma) = |\det{}_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\gamma)|\eta_G(\gamma).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

D'autre part, on a

$$D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma) = \det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m}) D_{M\backslash G}(\gamma).$$

Comme $\mathfrak{g}_\gamma = \mathfrak{m}_\gamma$, on a

$$|\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{m}/\mathfrak{m}_\gamma)||\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m})| = |\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma)| = |\det(\gamma)|^{N-1},$$

d'où l'égalité cherchée : $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |\det(\gamma)|^{N-1}\eta_G(\gamma)$. ■

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M et de radical unipotent U et soit K' un sous-groupe compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A), $A = Z(M)$. Soit dk' la mesure de Haar normalisée sur K' (c'est-à-dire que $\mathrm{vol}(K', dk') = 1$), et soit dm, resp. du, la mesure de Haar sur M, resp. U, telle que $\mathrm{vol}(K' \cap M, dm) = 1$, resp. $\mathrm{vol}(K' \cap U, du) = 1$. Rappelons que d'après la normalisation de dg, puisque tous les sous-groupes compacts maximaux de G sont conjugués dans G, on a $\mathrm{vol}(K', dg) = 1$ (*i.e.* $dk' = dg|_{K'}$). La formule (1) de 4.1 est donc valable pour ces mesures. Notons $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{u}$, les algèbres de Lie de P, M, U, naturellement identifiées à des sous-F-algèbres de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}$. Soit $\mathfrak{d}u$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{u}$ image de du par l'isomorphisme de variétés $\mathfrak{p}_F$-adiques $U \to \mathfrak{u}$, $u \mapsto u - 1$. En d'autres termes, $\mathfrak{d}u$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{u}$ telle que $\mathrm{vol}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{A}, \mathfrak{d}u) = 1$, où $\mathfrak{A}$ est l'$\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ tel que $K = \mathfrak{A}^\times$. Pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on note $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} \in C_c^\infty(\mathfrak{m})$ le terme K'-invariant (ou terme constant) de $\mathfrak{f}$ suivant $\mathfrak{p}$ défini par

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(m) = \iint_{K' \times \mathfrak{u}} \mathfrak{f}(k'^{-1}(m+u)k') dk' \mathfrak{d}u, \quad m \in M. \tag{1}$$

Par rapport à 4.1.(2), noter l'absence du facteur δ_P (le groupe $\mathfrak{p}$ est unimodulaire). Alors on a la variante sur $\mathfrak{g}$ de la formule de descente 4.1.(3) :

$$\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}) = |D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma^\mathfrak{m}(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}), \tag{2}$$

où $\mathcal{O}_\gamma^\mathfrak{m}$ est la distribution sur $\mathfrak{m}$ définie par

$$\mathcal{O}_\gamma^\mathfrak{m}(\mathfrak{f}') = \int_{G_\gamma\backslash M} \mathfrak{f}'(m^{-1}\gamma m) \tfrac{dm}{dg_\gamma}, \quad \mathfrak{f}' \in C_c^\infty(\mathfrak{m}).$$

Posant $I^\mathfrak{m}(\gamma, \cdot) = \eta_\mathfrak{m}(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma^\mathfrak{m}$, on obtient la formule de descente entre intégrales orbitales normalisées

$$I^\mathfrak{g}(\gamma, \mathfrak{f}) = I^\mathfrak{m}(\gamma, \mathfrak{f}_\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}). \tag{3}$$

Par construction (comme pour G), l'élément γ est quasi régulier elliptique dans $\mathfrak{m}$.

Pour étendre la formule (3) à tout élément $\gamma \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, on procède exactement comme en 4.1. On a déjà fixé un ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_G$ de sous-groupes paraboliques standards de G et un sous-groupe compact maximal K de G en bonne position par rapport à (P, A_P) pour tout $P \in \mathcal{P}$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_P$, $\mathfrak{m}_P$, $\mathfrak{u}_P$, les algèbres de Lie de P, M_P, U_P, naturellement identifiées à des sous-F-algèbres de $\mathfrak{g}$. On a donc la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_P \oplus \mathfrak{u}_P$. Pour $P = P_0$, on écrit $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{m}_0$ et $\mathfrak{u}_0$ au lieu de $\mathfrak{p}_{P_0}$, $\mathfrak{m}_{P_0}$ et $\mathfrak{u}_{P_0}$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on a déjà fixé des mesures normalisées dm_P, du_P, $dm_{P,\gamma}$, pour $\gamma \in \mathfrak{m}_P \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, sur les groupes M_P, U_P, $M_{P,\gamma} = G_\gamma$. On note $\mathfrak{d}u_P$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{u}_P$ image de du_P par

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

l'isomorphisme de variétés $\mathfrak{p}_F$-adiques $U_P \to \mathfrak{u}_P$, $u \mapsto u-1$, et pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on note $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_P} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_P)$ le terme K-invariant de $\mathfrak{f}$ suivant $\mathfrak{p}$ défini à l'aide des mesures normalisées dk sur K et $\mathfrak{d}u_P$ sur $\mathfrak{u}_P$. Pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on a la formule de descente

$$I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}), \quad \gamma \in \mathfrak{m}_P \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}. \tag{4}$$

Plus généralement, pour P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$ et $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_Q)$, on note $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{m}_Q} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_P)$ le terme $(K \cap M_Q)$-invariant de $\mathfrak{f}$ suivant $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}_Q$, défini comme en (1) à l'aide des mesures normalisées sur $K \cap M_Q$ et sur $\mathfrak{u}_P \cap \mathfrak{m}_Q$. Alors posant $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_Q$, on a la propriété de transitivité

$$(\mathfrak{f}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{m}_Q} = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}), \tag{5}$$

et pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on a la formule de descente

$$I^{\mathfrak{m}_Q}(\gamma, \mathfrak{f}) = I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{m}_Q}), \quad \gamma \in \mathfrak{m}_P \cap (\mathfrak{m}_Q)_{\mathrm{qr}}. \tag{6}$$

Comme pour G, on a

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} {}^G((\mathfrak{m}_P)_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}}). \tag{7}$$

D'après (7), la formule de descente (5) et le point (ii) du corollaire de 3.11, pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on a la variante sur $\mathfrak{g}$ de 4.1.(9) :

(8) la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ est localement constante.

Comme on l'a fait pour G, on pose

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}^k = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} {}^G((\mathfrak{m}_P)_{\mathrm{qre}}^k \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

4.3. Descente centrale au voisinage d'un élément pur (suite)

Soit $\beta \in G$ un élément pur. On pose $E = F[\beta]$, $d = \frac{N}{[E:F]}$, $\mathfrak{b} = \mathrm{End}_E(V)$ et $H = \mathfrak{b}^\times$ ($= G_\beta$). On suppose $E \neq F$. Rappelons que d'après la section 3 (corollaire de 3.10), il existe un élément $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$ dans l'image réciproque de 1 par une corestriction modérée $\boldsymbol{s} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ sur $\mathfrak{g}$ relativement à E/F et un voisinage ouvert fermé et G-invariant Ξ de β dans G, tels que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, il existe une fonction $f_\Xi^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathfrak{b})$ telle que

$$I^G(\beta + \boldsymbol{x}b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f_\Xi^{\mathfrak{b}}) \tag{1}$$

pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert fermé de 0 dans $\mathfrak{b}$ tel que $\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V} \subset \Xi$, ces conditions impliquant que $\beta + \boldsymbol{x}b$ est quasi régulier elliptique (dans G). Précisément, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \otimes 1$ et $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$ pour un élément $\boldsymbol{x}_0 \in \mathfrak{A}(E)$ dans l'image réciproque de 1 par une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_0 : A(E) \to E$ sur $A(E)$ relativement à E/F et une (W, E)-décomposition $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ induite par une (W, E)-décomposition $\underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \underline{\mathfrak{B}}$ de $\underline{\mathfrak{A}}$, où $\underline{\mathfrak{A}}$ est un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ tel que $\underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{b} \cap \underline{\mathfrak{A}}$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal dans $\mathfrak{b}$. Posant $\underline{k}_0 = k_F(\beta)d$ ($= k_0(\beta, \underline{\mathfrak{A}})$) et $\underline{\mathfrak{Q}} = \mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}})$, l'application partout submersive

$$\delta : G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1} \to G,\ (g, \boldsymbol{x}b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g \tag{2}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

permet de « descendre » une distribution G-invariante T au voisinage de β dans G en une distribution H-invariante θ_T au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$ (cf. 3.9). En particulier, pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_{\beta+xb}$ sur G se descend en une distribution $\theta_{\mathcal{O}_{\beta+xb}}$ sur $\mathfrak{b}$, qui est un multiple de l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ sur $\mathfrak{b}$. On suppose ici que la mesure de Haar $\mathfrak{d}b'$ sur $\mathfrak{b}$ utilisée pour définir l'application $T \mapsto \theta_T$ est celle qui est associée à la mesure de Haar dh sur H utilisée pour définir les distributions $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ ($b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$), c'est-à-dire que l'on a $dh = \mathfrak{d}^\times b'$. On suppose aussi que la mesure de Haar dz_E sur $Z_H = E^\times$ utilisée pour normaliser les intégrales orbitales $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ ($b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$) est celle qui vérifie $\mathrm{vol}(F^\times\backslash E^\times, \frac{dz_E}{dz}) = 1$. Alors d'après la proposition de 3.10, pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + xb$, on a

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = \lambda \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}} \tag{3}$$

avec

$$\lambda = (q_E^{n_F(\beta)} \mu_F(\beta))^{d^2} = |\beta|_E^d \frac{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}{\eta_G(\gamma)},$$

ce qui, en termes des intégrales orbitales normalisées, équivaut à

$$\theta_{I^G(\gamma,\cdot)} = |\beta|_E^d \left(\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}} I^{\mathfrak{b}}(b, \cdot). \tag{4}$$

Remarque 1. Pour généraliser ces formules (3) et (4) aux éléments $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$ qui ne sont pas elliptiques, on est donc ramené à relier l'application $T \mapsto \theta_T$ à l'application terme constant $f \mapsto f_P$. Notons que les choses se présentent plutôt bien, puisque le rang d de H sur E est un invariant stable par passage aux sous-groupes de Levi de H et que, pour un sous-groupe de Levi M_H de H, notant M le plus petit sous-groupe de Levi de G contenant M_H (c'est-à-dire le centralisateur dans G de la composante F-déployée de $Z(M_H)$), $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M et $\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de M_H, pour $b \in (\mathfrak{m}_\beta)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$ suffisamment proche de 0 dans $\mathfrak{m}_\beta$, l'élément $\gamma = \beta + xb$ appartient à $M_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}}$, et par définition, on a

$$\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)} = \frac{\eta_M(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{m}_\beta}(b)} \frac{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_\beta\backslash\mathfrak{b}}(b)|}.$$

On voit donc apparaître les jacobiens des applications « terme constant » sur G et sur $\mathfrak{b}$. ■

Comme pour G, on fixe une paire parabolique minimale $(P_{H,0}, A_{H,0})$ de H et un sous-groupe compact maximal K_H de H en bonne position par rapport à $(P_{H,0}, A_{H,0})$. On suppose que la mesure de Haar dh sur H est celle qui donne le volume 1 à K_H. On note $\mathcal{P}_H$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques *standards* de H, c'est-à-dire ceux qui contiennent $P_{H,0}$ et, pour $P \in \mathcal{P}_H$, on note U_{P_H} le radical unipotent de P_H, M_{P_H} la composante de Levi de P_H contenant $A_{H,0}$, et $A_{P_H} = Z(M_{P_H}) \subset A_{H,0}$ le centre de M_{P_H}. On suppose que les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_H$ sont *compatibles*, au sens où en posant $U_{H,0} = U_{P_{H,0}}$ et en notant $A_{H,0}^G$ ($\simeq (F^\times)^d$) le tore F-déployé maximal de $A_{H,0}$ ($\simeq (E^\times)^d$), on a les inclusions

$$U_{H,0} \subset U_0, \quad A_{H,0}^G \subset A_0.$$

Pour $P_H \in \mathcal{P}_H$, on note $A_{P_H}^G$ le tore F-déployé maximal de A_{P_H}, $M_{P_H}^G$ le centralisateur de $A_{P_H}^G$ dans G et P_H^G le sous-groupe parabolique standard de G défini par $P_H^G = M_{P_H}^G U_0$,

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

ou, de manière équivalente, par $A_{P_H^G} = A_{P_H}^G$, resp. par $M_{P_H^G} = M_{P_H}^G$. L'application

$$\mathcal{P}_H \to \mathcal{P}_G,\ P_H \mapsto P_H^G \tag{5}$$

est injective. De plus, on a $P_H = H \cap P_H^G$, $M_{P_H} = H \cap M_{P_H^G}$ et $A_{P_H} = Z_H(A_{P_H}^G)$. Notant $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}_G(H)$ l'image de (5), la bijection inverse est donnée par

$$\mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}_H,\ P \mapsto P_H = H \cap P.$$

Pour $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_P$, $\mathfrak{m}_P$, $\mathfrak{u}_P$ les algèbres de Lie de P, M_P, U_P identifiées à des sous-F-algèbres de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_P \oplus \mathfrak{u}_P$. De même, pour $P_H \in \mathcal{P}_H$, on note $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p}_{P_H}$, $\mathfrak{m}_{P_H}$, $\mathfrak{u}_{P_H}$ les algèbres de Lie de P_H, M_{P_H}, U_{P_H} identifiées à des sous-E-algèbres de $\mathfrak{b}$. On a la décomposition $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{m}_{P_H} \oplus \mathfrak{u}_{P_H}$. Rappelons que l'on a fixé une (W,E)-décomposition $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$. L'hypothèse de compatibilité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_H$ assure que pour $P_H \in \mathcal{P}_H$ et $P = P_H^G \in \mathcal{P}$, on a les décompositions

$$\mathfrak{p} = A(E) \otimes_E \mathfrak{p}_H, \quad \mathfrak{m}_P = A(E) \otimes_E \mathfrak{m}_{P_H}, \quad \mathfrak{u}_P = A(E) \otimes_E \mathfrak{u}_{P_H}. \tag{6}$$

Bien sûr, on a aussi

$$\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{m}_{P_H} = \mathfrak{m}_P \cap \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{u}_{P_H} = \mathfrak{u}_P \cap \mathfrak{b}.$$

Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$, on définit comme en 4.2 les distributions $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ et $I^{\mathfrak{b}}(b,\cdot) = \eta_{\mathfrak{b}}(b)^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ sur $\mathfrak{b}$, l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ sur $\mathfrak{b}$ étant normalisée de la manière suivante : le groupe $H_b = E[b]^\times$ est un produit $E_1^\times \times \cdots \times E_r^\times$ pour des extensions E_i/E ; il contient le tore F-déployé maximal $A_b^G = (F^\times)^r$ que l'on munit de la mesure de Haar da telle que $\mathrm{vol}((\mathfrak{o}^\times)^s, da) = 1$; alors on utilise pour définir $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ la mesure de Haar dh_b sur H_b telle que $\mathrm{vol}(A_b^G \backslash H_b, \frac{dh_b}{da}) = 1$. Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qre}}$, cette normalisation coïncide avec celle introduite plus haut.

