

DÉCOMPOSITION SPECTRALE ET REPRÉSENTATIONS SPÉCIALES D'UN GROUPE RÉDUCTIF p -ADIQUE

VOLKER HEIERMANN

*Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 10099 Berlin,
Germany* (heierman@mathematik.hu-berlin.de)

(Received 26 March 2002; accepted 24 January 2003)

Résumé Soit G un groupe réductif p -adique connexe. Nous effectuons une décomposition spectrale sur G à partir de la formule d'inversion de Fourier utilisée dans 'Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p -adique', V. HEIERMANN, *Commun. Math. Helv.* **76** (2001), 388–415. Nous en déduisons essentiellement qu'une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi M appartient au support cuspidal d'une représentation de carré intégrable de G si et seulement si c'est un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M . Ces pôles sont d'ordre maximal. Plus précisément, nous montrons que cette condition est nécessaire et que sa suffisance équivaut à une propriété combinatoire de la fonction μ de Harish-Chandra qui s'avère être une conséquence d'un résultat de E. Opdam. En outre, nous obtenons des identités entre des combinaisons linéaires de coefficients matriciels. Ces identités contiennent des informations sur le degré formel des représentations de carré intégrable ainsi que sur leur position dans la représentation induite.

Abstract Let G be a reductive connected p -adic group. With help of the Fourier inversion formula used in 'Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p -adique', V. HEIERMANN, *Commun. Math. Helv.* **76** (2001), 388–415, we give a spectral decomposition on G . In particular, we deduce from it essentially that a cuspidal representation of a Levi subgroup M is in the cuspidal support of a square-integrable representation of G if and only if it is a pole of Harish-Chandra's μ -function of order equal to the parabolic rank of M . These poles are of maximal order. In more explicit terms, we show that this condition is necessary and that its sufficiency is equivalent to a combinatorial property of Harish-Chandra's μ -function, which appears to be a consequence of a result of E. Opdam. We get also identities between some linear combinations of matrix coefficients. These identities contain information on the formal degree of square-integrable representations and on their position in the induced representation.

Mots clefs : représentations d'un groupe p -adique; décomposition spectrale; série discrète; formule de Plancherel; degré formel

Keywords: representations of p -adic groups; spectral decomposition; discrete series; Plancherel formula; formal degree

AMS 2000 *Mathematics subject classification*: Primary 22E50

Secondary 22E35; 11F70; 11F72; 11F85

0. Introduction

Soit G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique, réductif et connexe défini sur un corps local non archimédien F . Dans la terminologie de [H1] et [W] (qui est

rappelé dans les paragraphes 1 et 2) on se fixe un couple (P, \mathcal{O}) formé d'un sous-groupe parabolique standard $P = MU$ et de l'orbite inertielle \mathcal{O} d'une représentation irréductible cuspidale de M . Soit $\varphi_{P, \mathcal{O}}$ la composante en (P, \mathcal{O}) d'un élément de l'espace de Paley–Wiener matriciel de G . On a montré dans [H1] (cf. Proposition 0.2) qu'il existe une application polynomiale $\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}} : \mathcal{O} \rightarrow i_{\bar{P} \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^{\vee}$ à image dans un espace de dimension finie, telle que

$$\varphi_{P, \mathcal{O}}(\sigma) = \sum_{w \in W; w\mathcal{O} = \mathcal{O}} (J_{P|\bar{w}P}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^{\vee})\lambda(w))\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}}(w^{-1}\sigma), \quad (\#)$$

en tout point σ de \mathcal{O} en lequel les opérateurs d'entrelacement $J_{P|\bar{w}P}(\sigma)\lambda(w)$ et $J_{P|wP}(\sigma^{\vee})\lambda(w)$ sont définis. En outre, la fonction $f_{\varphi_{P, \mathcal{O}}}$ définie sur G par

$$f_{\varphi_{P, \mathcal{O}}}(g) = \gamma(G/M) \int_{\Re(\sigma) = r \gg_P 0} \deg(\sigma) E_P^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1)\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}}(\sigma))(g^{-1})\mu(\sigma) d\Im(\sigma), \quad (\#\#)$$

est lisse à support compact et sa transformée de Fourier en (P, \mathcal{O}) est donnée par $\varphi_{P, \mathcal{O}}$ (la fonction μ étant celle de Harish-Chandra).

Dans cet article nous allons calculer l'intégrale ($\#\#$) à l'aide de la formule intégrale de Cauchy et l'écrire comme somme d'intégrales, chaque intégrale portant sur l'orbite unitaire d'une représentation irréductible de carré intégrable dont le support cuspidal est donné par un élément de la classe de conjugaison de \mathcal{O} . Les termes qui apparaissent seront identifiés avec ceux dans la formule de Plancherel.

On montrera à cette occasion que seuls les pôles venant de la fonction μ de Harish-Chandra subsisteront après avoir effectué le changement de contours. On en déduira en particulier que, pour qu'une représentation irréductible cuspidale de M appartienne au support cuspidal d'une représentation de carré intégrable de G , il faut qu'elle soit un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M (cf. Corollaire 8.6). Ces pôles sont d'ordre maximal (ceci résulte d'un résultat dans [O2], cf. 8.1). Par ailleurs, nous montrons que la réciproque est équivalente à une propriété combinatoire de la fonction μ de Harish-Chandra qui s'avère être une conséquence d'un résultat de E. Opdam (cf. 8.7 pour un énoncé plus précis). Le tout répond à une conjecture qui nous a été communiqué par A. Silberger et qui a été formulé par lui dans un projet de recherche en 1978.

Dans le cas de la série principale non ramifiée d'un groupe déployé, où la localisation des pôles et zéros de la fonction μ de Harish-Chandra est connue, cette conjecture sur le support cuspidal d'une série discrète non cuspidale est équivalente à celle de Deligne–Langlands (cf. [H2]). Dans ce cas le résultat est déjà connu grâce aux travaux de Kazhdan et Lusztig (au moins si G est semi-simple à centre connexe) (cf. [KL]).

Signalons par ailleurs les travaux de Bernstein–Zelevinsky [Z] qui décrivent les représentations irréductibles de carré intégrable non cuspidales de $GL_N(F)$ et ceux de Mœglin et Mœglin–Tadic (cf. [M2] et [MT]) qui traitent—modulo une conjecture sur les pôles de la fonction μ de Harish-Chandra (énoncé et justifié dans [M1])—les autres groupes classiques déployés connexes (et un petit peu plus).

Nous obtenons en outre des identités entre des combinaisons linéaires de dérivées de coefficients matriciels de représentations induites—déduits d'opérateurs d'entrelacement—et des combinaisons linéaires de coefficients matriciels de représentations irréductibles de carré intégrable de même support cuspidal. Ces identités contiennent des informations sur le degré formel et sur la position des représentations de carré intégrable dans la représentation induite. On explique ceci dans **8.6** pour le cas 'régulier'. Pour extraire ces informations dans le cas général, il faudrait analyser de plus près les combinaisons linéaires de coefficients matriciels qui apparaissent, ce qui semble être un problème difficile. A titre d'exemple, nous traitons le cas d'un groupe semi-simple déployé de type G_2 dans l'annexe. C'est le groupe de rang minimal, où des problèmes non négligeables apparaissent. Notre étude utilise des arguments de [MW1, Annexe III]. (Elle est toutefois plus proche du cas des corps des fonctions.) Nous ne poussons cependant pas l'étude de notre identité dans le cas difficile aussi loin que cela a été fait dans [MW1], puisque d'un côté les résultats correspondants sont déjà connus dans ce cas (il s'agit de représentations ayant un vecteur invariant par un sous-groupe d'Iwahori) et d'autre part que les calculs peuvent se faire dans le cas local à l'aide d'un logiciel. Il nous a donc semblé que cela ne représente pas beaucoup d'intérêt d'exposer un calcul qui ne comporte aucune idée susceptible de se généraliser.