Pour $P_H \in \mathcal{P}_H$ et $b \in (\mathfrak{m}_{P_H})_{\mathrm{qr}}$, posant $\mathfrak{p}_* = \mathfrak{p}_{P_H}$, $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{m}_{P_H}$ et $\mathfrak{u}_* = \mathfrak{u}_{P_H}$, on définit comme en 4.2 – avec la normalisation ci-dessus – les distributions $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}$ et $I^{\mathfrak{m}_*}(b,\cdot) = \eta_{\mathfrak{m}_*}(b)^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}$ sur $\mathfrak{m}_*$. Pour $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{b})$, on note $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{m}_*)$ le terme K_H-invariant de $\mathfrak{f}$ suivant $\mathfrak{p}_*$, défini à l'aide des mesures normalisées sur K_H et sur $\mathfrak{u}_*$. Pour $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{b})$, d'après 4.2.(4), on a la formule de descente

$$I^{\mathfrak{b}}(b,\mathfrak{f}) = I^{\mathfrak{m}_*}(b,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}), \quad b \in \mathfrak{m}_* \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}. \tag{7}$$

Soit $P_H \in \mathcal{P}_H$. Posons $P = P_H^G$, $M = M_P$, $U = U_P$ et notons $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_P$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_P$ les algèbres de Lie de P, M, U. De même, posons $P_* = P_H$, $M_* = M_{P_H}$, $U_* = U_{P_H}$ et notons $\mathfrak{p}_* = \mathfrak{p}_{P_H}$, $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{m}_{P_H}$, $\mathfrak{u}_* = \mathfrak{u}_{P_H}$ les algèbres de Lie de P_*, M_*, U_*. Soit aussi P_*^- le sous-groupe parabolique de H opposé à P_* par rapport à M_* et soit U_*^- son radical unipotent. Notons $\mathfrak{u}_*^- \subset \mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de $\mathfrak{u}_*^-$. Rappelons que la (W,E)-décomposition $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est induite à partir d'une (W,E)-décomposition $\underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \underline{\mathfrak{B}}$ de $\underline{\mathfrak{A}}$. On suppose que la sous-$\mathfrak{o}_E$-algèbre d'Iwahori $\underline{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{b}$ est associée à une chambre de l'immeuble affine de H contenue dans l'appartement associé au tore E-déployé maximal $A_{H,0}$ de H. Alors on a la décomposition

$$\underline{\mathfrak{Q}}^k = (\underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{u}_*^-) \oplus (\underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{m}_*) \oplus (\underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{u}_*), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^k = \underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{m} \; (= \underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{m}_*).$$

Pour $k,\ j \in \mathbb{Z}$, on a donc

$$\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{dk+j} = \varpi_E^k(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^j), \tag{9}$$

où ϖ_E est une uniformisante de E. La E-algèbre $\mathfrak{m}_*$ se décompose en $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_E(V_i)$, pour une décomposition du E-espace vectoriel V en $V = V_1 \times \cdots \times V_s$. La $\mathfrak{o}_E$-algèbre $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{m}$ se décompose en $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{B}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathfrak{B}}_s$ où $\underline{\mathfrak{B}}_i$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire minimal (*i.e.* d'Iwahori) dans $\mathfrak{b}_i$, et posant $\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{Q}} \cap \mathfrak{m}$ $(= \underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^1)$ et $\underline{\mathfrak{Q}}_i = \mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}}_i)$ pour $i = 1, \ldots, s$, on a $\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{Q}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathfrak{Q}}_s$. On en déduit que pour $k \in \mathbb{Z}$, posant $d_i = \dim_E(V_i)$, on a les égalités

$$\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{dk} = \underline{\mathfrak{Q}}_1^{d_1 k} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{Q}}_s^{d_s k}, \quad \underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{dk+1} = \underline{\mathfrak{Q}}_1^{d_1 k+1} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{Q}}_s^{d_s k+1}. \tag{10}$$

De même, on a la décomposition $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_s$, $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$, et la $\mathfrak{o}$-algèbre $\underline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{m}$ se décompose en $\underline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}} = \underline{\mathfrak{A}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathfrak{A}}_s$ où $\underline{\mathfrak{A}}_i$ est l'unique $\mathfrak{o}_E$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}_i$ normalisé par $E^\times$ tel que $\underline{\mathfrak{A}}_i \cap \mathfrak{b}_i = \underline{\mathfrak{B}}_i$. L'élément $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \otimes 1$ appartient à $\underline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}}$, et d'après ce qui précède – rappelons que $\underline{k}_0 = dk_F(\beta)$ –, l'application

$$\delta_M : M \times \underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1} \to M,\ (m, b) \mapsto m^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)m \tag{11}$$

est partout submersive. On peut donc, comme on l'a fait sur G à l'aide de δ (3.9), descendre une distribution M-invariante au voisinage de β dans M en une distribution M_*-invariante au voisinage de 0 dans $\mathfrak{m}_*$: à toute distribution M-invariante T_M sur M est associée une distribution $\widetilde{\vartheta}_{T_M}$ sur $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1}$ telle que pour toute fonction $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$, on a

$$\langle \varphi_{\delta_M}, \widetilde{\vartheta}_{T_M} \rangle = \langle \varphi^{\delta_M}, T_M \rangle,$$

où les fonctions $\varphi^{\delta_M} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathrm{Im}(\delta_M))$ et $\phi_{\delta_M} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$ sont définies à l'aide de la mesure normalisée dm sur M et de la mesure $\mathfrak{d}m_*$ sur $\mathfrak{m}_*$ associée à la mesure normalisée sur M_*. À partir de $\widetilde{\vartheta}_{T_M}$, on construit comme en 3.9 une distribution H-invariante ϑ_{T_M} sur l'ouvert H-invariant ${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$ de M_*. Écrivons $M_* = H_1 \times \cdots \times H_s$, $H_i = \mathrm{Aut}_E(V_i)$, et pour $i = 1, \ldots, s$, posons $\underline{k}_{i,0} = d_i k_F(\beta)$. D'après (10), on a

$${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1}) = {}^{H_1}(\underline{\mathfrak{Q}}_1^{\underline{k}_{1,0}+1}) \times \cdots \times {}^{H_s}(\underline{\mathfrak{Q}}_s^{\underline{k}_{s,0}+1}), \tag{12}$$

et d'après 3.1.(7), ${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$ est une partie (ouverte et M_*-invariante) *fermée* dans $\mathfrak{m}_*$. Le support $\mathrm{Supp}(\vartheta_{T_M})$ de ϑ_{T_M}, qui est une partie fermée de ${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$, est donc fermé dans $\mathfrak{m}_*$, et on peut prolonger cette distribution ϑ_{T_M} par 0 sur $\mathfrak{m}_* \smallsetminus \mathrm{Supp}(\vartheta_{T_M})$. On obtient ainsi une distribution M_*-invariante sur $\mathfrak{m}_*$, de support $\mathrm{Supp}(\vartheta_{T_M})$, que l'on note θ_{T_M}. On peut aussi restreindre la distribution ϑ_{T_M} à un voisinage ouvert fermé et M_*-invariant Ω' de 0 dans $\mathfrak{m}_*$ contenu dans ${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{\underline{k}_0+1})$, et définir une distribution M_*-invariante $\theta_{T_M}^{\Omega'}$ sur $\mathfrak{m}_*$, à support dans Ω', en posant

$$\langle \mathfrak{f}, \theta_{T_M}^{\Omega'} \rangle = \langle \mathfrak{f}|_{\Omega'}, \vartheta_{T_M} \rangle, \quad \mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{m}_*).$$

D'autre part, pour $k\in\mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$^{H}(\underline{\mathfrak{Q}}^{dk+1})\cap\mathfrak{m}={}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{dk+1}).\tag{13}$$

En effet, puisque $^{H}(\underline{\mathfrak{Q}}^{dk+1})=\varpi_E^k({}^{H}\underline{\mathfrak{Q}})$ et $^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{dk+1})=\varpi_E^k({}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}))$, il suffit de vérifier (13) pour $k=0$. L'inclusion $\supset$ dans (13) est claire. Pour $b\in\mathfrak{b}$, notant $\zeta_b^{\mathfrak{b}}(t)=\sum_{j=0}^{d}a_{b,j}^{\mathfrak{b}}t^j\in E[t]$ le polynôme caractéristique du E-endomorphisme b de V, d'après la remarque 2 de 3.1, on a

$$\{b\in\mathfrak{b}:\nu_E(a_{b,j}^{\mathfrak{b}})\geqslant 1,\ j=0,\dots,d-1\}={}^{H}\underline{\mathfrak{Q}}.$$

Pour $b=(b_1,\dots,b_s)\in\mathfrak{m}_*$, $b_i\in\mathfrak{b}_i$, le polynôme caractéristique $\zeta_b^{\mathfrak{b}}$ s'écrit $\zeta_b^{\mathfrak{b}}=\prod_{i=1}^s\zeta_{b_i}^{\mathfrak{b}_i}$, et si les coefficients $a_{b,j}^{\mathfrak{b}}$ ($j=0,\dots,d-1$) appartiennent à $\mathfrak{p}_E$, alors pour $i=1,\dots,s$, le polynôme caractéristique $\zeta_{b_i}^{\mathfrak{b}_i}$ appartient à $\mathfrak{o}_E[t]$ et $\zeta_{b_i}^{\mathfrak{b}_i}\pmod{\mathfrak{p}_E}=t^{d_i}$. À nouveau d'après la remarque 2 de 3.1 (appliqué à chaque $\mathfrak{b}_i$), on obtient l'inclusion $\subset$ dans (13) pour $k=0$.

Remarque 2. D'après (13), on a l'égalité

$$^{H}(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})\cap\mathfrak{m}={}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}).\tag{14}$$

En particulier, si Ω est un voisinage ouvert fermé et H-invariant de 0 dans $\mathfrak{b}$ contenu dans $^{H}(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, alors $\Omega_{\mathfrak{m}}=\Omega\cap\mathfrak{m}$ ($=\Omega\cap\mathfrak{m}_*$) est un voisinage ouvert fermé et M_*-invariant de 0 dans $\mathfrak{m}_*$ contenu dans $^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$. ■

Comme on l'a fait pour $\mathfrak{b}$, pour chaque $r\in\mathbb{R}$, on peut définir par produit le sous-ensemble $(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}^r$ de $(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}$: on pose

$$(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}^r=(\mathfrak{b}_1)_{\mathrm{qre}}^r\times\cdots\times(\mathfrak{b}_s)_{\mathrm{qre}}^r.$$

Notons que si $r=k+\frac{1}{d}$ pour un entier k, alors puisque pour $i=1,\dots,s$, les « sauts » de la filtration $r\mapsto(\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qre}}^r$ de $(\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qre}}$ sont les éléments de $\frac{1}{d_i}\mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}^r=(\mathfrak{b}_1)_{\mathrm{qre}}^{k+\frac{1}{d_1}}\times\cdots\times(\mathfrak{b}_s)_{\mathrm{qre}}^{k+\frac{1}{d_s}}.$$

D'après (12) et le lemme 2 de 3.1, on a donc

$$(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}^{k_F(\beta)+\frac{1}{d}}=(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}\cap{}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}),$$

d'où (grâce à (14))

$$(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}^{k_F(\beta)+\frac{1}{d}}=(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}\cap{}^{H}(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}).\tag{15}$$

Pour $b\in(\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}}\cap\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, l'élément $\gamma=\beta+\boldsymbol{x}b$ appartient à M_{qre} et, d'après (3), on a l'égalité

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}=\lambda_M\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}\tag{16}$$

avec

$$\lambda_M=(q_E^{n_F(\beta)}\mu_F(\beta))^{\dim_E(\mathfrak{m}_*)}=|\beta|_E^d\,\frac{\eta_{\mathfrak{m}_*}(b)}{\eta_M(\gamma)},$$

ce qui, en termes d'intégrales orbitales normalisées, équivaut à

$$\theta_{I^M(\gamma,\cdot)}=|\beta|_E^d\left(\frac{\eta_M(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{m}_*}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}}I^{\mathfrak{m}_*}(b,\cdot).\tag{17}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Lemme 1. *Pour $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\rm qre} \cap \mathfrak{b}_{\rm qr} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$, l'élément $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à $M_{\rm qre} \cap G_{\rm qr}$, et l'on a*

$$\frac{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E} = (q_E^{n_F(\beta)}\mu_F(\beta))^{\dim_E(\mathfrak{m}_*)-\dim_E(\mathfrak{b})}\ (= \lambda_M\lambda^{-1}).$$

Démonstration. Écrivons $b = (b_1, \dots, b_s)$, $b_i \in (\mathfrak{b}_i)_{\rm qre} \cap \underline{\mathfrak{Q}}_i^{k_{i,0}+1}$. Posons $M = G_1 \times \cdots \times G_s$, $G_i = \mathrm{Aut}_F(V_i)$, et écrivons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, $\gamma_i = \beta + \boldsymbol{x}b_i \in G_i$. Pour $i = 1, \dots, s$, l'élément γ_i est quasi régulier elliptique dans G_i, donc γ est quasi régulier elliptique dans M. De plus, si γ n'est pas quasi régulier dans G, alors b n'est pas quasi régulier dans $\mathfrak{b}$, contradiction. Donc $\gamma \in M_{\rm qre} \cap G_{\rm qr}$.

On a $D_{M\backslash G}(\gamma)\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m}) = D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)$. Pour $i = 1, \dots, s$, posons $N_i = \dim_F(V_i)$ et $d_i = \frac{N_i}{[E:F]}$. On a

$$\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m}) = \det(\gamma)^{N-1}\prod_{i=1}^{s}\det(\gamma_i)^{-(N_i-1)},$$

d'où

$$|\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m})| = |\beta|_E^{d(N-1)}\prod_{i=1}^{s}|\beta|_E^{-d_i(N_i-1)}$$

et, puisque $\sum_{i=1}^{s} d_i = d = \frac{N}{[E:F]}$,

$$|\det_F(y \mapsto y\gamma; \mathfrak{g}/\mathfrak{m})| = |\beta|_E^{[E:F](d^2-\sum_{i=1}^{s} d_i^2)} = |\beta|_E^{[E:F](\dim_E(\mathfrak{b})-\dim_E(\mathfrak{m}_*))}.$$

D'autre part, on a $\mu_F^+(\beta) = |\beta|_E^{1-[E:F]}\mu_F(\beta)$, par conséquent il s'agit de prouver l'égalité

$$\frac{|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E} = \mu_F^+(\beta)^{-(\dim_E(\mathfrak{b})-\dim_E(\mathfrak{m}_*))}.$$

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant s$ tels que $i \neq j$, posons $\mathfrak{g}_{i,j} = \mathrm{End}_F(V_i, V_j)$ et $\mathfrak{b}_{i,j} = \mathrm{End}_E(V_i, V_j)$. Le F-endomorphisme $-\mathrm{ad}_\gamma$ de $\mathfrak{g}$ se restreint en un F-automorphisme $g \mapsto g\gamma_i - \gamma_j g$ de $\mathfrak{g}_{i,j}$, que l'on note $\boldsymbol{\gamma}_{i,j}$. De la même manière, le E-endomorphisme $-\mathrm{ad}_b$ de $\mathfrak{b}$ se restreint en un E-automorphisme $y \mapsto yb_i - b_j y$, que l'on note $\boldsymbol{b}_{i,j}$. Puisque

$$\frac{|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E} = \prod_{i\leqslant i,j\leqslant s,\, i\neq j}\frac{|\det_F(\boldsymbol{\gamma}_{i,j}; \mathfrak{g}_{i,j})|}{|\det_E(\boldsymbol{b}_{i,j}; \mathfrak{b}_{i,j})|_E}$$

et

$$\dim_E(\mathfrak{b}) - \dim_E(\mathfrak{m}_*) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant s,\, i\neq j}\dim_E(\mathfrak{b}_{i,j}),$$

il suffit de prouver que pour $1 \leqslant i, j \leqslant s$ tels que $i \neq j$, on a

$$\frac{|\det_F(\boldsymbol{\gamma}_{i,j}; \mathfrak{g}_{i,j})|}{|\det_E(\boldsymbol{b}_{i,j}; \mathfrak{b}_{i,j})|_E} = \mu_F^+(\beta)^{-\dim_E(\mathfrak{b}_{i,j})}.$$