Le principe de ce travail est en quelque sorte analogue à la décomposition spectrale de l'espace des formes automorphes sur un corps global qui a son origine dans les travaux de R. P. Langlands (cf. [L, MW1]), l'idée de décrire des séries discrètes par des résidus ayant apparemment apparu la première fois dans des travaux de A. Selberg. Signalons également le travail de E. Opdam [O2] qui effectue une décomposition spectrale dans le contexte des algèbres de Hecke affines à partir de sa formule génératrice pour la trace [O1]. La partie des résultats de [O2] qui se traduit en termes de la théorie des représentations de groupes p -adiques s'applique donc en particulier à la série principale non ramifiée d'un groupe p -adique semi-simple en considérant les éléments de l'algèbre d'Iwahori–Hecke. L'auteur de [O2] en déduit des informations sur le degré formel de ces représentations (voir également [HO2]). On abordera cette question dans le cadre donné par l'article présent éventuellement dans un travail futur.

Remarquons que l'analogie de nos résultats dans le cadre de la décomposition spectrale de Langlands est toujours un problème ouvert, des résultats complets n'existant que pour le groupe $G = GL_N(F)$ (cf. [MW2]).

Survolons alors le contenu de cet article: au paragraphe 1 sont fixées les notations. On y trouve également les définitions des différentes notions attachées aux hyperplans d'une orbite inertielle \mathcal{O} qui seront centrales dans le reste de ce travail. Le paragraphe 2 sert à des rappels des résultats de [H1] et sur la formule de Plancherel de Harish-Chandra, adaptés à nos besoins.

Nous présentons au paragraphe 3 le théorème des résidus que l'on appliquera dans la suite. Sa présentation et sa preuve suivent la méthode employée dans [BS]. Cet article traitant d'intégrales sur des espaces vectoriels et non pas sur un produit de tores de \mathbb{C}^* , notre concept de résidu ne peut toutefois être le même. Par ailleurs, les pôles que nous rencontrons ne sont pas toujours réels. Nous donnons donc une preuve assez détaillée.

Remarquons que l'article [BS] utilise une nouvelle approche inspirée de [HO1] et cite [A, MW1, L], la preuve de l'unicité des données de résidus étant plus indirecte dans le travail de Langlands (cf. [MW1, V.2.2 Remarques (2) et V.3.13 Remarques (ii)]). Mentionnons également le travail [Mo1, Mo2].

Dans le paragraphe 4, nous analysons de plus près le cadre dans lequel le théorème des résidus sera appliqué ensuite. Nous donnons en particulier plus de détails sur les hyperplans résiduels qui apparaissent. Grâce à une observation que nous avons trouvée dans un article de A. Silberger [S3], on peut associer à ces hyperplans un système de racines. En faisant usage des propriétés des systèmes de racines, nous réécrivons le théorème de résidus sous une forme qui s'appliquera directement à notre situation. Le procédé et l'énoncé sont analogues au résultat principal de [BS]. En passant, on énoncera quelques lemmes combinatoires sur le groupe de Weyl.

Au paragraphe 5, nous prouvons que, pour $D = D_\lambda$ un opérateur différentiel holomorphe sur $a_{M, \mathbb{C}}^*$ à coefficients constants et τ un élément de $i_P^G E_{\mathcal{O}} \otimes i_P^G E_{\mathcal{O}}^\vee$, la fonction $D_\lambda E_{P, \sigma_\lambda}^G(\tau)$, définie sur G , correspond au coefficient matriciel d'une représentation admissible de longueur finie dont les sous-quotients irréductibles sont à support cuspidal dans la classe de W -conjugaison de \mathcal{O} . Ce sont de tels termes qui interviennent lors de la désintégration de la formule (##).

Dans le paragraphe 6, nous généralisons une propriété (à cet endroit conjecturale) de la transformation (#) à certaines applications rationnelles $\tilde{\xi}$ à la place de ξ . Ceci nous permettra d'identifier par récurrence la partie continue qui apparaît après désintégration de (##).

Pour montrer que certains pôles que nous obtenons après le calcul de (##) s'annulent, nous utilisons des éléments spéciaux de l'espace de Paley–Wiener de G . Une idée semblable a été utilisée dans [O2] pour se débarrasser des résidus inutiles. Les éléments que nous utilisons sont déjà apparus dans [H1] lors de la preuve de la Proposition 0.2. Un rappel de la définition de ces éléments ainsi que la preuve de leurs propriétés particulières est le sujet du paragraphe 7.

L'énoncé et la preuve de notre théorème principal font l'objet du paragraphe 8. Nous y précisons également la notion de l'ordre d'un pôle de la fonction μ . Les résultats concernant les supports cuspidaux des représentations de carré intégrable découleront alors de la décomposition spectrale et de sa preuve.

On trouvera dans l'annexe A le traitement d'un groupe semi-simple déployé de type G_2 'à la main'. Ceci est l'analogue local du cas étudié dans [MW1, A.III] pour les corps de nombres, comme cela a été remarqué ci-dessus.

A la fin, dans l'annexe B, on donne pour la commodité du lecteur une preuve du théorème 8.7 qui est, comme déjà signalé, dû à E. Opdam (cf. [O2, theorem 3.29]). (On l'a inséré ici avec l'autorisation de E. Opdam, parce que la preuve dans l'article [O2] est assez concise et rédigée dans un langage différent du nôtre.)

Nous recommandons au lecteur de continuer la lecture de cet article directement avec le paragraphe 8 (après avoir éventuellement jeté un coup d'oeil sur les notations présentées au paragraphe 1 et sur une revue des résultats de [H1] et de la formule de Plancherel au paragraphe 2), en consultant les paragraphes antérieurs au fur et à mesure.

Index de notations

A_{reg}	1.4	q ,	1.2
$[A]$	8.2	$r(\mathcal{O}), r(A), r(L)$	1.4
$\mathcal{A}(\mathcal{S})$	1.4	$\text{Res}_A, \text{Res}_{\mathcal{D}}$	3.7
$\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$	8.1	Res_A^C	3.10
$[\mathcal{A}(\mathcal{S})], [\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})]$	8.2	$\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$	3.1
$d_A \mathfrak{S}(\sigma')$	1.6	$\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \underline{d})$	3.7
$d_S \psi, d_{\sigma, \alpha}(\psi)$	3.4	$\mathfrak{R}(\chi)$	1.2
$\text{deg}(\sigma)$	2.2	$\mathfrak{R}(\sigma), \mathfrak{R}_{M'}(\sigma)$	1.3
$E_{\mathcal{O}}$	1.3	$\mathcal{S}_A, \mathcal{S}(A)$	1.4
E_P^G	1.5	$\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}$	4.3
$\mathcal{E}_2(M', \sigma)$	6.1	$\text{Stab}(A)$	6.1
f_φ	2.3	$\text{Stab}_{M'}(\mathcal{O}), \text{Stab}_{M'}(\sigma)$	1.3
f_ξ	2.2	T_M	1.1
H_M	1.2	$W, \mathcal{W}(M), W(M)$	1.1
$H_{\alpha, c}$	1.4	$W_{\mathcal{O}}$	4.2
\tilde{h}_α	3.2	$W(M, \mathcal{O})$	1.3, 4.7
h_α	1.2	$W_{\mathcal{O}, M'}^+, W_{\Delta_{\mathcal{O}}}, W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'}, W_{M'}^+(M, \mathcal{O})$	4.5
G	1.1	$\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M), \mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M)$	1.2
$\mathcal{H}(\mathcal{S}), \mathcal{H}(L)$	1.4	α^*	1.2
$\mathcal{H}(\mathcal{S})$	1.4	$\tilde{\alpha}$	3.2
$\mathfrak{S}(\sigma), \mathfrak{S}_{M'}(\sigma)$	1.3	$\Delta_{\mathcal{O}}$	4.5
$J_{P P'}$	1.5	$\lambda(w)$	1.5
L_{reg}	1.4	$\mu_{P P'}, \mu$	1.5
$\mathcal{L}(\mathcal{S}), \mathcal{L}(\mathcal{H})$	1.4	$\mu_{\text{sp}, \sigma}, \mu_{\text{nsp}, \sigma}$	4.2
M_Ω	4.6	ψ_σ	3.5
M_A, M_L	1.4	$\varphi(P', \pi')$	2.4
M_α, M^\dagger	1.2	$\varphi_{\xi_{M'}}$	6.1
$\mathcal{O}_{\sigma, M}, \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$	1.4	$\varphi_{\mathcal{O}}$	7.1
$\mathcal{O}_{\sigma, M', r'}$	1.6	$\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}^H}$	7.1
$p_{\sigma, \alpha}, p_H(\lambda)$	3.4	$\Sigma^G(T_M), \Sigma^G(P), \Sigma_{\text{red}}^G(P)$	1.1
P_A	4.6	$\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$	4.1
$P = MU$	1.1	$\Sigma_{\mathcal{O}}$	4.2
$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_L)$	3.10	Θ	1.2
$\mathcal{P}(\mathcal{O}, V)$	1.3	$\Theta_2, \Theta_2(\mathcal{O})$	2.5
\bar{P}	1.1	$>_P$	1.2
$PW(G)$	2.3		