Fixons un tel couple (i, j) et prouvons l'égalité ci-dessus. Rappelons que la (W, E)-décomposition $\mathfrak{g} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}$ est induite par une (W, E)-décomposition $\underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}$. On en déduit (par restriction) une décomposition $\mathfrak{g}_{i,j} = A(E) \otimes_E \mathfrak{b}_{i,j}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons $\mathfrak{X}^k = \underline{\mathfrak{P}}^k \cap \mathfrak{g}_{i,j}$ et $\mathfrak{Y}^k = \underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{b}_{i,j}$ $(= \underline{\mathfrak{Q}}^k \cap \mathfrak{g}_{i,j})$. On a $\mathfrak{X}^k \cap \mathfrak{b}_{i,j} = \mathfrak{Y}^k$ et

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

$\mathfrak{X}^k = \mathfrak{A}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{Y}^k$. Soit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_{\underline{k}_0}(\beta,\underline{\mathfrak{A}})$ et, pour $k\in\mathbb{Z}$, posons $\mathfrak{Z}^k=\underline{\mathfrak{Q}}^k\mathfrak{N}\cap\mathfrak{g}_{i,j}$. Puisque $\underline{\mathfrak{Q}}^k\subset\underline{\mathfrak{Q}}^k\mathfrak{N}$, on a $\mathfrak{Y}^k\subset\mathfrak{Z}^k$. On pose $\overline{\mathfrak{Z}}^k=\mathfrak{Z}^k/\mathfrak{Y}^k$. Pour $z\in\mathfrak{Z}^k$, on a

$$\gamma_{i,j}(z)=-\mathrm{ad}_\beta(z)+z\boldsymbol{x}b_i-\boldsymbol{x}b_jz$$

avec $z\boldsymbol{x}b_i-\boldsymbol{x}b_jz\in\mathfrak{X}^{\underline{k}_0+k+1}$. Écrivons

$$z\boldsymbol{x}b_i-\boldsymbol{x}b_jz=-\mathrm{ad}_\beta(z')+\boldsymbol{x}z''$$

avec $z'\in\mathfrak{Z}^{k+1}$ et $z''\in\mathfrak{Y}_{i,j}^{\underline{k}_0+k+1}$. On a donc

$$\gamma_{i,j}(z)=-\mathrm{ad}_\beta(z+z')+\boldsymbol{x}z''.$$

L'élément z'' est uniquement déterminé par z, puisque l'on a $z''=\boldsymbol{s}(z\boldsymbol{x}b_i-\boldsymbol{x}b_jz)$. Quant à l'élément z', il n'est pas défini de manière unique, mais sa projection $\bar{z}'$ sur $\overline{\mathfrak{Z}}^{k+1}$ l'est. On a donc défini deux applications $\mathfrak{o}$-linéaires

$$\eta^k:\mathfrak{Z}^k\rightarrow\overline{\mathfrak{Z}}^{k+1},\ z\mapsto z',\qquad \nu^k:\mathfrak{Z}^k\rightarrow\mathfrak{Y}^{\underline{k}_0+k+1},\ z\mapsto z'',$$

telles que

$$\gamma_{i,j}(z)=-\mathrm{ad}_\beta(z+\eta^k(z))+\boldsymbol{x}\nu^k(z),\quad z\in\mathfrak{Z}^k. \tag{18}$$

Remarquons que pour $z=y\in\mathfrak{Z}^k\cap\mathfrak{b}_{i,j}=\mathfrak{Y}^k$, on a

$$\nu^k(y)=yb_i-b_jy=\boldsymbol{b}_{i,j}(y). \tag{19}$$

Pour $k,\,k'\in\mathbb{Z}$ tels que $k'\geqslant k$, on a $\eta^k|_{\mathfrak{Z}^{k'}}=\eta^{k'}$ et $\nu^k|_{\mathfrak{Z}^{k'}}=\nu^{k'}$. On obtient deux applications F-linéaires

$$\eta:\mathfrak{g}_{i,j}\rightarrow\bar{\mathfrak{g}}_{i,j}=\mathfrak{g}_{i,j}/\mathfrak{b}_{i,j},\qquad \nu:\mathfrak{g}_{i,j}\rightarrow\mathfrak{b}_{i,j},$$

telles que pour $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, on a $\eta^k=\eta|_{\mathfrak{Z}^k}$ et $\nu^k=\nu|_{\mathfrak{Z}^k}$. D'autre part, pour $m\in\mathbb{Z}$, d'après [1, 1.4.10], on a la suite exacte courte

$$0\rightarrow\overline{\mathfrak{Z}}^m\xrightarrow{-\mathrm{ad}_\beta}\mathfrak{X}^{\underline{k}_0+m}\xrightarrow{\boldsymbol{s}}\mathfrak{Y}^{\underline{k}_0+m}\rightarrow 0. \tag{20}$$

Puisque d'après [1, 1.4.13], on a $\underline{\mathfrak{Q}}^m\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_0\otimes_{\mathfrak{o}_E}\underline{\mathfrak{Q}}^m$ avec $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{N}_{k_F(\beta)}(\beta,\mathfrak{A}(E))$, elle se déduit par l'application $-\otimes_{\mathfrak{o}_E}\mathfrak{Y}^m$ de la suite exacte courte

$$0\rightarrow\mathfrak{N}_0\xrightarrow{-\mathrm{ad}_\beta}\mathfrak{P}^{k_F(\beta)}(E)\xrightarrow{s_0}\mathfrak{p}_E^{k_F(\beta)}\rightarrow 0. \tag{21}$$

D'après (20) et (21), pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et toute mesure de Haar $\mathfrak{d}\bar{g}_{i,j}$ sur $\mathfrak{g}_{i,j}/\mathfrak{b}_{i,j}$, on a

$$\frac{\mathrm{vol}(\overline{\mathfrak{Z}}^k,\mathfrak{d}\bar{g}_{i,j})}{\mathrm{vol}(\mathfrak{X}^{\underline{k}_0+k}/\mathfrak{Y}^{\underline{k}_0+k},\mathfrak{d}\bar{g}_{i,j})}=\mu_F^+(\beta)^{\dim_E(\mathfrak{b}_{i,j})}. \tag{22}$$

De (18), (19) et (22), on déduit (voir par exemple [10, 5.3.3, 5.3.4]) que

$$|\mathrm{det}_F(\gamma_{i,j};\mathfrak{g}_{i,j})|=\mu_F^+(\beta)^{-\dim_E(\mathfrak{b}_{i,j})}|\mathrm{det}_E(\boldsymbol{b}_{i,j};\mathfrak{b}_{i,j})|_E,$$

ce qui est l'égalité cherchée. □

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

L'application terme constant $C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(M)$, $f \mapsto f_P$ permet dualement d'associer à une distribution T_M sur M une distribution $\iota_P^G(T_M)$ sur G : pour $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$\langle f, i_P^G(T_M)\rangle = \langle f_P, T_M\rangle.$$

De la même manière, l'application terme constant $C_c^\infty(\mathfrak{b}) \to C_c^\infty(\mathfrak{m}_*)$, $\mathfrak{f} \mapsto \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}$ permet dualement d'associer à une distribution $T_{\mathfrak{m}_*}$ sur $\mathfrak{m}_*$ une distribution $i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(T_{\mathfrak{m}_*})$ sur $\mathfrak{b}$: pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{b})$, on pose

$$\langle \mathfrak{f}, i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(T_{\mathfrak{m}_*})\rangle = \langle \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}, T_{\mathfrak{m}_*}\rangle.$$

Lemme 2. *Pour $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + \boldsymbol{x} b$, on a*

$$i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}) = \left(\frac{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash \mathfrak{b}}(b)|_E}\right)^{\frac{1}{2}} \theta_{i_P^G(\mathcal{O}_\gamma^M)}.$$

Démonstration. Pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, on note $\phi_\delta^{\boldsymbol{x}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ la fonction définie par $\phi_\delta^{\boldsymbol{x}}(y) = \phi_\delta(\boldsymbol{x}y)$ pour $y \in \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$. De même, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(M \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$, on note $\varphi_{\delta_M}^{\boldsymbol{x}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$ la fonction définie par $\varphi_{\delta_M}^{\boldsymbol{x}}(y) = \varphi_{\delta_M}(\boldsymbol{x}y)$ pour $y \in \underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}$. Il suffit de montrer que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, il existe une fonction $\phi_{P,\mathfrak{p}_*} \in C_c^\infty(M \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) suivantes, pour tout $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$:

(i) $\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}((\phi_\delta^{\boldsymbol{x}})_{\mathfrak{p}_*}) = \mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})_{\delta_M}^{\boldsymbol{x}})$;

(ii) $\mathcal{O}_{\beta+\boldsymbol{x}b}^M((\phi^\delta)_P) = \left(\frac{|D_{M\backslash G}(\beta+\boldsymbol{x}b)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash \mathfrak{b}}(b)|}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O}_{\beta+\boldsymbol{x}b}^M((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})^{\delta_M})$.

En effet, soit $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ et supposons qu'une telle fonction $\phi_{P,\mathfrak{p}_*}$ existe. Soit $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ et posons $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b \in M_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}}$. En appliquant (ii) à la distribution $\mathcal{O}_\gamma^M$ sur M, on obtient

$$\theta_{i_P^G(\mathcal{O}_\gamma)}(\phi_\delta^{\boldsymbol{x}}) = i_P^G(\mathcal{O}_\gamma)(\phi^\delta) = \mathcal{O}_\gamma^M((\phi^\delta)_P) = \left(\frac{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}\backslash \mathfrak{g}}(b)|}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{O}_\gamma^M((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})^{\delta_M}).$$

En appliquant (i) à la distribution $\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M} = \lambda_M \mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}$ sur $\mathfrak{m}_*$, on obtient

$$\mathcal{O}_\gamma^M((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})^{\delta_M}) = \theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})_{\delta_M}^{\boldsymbol{x}}) = \theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}((\phi_\delta^{\boldsymbol{x}})_{\mathfrak{p}_*}).$$

Or on a (par définition)

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}((\phi_\delta^{\boldsymbol{x}})_{\mathfrak{p}_*}) = i_{\mathfrak{p}^*}^{\mathfrak{b}}(\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M})(\phi_\delta^{\boldsymbol{x}}),$$

d'où

$$\theta_{i_P^G(\mathcal{O}_\gamma)}(\phi_\delta^{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash \mathfrak{b}}(b)|_E}\right)^{-\frac{1}{2}} i_{\mathfrak{p}^*}^{\mathfrak{b}}(\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M})(\phi_\delta^{\boldsymbol{x}}).$$

Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ – pourvu qu'il existe une fonction $\phi_{P,\mathfrak{p}_*} \in C_c^\infty(M \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessus – cela démontre le lemme. Reste à prouver l'existence de $\phi_{P,\mathfrak{p}_*}$.

Soit $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$. Puisque $C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}) = C_c^\infty(G) \otimes C_c^\infty(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, on peut par linéarité supposer que ϕ est de la forme $\phi = f \otimes \xi$ avec $f \in C_c^\infty(G)$ et

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

$\xi \in C_c^\infty(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$. Soit $\bar{f} \in C_c^\infty(M)$ la fonction définie par $\bar{f}(m) = \int_{U_P\times K} f(muk)dudk$. Notons $\mathfrak{f}$ la fonction $\xi^{\boldsymbol{x}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ et prenons le terme K_H-invariant $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_*)$ de $\mathfrak{f}$ suivant $\mathfrak{p}_*$. Puisque

$$\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1} + \mathfrak{u}_* \subset {}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}),$$

le support de $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}$ est contenu dans ${}^H(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}) \cap \mathfrak{m}_*$ et, d'après (14), cette intersection coïncide avec ${}^{M_*}(\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$. On peut donc décomposer $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}$ en

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*} = \sum_{h\in M_*} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*,h}$$

avec $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*,h} \in C_c^\infty(h\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}h^{-1})$ et $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*,h} = 0$ sauf pour un nombre fini de h. Comme en 3.9, on obtient une fonction $\sum_{h\in M_*} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*,h} \circ \mathrm{Ad}_h \circ \boldsymbol{s}$ sur $\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}$, que l'on note $\xi_{\mathfrak{p}_*} \in C_c^\infty(\boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1})$. Bien sûr, la fonction $\xi_{\mathfrak{p}_*}$ n'est pas vraiment définie, puisqu'elle dépend de la décomposition de $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}$ choisie, mais pour toute distribution M-invariante T_M sur M, la quantité $\langle \xi_{\mathfrak{p}_*}, \widetilde{\vartheta}_{T_M}\rangle$ est bien définie (elle ne dépend pas de la décomposition de $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_*}$ choisie, cf. 3.9). On pose

$$\phi_{P,\mathfrak{p}_*} = \bar{f} \otimes \xi_{\mathfrak{p}_*} \in C_c^\infty(M \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}_{\mathfrak{m}}^{k_0+1}).$$

Pour $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b$, on a

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}((\phi_{P,\mathfrak{p}_*})_{\delta_M}^{\boldsymbol{x}}) = \theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}(c\,\xi_{\mathfrak{p}_*}^{\boldsymbol{x}}) = \theta_{\mathcal{O}_\gamma^M}((\phi_\delta^{\boldsymbol{x}})_{\mathfrak{p}_*})$$

avec $c = \int_M \bar{f}(m)dm = \int_G f(g)dg$. Puisque $\theta_{\mathcal{O}_\gamma^M} = \lambda_M \mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}$, cela prouve que la fonction $\phi_{P,\mathfrak{p}_*}$ vérifie la condition (i). Quant à la condition (ii), pour $m \in M$ et $u \in U$, posons $v_m(u) = m^{-1}umu \in U$. Pour $m \in M$, $u \in U$, $k \in K$ et $b \in \mathfrak{m}_* \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$ tel que $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à G_{qr}, l'élément $\delta_M(m, \boldsymbol{x}b) = m^{-1}\gamma m$ appartient à $M \cap G_{\mathrm{qr}}$ et l'on a

$$\delta(muk, \boldsymbol{x}b) = k^{-1}\delta_M(m, \boldsymbol{x}b)v_{\delta_M(m,\boldsymbol{x}b)}(u)k. \tag{23}$$

De plus, l'application $U \to U$, $u \mapsto v_{\delta_M(m,\boldsymbol{x}b)}(u)$ est un automorphisme de variété $\mathfrak{p}$-adique de jacobien constant égal à

$$|\det{}_F(1 - \mathrm{Ad}_{\gamma^{-1}}; \mathfrak{u})|_F = \delta_P(\gamma)^{-\frac{1}{2}}|D_{M\backslash G}(\gamma)|^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Pour $m_* \in M_*$ et $u_* \in U_*$, posons $\mathfrak{v}_{m^*}(u_*) = u_*^{-1}m_*u_* - b_* \in \mathfrak{u}_*$. Alors pour $m_* \in M_*$, $u_* \in U_*$, $k \in K_H$ et $b \in \mathfrak{m}_* \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$, on a

$$k_*^{-1}u_*^{-1}m_*^{-1}bm_*u_*k_* = k_*^{-1}(m_*^{-1}bm_* + \mathfrak{v}_{m_*^{-1}bm_*}(u_*))k_*,$$

et l'application $\mathfrak{u}_* \to \mathfrak{u}_*$, $y \mapsto \mathfrak{v}_{m_*^{-1}bm_*}(1+y)$ est un automorphisme de variété $\mathfrak{p}$-adique de jacobien constant égal à

$$|\det{}_F(\mathrm{ad}_b; \mathfrak{u}_*)| = |D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

La formule (23), et les calculs des jacobiens (24) et (25), entraînent que la fonction $\phi_{P,\mathfrak{p}_*}$ vérifie la condition (ii). $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Proposition. *Pour $b \in (\mathfrak{m}_*)_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, posant $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b$, on a*

$$\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = \lambda \mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}},$$

où la constante $\lambda > 0$ est celle de la proposition de 3.10, c'est-à-dire $\lambda = (q_E^{n_F(\beta)}\mu_F(\beta))^{d^2}$.