Index terminologique

composantes connexes adjacentes de L_{reg}	1.4
composante connexe (P, \mathcal{S}) -standard	4.6
donnée de résidu	3.7

hyperplan affine (radiciel)	1.4
orbite inertielle	1.3
opérateur résidu	3.7
orbite inertielle de σ sous M	1.4
ordre du pôle (d'une fonction rationnelle sur \mathcal{O})	3.4
rang parabolique	8.1
sous-espace affine (radiciel) de \mathcal{O} (ou de a_M^*)	1.4
sous-espace affine résiduel pour μ	8.1
sous-groupe de Levi associé à un sous-espace affine de \mathcal{O} (ou de a_M^*)	1.4
sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard	4.5
sous-groupe parabolique (P, \mathcal{S}) -standard	8.2

1. Notations et préliminaires

1.1.

Fixons un tore déployé maximal T_0 dans G et un sous-groupe ouvert compact maximal K de G qui est en bonne position relative à T_0 . (De tels groupes s'obtiennent comme fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à T_0 dans l'immeuble de G .) On notera M_0 le centralisateur de T_0 dans G et $W = W^G = \text{Norm}_G(T_0)/M_0$ le groupe de Weyl défini relatif à T_0 .

Un sous-groupe parabolique P de G sera dit semi-standard, s'il contient T_0 . Il existe alors un unique sous-groupe de Levi M de P qui contient T_0 . On appellera un tel sous-groupe M de G dans la suite simplement un sous-groupe de Levi semi-standard de G . Remarquons que M_0 est le plus petit sous-groupe de Levi semi-standard. On écrira souvent $P = MU$, si P est un sous-groupe parabolique semi-standard et si M est le sous-groupe de Levi semi-standard de P . On désignera par T_M le tore déployé maximal dans le centre de M . Le sous-groupe parabolique de G qui est opposé à P sera noté \bar{P} . (On a donc $P \cap \bar{P} = M$.)

Si M est un sous-groupe de Levi semi-standard de G , on pose

$$\mathcal{W}(M) = \{w \in W \mid wMw^{-1} = M\},$$

et on écrira $W(M)$ pour le groupe quotient $\mathcal{W}(M)/W^M$. On identifiera ses éléments avec certains éléments de $\mathcal{W}(M)$ (par exemple de longueur minimale dans leur classe à gauche modulo W^M). Les identités qui suivent seront toutefois essentiellement indépendantes du choix des représentants.

On notera $\Sigma^G(T_M)$ (respectivement $\Sigma^G(P)$ (respectivement $\Sigma_{\text{red}}^G(P)$)), l'ensemble des racines (respectivement racines réduites) de T_M dans l'algèbre de Lie de G (respectivement U). On omettra souvent l'indice G si cela ne prête pas à confusion.

1.2.

L'ensemble des caractères F -rationnels d'un sous-groupe de Levi semi-standard de G sera noté $\text{Rat}(M)$. On pose $a_M^* = \text{Rat}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on notera a_M l'espace dual. Le choix

d'un sous-groupe parabolique semi-standard P de Levi M de G est équivalent à celui d'un certain ordre sur a_M^* . On notera $>_P$ l'ordre qui correspond à P .

On désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité $a_M \times a_M^* \rightarrow \mathbb{R}$. Avec q égal au cardinal du corps résiduel de F , on définit un homomorphisme $H_M : M \rightarrow a_M^*$ par la relation $\langle \chi \otimes 1, H_M(m) \rangle = -\log_q(\chi(m))$ pour tout $\chi \in \text{Rat}(M)$ et tout $m \in M$.

Lorsque $M = M_0$, on écrit a_0^* à la place de a_M^* . On munit l'espace a_0^* d'un produit scalaire invariant pour l'action par W . Pour tout sous-groupe de Levi semi-standard M , l'espace a_M^* sera muni de la structure euclidienne induite par celle de a_0^* . Si M' est un sous-groupe de Levi qui contient M , on a une décomposition orthogonale $a_M^* = a_{M'}^* \oplus a_{M'}^{M'^*}$. On notera parfois $\lambda = \lambda_{M'} + \lambda^{M'}$ la décomposition d'un élément λ de a_M^* selon cette décomposition. On a une décomposition duale $a_M = a_{M'} \oplus a_{M'}^{M'}$. Le composé de H_M avec la projection de a_M sur $a_{M'}^{M'}$ sera noté $H_M^{M'}$.

Pour H un groupe, posons $X(H) = \text{Hom}(H, \mathbb{C}^\times)$. Notons $|\cdot|_F$ la valeur absolue normalisée de F dont le groupe des valeurs est $q^{\mathbb{Z}}$. Pour M un sous-groupe de Levi semi-standard, posons $M^1 = \bigcap_{\chi \in \text{Rat}(M)} \ker(|\chi|_F)$. Le groupe quotient M/M^1 est un \mathbb{Z} -module libre de rang égal à celui de T_M . On note $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) = X(M/M^1)$. C'est une variété algébrique complexe affine dont les éléments sont appelés les caractères non ramifiés de M . On a une application surjective du complexifié $a_{M,\mathbb{C}}^*$ de a_M^* dans $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ qui associe à λ le caractère non ramifié χ_λ de M , défini par $\chi_\lambda(m) = q^{-\langle H_M(m), \lambda \rangle}$. Sa restriction à a_M^* est injective, ce qui permet de définir la *partie réelle* d'un caractère non ramifié, en posant $\Re(\chi_\lambda) := \Re(\lambda)$ pour tout $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$.

Le sous-groupe de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ formé des caractères unitaires sera noté $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M)$.

Un ensemble ordonné $\underline{m} = (m_1, \dots, m_d)$ d'éléments de M dont les images modulo M^1 forment une base de ce \mathbb{Z} -module sera appelé une base de M modulo M^1 . Le choix d'une telle base détermine un isomorphisme $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $\chi \mapsto (\chi(m_1), \dots, \chi(m_d))$, noté $\eta_{\underline{m}}$ ci-dessous. Cet isomorphisme est compatible avec la structure de variété affine complexe sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. On pourra alors préciser la notion de fonction polynomiale et rationnelle sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$: une fonction $f : \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite polynomiale, si et seulement s'il existe un polynôme $p \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_d, x_d^{-1}]$, tel que $f(\chi) = p(\eta_{\underline{m}}(\chi))$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. Le polynôme p dépend évidemment du choix de \underline{m} . Le cas d'une fonction rationnelle se traite de manière analogue.

Les sous-groupes de Levi minimaux de G contenant M sont en bijection avec les éléments de $\Sigma_{\text{red}}(P)$. On notera M_α le sous-groupe de Levi semi-standard de G qui correspond à un élément α de $\Sigma_{\text{red}}(P)$. On a une suite exacte courte

$$1 \rightarrow M_\alpha^1 \cap M/M^1 \rightarrow M/M^1 \rightarrow M_\alpha/M_\alpha^1 \rightarrow 1$$

qui prouve que $M_\alpha^1 \cap M/M^1$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang 1. Notons h_α un élément de $M_\alpha^1 \cap M$ qui vérifie $\langle \alpha, H_M(h_\alpha) \rangle > 0$ et dont l'image dans $M_\alpha^1 \cap M/M^1$ définit une base de ce module. Notons par ailleurs α^\vee l'unique élément de a_M qui est un multiple de $H_M(h_\alpha)$ par un réel > 0 et qui vérifie $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, ainsi que α^* l'unique multiple de α par un réel > 0 qui vérifie $\langle H_M(h_\alpha), \alpha^* \rangle = 1$.

On a une suite exacte duale de la précédente donnée par

$$1 \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow X(M_\alpha^1 \cap M/M^1) \rightarrow 1,$$

la première application étant la restriction à M et la deuxième l'évaluation en h_α . Cette suite exacte courte est scindée: il suffit de prolonger h_α en une base $\underline{m} = (h_\alpha, m_2, \dots, m_d)$ de M modulo M^1 . Une section $s_{\underline{m}} : X(M_\alpha^1 \cap M/M^1) \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ s'obtient alors, en associant à χ l'élément de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ qui vaut $\chi(h_\alpha)$ en h_α et 1 en tout m_j , $j = 2, \dots, d$. Il n'est pas possible de définir un scindage 'canonique'.

1.3.

Fixons une représentation irréductible cuspidale (σ, E) d'un sous-groupe de Levi semi-standard M de G . L'orbite inertielle de σ est l'ensemble $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma$ formé des classes d'équivalence des représentations $\sigma \otimes \chi$ avec χ parcourant $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. On écrira $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{\sigma,0}$ pour le sous-ensemble de \mathcal{O} formé des classes d'équivalence des représentations unitaires. On a sur \mathcal{O} (respectivement \mathcal{O}_0) une structure de variété algébrique complexe (respectivement analytiques réelle) déduite de sa structure d'espace principal homogène sous $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ (respectivement $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M)$). Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}$, il existe un unique caractère non ramifié χ_λ de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ avec $\lambda \in a_M^*$, tel que $\sigma \otimes \chi_\lambda^{-1}$ soit une représentation unitaire. On écrira $\mathfrak{R}(\sigma) := \lambda$, $\mathfrak{S}(\sigma) = \sigma \otimes \chi_{-\lambda}$. On notera $\mathfrak{R}_{M'}(\sigma)$ la projection de $\mathfrak{R}(\sigma)$ sur $a_{M'}^*$ et $\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) = \sigma \otimes \chi_{-\mathfrak{R}_{M'}(\sigma)}$.

Le symbole $E_{\mathcal{O}}$ désignera parfois un espace vectoriel complexe dans lequel se réalisent les représentations dans \mathcal{O} . On notera $W(M, \mathcal{O})$ le sous-groupe de $W(M)$ formé des éléments w qui vérifient $w\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Si M' est un sous-groupe de Levi qui contient M , $\text{Stab}_{M'}(\sigma)$ ou $\text{Stab}_{M'}(\mathcal{O})$ désignera le sous-groupe de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$ formé des caractères non ramifiés χ vérifiant $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma$ (pour un élément σ de \mathcal{O}). Si $M' = M$, on omettra parfois l'indice M .

Une fonction complexe f sur \mathcal{O} sera dite polynomiale (respectivement rationnelle), si la fonction $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi \mapsto f(\sigma \otimes \chi)$ est polynomiale (respectivement rationnelle). De même, on définira la notion de fonction lisse sur \mathcal{O}_0 .

On notera i_P^G le foncteur de l'induction parabolique normalisée qui envoie les représentations unitaires sur des représentations unitaires. Désignons par E_χ l'espace E muni de la représentation $\sigma \otimes \chi$. Notons $i_{P \cap K}^K E$ l'espace des fonctions $f : K \rightarrow E$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de K et vérifiant $f(muk) = \sigma(m)f(k)$ pour tout $m \in M \cap K$, $u \in U \cap K$ et $k \in K$. La restriction à K définit pour tout caractère non ramifié χ de M un isomorphisme entre $i_P^G E_\chi$ et $i_{P \cap K}^K E$. Ainsi toutes les représentations $i_P^G(\sigma \otimes \chi)$ se réalisent dans le même espace $i_{P \cap K}^K E$.

Ceci permet de définir la notion un peu subtile d'une application polynomiale ou rationnelle sur \mathcal{O} à valeurs dans $i_{P \cap K}^K E \otimes i_{P' \cap K}^K E^\vee$ (E^\vee désignant la contragrédiente de E), etc. (cf. [W, VI.1]). (Ce sont des applications vérifiant une certaine propriété d'invariance par rapport à $\text{Stab}(\mathcal{O})$.) Si V est un tel espace, on notera $\mathcal{P}(\mathcal{O}, V)$ l'espace des applications polynomiales de \mathcal{O} dans V dont l'image est incluse dans un sous-espace de dimension finie.

1.4.

Lorsque M est un sous-groupe de Levi semi-standard de G et que σ est une représentation irréductible lisse d'un sous-groupe de Levi semi-standard de M , on pose $\mathcal{O}_{\sigma, M} = \{\sigma \otimes \chi \mid \chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)\}$. On appelle cet espace *l'orbite inertielle de σ sous M ou relative à M* . Une application $\psi : \mathcal{O}_{\sigma, M} \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite polynomiale (respectivement rationnelle), si l'application $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}, \chi \mapsto \psi(\sigma \otimes \chi)$ est polynomiale (respectivement rationnelle).

Fixons maintenant M et σ . Un *sous-espace affine (radiciel)* de $\mathcal{O}_{\sigma, M}$ sera pour nous un espace de la forme $\mathcal{O}_{\sigma', M'}$ avec $\sigma' \in \mathcal{O}_{\sigma, M}$ et M' un sous-groupe de Levi de G qui contient M . Lorsque $M' = M_\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma(T_M)$ et que la référence à M paraît évidente, on écrira simplement $\mathcal{O}_{\sigma', \alpha}$. (C'est par exemple le cas, si σ' est une représentation de M .) Un tel espace sera appelé un *hyperplan affine (radiciel)* de $\mathcal{O}_{\sigma, M}$. On munira $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$ implicitement de l'orientation dans \mathcal{O} déterminée par α .

On pose $\Re(\mathcal{O}_{\sigma', M'}) = \Re(\sigma') + a_{M'}^*$. (C'est l'ensemble des parties réelles des éléments dans $\mathcal{O}_{\sigma', M'}$.) On dira que M' est le *sous-groupe de Levi associé à $A = \mathcal{O}_{\sigma', M'}$ ou à $L = \Re(\mathcal{O}_{\sigma', M'})$* . On le notera M_A ou M_L .

Remarquons que, par définition de \mathcal{O} , les éléments de $\Re(\mathcal{O})$ ont tous la même projection sur a_0^{M*} . On appellera cet élément l'origine de $\Re(\mathcal{O})$ et on le notera $r(\mathcal{O})$. (Si \mathcal{O} est formé de représentations de M , alors $r(\mathcal{O}) = 0$.) C'est l'élément de $\Re(\mathcal{O})$ qui est le plus proche de l'origine de a_0^* pour la structure euclidienne définie sur cet espace.

Pour $\alpha \in \Sigma(T_M)$, $c \in \mathbb{C}$, désignons par $H_{\alpha, c}$ l'hyperplan de a_M^* donné par $\{\lambda \in a_{M'}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = c\}$ et muni de l'orientation donnée par α . Remarquons que l'on a, en posant $c = \langle \Re(\sigma'), \alpha^\vee \rangle$, l'égalité $\Re(\mathcal{O}_{\sigma', \alpha}) = H_{\alpha, c}$.

Considérons maintenant un ensemble fini \mathcal{S} d'hyperplans affines radiciels de $\mathcal{O}_{\sigma, M}$. On va y associer plusieurs objets: on notera $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ l'ensemble formé des sous-espaces affines de \mathcal{O} qui sont les composantes connexes des intersections de sous-ensembles finis ou vides de \mathcal{S} . On considérera également l'ensemble $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ formé des parties réelles des hyperplans dans \mathcal{S} . C'est un ensemble fini d'hyperplans affines de l'espace affine $r(\mathcal{O}) + a_M^*$. On y associe l'ensemble $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{S})$ dont les éléments sont les sous-espaces affines de $r(\mathcal{O}) + a_M^*$ obtenus en intersectant les éléments d'un sous-ensemble (fini ou vide) de \mathcal{H} .