Démonstration. D'après la formule de descente 4.1.(6), on a $i_P^G(I^M(\gamma,\cdot)) = I^G(\gamma,\cdot)$ et, d'après la formule de descente 4.2.(4), on a $i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(I^{\mathfrak{m}_*}(b,\cdot)) = I^{\mathfrak{b}}(\gamma,\cdot)$. En termes des intégrales orbitales non normalisées, on a donc $i_P^G(\mathcal{O}_\gamma^M) = |D_{M\backslash G}(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma$ et $i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}) = |D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$. D'après le lemme 1, on a

$$\lambda = \frac{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E}{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}\lambda_M,$$

et d'après le lemme 2 et la relation (16), on a

$$\theta_{i_P^G(\mathcal{O}_\gamma^M)} = \left(\frac{D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E}{|D_{M\backslash G}(\gamma)|}\right)^{\frac{1}{2}} i_{\mathfrak{p}_*}^{\mathfrak{b}}(\lambda_M\mathcal{O}_b^{\mathfrak{m}_*}).$$

D'où la proposition. □

Corollaire 1. *Pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, l'élément $\gamma = \beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à G_{qr} et l'on a l'égalité*

$$\theta_{I^G(\gamma,\cdot)} = |\beta|_E^d\left(\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}} I^{\mathfrak{b}}(b,\cdot),$$

avec

$$|\beta|_E^d\left(\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}} = |\beta|_E^{\frac{d}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$. Puisque $\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}_H} {}^H((\mathfrak{m}_{P_H})_{\mathrm{qre}}) \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$, quitte à remplacer b par $h^{-1}bh$ pour un $h \in H$, on peut (d'après le lemme de 3.7) supposer que $b \in (\mathfrak{m}_{P_H})_{\mathrm{qre}} \cap \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ pour un $P_H \in \mathcal{P}_H$. Posons $P = P_H^G$, $M = M_P$ et $\mathfrak{m}_* = \mathfrak{m}_{P_H}$. L'élément γ appartient à $M_{\mathrm{qre}} \cap G_{\mathrm{qr}}$ et l'on a $\theta_{\mathcal{O}_\gamma} = \lambda\mathcal{O}_b^{\mathfrak{b}}$ avec

$$\lambda = \lambda_M\frac{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E}{|D_{M\backslash G}(\gamma)|} = |\beta|_E^d\frac{\eta_{\mathfrak{m}_*}(b)}{\eta_M(\gamma)}\frac{|D_{\mathfrak{m}_*\backslash\mathfrak{b}}(b)|_E}{|D_{M\backslash G}(\gamma)|} = |\beta|_E^d\frac{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}{\eta_G(\gamma)}.$$

En termes des intégrales orbitales normalisées, on a donc

$$\theta_{I^G(\gamma,\cdot)} = |\beta|_E^d\left(\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}} I^{\mathfrak{b}}(b,\cdot)$$

avec $|\beta|_E^d\left(\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)}\right)^{-\frac{1}{2}} = |\beta|_E^d(|\beta|_E^{-d}\lambda)^{\frac{1}{2}} = |\beta|_E^{\frac{d}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}$. □

On en déduit que dans le corollaire de 3.10, le point (i) reste vrai pour tous les éléments de $\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ qui sont quasi réguliers (dans $\mathfrak{b}$), et pas seulement pour ceux qui sont elliptiques :

Corollaire 2. *Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$, on a l'égalité*

$$I^G(\beta + \boldsymbol{x}_0 \otimes b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}).$$

Remarque 2. On a bien sûr aussi la variante sur $\mathfrak{g}$ du corollaire 2 (le point (i) du corollaire de 3.11 reste vrai pour tous les éléments de $\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$ qui sont quasi réguliers, et pas seulement pour ceux qui sont elliptiques) : – *pour toute fonction $\mathfrak{f}\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$, il existe une fonction $\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}}\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1})$ telle que pour tout $b\in\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}\cap\underline{\mathfrak{Q}}^{\underline{k}_0+1}$, on a l'égalité*

$$I^{\mathfrak{g}}(\beta+\boldsymbol{x}_0\otimes b,\mathfrak{f})=I^{\mathfrak{b}}(b,\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}}).\qquad\blacksquare$$

4.4. Descente centrale au voisinage d'un élément fermé

Soit $\beta\in G$ un élément fermé (cf. 3.1). Notons $\mathfrak{b}$ le centralisateur $\mathfrak{g}_\beta=\mathrm{End}_{F[\beta]}(V)$ de β dans $\mathfrak{g}$. La F-algèbre $F[\beta]$ se décompose en $F[\beta]=E_1\times\cdots\times E_r$ pour des extensions E_i/F. Pour $i=1,\dots,r$, notons e_i l'idempotent de $F[\gamma]$ associé à E_i, et posons $V_i=e_i(V)$, $\mathfrak{g}_i=\mathrm{End}_F(V_i)$ et $\mathfrak{b}_i=\mathrm{End}_{E_i}(V_i)$. On a donc la décomposition $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\times\cdots\times\mathfrak{b}_r$ et l'élément $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_r)$ est (F-)*pur* dans $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_1\times\cdots\times\mathfrak{g}_r$, au sens où pour $i=1,\dots,r$, l'élément β_i est pur dans $\mathfrak{g}_i$. Notons H le centralisateur $G_\beta=\mathfrak{b}^\times$ de β dans G, A_β le tore déployé maximal du centre $Z(H)=F[\beta]^\times$ de H et $M=M(\beta)$ le centralisateur $Z_G(A_\beta)$ de A_β dans G. On a donc $H=H_1\times\cdots\times H_r$ avec $H_i=\mathrm{Aut}_{E_i}(V_i)$ et $M=G_1\times\cdots\times G_r$ avec $G_i=\mathrm{Aut}_F(V_i)$. Quitte à remplacer β par un conjugué par g, on peut supposer que β est en « position standard », c'est-à-dire que $A_\beta=A_P$ pour un $P\in\mathcal{P}$. Alors on a $M=M_P$ et $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_P$. Rappelons que pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$, on a la formule de descente (4.1.(6))

$$I^G(\gamma,f)=I^M(\gamma,f_P),\quad \gamma\in M\cap G_{\mathrm{qr}}.\tag{1}$$

Pour $i\in\{1,\dots,r\}$ tel que $E_i\neq F$, on peut descendre les intégrales orbitales normalisées au voisinage de β_i dans G_i en des intégrales orbitales normalisées au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}_i$ (corollaire 2 de 4.3) : il existe un élément $\boldsymbol{x}_i\in\mathfrak{g}_i$ et un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_i$ de 0 dans $\mathfrak{b}_i$, tels que pour toute fonction $f_i\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G_i)$, il existe une fonction $f_i^{\mathfrak{b}_i}\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{V}_i)$ telle que

$$I^{G_i}(\beta_i+\boldsymbol{x}_ib_i,f_i)=I^{\mathfrak{b}_i}(b_i,f_i^{\mathfrak{b}_i}),\quad b_i\in(\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qr}}\cap\mathcal{V}_i.$$

Précisément, l'élément $\boldsymbol{x}_i$ est de la forme $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_{i,0}\otimes 1$ pour un élément $\boldsymbol{x}_{i,0}\in\mathfrak{A}(E_i)$ dans l'image réciproque de 1 par une corestriction modérée $\boldsymbol{s}_{i,0}:A(E_i)\to E_i$ sur $A(E_i)$ relativement à E_i/F et une (W_i,E_i)-décomposition $\mathfrak{g}_i=A(E_i)\otimes_{E_i}\mathfrak{b}_i$ de $\mathfrak{g}_i$ induite par une (W_i,E_i)-décomposition $\underline{\mathfrak{A}_i}=\mathfrak{A}(E_i)\otimes_{\mathfrak{o}_{E_i}}\underline{\mathfrak{B}}_i$ de $\underline{\mathfrak{A}}_i$, où $\underline{\mathfrak{A}}_i$ est un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire dans $\mathfrak{g}_i$ normalisé par $E_i^\times$ tel que $\underline{\mathfrak{B}}_i=\mathfrak{b}_i\cap\underline{\mathfrak{A}}_i$ est un $\mathfrak{o}_{E_i}$-ordre héréditaire minimal dans $\mathfrak{b}_i$. Le voisinage $\mathcal{V}_i$ de 0 dans $\mathfrak{b}_i$ est donné par $\mathcal{V}_i=\underline{\mathfrak{Q}}_i^{\underline{k}_{i,0}+1}$, où $\underline{\mathfrak{Q}}_i=\mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}}_i)$ et $\underline{k}_{i,0}=k_0(\beta_i,\underline{\mathfrak{A}}_i)=d_ik_F(\beta_i)$ avec $d_i=\dim_{E_i}(V_i)$ $(=e(\underline{\mathfrak{B}}_i|\mathfrak{o}_{E_i}))$. Rappelons que d'après 3.1.(7), ${}^{H_i}(\mathcal{V}_i)$ est une partie ouverte fermée et H_i-invariante dans $\mathfrak{b}_i$, et que d'après 3.7.(3), $\omega_i={}^{G_i}(\beta_i+\boldsymbol{x}_i\mathcal{V}_i)$ est une partie ouverte fermée et G-invariante dans G.

Pour $i\in\{1,\dots,r\}$ tel que $E_i=F$, l'élément β_i appartient à $F^\times$ et l'on a $\mathfrak{b}_i=\mathfrak{g}_i$ et $H_i=G_i$. On choisit un $\mathfrak{o}$-ordre héréditaire minimal $\underline{\mathfrak{B}}_i$ dans $\mathfrak{b}_i$. On pose $\boldsymbol{x}_i=1$, $\underline{\mathfrak{Q}}_i=\mathrm{rad}(\underline{\mathfrak{B}}_i)$, $d_i=\dim_F(V_i)$ et $\mathcal{V}_i=\underline{\mathfrak{Q}}_i^{d_i\nu(\beta_i)+1}$. D'après 3.1.(7), l'ensemble $\omega_i={}^{G_i}(\beta_i+\boldsymbol{x}_i\mathcal{V}_i)=\beta_i+{}^{G_i}(\mathcal{V}_i)$ est un voisinage ouvert fermé et G_i-invariant de β_i dans G_i. Pour toute fonction $f_i\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G_i)$, on choisit une décomposition

$$f_i=\sum_{g_i\in G_i}f_{i,g_i}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

avec $f_{i,g_i} \in C_c^\infty(\beta_i + g_i \mathcal{V}_i g_i^{-1})$ et $f_{i,g_i} = 0$ pour presque tout $g_i \in G_i$, et l'on note $f_i^{\mathfrak{b}_i} \in C_c^\infty(\mathcal{V}_i)$ la fonction définie par

$$f_i^{\mathfrak{b}_i}(b_i) = \sum_{g_i \in G_i} f_i \circ \mathrm{Int}_{g_i}(\beta_i + b_i), \quad b_i \in \mathcal{V}_i.$$

On a donc

$$I^{G_i}(\beta_i + \boldsymbol{x}_i b_i, f_i) = I^{\mathfrak{b}_i}(b_i, f_i^{\mathfrak{b}_i}), \quad b_i \in (\mathfrak{b}_i)_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}_i.$$

Soit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r) \in \mathfrak{m}$ et soit $\mathcal{V}$ le voisinage ouvert compact de 0 dans $\mathfrak{b}$ défini par $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_r$. Notons que ${}^H\mathcal{V} = {}^{H_1}(\mathcal{V}_1) \times \cdots \times {}^{H_r}(\mathcal{V}_r)$ est un voisinage ouvert fermé et H-invariant de 0 dans $\mathfrak{b}$ et que ${}^M(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}) = \omega_1 \times \cdots \times \omega_r$ est un voisinage ouvert fermé et M-invariant de β dans M. D'après ce qui précède, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(M)$, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathcal{V})$ telle que

$$I^M(\beta + \boldsymbol{x}b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}), \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}. \tag{2}$$

En effet, puisque $C_c^\infty(M) = C_c^\infty(G_1) \otimes \cdots \otimes C_c^\infty(G_r)$, la fonction f est une combinaison linéaire de fonctions du type $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$ avec $f_i \in C_c^\infty(G_i)$. Pour $f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$, la fonction $f^{\mathfrak{b}} = f_1^{\mathfrak{b}_1} \otimes \cdots \otimes f_r^{\mathfrak{b}_r}$ convient. D'où le résultat par linéarité.

Posons

$$\mathcal{V}' = \{b \in \mathcal{V} : D_{M\backslash G}(\beta + \boldsymbol{x}b) \neq 0\}.$$

Puisque $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_\beta$ est contenu dans $\mathfrak{m}$, on a $D_{M\backslash G}(\beta) \neq 0$, et $\mathcal{V}'$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{b}$. On a l'inclusion

$$\{\beta + \boldsymbol{x}b : b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}'\} \subset M \cap G_{\mathrm{qr}}. \tag{3}$$

En effet, d'après 4.3, pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}$, l'élément $\beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à M_{qr}. Par conséquent, pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}'$, puisque $\beta + \boldsymbol{x}b \in M_{\mathrm{qr}}$ et $D_{M\backslash G}(\beta + \boldsymbol{x}b) \neq 0$, l'élément $\beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à $M \cap G_{\mathrm{qr}}$.

L'application

$$\delta_M : M \times \boldsymbol{x}\mathcal{V} \to M,\ (m, \boldsymbol{x}b) \mapsto m^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)m$$

est partout submersive. Par définition de $\mathcal{V}'$, l'application

$$\delta' : G \times \boldsymbol{x}\mathcal{V}' \to G,\ (g, \boldsymbol{x}b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$$

est elle aussi partout submersive. Pour $g \in G$ et $b \in \mathfrak{b}$, puisque $G = KP = PK$, on peut écrire $g = muk$ avec $m \in M$, $u \in U_P$ et $k \in K$. Alors pour $b \in \mathcal{V}'$, posant $\gamma = m^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)m$, on a

$$g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g = k^{-1}\gamma(\gamma^{-1}u^{-1}\gamma u)k.$$

Puisque $D_{M\backslash G}(\gamma) \neq 0$, l'application $U_P \to U_P$, $u \mapsto \gamma^{-1}u^{-1}\gamma u$ est un automorphisme de variété $\mathfrak{p}$-adique. D'où l'inclusion

$$\mathrm{Im}(\delta') \subset {}^K(\mathrm{Im}(\delta_M)U_P). \tag{4}$$

Remarque 1. L'inclusion (4) n'implique pas que si $f \in C_c^\infty(G)$ est à support contenu dans $\mathrm{Im}(\delta')$, alors la fonction $f_P \in C_c^\infty(M)$ est à support contenu dans $\mathrm{Im}(\delta_M)$. D'autre part, d'après le lemme 3 de 3.2, il existe un voisinage ouvert fermé et M-invariant Ξ_M de β dans M tel que $\Xi_M \subset {}^M(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}')$. Pour un tel Ξ_M, on a ${}^G(\Xi_M) = {}^K(\Xi_M U_P)$, et $\Xi = {}^G(\Xi_M)$ est un voisinage ouvert fermé et G-invariant de β dans G. ■

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

D'après le lemme 3 de 3.2, on peut choisir un voisinage ouvert fermé et M-invariant Ξ_M de β dans M tel que $\Xi_M \subset {}^M(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}')$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, la fonction $f_P|_{\Xi_M}$ est à support dans $\mathrm{Im}(\delta_M) = {}^M(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V})$ et, d'après (2), il existe une fonction $f_{\Xi_M}^{\mathfrak{b}} = (f_P|_{\Xi_M})^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathcal{V})$ telle que

$$I^M(\beta + \boldsymbol{x}b, f_P|_{\Xi_M}) = I^{\mathfrak{b}}(b, f_{\Xi_M}^{\mathfrak{b}}), \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}.$$

D'après (1), on en déduit que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}$ tel que $\beta + \boldsymbol{x}b \in \Xi_M$, on a l'égalité

$$I^G(\beta + \boldsymbol{x}b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f_{\Xi_M}^{\mathfrak{b}}). \tag{4}$$

D'après la remarque 1, ${}^G(\Xi_M) = {}^K(\Xi_M U_P)$ est un voisinage ouvert fermé et G-invariant de β dans G.