Lorsque A est un sous-espace affine radiciel de $\mathcal{O}_{\sigma, M}$ (respectivement L un sous-espace affine radiciel de $r(\mathcal{O}) + a_M^*$), on pose $\mathcal{S}_A = \{S \in \mathcal{S} \mid S \supseteq A\}$ (respectivement $\mathcal{H}_L = \{L \in \mathcal{L} \mid H \supseteq L\}$). On désignera par $\mathcal{S}(A)$ (respectivement $\mathcal{H}(L)$) l'ensemble fini d'hyperplans affines de A (respectivement L) dont les éléments sont les composantes connexes des espaces non vides de la forme $S \cap A$ avec $S \in \mathcal{S} - \mathcal{S}_A$ (respectivement $H \cap L$ avec $H \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_L$). On pose

$$A_{\mathcal{S}, \text{reg}} := A - \bigcup_{S \in \mathcal{S}(A)} S \quad \text{et} \quad L_{\mathcal{S}, \text{reg}} := L_{\mathcal{H}, \text{reg}} := L - \bigcup_{H \in \mathcal{H}(L)} H.$$

Quand cela ne prête pas à confusion, on écrira plus simplement A_{reg} et L_{reg} .

L'élément de L qui est le plus proche de l'origine $r(\mathcal{O})$ de $\Re(\mathcal{O})$ (définie ci-dessus) pour la structure euclidienne induite par celle sur a_0^* sera noté $r(L)$. Si L est la partie réelle de $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, alors on pose $r(A) := r(L)$.

Si C est une composante connexe de L_{reg} , et si $H \in \mathcal{H}(L)$ est tel que la clôture \bar{C} de C ait une intersection non vide avec H , on appelle l'intérieur de $H \cap \bar{C}$ une face de C . Cette face est alors égale à $\bar{C} \cap H_{\mathcal{H}(H), \text{reg}}$. Deux composantes connexes C_1 et C_2 de L_{reg} seront dites adjacentes, si elles ont une face en commun. Cette face est alors unique. Notons H l'unique élément de $\mathcal{H}(L)$ qui contient cette face commune. De tout point de C_1 à tout point de C_2 il existe un chemin qui ne coupe $\bigcup_{H' \in \mathcal{H}(L)} H'$ qu'en un point régulier de H .

1.5.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (π, V) une représentation lisse de M . On notera $E_{P, \pi}^G$ l'application linéaire $i_{P \cap K}^K V \otimes i_{P \cap K}^K V^\vee \rightarrow C^\infty(G)$ qui associe à $v \otimes v^\vee$ le coefficient matriciel $g \mapsto \langle (i_{P \cap K}^G \pi)(g)v, v^\vee \rangle$ de la représentation $i_P^G \pi$. On omettra l'indice π parfois pour écrire plus simplement E_P^G , si cela ne prête pas à des confusions.

Si \mathcal{O} est l'orbite inertielle d'une représentation irréductible cuspidale de M , et si ξ est une application polynomiale sur \mathcal{O} à valeurs dans $i_{P \cap K}^K V \otimes i_{P \cap K}^K V^\vee$, alors, pour tout $g \in G$, la fonction $\sigma \mapsto E_{P, \sigma}^G(\xi(\sigma))(g)$ est polynomiale sur \mathcal{O} , i.e. dans $\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. L'assertion analogue vaut pour ξ rationnelle.

Nous considérerons deux classes d'opérateurs d'entrelacement:

Si w est un élément de W , nous désignerons pour toute représentation (π, E_π) de M par $\lambda(w)$ l'isomorphisme $i_P^G E_\pi \rightarrow i_{wP}^G w E_\pi$ entre les représentations $i_P^G \pi$ et $i_{wP}^G w \pi$ donné par $v \mapsto v(w^{-1} \cdot)$.

Soit $P' = MU'$ un autre sous-groupe parabolique semi-standard de Levi semi-standard M . Soit \mathcal{O} l'orbite inertielle d'une représentation irréductible de M . Pour $\pi \in \mathcal{O}$, notons v_π l'image d'un élément de $i_{P' \cap K}^K E_\mathcal{O}$ dans l'espace $i_P^G E_\pi$. On définit l'opérateur d'entrelacement $J_{P|P'}$ dans un cône ouvert de \mathcal{O} pour tout $v \in i_{P' \cap K}^K E_\mathcal{O}$, $k \in K$ par l'intégrale convergente

$$(J_{P|P'}(\pi)v)(k) = \int_{U \cap U' \setminus U'} v_\pi(u'k) du'.$$

Par prolongement analytique, on en déduit un opérateur rationnel sur \mathcal{O} à valeurs dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(i_{P' \cap K}^K E_\mathcal{O}, i_{P \cap K}^K E_\mathcal{O}^\vee)$ qui définit en tout point régulier π de \mathcal{O} un homomorphisme équivariant entre les représentations $i_P^G \pi$ et $i_{P'}^G \pi$ (cf. [W, ch. IV.1]). Lorsque \mathcal{O} est l'orbite inertielle d'une représentation irréductible tempérée, l'intégrale converge pour tout π avec $\Re(\pi) >_{P'} 0$ (cf. [W, ch. IV.2]).

En particulier, la fonction $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi \mapsto E_{P, \pi}^G(J_{P|P'}(\pi)\xi(\pi))(g)$ est rationnelle pour tout $\xi \in \mathcal{P}(\mathcal{O}, i_{P' \cap K}^K E_\mathcal{O} \otimes i_{P \cap K}^K E_\mathcal{O}^\vee)$ et tout $g \in G$.

Pour \mathcal{O} l'orbite inertielle (respectivement inertielle unitaire) d'une représentation irréductible cuspidale (respectivement de carré intégrable) d'un sous-groupe de Levi semi-standard de G et P, P' deux sous-groupes paraboliques semi-standard de facteur de Levi M , on notera $\mu_{P|P'}$ la fonction rationnelle sur \mathcal{O} telle que $\mu_{P|P'}(\pi)J_{P|P'}(\pi)J_{P'|P}(\pi)$ soit

l'endomorphisme identité pour tout point régulier π de \mathcal{O} . Si $P = \bar{P}$, on écrira $\mu = \mu_{P|\bar{P}}$. (Cette fonction ne dépend en effet pas du choix de P (cf. [W, ch. IV].) La fonction μ est invariante pour l'action par W (cf. [W, V.2.1]).

1.6.

Pour tout $r \in a_{M'}^*$, et tout sous-groupe de Levi semi-standard $M' \supseteq M$, posons

$$\mathcal{O}_{\sigma, M', r} = \{\sigma' \in \mathcal{O}_{\sigma, M'} \mid \mathfrak{R}_{M'}(\sigma') = r\}.$$

Munissons $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(T_{M'})$ d'une mesure de Haar de masse totale 1, $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M')$ d'une mesure pour laquelle la restriction $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M') \rightarrow \mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(T_{M'})$ conserve localement les mesures et $\mathcal{O}_{\sigma, M', 0}$ d'une mesure telle que l'application $\mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(M') \rightarrow \mathcal{O}_{\sigma, M', 0}$, $\chi \mapsto \sigma \otimes \chi$, conserve localement les mesures. Si ψ est une fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_{\sigma, M'}$ qui est régulière sur $\mathcal{O}_{\sigma, M', r}$, on notera

$$\int_{\mathcal{O}_{\sigma, M', r}} \psi(\sigma') d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma') \text{ l'intégrale } \int_{\mathcal{O}_{\sigma, M', 0}} \psi(\sigma' \otimes \chi_r) d\sigma'.$$

On écrira également

$$\int_{\mathfrak{R}(\sigma')=r_0} \psi(\sigma') d_A \mathfrak{S}(\sigma') \text{ avec } A = \mathcal{O}_{\sigma, M'} \text{ et } r_0 = r(A) + r.$$

2. Formule de Plancherel et théorème de Paley–Wiener

2.1.

On notera Θ l'ensemble des couples (P, \mathcal{O}) formés d'un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ et de l'orbite inertielle \mathcal{O} d'une représentation irréductible cuspidale de M . Si f est un élément de l'espace $C_c^\infty(G)$ des fonctions lisses à support compact sur G , sa transformée de Fourier par rapport à $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, $\sigma \in \mathcal{O}$, notée $\hat{f}(P, \sigma)$, est un élément de $\text{End}_{\mathbb{C}}(i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}})$ défini par

$$\hat{f}(P, \sigma)v := (i_P^G \sigma)(f)v = \int_G f(g)(i_P^G \sigma(g)v) dg.$$

On obtient ainsi une application polynomiale

$$\hat{f}(P, \mathcal{O}) : \mathcal{O} \rightarrow i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee, \quad \sigma \mapsto \hat{f}(P, \sigma),$$

où on a identifié $i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee$ à un sous-espace de $\text{End}_{\mathbb{C}}(i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}})$.

2.2.

Fixons un élément (P, \mathcal{O}) de Θ . On a prouvé dans [H1, Proposition 2.1], que, si ξ est une application polynomiale sur \mathcal{O} à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee$, alors la fonction $f_\xi : G \rightarrow \mathbb{C}$ définie avec $\text{deg}(\sigma)$ égal au degré formel de σ par

$$f_\xi(g) := \gamma(G/M) \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r \gg_{P0}} \text{deg}(\sigma) E_{P, \sigma}^G((J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma) \otimes 1)\xi(\sigma))(g^{-1}) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma)$$

est lisse à support compact. (Ici la notation $r \gg_P 0$ signifie que r est très positif dans la chambre de Weyl de P dans a_M^* .)

Si $(P', \mathcal{O}') \in \Theta$ et si aucun élément de \mathcal{O} n'est conjugué à un élément de \mathcal{O}' , alors $\hat{f}_\xi(P', \mathcal{O}') = 0$ (cf. [H1, Proposition 2.4.1]). Pour $\sigma \in \mathcal{O}$, on a l'identité de fonctions rationnelles (cf. [H1, Proposition 2.3])

$$\hat{f}_\xi(P, \sigma) = \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\xi(w^{-1}\sigma).$$

2.3.

L'espace de Paley–Wiener $PW(G)$ est par définition l'image de $C_c^\infty(G)$ par transformation de Fourier. Plus précisément, un élément $\varphi = (\varphi_{P, \mathcal{O}})_{(P, \mathcal{O})}$ de

$$\bigoplus_{(P, \mathcal{O}) \in \Theta} \mathcal{P}(\mathcal{O}, i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee)$$

est dans $PW(G)$, si et seulement s'il existe $f \in C_c^\infty(G)$, tel que $\varphi_{P, \mathcal{O}} = \hat{f}(P, \mathcal{O})$ pour tout $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$.

Il est prouvé dans [H1] (cf. Théorème 0.1) que $\varphi = (\varphi_{P, \mathcal{O}})_{(P, \mathcal{O})}$ est dans $PW(G)$, si et seulement si

- (i) pour tout $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$ et tout $w \in W^G$, on a $\lambda(w)\varphi_{P, \mathcal{O}} = \varphi_{wP, w\mathcal{O}}\lambda(w)$; et si
- (ii) pour tout $(P, \mathcal{O}), (P', \mathcal{O}') \in \Theta$, on a l'identité de fonctions rationnelles

$$J_{P'|P}(\sigma)\varphi_{P, \mathcal{O}}(\sigma) = \varphi_{P', \mathcal{O}'}(\sigma)J_{P'|P}(\sigma).$$

La preuve de ce théorème utilise les résultats rappelés au numéro précédent ainsi que le fait (cf. [H1, Lemme 0.2]) que, si la famille $\varphi = (\varphi_{P, \mathcal{O}})_{(P, \mathcal{O})}$ vérifie les propriétés (i) et (ii), il existe une application polynomiale $\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}} : \mathcal{O} \rightarrow i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee$ telle que

$$\varphi_{P, \mathcal{O}}(\sigma) = \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (J_{P|\overline{wP}}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P|wP}(\sigma^\vee)\lambda(w))\xi_{\varphi_{P, \mathcal{O}}}(w^{-1}\sigma).$$

L'élément de $C_c^\infty(G)$ qui correspond à φ est déterminé de façon unique (cf. [H1, Corollaire 3.1.2]). On le notera f_φ .

2.4.

Fixons maintenant $\varphi = (\varphi_{P, \mathcal{O}})_{(P, \mathcal{O})} \in PW(G)$ et $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$. Soit $\sigma \in \mathcal{O}$ et soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G contenant P . Soit (π, V) une représentation de M' qui est un sous-quotient de $i_{P' \cap M'}^M \sigma$. Alors, comme $\varphi_{P, \mathcal{O}}(\sigma)$ laisse—comme transformée de Fourier d'un élément de $C_c^\infty(G)$ —invariants les sous-espaces G -équivariants de $i_P^G E$, cet endomorphisme définit par passage au quotient un endomorphisme $i_{P'}^G V \rightarrow i_P^G V$. Notant $\mathcal{O}_{\pi, M'}$ l'orbite de π sous M' , $\varphi_{P, \mathcal{O}}$ induit ainsi une application polynomiale $\mathcal{O}_{\pi, M'} \rightarrow i_{P' \cap K}^K V \otimes i_{P' \cap K}^K V^\vee$ que l'on notera $\varphi_{P', \mathcal{O}_{\pi, M'}}$. On désignera sa valeur en $\pi' \in \mathcal{O}_{\pi, M'}$ parfois par $\varphi(P', \pi')$. Elle est égale à l'endomorphisme $(i_{P'}^G \pi')(f_\varphi)$.

2.5.

Notons Θ_2 l'ensemble des couples (P, \mathcal{O}_0) formé d'un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ et de l'orbite inertielle unitaire \mathcal{O}_0 d'une représentation irréductible de carré intégrable de M . Si $(P, \mathcal{O}) \in \Theta$, on note $\Theta_2(\mathcal{O})$ le sous-ensemble de Θ_2 formé des couples $(P' = M'U', \mathcal{O}'_0) \in \Theta_2$ tels que $M' \supseteq M$ et que le support cuspidal de tout élément de \mathcal{O}'_0 soit donné par la classe de $W^{M'}$ -conjugaison d'un élément de \mathcal{O} .

Soit maintenant φ un élément de $PW(G)$ tel que $\varphi_{P', \mathcal{O}'} = 0$ sauf si \mathcal{O}' est conjugué à \mathcal{O} . Appelons deux couples $(P' = M'U', \mathcal{O}'_0)$ et $(P'' = M''U'', \mathcal{O}''_0)$ de $\Theta_2(\mathcal{O})$ associés, s'il existe $w \in W$ tel que $wM' = M''$ et $w\mathcal{O}'_0 = \mathcal{O}''_0$. Rappelons que $W(M, \mathcal{O})$ désigne l'ensemble des $w \in W(M)$ tels que $w\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Avec $\gamma(G/M)$ une constante (définie dans [W, I.1]), la formule de Plancherel de Harish-Chandra donne alors (cf. [W, Théorème VIII.1.1])

$$f_\varphi(g) = \sum_{(P'=M'U', \mathcal{O}'_0) \in \Theta_2(\mathcal{O})/\text{ass}} \gamma(G/M') |W(M', \mathcal{O}'_0)|^{-1} \times \int_{\mathcal{O}'_0} \text{deg}(\pi') E_{P', \pi'}^G(\varphi(P', \pi'))(g^{-1}) \mu(\pi') d\pi'. \quad (2.5.1)$$

La somme des termes indexé par des couples (P', \mathcal{O}'_0) avec $P' \neq G$ sera appelée la *partie continue* de la formule de Plancherel. La somme des autres termes sera la *partie discrète*.

3. Théorème des résidus

3.1.