On peut choisir Ξ_M de la forme

$$\Xi_M = {}^M(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}^{(k)}), \quad \mathcal{V}^{(k)} = \underline{\mathfrak{Q}}_1^{d_1 k_1 + 1} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{Q}}_r^{d_r k_r + 1},$$

pour un entier un r-uplet $(k) = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\mathcal{V}^{(k)} \subset \mathcal{V}'$ (pour $i = 1, \ldots, r$, on a donc forcément $k_i \geqslant \max\{k_F(\beta_i), \nu_{E_i}(\beta_i)\}$). D'où la proposition suivante.

Proposition. *Soit un r-uplet $(k) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{V}^{(k)} \subset \mathcal{V}'$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathcal{W})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{W}$, on a l'égalité*

$$I^G(\beta + \boldsymbol{x}b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}}).$$

Remarque 2. On a aussi la variante sur $\mathfrak{g}$ de la proposition. Soit $\beta \in \mathfrak{g}$ un élément fermé. On reprend à l'identique les constructions précédentes, la seule différence étant que dans la décomposition $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, les éléments β_j tels que $F[\beta_j] = F$ sont dans F (et pas forcément dans $F^\times$). On suppose toujours que $M = M(\beta)$ est de la forme $M = M_P$ pour un $P \in \mathcal{P}$. On définit $\mathcal{V}$ de la même manière – c'est un voisinage ouvert compact de β dans $\mathfrak{b}$ – et l'on pose

$$\mathcal{V}' = \{b \in \mathcal{V} : D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\beta + \boldsymbol{x}b) \neq 0\}.$$

Alors $\mathcal{V}'$ est un voisinage ouvert de β dans $\mathfrak{b}$. L'application

$$\delta_M : M \times \boldsymbol{x}\mathcal{V} \to \mathfrak{m},\ (m, \boldsymbol{x}b) \mapsto m^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)m$$

est partout submersive. Par définition de $\mathcal{V}'$, l'application

$$\delta' : G \times \boldsymbol{x}\mathcal{V}' \to \mathfrak{g},\ (g, \boldsymbol{x}b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$$

est elle aussi partout submersive. Pour un r-uplet $(k) \in \mathbb{Z}^r$, on définit le voisinage ouvert compact $\mathcal{V}^{(k)}$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ comme plus haut. On obtient de la même manière : – *soit un r-uplet $(k) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{V}^{(k)} \subset \mathcal{V}'$. Pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, il existe une fonction $\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathcal{W})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{W}$, on a l'égalité*

$$I^{\mathfrak{g}}(\beta + \boldsymbol{x}b, \mathfrak{f}) = I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}^{\mathfrak{b}}). \qquad \blacksquare$$

5. Germes de Shalika et résultats sur l'algèbre de Lie

5.1. Théorie des germes de Shalika

On reprend dans ce numéro les principaux éléments de la théorie des germes de Shalika au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. Elle est exactement la même qu'en caractéristique nulle. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. On sait que $\mathcal{N}$ est réunion d'un nombre fini de classes de G-conjugaison, paramétrisées par les partitions de N. Soit $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{N}$ l'ensemble de ces classes de G-conjugaison, ordonnées de telle manière que $\dim(\mathcal{O}_i) \leqslant \dim(\mathcal{O}_{i+1})$, où $\dim(X)$ désigne la dimension d'une variété $\mathfrak{p}$-adique X. On a donc $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{O}_{d_{\mathcal{N}}}$ est l'orbite nilpotente régulière, c'est-à-dire celle de dimension $N^2 - N$. Pour $k = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, la partie $\mathcal{N}_i = \coprod_{i=0}^{k} \mathcal{O}_i$ est fermée dans G et l'orbite $\mathcal{O}_i$ est ouverte dans $\mathcal{N}_i$.

Pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, choisissons un élément $x_i \in \mathcal{O}_i$. On sait que le centralisateur G_{x_i} de x_i dans G est unimodulaire. On peut donc fixer une mesure de Haar dg_{x_i} sur G_{x_i}. Pour une fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$, on pose

$$\mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f}) = \int_{G_{x_i} \backslash G} \mathfrak{f}(g^{-1} x_i g) \frac{dg}{dg_{x_i}}.$$

D'après [6], cette intégrale est absolument convergente. Elle définit donc une distribution $\mathcal{O}_{x_i}$ sur $\mathfrak{g}$, de support la fermeture $\overline{\mathcal{O}}_i$ de l'orbite $\mathcal{O}_i$ dans $\mathfrak{g}$ (pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique). À l'élément nilpotent x_i est associé comme suit un sous-groupe parabolique P_{x_i} de G. Pour chaque entier $k \geqslant 0$, on note $V_{x_i}^k$ le noyau de l'endomorphisme x_i^k de V. Alors

$$P_{x_i} = \{g \in G : g(V_{x_i}^k) \subset V_{x_i}^k,\ k \geqslant 1\}.$$

Le radical unipotent U_{x_i} de P_{x_i} est donné par

$$U_{x_i} = \{g \in G : g(V_{x_i}^k) \subset V_{x_i}^{k-1}, k \geqslant 1\}.$$

Soit r_i le rang de x_i, c'est-à-dire le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $x_i^{k-1} \neq 0$. L'élément x_i appartient à U_{x_i} et, pour $i = 2, \ldots, r_i$, il induit par passage aux quotients une application injective $V_{x_i}^k / V_{x_i}^{k-1} \to V_{x_i}^{k-1} / V_{x_i}^{k-2}$, ce qui signifie (d'après le lemme 2 de [6]) que l'orbite $\mathcal{O}_{P_{x_i}}(x_i) = \{p^{-1} x_i p : p \in P_{x_i}\}$ est dense dans U_{x_i} pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique. C'est d'ailleurs ce résultat qui permet de montrer la convergence absolue de l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f})$.

Pour $z \in F^{\times}$ et $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$, on note $\mathfrak{f}^z \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$ la fonction définie par $\mathfrak{f}^z(y) = \mathfrak{f}(zy)$. Pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, l'orbite $\mathcal{O}_i$ vérifie $z\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i$ et la distribution $\mathcal{O}_{x_i}$ vérifie (cf. [10, 3.6.1])

$$\mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f}^z) = |z|^{\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}_i)} \mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f}), \quad \mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g}). \tag{1}$$

Soit $\{\mathfrak{f}_i : i = 0 \ldots, d_{\mathcal{N}}\} \subset C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$ un ensemble de fonctions vérifiant les deux conditions suivantes (cf. [10, 3.5.1]) :

(i) pour $i = 0, \ldots, m$, le support de la restriction de $\mathfrak{f}_i$ à $\mathcal{N}_i$ est contenu dans $\mathcal{O}_i$;

(ii) pour $1 \leqslant i,\ j \leqslant d_{\mathcal{N}}$, on a $\mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f}_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Pour toute fonction $\phi : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, on note $[\phi]_0^{\mathfrak{g}}$ le germe de fonctions au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ définie par ϕ. Deux fonctions ϕ, $\phi' : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$ définissent le même germe $[\phi]_0^{\mathfrak{g}} = [\phi']_0^{\mathfrak{g}}$ si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $(\phi - \phi')|_{\mathcal{V}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}} = 0$. D'après [6] (cf. [10, 3.5.2]), pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$, la fonction $\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})$ sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ admet le développement en germes

$$[\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})]_0^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=0}^{d_{\mathcal{N}}} \mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f})[\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_i)]_0^{\mathfrak{g}}. \tag{2}$$

En d'autres termes, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\mathfrak{f}}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{V}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, on a l'égalité

$$\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}) = \sum_{i=0}^{d_{\mathcal{N}}} \mathcal{O}_{x_i}(\mathfrak{f})\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_i).$$

De plus, les germes de fonctions $[\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_i)]_0^{\mathfrak{g}}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ sont uniquement déterminés par le développement (2) pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$. En particulier, si $\{\mathfrak{f}'_i : i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}\} \subset C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$ est un autre ensemble de fonctions vérifiant les conditions (i) et (ii), alors pour $i = 0, \ldots, m$, on a l'égalité des germes $[\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}'_i)]_0^{\mathfrak{g}} = [\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_i)]_0^{\mathfrak{g}}$. On note $\boldsymbol{a}_i$ ce germe $[\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_i)]_0$. On l'appelle *germe de Shalika* associé à l'orbite $\mathcal{O}_i$.

Pour $z \in F^\times$ et $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, on a $z\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. On peut donc, pour tout germe de fonctions $\boldsymbol{a}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, définir le germe $\boldsymbol{a}^z$: si $\boldsymbol{a} = [\varphi]_0^{\mathfrak{g}}$ pour une fonction $\varphi : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, on pose $\boldsymbol{a}^z = [\varphi^z]_0^{\mathfrak{g}}$ avec $\varphi^z(\gamma) = \varphi(z\gamma)$, $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. Pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, d'après (2) et la propriété d'unicité des germes de Shalika, le germe $\boldsymbol{a}_i$ vérifie la formule d'homogénéité

$$\boldsymbol{a}_i^z = |z|^{-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}_i)}\boldsymbol{a}_i, \quad z \in F^\times. \tag{3}$$

Grâce à cette propriété d'homogénéité, on peut remplacer les germes de Shalika par des fonctions canoniques sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, induisant les mêmes germes au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. En effet (cf. [8, 17.8]), pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, il existe une unique fonction $\tilde{\boldsymbol{a}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$ telle que $[\tilde{\boldsymbol{a}}_i]_0^{\mathfrak{g}} = \boldsymbol{a}_i$ et $\tilde{\boldsymbol{a}}_i(z\gamma) = |z|^{-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}_i)}\tilde{\boldsymbol{a}}_i(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et tout $z \in F^\times$. De plus (*loc. cit.*), la fonction $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (car on peut choisir les fonctions $\mathfrak{f}_i$, pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$), elle est invariante par translation par les éléments du centre $\mathfrak{z} = F$ de $\mathfrak{g}$ et invariante par conjugaison par les éléments de G. Bien sûr, ces fonctions $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ dépendent de la normalisation des distributions $\mathcal{O}_\gamma$ pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, et aussi de celle des distributions $\mathcal{O}_{x_i}$ pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$.

Les germes de Shalika $\boldsymbol{a}_i$ ou, ce qui revient au même, les fonctions $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$, sont en général très difficiles à calculer (voir par exemple [14, 15]). On dispose cependant d'un résultat crucial, concernant le germe $\boldsymbol{a}_0$ associé à l'orbite nulle : il induit un germe de fonctions constant au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$. Précisément, en imposant la condition $\mathcal{O}_{x_0} = \boldsymbol{\delta}_{x_0}$ (mesure de Dirac en $x_0 = 0$), on a [5, A.3.3]

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_0(\gamma) = (-1)^{N-1} d(\mathrm{St}_G)^{-1}, \quad \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{re}}, \tag{4}$$

où $d(\mathrm{St}_G)$ est le degré formel de la représentation de Steinberg St_G de G. Pour définir ce degré formel, on utilise bien sûr ici la mesure $\frac{dg}{dz}$ sur l'espace quotient $Z\backslash G$, où dz est la mesure de Haar sur $Z = F^\times$ qui donne le volume 1 à U_F. D'ailleurs, puisque

$$\boldsymbol{a}_0 = [y \mapsto \mathcal{O}_y(\mathfrak{f}_0)]_0^{\mathfrak{g}}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

et que l'application $\gamma \mapsto \mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f}_0)$ est localement constante sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, l'égalité (4) est vraie pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$. Grâce à (4) et à la formule d'homogénéité (3), on obtient (cf. [10, 5.6.1]) que les fonctions $\tilde{\boldsymbol{a}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}$ pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, et même leurs restrictions à l'ouvert $\mathfrak{g}_{\mathrm{r}} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ des éléments (quasi réguliers) séparables, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$: si

$$\sum_{i=0}^{d_{\mathcal{N}}} \mu_i \tilde{\boldsymbol{a}}_i|_{\mathfrak{g}_{\mathrm{r}}} = 0$$

pour des nombres complexes μ_i, alors on a forcément $\mu_0 = \cdots = \mu_{\mathcal{N}} = 0$.

5.2. Germes de Shalika normalisés

On peut dans le développement en germes 5.1.(2) remplacer les distributions $\mathcal{O}_\gamma$ ($\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$) par les distributions normalisées $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \cdot)$. On obtient de la même manière, pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$, le développement en germes

$$[I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})]_0^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=0}^{d_{\mathcal{N}}} \mathcal{O}_{x_i}(f)[I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}_i)]_0^{\mathfrak{g}}. \tag{1}$$

Pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, le germe $[\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}_i)]_0^{\mathfrak{g}}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ est appelé *germe de Shalika normalisé* associé à l'orbite nilpotente $\mathcal{O}_i$ et noté $\boldsymbol{b}_i$. Comme pour les germes $\boldsymbol{a}_i$, les germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_i$ sont uniquement déterminés par le développement (1) pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$. De plus, par définition des distributions normalisées $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \cdot)$ ($\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$), on a

$$\boldsymbol{b}_i = \eta_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{a}_i, \quad i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}. \tag{2}$$

Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$ et $z \in F^\times$, on a

$$\eta_{\mathfrak{g}}(z\gamma) = q^{-f_\gamma(c_F(z\gamma)+e_\gamma-1)} = q^{-f_\gamma(e_\gamma(N-1)\nu(z)+c_F(\gamma)+e_\gamma-1)} = |z|^{N(N-1)}\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma).$$

On en déduit que pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et $z \in F^\times$, on a encore

$$\eta_{\mathfrak{g}}(z\gamma) = |z|^{N(N-1)}\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma). \tag{3}$$

En effet, d'après la définition de $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)$, posant $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$, on a $\eta_{\mathfrak{g}}(z\gamma) = |D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(z\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}}(z\gamma)$ et $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$. Écrivons $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \mathfrak{g}_r$ avec $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$. Les éléments γ et $z\gamma$ appartiennent à $\mathfrak{m}_{\mathrm{qre}} = (\mathfrak{g}_i)_{\mathrm{qre}} \times \cdots \times (\mathfrak{g}_r)_{\mathrm{qre}}$, et l'on a

$$\eta_{\mathfrak{m}}(z\gamma) = |z|^{\sum_{i=1}^r N_i(N_i-1)}\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma), \quad N_i = \dim_F(V_i).$$

D'autre part, on a

$$|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(z\gamma)| = |z|^{\dim_F(\mathfrak{g})-\dim_F(\mathfrak{m})}|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|.$$

Or $\dim_F(\mathfrak{m}) = \sum_{i=1}^r N_i^2$ et $\sum_{i=1}^r N_i = N$, d'où l'égalité (3). Pour $i = 0, \ldots, d_{\mathcal{N}}$, d'après 5.1.(3), le germe $\boldsymbol{b}_i$ vérifie donc la formule d'homogénéité

$$\boldsymbol{b}_i^z = |z|^{\frac{1}{2}N(N-1)-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}_i)}\boldsymbol{b}_i = |z|^{\frac{1}{2}(\dim(G_{x_i})-N)}\boldsymbol{b}_i. \tag{4}$$

Notons que l'exposant $\frac{1}{2}(\dim(G_{x_i}) - N)$ est toujours $\geqslant 0$. Comme pour les germes $\boldsymbol{a}_i$, on peut grâce à la formule d'homogénéité (4) remplacer les germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_i$

par de vraies fonctions : pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$, il existe une unique fonction $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$ telle que $[\tilde{\boldsymbol{b}}_i]_0^{\mathfrak{g}} = \boldsymbol{b}_i$ et $\tilde{\boldsymbol{b}}_i(z\gamma) = |z|^{\frac{1}{2}(\dim(G_{x_i})-N}\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et tout $z \in F^\times$. Comme pour $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$, la fonction $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est invariante par translation par les éléments du centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ et invariante par conjugaison par les éléments de G.