Fixons un sous-groupe de Levi semi-standard M de G . Soit \mathcal{O} l'orbite inertielle sous M d'une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi semi-standard de M . Fixons par ailleurs un ensemble fini \mathcal{S} d'hyperplans affines radiciels de \mathcal{O} . On considérera dans la suite de ce paragraphe l'espace \mathcal{O} muni de cet ensemble d'hyperplans.

On note $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions rationnelles ψ sur \mathcal{O} qui sont régulières sur $\mathcal{O}_{\text{reg}} := \mathcal{O} - \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. Posons $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$ (cf. 1.4 pour la définition de ceci).

3.2.

Pour donner des équations pour les hyperplans affines radiciels, explicitons des éléments particuliers de M .

Lemme. Soit $\alpha \in \Sigma_{\text{red}}(P)$. Il existe une puissance \tilde{h}_α de h_α par un entier > 0 tel que $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ vérifie $\chi(\tilde{h}_\alpha) = 1$ si et seulement si $\chi \in \text{Stab}_M(\mathcal{O})\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$.

Preuve. Soit $m > 0$ minimal tel que $\chi(h_\alpha^m) = 1$ pour tout $\chi \in \text{Stab}_M(\mathcal{O})$. Montrons que $\tilde{h}_\alpha := h_\alpha^m$ vérifie les propriétés de l'énoncé. Comme $h_\alpha \in M_\alpha^1$, on a évidemment $\chi'(h_\alpha) = 1$ pour tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$, d'où l'une des deux implications. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ avec $\chi(h_\alpha^m) = 1$. Ceci implique que $\chi(h_\alpha)$ est une racine $m^{\text{ème}}$ de l'unité. Par minimalité de m , il existe χ_1 dans $\text{Stab}_M(\mathcal{O})$ avec $\chi_1(h_\alpha) = \chi(h_\alpha)$. Il en suit que $(\chi\chi_1^{-1})(h_\alpha) = 1$. Il en résulte alors par choix de h_α et 1.2 que $\chi\chi_1^{-1} \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$. \square

On écrira $\tilde{\alpha}$ pour le multiple de α par un réel > 0 tel que $\langle H_M(\tilde{h}_\alpha), \tilde{\alpha} \rangle = 1$.

Corollaire. Soit $\sigma \in \mathcal{O}$. Alors, pour que $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ vérifie $\sigma \otimes \chi \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$, il faut et il suffit que $\chi(\tilde{h}_\alpha) = 1$.

Preuve. On a $\sigma \otimes \chi \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$, si et seulement si il existe $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$ tel que $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma \otimes \chi'$. Ceci équivaut à $\chi\chi'^{-1} \in \text{Stab}(\sigma)$, d'où $\chi \in \text{Stab}(\sigma)\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$, ce qui équivaut à $\chi(\tilde{h}_\alpha) = 1$ par le lemme. \square

3.3.

Lemme. Soient A' et A'' deux sous-espaces affines de \mathcal{O} , $A'' \not\subseteq A'$. Alors il existe une fonction polynomiale sur \mathcal{O} qui est identiquement nulle sur A' et qui n'est pas identiquement nulle sur A'' .

Preuve. Notons M' et M'' les sous-groupes de Levi semi-standard de G associés à A' et A'' respectivement (cf. 1.4). Si $M' \not\subseteq M''$, il existe $\alpha \in \Sigma_{\text{red}}(T_M)$ avec $M_\alpha \subseteq M'$ et $M_\alpha \not\subseteq M''$. On en déduit l'existence d'un hyperplan $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$ avec $A' \subseteq \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$ et $A'' \not\subseteq \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$. On peut alors prendre le polynôme décrivant $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$ explicité dans 3.2.

Si $M' \subseteq M''$, on se ramène à $M' = M''$, en remplaçant A'' par un sous-espace affine de \mathcal{O} plus grand qui n'est pas contenu dans A' . Les arguments dans l'exemple 2 dans [MW1, V.1.2] se généralisent alors et donnent un polynôme adéquat sur \mathcal{O} . \square

3.4.

Pour $\sigma \in \mathcal{O}$, $m \in M$, posons $p_{\sigma,m} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, $\sigma \otimes \chi \mapsto (\chi(m) - 1)$, lorsque cette fonction est bien définie. Si $m = \tilde{h}_\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma(T_M)$, on écrira $p_{\sigma,\alpha}$ ou encore $p_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}}$. Il résulte de 3.2 que $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{O} en lesquels $p_{\sigma,\alpha}$ s'annule.

Pour $H = H_{\alpha,c}$ un hyperplan affine radiciel de a_M^* et $\lambda \in a_M^*$, on pose $p_H(\lambda) = p_{\alpha,c}(\lambda) = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$.

Si $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$, alors il existe pour tout $S = \mathcal{O}_{\sigma,\alpha} \in \mathcal{S}$ un unique entier $d = d_{\sigma,\alpha}(\psi) = d_S(\psi)$, tel que $\sigma' \mapsto p_{\sigma,\alpha}(\sigma')^d \psi(\sigma')$ soit régulière et non identiquement nulle sur $(\mathcal{O}_{\sigma,\alpha})_{\text{reg}}$. Si $d_{\sigma,\alpha}(\psi) \geq 1$, on parlera d'un pôle d'ordre $d_{\sigma,\alpha}(\psi)$. Si $d_{\sigma,\alpha}(\psi) \leq -1$, on parlera d'un zéro d'ordre $-d_{\sigma,\alpha}(\psi)$.

Si \mathcal{S} contient tous les hyperplans singuliers de ψ et de $1/\psi$, on appelle, pour $\sigma \in \mathcal{O}$, $d_\sigma(\psi) := \sum_{S \in \mathcal{S}, \sigma \in S} d_S(\psi)$ l'ordre de ψ en σ . Si $d = d_\sigma(\psi) > 0$, on parle d'un pôle d'ordre d , et, si $d < 0$, d'un zéro d'ordre $-d$.

Définition. Pour $\sigma' \in (\mathcal{O}_{\sigma,\alpha})_{\text{reg}}$, on pose $(\text{Res}_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}} \psi)(\sigma') = \text{Res}_{z=0} \psi(\sigma' \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}})$ (en se rappelant que $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$ est muni d'une orientation donnée par α). La fonction $\text{Res}_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}} \psi$ est donc définie sur un ouvert Zariski dense de $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$.

3.5.

Pour $\sigma' \in \mathcal{O}$ et $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$, notons $\psi_{\sigma'}$ la fonction méromorphe sur $a_{M,\mathbb{C}}^*$, donnée par $\lambda \mapsto \psi_{\sigma'}(\lambda) := \psi(\sigma' \otimes \chi_\lambda)$. Notons $D_{\tilde{\alpha}}$ la dérivée en direction de $\tilde{\alpha}$.

Lemme. Supposons que ψ ait un pôle d'ordre $d \geq 1$ sur $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}$. Alors, pour tout $\sigma' \in (\mathcal{O}_{\sigma,\alpha})_{\text{reg}}$, on a

$$(\text{Res}_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}} \psi)(\sigma') = \frac{1}{(d-1)!} (D_{\tilde{\alpha}}^{d-1}(\langle \lambda, H_M(\tilde{h}_\alpha) \rangle^d \psi_{\sigma'}(\lambda)))|_{\lambda=0}.$$

En particulier, la fonction $\text{Res}_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}} \psi$ est rationnelle.

Preuve. Par définition,

$$(\text{Res}_{\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}} \psi)(\sigma') = (\text{Res}_{z=0} \psi)(\sigma' \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}}).$$

Comme $\chi_{z\tilde{\alpha}}(\tilde{h}_\alpha) - 1 = q^{-z} - 1$ admet un zéro d'ordre 1 en $z = 0$, on trouve

$$(\text{Res}_{z=0} \psi)(\sigma' \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}}) = \frac{1}{(d-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{d-1} (\langle z\tilde{\alpha}, H_M(\tilde{h}_\alpha) \rangle^d \psi_{\sigma'}(z\tilde{\alpha}))|_{z=0}.$$

Ceci est bien égal à l'expression dans l'énoncé. □

3.6.