Soit un élément $z \in \mathfrak{z} \smallsetminus \{0\}$ $(= F^\times)$. On peut, comme on l'a fait pour $z = 0$, s'intéresser aux intégrales orbitales normalisées au voisinage de z dans $\mathfrak{g}$. Les classes de G-conjugaison dans $\mathfrak{g}$ qui contiennent z dans leur fermeture sont exactement les $\mathcal{O}_G(z + x_i) = z + \mathcal{O}_i$ pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$. Pour $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$, le germe de fonctions $[\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})]_z^{\mathfrak{g}}$ au voisinage de z dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ est donné par le développement en germes

$$[I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})]_z^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=0}^{d_{\mathcal{N}}} \mathcal{O}_{z+x_i}(\mathfrak{f})\boldsymbol{b}_i(\gamma), \quad \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}, \tag{5}$$

où la distribution $\mathcal{O}_{z+x_i}$ sur $\mathfrak{g}$ est définie à l'aide de la mesure $dg_{z+x_i} = dg_{x_i}$ sur $G_{z+x_i} = G_{x_i}$. Il suffit, pour obtenir (5), d'appliquer (1) à la fonction $\mathfrak{f}' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$ définie par $\mathfrak{f}'(\gamma) = \mathfrak{f}(z + \gamma)$ et d'utiliser la propriété d'invariance des fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ par translation par les éléments de $\mathfrak{z}$.

Soit $\beta \in \mathfrak{g}$ un élément fermé. Reprenons les notations de 4.4. Notons $\mathfrak{b}$ le centralisateur $\mathfrak{g}_\beta = \mathrm{End}_{F[\beta]}(V)$ de β dans $\mathfrak{g}$. Écrivons $F[\beta] = E_1 \times \cdots \times E_r$ pour des extensions E_i/F. Pour $i = 1, \dots, r$, notons e_i l'idempotent de $F[\gamma]$ associé à E_i, et posons $V_i = e_i(V)$, $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$ et $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{E_i}(V_i)$. On a la décomposition $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_r$ et l'élément $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ est $(F\text{-})$*pur* dans $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r$. Notons H le centralisateur $G_\beta = \mathfrak{b}^\times$ de β dans G, A_β le tore déployé maximal du centre $Z(H) = F[\beta]^\times$ de H et $M = M(\beta)$ le centralisateur $Z_G(A_\beta)$ de A_β dans G. On a $H = H_1 \times \cdots \times H_r$ avec $H_i = \mathrm{Aut}_{E_i}(V_i)$ et $M = G_1 \times \cdots \times G_r$ avec $G_i = \mathrm{Aut}_F(V_i)$. Quitte à remplacer β par $g^{-1}\beta g$ pour un $g \in G$, on peut supposer que $A_\beta = A_P$ pour un $P \in \mathcal{P}$ – en ce cas, on a $M = M_P$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$ –, mais ce n'est pas indispensable ici. Soit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_r) \in \mathfrak{m}$ un élément comme en 4.4. D'après la remarque 2 de 4.4, pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{g})$, il existe une fonction $\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{b})$ telle que l'on a l'égalité des germes

$$[I^{\mathfrak{g}}(\beta + \boldsymbol{x}b, \mathfrak{f})]_\beta^{\mathfrak{g}} = [I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}^{\mathfrak{b}})]_0^{\mathfrak{b}}, \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}. \tag{6}$$

À droite de l'égalité (6), $[I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}^{\mathfrak{b}})]_0^{\mathfrak{b}}$ est le germe de la fonction $b \mapsto I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}^{\mathfrak{b}})$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$, et à gauche, $[I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})]_\beta^{\mathfrak{g}}$ est le germe de la fonction $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ au voisinage de β dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. L'égalité (6) a un sens car pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$ suffisamment proche de 0, l'élément $\beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. On peut bien sûr, comme on l'a fait pour $\mathfrak{g}$, écrire le développement en germes (1) de $[I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}_*)]_0$ pour toute fonction $\mathfrak{f}_* \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathfrak{b})$:

$$[I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}_*)]_0^{\mathfrak{b}} = \sum_{j=0}^{d_{\mathfrak{N}(\mathfrak{b})}} \mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}_*)[I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}_{*,j})]_0^{\mathfrak{b}}, \tag{7}$$

où

- $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$ est l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}$;
- $y_1, \dots, y_{d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}}$ est un système de représentants des H-orbites dans $\mathcal{N}(\mathfrak{b})$, ordonnées de telle manière que $\dim(\mathcal{O}_H(y_j)) \leqslant \dim(\mathcal{O}_H(y_{j+1}))$;

- $\mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}}$ est l'intégrale orbitale nilpotente sur $\mathfrak{b}$ associée à l'orbite $\mathcal{O}_H(y_j)$, définie par le choix d'une mesure de Haar sur H_{y_j} ;
- $\{\mathfrak{f}_{*,j} : j = 0\dots, d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}\} \subset C_c^\infty(\mathfrak{b})$ est un ensemble de fonctions vérifiant les conditions (i) et (ii) de 5.1 pour ces orbites $\mathcal{O}_H(y_j)$.

Pour $j = 0, \dots, d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}$, on note $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$ le germe de Shalika normalisé $[b \mapsto I^{\mathfrak{b}}(b, \mathfrak{f}_{*,j})]_0^{\mathfrak{b}}$. D'après (6) et (7), pour toute fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, il existe une fonction $\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathfrak{b})$ telle que le germe de fonctions $[\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})]_\beta^{\mathfrak{g}}$ au voisinage de β dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ est donné par

$$[I^{\mathfrak{g}}(\beta + \boldsymbol{x}b, \mathfrak{f})]_\beta^{\mathfrak{g}} = \sum_{j=0}^{d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}} \mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}}) \boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}(b), \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}. \tag{8}$$

Pour $j = 0, \dots, d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}$, la H-orbite $\mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}}$ se décompose en $\mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}} = \mathcal{O}_{y_{j,1}}^{\mathfrak{b}_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{y_{j,r}}^{\mathfrak{b}_r}$, où l'on a posé $y_j = (y_{j,1}, \dots, y_{j,r})$, et le germe de Shalika normalisé $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$ (au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}$) associé à l'orbite nilpotente $\mathcal{O}_{y_j}^{\mathfrak{b}}$ dans $\mathfrak{b}$ se décompose en $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}} = \boldsymbol{b}_{j,1}^{\mathfrak{b}_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{j,r}^{\mathfrak{b}_r}$, où, pour $k = 1, \dots, r$, $\boldsymbol{b}_{j,k}^{\mathfrak{b}_k}$ est le germe de Shalika normalisé (au voisinage de 0 dans $(\mathfrak{b}_k)_{\mathrm{qr}}$) associé à l'orbite nilpotente $\mathcal{O}_{y_{j,k}}^{\mathfrak{b}_k}$ dans $\mathfrak{b}_k$. Ce germe $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$ vérifie donc la formule d'homogénéité : pour $z = (z_1, \dots, z_r) \in E_1^\times \times \dots \times E_r^\times$, notant c_k la dimension de la variété $\mathfrak{p}_{E_k}$-adique $(H_k)_{y_{j,k}}$ et posant $d_k = \dim_{E_k}(V_k)$, on a

$$(\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}})^z = |z_1|_{E_1}^{\frac{1}{2}(c_1 - d_1)} \cdots |z_1|_{E_r}^{\frac{1}{2}(c_r - d_r)} \boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}. \tag{9}$$

La formule (9) permet comme plus haut d'associer au germe $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$ une fonction $\tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$. Cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}$, elle est invariante par translation par les éléments du centre $F[\beta] = E_1 \times \dots \times E_r$ de $\mathfrak{b}$ et invariante par conjugaison par les éléments de H. D'après (9), pour $z \in F^\times$ identifié à $(z, \dots, z) \in E_1^\times \cdots \times E_r^\times$, on a

$$(\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}})^z = |z|^{\frac{1}{2}(\dim(H_{y_j}) - N)} \boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}. \tag{10}$$

Ici $\dim(H_{y_j}) = \sum_{k=1}^r [E_k : F] c_k$ est la dimension de $H_{y_j} = (H_1)_{y_1} \times \dots \times (H_r)_{y_r}$ en tant que *variété* $\mathfrak{p}$*-adique* et $N = \sum_{k=1}^r [E_k : F] d_k$. On a bien sûr toujours $\frac{1}{2}(\dim(H_{y_j}) - N) \geqslant 0$. D'ailleurs, pour définir la fonction $\tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}}$ à partir du germe $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$, on peut tout aussi bien utiliser la formule d'homogénéité (10) (au lieu de (9)).

Au voisinage de β dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}})$ associées aux germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_i$ pour $\mathfrak{g}$ admettent un développement en termes des fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}$ $(j = 0, \dots, d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})})$ associées aux germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_j^{\mathfrak{b}}$ pour $\mathfrak{b}$.

Lemme. *Il existe un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_\beta$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ tel que :*

- *pour $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}_\beta$, l'élément $\beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$;*
- *pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$, il existe des constantes $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ $(j = 0, \dots, d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})})$ telles que*

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\beta + \boldsymbol{x}b) = \sum_{j=0}^{d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}} \lambda_{i,j} \tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}}(b), \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}_\beta.$$

Démonstration. C'est la même qu'en caractéristique nulle (cf. [8, lemma 17.7]), compte tenu du développement (8) et des formules d'homogénéité (4) et (10). □

5.3. Les germes de Shalika normalisés sont localement bornés

On commence par un résultat sur les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}$ associées aux germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_i$ pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$.

Proposition. *Les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}})$ sont localement bornées sur $\mathfrak{g}$, au sens où pour tout élément fermé $\beta \in \mathfrak{g}$, il existe un voisinage ω_β de β dans $\mathfrak{g}$ – que l'on peut supposer vérifiant ${}^G(\mathfrak{z} + \omega_\beta) = \omega_\beta$ – tel que*

$$\sup\{\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\gamma) : \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \cap \omega_\beta,\ i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}\} < +\infty.$$

Démonstration. Puisque les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ sont invariantes par translations par les éléments du centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, on peut les considérer comme des fonctions sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}$. Il s'agit donc de montrer que les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}})$ sont localement bornées sur $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Pour tout élément $\gamma \in \mathfrak{g}$, on note $\bar{\gamma}$ l'élément $\gamma + \mathfrak{z}$ de $\overline{\mathfrak{g}}$.

Soit un élément fermé $\beta \in \mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_\beta$ et l'on note $\mathfrak{z}_* = F[\beta]$ le centre de $\mathfrak{b}$. On pose aussi $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}/\mathfrak{z}_*$. Rappelons que $\mathfrak{z}_* = E_1 \times \cdots \times E_r$ pour des extensions finies E_i/F et que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_r$ avec $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{E_i}(V_i)$, $V = V_1 \times \cdots \times V_r$. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{b}$ sur F. Si $\overline{\beta} \neq 0$ (*i.e.* si $\beta \notin \mathfrak{z}$), alors $\dim_F(\mathfrak{b}) < \dim_F(\mathfrak{g})$ et, d'après le lemme de 5.2, il existe un élément $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}$ et un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_\beta$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ tels que ${}^G(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}_\beta)$ est ouvert dans $\mathfrak{g}$ et pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$, on a

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\beta + \boldsymbol{x}b) = \sum_{j=0}^{d_{\mathcal{N}(\mathfrak{b})}} \lambda_{i,j} \tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}}(b), \quad b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}_\beta.$$

Par hypothèse de récurrence, les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_j^{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}_* \to \mathbb{R}$ sont bornées sur $\mathfrak{z}_* + \mathcal{V}_\beta$. Par conséquent, les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z} \to \mathbb{R}$ sont bornées sur $\omega_\beta = \mathfrak{z} + {}^G(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{V}_\beta)$. En d'autres termes, les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z} \to \mathbb{R}$ sont localement bornées sur $\overline{\mathfrak{g}} \smallsetminus \{0\}$ et l'on est ramené à prouver qu'elles sont bornées au voisinage de $0 \in \overline{\mathfrak{g}}$. Soit Λ un $\mathfrak{o}$-réseau dans $\mathfrak{g}$. Alors $\bar{\Lambda} = \Lambda + \mathfrak{z}$ est un $\mathfrak{o}$-réseau dans $\overline{\mathfrak{g}}$ et, puisque $\bar{\Lambda} \smallsetminus \mathfrak{p}\bar{\Lambda}$ est une partie compacte de $\overline{\mathfrak{g}} \smallsetminus \{0\}$, pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$, il existe une constante $c_i > 0$ telle que

$$\sup\{|\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\bar{\gamma})| : \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}},\ \bar{\gamma} \in \bar{\Lambda} \smallsetminus \mathfrak{p}\bar{\Lambda}\} \leqslant c_i.$$

Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ tel que $\bar{\gamma} \in \mathfrak{p}\Lambda$, il existe un (unique) entier $k \geqslant 1$ tel que $\varpi^{-k}\bar{\gamma} \in \Lambda \smallsetminus \mathfrak{p}\bar{\Lambda}$ pour une uniformisante ϖ de F. Alors pour $i = 0, \dots, d_{\mathcal{N}}$, d'après la formule d'homogénité 5.2.(4), on a

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\bar{\gamma}) = \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{\varpi^k}(\varpi^{-k}\gamma) = q^{-\frac{k}{2}(\dim(G_{x_i})-N)} \tilde{\boldsymbol{b}}_i(\varpi^{-k}\bar{\gamma}),$$

d'où

$$\sup\{|\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\bar{\gamma})| : \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}},\ \bar{\gamma} \in \bar{\Lambda}\} \leqslant c_i.$$

Cela achève la démonstration de la proposition. □

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 1. *Pour toute fonction* $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$*, la fonction* $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ *est bornée sur* $\mathfrak{g}$ *: il existe une constante* $c_{\mathfrak{f}} > 0$ *telle que*

$$\sup\{|I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})| : \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}\} \leqslant c_{\mathfrak{f}}.$$

Démonstration. D'après la proposition, la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ est localement bornée sur $\mathfrak{g}$, et puisque d'après le lemme 1 de 3.2, il existe une partie compacte Ω dans $\mathfrak{g}$ telle que $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ tel que $\gamma \notin {}^G\Omega$ – il suffit de choisir Ω de telle manière que $\overline{{}^G\mathrm{Supp}(f)} \subset {}^G\Omega$ –, elle est bornée sur $\mathfrak{g}$. □

Remarque. Les fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ associées aux germes de Shalika normalisés $\boldsymbol{b}_i$ sont des fonctions (à valeurs réelles) sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}$. On peut aussi s'intéresser aux intégrales orbitales quasi régulières des fonctions $\bar{\mathfrak{f}} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}})$, où (comme dans la preuve de la proposition) on a posé $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Pour $\bar{\mathfrak{f}} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}})$, le support de $\bar{\mathfrak{f}}$ est une partie ouverte compacte de $\bar{\mathfrak{g}}$, que l'on peut voir comme une partie ouverte fermée de $\mathfrak{g}$ invariante par translation par $\mathfrak{z}$; on la note $\mathfrak{S}(\bar{\mathfrak{f}}) \subset \mathfrak{g}$. Pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ et $\bar{\mathfrak{f}} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}})$, l'ensemble $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap \mathfrak{S}(\bar{\mathfrak{f}})$ est compact – car l'ensemble $\{\gamma' \in \mathfrak{S}(\bar{\mathfrak{f}}) : \det(\gamma') = \det(\gamma)\}$ l'est –, et l'on peut définir comme en 4.2 l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_\gamma(\bar{\mathfrak{f}})$ et l'intégrale orbitale normalisée $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}) = \eta_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}}(\gamma)\mathcal{O}_\gamma(\bar{\mathfrak{f}})$. On a clairement

$$I^{\mathfrak{g}}(z + \gamma, \bar{\mathfrak{f}}) = I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}), \quad z \in \mathfrak{z}.$$

Pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$, on pose $\bar{\mathfrak{f}}(g) = \int_{\mathfrak{z}} \mathfrak{f}(z + g)\mathfrak{d}z$ $(g \in G)$, où $\mathfrak{d}z$ est une mesure de Haar sur $\mathfrak{z} = F$. On obtient une application linéaire surjective

$$C_c^\infty(\mathfrak{g}) \to C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}}),\ \mathfrak{f} \mapsto \bar{\mathfrak{f}},$$

et pour $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on a

$$I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}) = \int_{\mathfrak{z}} I^{\mathfrak{g}}(z + \gamma, \mathfrak{f})\mathfrak{d}z, \quad \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}. \tag{1}$$

L'intégrale (1) est absolument convergente, car l'ensemble $\{z \in \mathfrak{z} : \mathcal{O}_G(z + \gamma) \cap \mathrm{Supp}(f)\}$ est compact. On obtient la variante suivante du corollaire 1 :

(2) pour toute fonction $\bar{\mathfrak{f}} \in C_c^\infty(\bar{\mathfrak{g}})$, la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f})$ est bornée sur $\bar{\mathfrak{g}}$.

En effet, choisissons une fonction $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ se projetant sur $\bar{\mathfrak{f}}$ et un ouvert compact Ω dans $\mathfrak{g}$ tel que $\overline{{}^G\mathrm{Supp}(f)} \subset {}^G\Omega$. Puisque $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \mathfrak{f}) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ tel que $\gamma \notin {}^G\Omega$, on a $I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}) = 0$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$ tel que $\gamma \notin \mathfrak{z} + {}^G\Omega$, et il suffit de voir que la fonction $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}})$ est bornée sur Ω (*i.e.* sur $\mathfrak{z} + \Omega$). L'ensemble $\omega = \{z \in \mathfrak{z} : (z + {}^G\Omega) \cap \mathrm{Supp}(f)\}$ est ouvert compact et, d'après (1), pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \cap \Omega$, on a

$$|I^{\mathfrak{g}}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}})| \leqslant \int_{\mathfrak{z}} |I^{\mathfrak{g}}(z + \gamma, \mathfrak{f})|\mathfrak{d}z \leqslant \mathrm{vol}(\omega, \mathfrak{d}z) \sup\{|I^{\mathfrak{g}}(\gamma', \mathfrak{f})| : \gamma' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \cap \Omega\}.$$

D'où le point (2). ■

Corollaire 2. *La fonction* $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}} : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ *est localement intégrable (par rapport à une mesure de Haar* $\mathfrak{d}g$*) sur* $\mathfrak{g}$ *: pour toute fonction* $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$*, l'intégrale*

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

$$\int_{\mathfrak{g}}\eta_{\mathfrak{g}}(g)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{f}(g)\mathfrak{d}g$$

est absolument convergente.

Démonstration. Si T est un tore maximal de G – c'est-à-dire le groupe des points F-rationnels d'un tore maximal de $GL(N)$ défini sur F –, on note $W^G(T)$ le groupe de Weyl $N_G(T)/T$, $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T et $\alpha=\alpha_T:(T\backslash G)\times\mathfrak{t}\to\mathfrak{g}$ l'application $(g,\gamma)\mapsto g^{-1}\gamma g$. Pour $\gamma\in\mathfrak{t}$, la différentielle $\delta\alpha_{(1,\gamma)}:(\mathfrak{g}/\mathfrak{t})\times\mathfrak{t}\to\mathfrak{g}$ de α au point $(1,\gamma)$ est l'application

$$(x,y)\mapsto \mathrm{ad}_\gamma(x)+y.$$

Pour $(g,\gamma)\in(T\backslash G)\times\mathfrak{t}$, puisque $\alpha(g,\gamma)=g^{-1}\alpha(1,\gamma)g$, on en déduit que le jacobien de α au point (g,γ) est égal à $\det_F(\mathrm{ad}_\gamma;\mathfrak{g}/\mathfrak{t})=D_{\mathfrak{g}}(-\gamma)$ $(=D_{\mathfrak{g}}(\gamma))$. Rappelons que pour $\gamma\in\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, la distribution $\mathcal{O}_\gamma$ sur $\mathfrak{g}$ est définie *via* la mesure G-invariante $\frac{dg}{dt}$ sur $T\backslash G$, où dg est la mesure de Haar sur G qui donne le volume 1 à $K=GL(N,\mathfrak{o})$ et dt est la mesure de Haar sur T normalisée par $\mathrm{vol}(A_T\backslash T,\frac{dt}{da_T})=1$. Ici A_T est le tore déployé maximal de T et da_T est la mesure de Haar sur A_T qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de A_T. On note $\mathfrak{d}t$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{t}$ associée à dt. On suppose aussi, ce qui est loisible, que la mesure de Haar $\mathfrak{d}g$ sur $\mathfrak{g}$ est celle associée à dg.

Soit une fonction $\mathfrak{f}\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$. Quitte à remplacer $\mathfrak{f}$ par $|\mathfrak{f}|$, on peut supposer $\mathfrak{f}\geqslant 0$. La formule d'intégration de Weyl donne

$$\int_{\mathfrak{g}}\eta_{\mathfrak{g}}(g)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{f}(g)\mathfrak{d}g=\sum_T|W^G(T)|^{-1}\int_{\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}}|D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})\mathfrak{d}\gamma, \tag{3}$$

où T parcourt un système de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux de G. On peut aussi regrouper les tores maximaux T suivant les classes de conjugaison des sous-tores déployés maximaux $A_T\subset T$. Rappelons que l'on a fixé un ensemble $\mathcal{P}=\mathcal{P}_G$ de sous-groupes paraboliques standards de G. Deux éléments P, $P'\in\mathcal{P}$ sont dits *associés* s'il existe un élément $g\in G$ tel que $gA_Pg^{-1}=A_{P'}$, ou, ce qui revient au même, tel que $gM_Pg^{-1}=M_{P'}$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{P}^*\subset\mathcal{P}$ des classes d'association. Pour $P\in\mathcal{P}^*$, fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}_P$ des classes de M_P-conjugaison de tores maximaux T de M_P tels que $A_T=A_P$. Tout tore maximal T de G est conjugué (dans G) à un unique élément de $\coprod_{P\in\mathcal{P}^*}\mathcal{T}_P$. D'autre part, si T, $T'\in\mathcal{T}_P$ pour un $P\in\mathcal{P}^*$ et si $T'=gTg^{-1}$ pour un $g\in G$, alors on a $gA_Tg^{-1}=A_{T'}$ et g définit un élément de $W^G(A_P)=N_G(A_P)/M_P$. Pour $P\in\mathcal{P}^*$, on a

$$|W^G(T)|=|W^G(A_P)||W^{M_P}(T)|.$$

D'après (3), on obtient

$$\int_{\mathfrak{g}}\eta_{\mathfrak{g}}(g)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{f}(g)\mathfrak{d}g=\sum_{P\in\mathcal{P}^*}|W^G(A_P)|^{-1}\sum_{T\in\mathcal{T}_P}|W^{M_P}(T)|^{-1}\int_{\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}}|D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})\mathfrak{d}\gamma. \tag{4}$$

Pour $P\in\mathcal{P}^*$, $T\in\mathcal{T}_P$ et $\gamma\in\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, puisque $|D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|=|D_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)||D_{\mathfrak{m}_P\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|$ et (par définition) $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)=\eta_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)|D_{\mathfrak{m}_P\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|$, d'après la formule de descente 4.2.(3), on a

$$|D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{O}_\gamma(\mathfrak{f})=|D_{\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-1}I^{\mathfrak{g}}(\gamma,\mathfrak{f})=|D_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)^{-1}I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_P}).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Le produit $|D_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}_P}(\gamma)^{-1}$ ne dépend pas de l'élément $\gamma \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$: d'après 3.11.(8), il vaut $q^{-\mu(T)}$ pour une constante $\mu(T) \geqslant 0$ calculée comme suit. Le tore T s'écrit $T = E_1^\times \times \cdots \times E_r^\times$ pour des extensions séparables E_i/F. Pour $i = 1, \ldots, r$, posons $e_i = e(E_i/F)$, $f_i = f(E_i/F)$, $N_i = [E_i : F]$ et $\delta_i = \delta(E_i/F)$. On a

$$\mu(T) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i - f_i(e_i - 1).$$

L'égalité (4) devient

$$\int_{\mathfrak{g}} \eta_{\mathfrak{g}}(g)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{f}(g) \mathfrak{d}g = \sum_{P \in \mathcal{P}^*} |W^G(A_P)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_P} |W^{M_P}(T)|^{-1} q^{-\mu(T)} \int_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}} I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_P}) \mathfrak{d}\gamma. \quad (5)$$

Pour $P \in \mathcal{P}^*$, choisissons une mesure de Haar $\mathfrak{d}a_P$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_P$ de A_P (qui est aussi le centre de $\mathfrak{m}_P$), posons $\overline{\mathfrak{m}}_P = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{a}_P$ et notons $\bar{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{m}_P} \in C_c^\infty(\overline{\mathfrak{m}}_P)$ la fonction définie par

$$\bar{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{m}_P}(m) = \int_{\mathfrak{a}_P} \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}_P}(a_P + m) \mathfrak{d}a_P, \quad m \in \mathfrak{m}_P.$$

Posons $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}/\mathfrak{a}_P$ et notons $\mathfrak{d}\bar{t}$ la mesure quotient $\frac{\mathfrak{d}t}{\mathfrak{d}a_P}$ sur $\bar{\mathfrak{t}}$. Puisque

$$\mathrm{vol}((\mathfrak{t} \cap (\mathfrak{m}_P)_{\mathrm{qr}}) \smallsetminus (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}), \mathfrak{d}t) = 0,$$

on a (d'après (1))

$$\int_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}} I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_P}) \mathfrak{d}\gamma = \int_{\bar{\mathfrak{t}} \cap ((\mathfrak{m}_P)_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{a}_P)} I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}_P}) \mathfrak{d}\bar{\gamma}.$$

Or par construction $\bar{\mathfrak{t}}$ est compact – si $T = E_1^\times \times \cdots \times E_r^\times$ comme plus haut, alors on a $\bar{\mathfrak{t}} = (E_1/F) \times \cdots \times (E_r/F)$ – et, d'après la remarque, la fonction $\gamma \mapsto I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \bar{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}_P})$ est bornée sur $\overline{\mathfrak{m}}_P = \mathfrak{m}_P/\mathfrak{a}_P$. On en déduit qu'il existe une constante $c_P(\mathfrak{f})$ telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_P$, on a

$$\int_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}} I^{\mathfrak{m}_P}(\gamma, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_P}) \mathfrak{d}\gamma \leqslant c_P(\mathfrak{f}). \quad (6)$$

Posons $c(\mathfrak{f}) = \max\{c_P(\mathfrak{f}) : P \in \mathcal{P}^*\}$. La majoration (6) injectée dans (5) donne

$$\int_{\mathfrak{g}} \eta_{\mathfrak{g}}(g)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{f}(g) \mathfrak{d}g \leqslant c(\mathfrak{f}) \sum_{P \in \mathcal{P}^*} |W^G(A_P)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_P} |W^{M_P}(T)|^{-1} q^{-\mu(T)}. \quad (7)$$

On est donc ramené à prouver que pour chaque $P \in \mathcal{P}^*$, la somme $\sum_{T \in \mathcal{T}_P} |W^{M_P}(T)|^{-1} q^{-\mu(T)}$ est finie. Il suffit de le faire pour $P = G$ (le cas des autres P s'en déduisant par produit et récurrence sur la dimension de G). Or pour $P = G$, l'expression $\sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W^G(T)|^{-1} q^{-\mu(T)}$ n'est autre que le terme à gauche de l'égalité 2.4.(3), c'est-à-dire la formule de masse de Serre étendue à toutes les extensions séparables de F de degré N. $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

5.4. Intégrabilité locale de la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$

On l'a dit dans l'introduction, pour établir une formule des traces locale, il est nécessaire d'obtenir un peu plus que l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}}$. C'est ce que nous faisons dans ce numéro.

Rappelons que la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ se factorise à travers $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}$. De plus, elle vérifie la propriété d'homogénéité

$$\eta_{\mathfrak{g}}(z\gamma)=|z|^{N(N-1)}\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma),\quad \gamma\in\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}},\ z\in F^{\times}. \tag{1}$$

En effet, pour $\gamma\in G_{\mathrm{qre}}$, elle résulte de l'égalité $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)=|\det(\gamma)|^{N-1}\eta_G(\gamma)$ (remarque 2 de 4.2) et du fait que l'application $\eta_G:G_{\mathrm{qr}}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ se factorise à travers G/Z. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}=G_{\mathrm{qre}}$ si $N>1$, cette propriété (1) est vraie pour tout $\gamma\in\mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$. Pour $\gamma\in\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, posant $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}(\gamma)$ comme en 4.2, on a $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)=|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$. Pour $z\in F^{\times}$, on a $|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(z\gamma)|=|z|^{N^2-\dim_F(\mathfrak{m})}|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|$, et puisque $\gamma\in\mathfrak{m}_{\mathrm{qre}}$, d'après la propriété (1) pour $\mathfrak{m}$, on a $\eta_{\mathfrak{m}}(z\gamma)=|z|^{\dim_F(\mathfrak{m})-N}\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$. Cela prouve (1) pour tout $\gamma\in\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$.

Proposition. *Pour tout $\epsilon>0$ tel que $(N^2-N)\epsilon<1$, la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Soit ϵ comme dans l'énoncé. Puisque la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}:\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ se factorise à travers $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}$, il suffit de montrer qu'elle est localement intégrable sur $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Grâce à (1), on peut procéder comme pour l'étude des fonctions $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ (cf. 5.3). Il s'agit de montrer que pour chaque élément fermé $\beta\in\mathfrak{g}$, la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}:\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ est localement intégrable au voisinage de $\bar{\beta}=\beta+\mathfrak{z}$ dans $\bar{\mathfrak{g}}$. On raisonne par récurrence sur N. Pour $N=1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $N>1$.

Soit $\beta\in\mathfrak{g}$ un élément fermé. On pose $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}_\beta$, $\mathfrak{z}_*=F[\beta]$ et $\overline{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}/\mathfrak{z}_*$. Rappelons que $\mathfrak{z}_*=E_1\times\cdots\times E_r$ pour des extensions finies E_i/F et que $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\times\cdots\times\mathfrak{b}_r$ avec $\mathfrak{b}_i=\mathrm{End}_{E_i}(V_i)$, $V=V_1\times\cdots\times V_r$. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{b}$ sur F. Supposons $\overline{\beta}\neq0$ (*i.e.* $\beta\notin\mathfrak{z}$). Notons A_β le tore déployé maximal $F^\times\times\cdots\times F^\times$ de $E_1^\times\times\cdots\times E_r^\times$, $M=M(\beta)$ le centralisateur de A_β dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}(\beta)$ l'algèbre de Lie de M. On a l'inclusion $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{m}$ et β est pur dans $\mathfrak{m}$. L'ensemble $\omega=\{\gamma\in\mathfrak{m}:D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)\neq0\}$ est ouvert dans $\mathfrak{m}$ et l'application

$$G\times\omega\rightarrow\mathfrak{g},\ (g,\gamma)\mapsto g^{-1}\gamma g,$$

est partout submersive. L'ensemble $\omega'=\{\gamma\in\mathfrak{m}:|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|=|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\beta)|\}$ est contenu dans ω et c'est un voisinage ouvert (M-invariant par conjugaison et $\mathfrak{z}$-invariant par translation) de β dans $\mathfrak{m}$. Puisque pour $(g,\gamma)\in G\times(\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}\cap\omega')$, on a

$$\eta_{\mathfrak{g}}(g^{-1}\gamma g)=|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\beta)|\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma),$$

l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}:\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans $\mathfrak{g}$ est impliquée par l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_{\mathfrak{m}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}:\mathfrak{m}_{\mathrm{qr}}\rightarrow\mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans $\mathfrak{m}$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée : en écrivant $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_1\times\cdots\times\mathfrak{g}_r$ avec $\mathfrak{g}_i=\mathrm{End}_F(V_i)$ et en posant $N_i=\dim_F(V_i)$, on a $N_i(N_i-1)\epsilon<1$ pour tout i. On s'est donc ramené au cas où $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}$, c'est-à-dire au cas où β est pur dans $\mathfrak{g}$.

On suppose de plus que β est pur dans $\mathfrak{g}$ (avec toujours $\beta \notin \mathfrak{z}$). Alors $\beta \in G$. Reprenons les notations de 4.3, en particulier l'application partout submersive 4.3.(2)

$$\delta : G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1} \to G,\ (g, \boldsymbol{x}b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g.$$

Notons $\mathcal{V}_\beta$ le voisinage ouvert compact $\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1}$ de 0 dans $\mathfrak{b}$. D'après le corollaire 1 de 4.3, pour $(g, b) \in G \times (\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{V}_\beta)$, l'élément $\gamma = g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$ appartient à G_{qr} et l'on a

$$\frac{\eta_G(\gamma)}{\eta_{\mathfrak{b}}(b)} = (q_E^{n_F(\beta)}\mu_F(\beta))^{d^2}|\beta|_E^{-d} = \mu_F(\beta)^{d^2}|\beta|_E^{d^2-d},$$

où (rappel) $d = \frac{N}{[E:F]}$. Puisque $\eta_G(\gamma) = |\det(\gamma)|^{1-N}\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)$ avec

$$|\det(\gamma)|^{1-N} = |\det(\beta)|^{1-N} = |\beta|_E^{-d(N-1)}.$$

On obtient

$$\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = c_\beta \eta_{\mathfrak{b}}(b), \quad c_\beta = \mu_F(\beta)^{d^2}|\beta|_E^{d(d-1+N-1)}.$$

D'après le principe de submersion (cf. 3.9), pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times \boldsymbol{x}\underline{\mathfrak{Q}}^{k_0+1})$, on a

$$\begin{aligned}\int_G \phi^\delta(g)\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)dg &= \int_{G\times\mathfrak{b}} \phi(g,b)\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g^{-1}(\beta+\boldsymbol{x}b)g)dg\mathfrak{d}b\\ &= c_\beta \int_{\mathfrak{b}} \phi_\delta(b)\eta_{\mathfrak{b}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(b)\mathfrak{d}b.\end{aligned}$$

L'intégrabilité de la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans $\mathfrak{g}$ est impliquée par celle de la fonction $\eta_{\mathfrak{b}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$, qui est supposée connue par hypothèse de récurrence (notons que $(d^2 - d)\epsilon < 1$).

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a prouvé que pour tout élément fermé $\beta \in \mathfrak{g}$ tel que $\beta \notin \mathfrak{z}$, l'application $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ est localement intégrable au voisinage de β dans $\mathfrak{g}$. En d'autres termes, l'application $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}/\mathfrak{z} \to \mathbb{R}_{>0}$ est localement intégrable sur $\bar{\mathfrak{g}} \smallsetminus \{0\}$. Reste à traiter le cas $\beta \in \mathfrak{z}$ (*i.e.* $\bar{\beta} = 0$). Choisissons un $\mathfrak{o}$-réseau Λ dans $\mathfrak{g}$ et posons $\bar{\Lambda} = \mathfrak{z} + \Lambda \subset \bar{\mathfrak{g}}$. Il suffit de prouver que

$$\int_{\bar{\Lambda}} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g} < +\infty,$$

où $\mathfrak{d}\bar{g}$ est une mesure de Haar sur $\bar{\mathfrak{g}}$. Puisque $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\bar{\mathfrak{g}} \smallsetminus \{0\}$, on a

$$\int_{\bar{\Lambda}\smallsetminus\varpi\bar{\Lambda}} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g} = c < +\infty,$$

où ϖ est une uniformisante de F. Comme $\bar{\Lambda} = \coprod_{i\geqslant 0} \varpi^i(\bar{\Lambda} \smallsetminus \varpi\bar{\Lambda})$, on obtient

$$\int_{\bar{\Lambda}} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g} = \sum_{i\geqslant 0}\int_{\varpi^i(\bar{\Lambda}\smallsetminus\varpi\bar{\Lambda})} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Or pour $i \geqslant 1$, d'après la formule d'homogénéité (1), on a

$$\begin{aligned}\int_{\varpi^i(\bar{\Lambda}\smallsetminus\varpi\bar{\Lambda})} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g} &= |\varpi^i|^{N^2-1}\int_{\bar{\Lambda}\smallsetminus\varpi\bar{\Lambda}} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(\varpi^i g)\mathfrak{d}\bar{g}\\ &= |\varpi^i|^{N^2-1}|\varpi^i|^{-N(N-1)(\frac{1}{2}+\epsilon)}c\\ &= q^{-i\left(\frac{N(N+1)}{2}-1-N(N-1)\epsilon\right)}c.\end{aligned}$$

Puisque $N > 1$ et $N(N-1)\epsilon < 1$, la constante $\alpha = \frac{N(N+1)}{2} - 1 - N(N-1)\epsilon$ vérifie $\alpha > 1$ et l'on obtient

$$\int_{\bar{\Lambda}} \eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(g)\mathfrak{d}\bar{g} = \left(\sum_{i\geqslant 0} q^{-\alpha i}\right) c < +\infty.$$

Cela achève la démonstration de la proposition. □

Remarque. Considérons la fonction $\gamma \mapsto \lambda_{\mathfrak{g}}(\gamma) = \log(\max\{1, \eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)^{-1}\})$ sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. Cette fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$) mesure d'une manière assez subtile la distance séparant un élément quasi régulier de $\mathfrak{g}$ de l'ensemble $\mathfrak{g} \smallsetminus \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$. En effet, pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}$, posant $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\gamma)$, on a $\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma) = |D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|\eta_{\mathfrak{m}}(\gamma)$ avec $\gamma \in \mathfrak{m}_{\mathrm{qre}}$, et le facteur $|D_{\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{g}}(\gamma)|^{-1}$ est d'autant plus grand que les valeurs propres de l'automorphisme ad_γ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ sont proches les unes des autres. D'autre part, pour $\gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qre}}$, on a $\eta_{\mathfrak{g}}^{-1}(\gamma) = \mu_F^+(\gamma) = |\det(\gamma)|^{1-N}\mu_F(\gamma)$, et le facteur $\mu_F(\gamma)$ est d'autant plus grand que γ est loin d'être minimal (rappelons que $\mu_F(\gamma) \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si γ est minimal).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on a :

(2) la fonction $\mathfrak{g}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma \mapsto \lambda_{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\gamma)\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{g}$.

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c = c(\epsilon,\alpha)$ telle que

$$\log(\max\{1, y\})^{\alpha} \leqslant cy^{\epsilon}, \quad y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

On a donc

$$\lambda_{\mathfrak{g}}^{\alpha}(\gamma)\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \leqslant c\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(\gamma), \quad \gamma \in \mathfrak{g}_{\mathrm{qr}}.$$

Il suffit de prendre ϵ tel que $N(N-1)\epsilon < 1$ et d'appliquer la proposition. ■

6. Résultats sur le groupe

6.1. Les intégrales orbitales normalisées sont bornées

On a prouvé que les intégrales orbitales quasi régulières d'une fonction $\mathfrak{f} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathfrak{g})$ sont bornées sur $\mathfrak{g}$ (corollaire 1 de 5.3). L'analogue sur G de ce résultat est la proposition suivante.

Proposition. *Pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$, la fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est bornée sur G : il existe une constante $c_f > 0$ telle que*

$$\sup\{|I^G(\gamma, f)| : \gamma \in G_{\mathrm{qr}}\} \leqslant c_f.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit $f \in C_c^\infty(G)$. Il suffit de prouver que la fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est bornée sur le compact ouvert $\mathrm{Supp}(f)$ ou, ce qui revient au même, qu'elle est localement bornée sur G.

Soit un élément fermé $\beta \in G$. Notons $\mathfrak{b}$ le centralisateur $\mathfrak{g}_\beta = \mathrm{End}_{F[\beta]}(V)$ de β dans $\mathfrak{g}$. Reprenons les notations de 4.4. On a $F[\beta] = E_1 \times \cdots \times E_r$, $V = V_1 \times \cdots \times V_r$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \cdots \times \mathfrak{b}_r$ avec $\mathfrak{b}_i = \mathrm{End}_{E_i}(V_i)$. On pose aussi $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_r$ avec $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$. On peut supposer que $\mathfrak{m}$ est standard, c'est-à-dire de la forme $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$ pour un $P \in \mathcal{P}$. On pose $M = M_P$ et $H = \mathfrak{b}^\times$. D'après la proposition de 4.4, il existe un voisinage ouvert compact $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ et un élément $\boldsymbol{x} \in M$ tels que :

- l'application $G \times \boldsymbol{x}\mathcal{W} \to G$, $(g, \boldsymbol{x}b) \mapsto g^{-1}(\beta + \boldsymbol{x}b)g$ est partout submersive ;
- pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{W}$, l'élément $\beta + \boldsymbol{x}b$ appartient à G_{qr} ;
- il existe une fonction $f^{\mathfrak{b}} \in C_c^\infty(\mathcal{W})$ telle que pour tout $b \in \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \cap \mathcal{W}$, on a l'égalité $I^G(\beta + \boldsymbol{x}b, f) = I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}})$.

Puisque la fonction $\mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $b \mapsto I^{\mathfrak{b}}(b, f^{\mathfrak{b}})$ est bornée sur $\mathfrak{b}$ (corollaire 1 de 5.3), on obtient que la fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est bornée sur l'ouvert ${}^G(\beta + \boldsymbol{x}\mathcal{W})$ de G.

La fonction $G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto I^G(\gamma, f)$ est donc localement bornée sur G et la proposition est démontrée. □

6.2. Intégrabilité locale de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$

On a prouvé que pour $\epsilon > 0$ tel que $N(N-1)\epsilon < 1$, la fonction $\eta_{\mathfrak{g}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{g}$ (proposition de 5.4). On en déduit la proposition suivante.

Proposition. *Pour tout $\epsilon > 0$ tel que $(N^2 - N)\epsilon < 1$, la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ est localement intégrable sur G.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour chaque élément fermé $\beta \in G$, la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ est localement intégrable au voisinage de β dans G. Reprenons la démonstration de la proposition de 5.4. On a défini un sous-groupe de Levi $M = M(\beta)$ de G tel que β est pur dans M. L'ensemble $\Omega = \{\gamma \in M : D_{M\backslash G}(\gamma) \neq 0\}$ est ouvert dans M et l'application

$$G \times \Omega \to G,\ (g, \gamma) \mapsto g^{-1}\gamma g$$

est partout submersive. L'ensemble $\Omega' = \{\gamma \in M : |D_{M\backslash G}(\gamma)| = |D_{M\backslash G}(\beta)|\}$ $(\subset \Omega)$ est un voisinage ouvert (M-invariant par conjugaison et Z-invariant par translation) de β dans M. Puisque pour $(g, \gamma) \in G \times (\Omega' \cap G_{\mathrm{qr}})$, on a

$$\eta_G(g^{-1}\gamma g) = |D_{M\backslash G}(\beta)|\eta_M(\gamma),$$

l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans G est impliquée par l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_M^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : M_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans M. Notons que si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\beta) \subset \mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de M, alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_s$ avec $\mathfrak{g}_i = \mathrm{End}_F(V_i)$ pour un sous-F-espace vectoriel V_i de V de dimension N_i, et l'hypothèse de récurrence est vérifiée : on a $(N_i^2 - N_i)\epsilon < 1$ pour tout i. On s'est donc

https://doi.org/10.1017/S1474748019000227 Published online by Cambridge University Press

ramené au cas où $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, c'est-à-dire au cas où β est pur dans $\mathfrak{g}$. Si β est un élément pur de G, alors en notant $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_\beta$ le centralisateur de β dans $\mathfrak{g}$, on obtient comme dans la démonstration de 5.4 (par descente centrale) que l'intégrabilité locale de la fonction $\eta_G^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : G_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de β dans G est impliquée par celle de la fonction $\eta_{\mathfrak{b}}^{-\frac{1}{2}-\epsilon} : \mathfrak{b}_{\mathrm{qr}} \to \mathbb{R}_{>0}$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{b}$, laquelle est désormais prouvée. □

Références

1. C. Bushnell et P. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Annals Math. Studies, Volume 129 (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993).
2. P. Deligne, *Les corps locaux de caractéristique p comme limites de corps locaux de caractéristique* 0, Représentations des groupes réductifs sur un corps local coll., pp. 119–157 (travaux en cours, Hermann, Paris, 1984).
3. Harish–Chandra, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups (Notes by G. van Dijk)*, Lect. Notes Math., Volume 62, pp. 1–125 (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).
4. Harish–Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, in *Lie theories and their applications (Proceedings of the 1977 annual seminar of the Canadian Mathematical Congress, Queen's University in Kingston, Ontario, 1977)* (ed. W. Rossmann), Queen's Papers in Pure and Applied Math., Volume 48, pp. 281–347 (Queen's University, Kingston, Ont., 1978).
5. H. Henniart, La conjecture de Langlands pour $GL(3)$, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **11–12** (1983), 1–186.
6. R. Howe, The Fourier transform and germs of characters (case of GL_n over a p-adic field), *Math. Ann.* **208** (1974), 305–322.
7. H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms for $GL(2)$, Lect. Notes Math., Volume 114, pp. 1–548 (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
8. R. Kottwitz, Harmonic analysis on reductive p-adic groups and Lie algebras, in *Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties* (ed. J. Arthur, D. Ellwood et R. Kottwitz), Clay Math. Proc., Volume 4, pp. 393–522 (2005).
9. B. Lemaire, Intégrabilité locale des caractères-distributions de $GL(N, F)$ où F est un corps local non archimédien de caractéristique quelconque, *Comp. Math.* **100** (1996), 41–75.
10. B. Lemaire, Intégrales orbitales sur $GL(N, F)$ où F est un corps local non archimédien, *Mém. Soc. Math. France* **70** (1997), 1–94.
11. B. Lemaire, Représentations génériques de GL_N et corps locaux proches, *J. Algebra* **236** (2001), 549–574.
12. J.-P. Labesse et J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue, d'après le Friday Morning Seminar*, CRM Monograph Series, Volume 31 (Amer. Math. Soc., 2013).
13. C. Mœglin et J.-L. Waldspurger, Stabilisation de la formule des traces tordue, Progress in Math., Volumes 316–317, (Springer Int. Pub., 2017).
14. J. Repka, Shalika's germs for p-adic $GL(n)$. I. The leading term, *Pacific J. Math.* **113** (1984), 165–172.
15. J. Repka, Shalika's germs for p-adic $GL(n)$. II. The subregular term, *Pacific J. Math.* **113** (1984), 173–182.
16. J.-P. Serre, Une « formule de masse » pour les extensions totalement ramifiées de degré donné d'un corps local, *C. R. Acad. Sc. Paris* **286** (1978), 1031–1036.
17. J.-P. Serre, *Corps locaux* (Hermann, Paris, 1962).