Soient C_1 et C_2 deux composantes connexes adjacentes de $\mathfrak{R}(\mathcal{O})_{\text{reg}}$. Notons $H_{\alpha,c}$ l'hyperplan affine qui les sépare (cf. 1.4) muni de l'orientation donnée par α . On dira que C_i est *néгатif* (respectivement *positif*) pour (l'orientation de) $H_{\alpha,c}$, si les éléments de C_i vérifient $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle < c$ (respectivement $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle > c$).

Proposition. Soit ψ dans $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$. Soient C_1 et C_2 deux composantes connexes adjacentes dans $\mathfrak{R}(\mathcal{O})_{\text{reg}}$ séparées par $H_{\alpha,c}$ et supposons C_1 négatif et C_2 positif pour $H_{\alpha,c}$. Pour $r_1 \in C_1$, $r_2 \in C_2$ et r_{12} dans la face commune de C_1 et C_2 , on a alors, modulo une constante $\kappa > 0$ qui ne dépend pas de ψ ,

$$\int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_2} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) - \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_1} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) = \kappa \sum_S \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_{12}} (\text{Res}_S \psi)(\sigma) d_S \mathfrak{S}(\sigma),$$

la somme portant sur les hyperplans $S \in \mathcal{S}$ de partie réelle $H_{\alpha,c}$.

Preuve. Posons $M' = M_\alpha$. Comme les intégrales ne dépendent pas du choix de $r_j \in C_j$, on peut supposer que $r_2 - r_1$ soit un multiple de $\tilde{\alpha}$ par un réel > 0 et que r_{12} soit sur la droite reliant r_1 et r_2 . Fixons $\sigma_0 \in \mathcal{O}$ tel que la projection de $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ sur a_M^* soit 0. Posons $r_{j,\alpha} = \langle H_M(\tilde{h}_\alpha), r_j \rangle$. Par choix de r_1, r_2 et r_{12} , ils ont la même projection sur $a_{M'}^*$ que l'on note r' . On obtient alors, avec κ une constante positive qui dépend uniquement du choix des mesures que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_2} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) - \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_1} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \kappa \left(\frac{\log q}{2\pi} \int_0^{2\pi/\log q} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{(r_2, \alpha + it)\tilde{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\log q}{2\pi} \int_0^{2\pi/\log q} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{(r_1, \alpha + it)\tilde{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) dt \right) \end{aligned}$$

(cf. 1.6 pour la définition de $\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}$ et celle de l'intégrale intérieure).

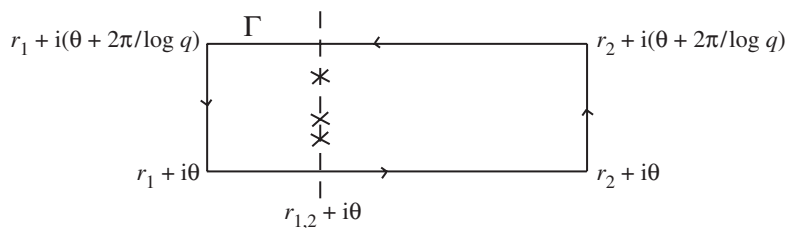


Figure 1.

Choisissons θ tel que, pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}$, $\sigma \otimes \chi_{(i\theta+r_{12})\bar{\alpha}}$ ne soit sur aucun hyperplan singulier de partie réelle $H_{\alpha, c}$. La différence des intégrales est alors égale à

$$\frac{\log q}{2\pi} \int_{\theta+0}^{\theta+2\pi/\log q} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{(r_{2,\alpha}+it)\bar{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) dt - \frac{\log q}{2\pi} \int_{\theta+0}^{\theta+2\pi/\log q} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{(r_{1,\alpha}+it)\bar{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) dt$$

Posons

$$f(z) = \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{z\bar{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ pour lequel cette expression fait un sense. Ceci définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . Comme $f(r + i\theta) = f(r + i(\theta + 2\pi/\log q))$ pour $r_{1,\alpha} \leq r \leq r_{2,\alpha}$, l'expression ci-dessus est égale à l'intégrale de $(1/i)f(z)$ le long du contour Γ ci-dessus, le facteur $1/i$ venant du fait que l'on intègre ci-dessus le long du chemin $t \mapsto it$.

Pour tout $S \in \mathcal{S}$ de partie réelle $H_{\alpha, c}$, il existe un unique nombre complexe c_S de partie imaginaire dans $]\theta, \theta + 2\pi[$, tel que S soit l'orbite de $\sigma_0 \otimes \chi_{c_S\bar{\alpha}}$ sous M' . Suite à nos hypothèses, $\Re(c_S) = r_{12,\alpha}$.

L'expression ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \psi(\sigma \otimes \chi_{z\bar{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} \left(\int_{\Gamma} \psi(\sigma \otimes \chi_{z\bar{\alpha}}) dz \right) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{O}_{\sigma_0, M', r'}} 2\pi i \sum_S (\text{Res}_{z=c_S} \psi)(\sigma \otimes \chi_{z\bar{\alpha}}) d\mathfrak{S}_{M'}(\sigma). \end{aligned}$$

Pour trouver l'expression de l'énoncé, il reste à remarquer que

$$(\text{Res}_{z=c_S} \psi)(\sigma' \otimes \chi_{z\bar{\alpha}}) = (\text{Res}_{z=0} \psi)(\sigma' \otimes \chi_{(z+c_S)\bar{\alpha}}) = (\text{Res}_S \psi)(\sigma').$$

□

3.7.

Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ et soit $\mathcal{D} = (S_0, \dots, S_h)$ un ensemble ordonné d'éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ avec $S_0 = \mathcal{O}$, S_i hyperplan affine radiciel de S_{i-1} pour $i = 1, \dots, h$ et $S_h = A$, où on suppose par ailleurs implicitement que S_i soit muni d'une orientation en tant qu'hyperplan affine de S_{i-1} . On pose $\text{Res}_{\mathcal{D}}(\psi) = \text{Res}_{S_h}(\text{Res}_{S_{h-1}}(\dots \text{Res}_{S_1} \psi))$. L'opérateur $\text{Res}_{\mathcal{D}}$ sera appelé un *opérateur résidu en A sur \mathcal{O} relatif à \mathcal{S}* . Une *donnée de résidu en A sur \mathcal{O} relative à \mathcal{S}* , notée Res_A , sera alors une combinaison linéaire à coefficients réels d'opérateurs résidus en A .

Remarque. A l'aide d'une récurrence, on déduit facilement de la définition d'un opérateur résidu et du Lemme 3.5 que tout opérateur résidu en A définit une application linéaire $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ dans $\mathcal{R}(A, \mathcal{S}(A))$. Il en est alors de même d'une donnée de résidu en A .

Pour $\underline{d} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$, notons $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \underline{d})$ le sous-espace de $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ formé des applications rationnelles ψ telles que $d_S(\psi) \leq d_S$ pour tout $S \in \mathcal{S}$ (cf. 3.4 pour la définition de $d_S(\psi)$).

Proposition. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ et soit Res_A une donnée de résidu en A sur \mathcal{O} relative à \mathcal{S} . Soit $\underline{d} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$ et soit $M' = M_A$ le sous-groupe de Levi associé à A . Alors il existe un opérateur différentiel holomorphe $D = D_{\lambda}$ sur $a_{M', \mathbb{C}}^{M'}$ à coefficients réels constants, tel que pour tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \underline{d})$ et tout $\sigma \in A_{\text{reg}}$, on ait

$$(\text{Res}_A \psi)(\sigma) = D_{\lambda} \left(\left(\prod_{S \in \mathcal{S}_A} p_{\mathcal{R}(S)}^{d_S}(\lambda) \right) \psi_{\sigma}(\lambda) \right)_{|\lambda=0}$$

(avec ψ_{σ} définie en 3.5).

Preuve. Il suffit de considérer le cas où Res_A est un opérateur résidu en A . Il existe donc un ensemble ordonné $\mathcal{D} = (S_0, \dots, S_h)$ de sous-espaces affines dans \mathcal{O} avec $S_0 = \mathcal{O}$, S_i hyperplan de S_{i-1} pour $i = 1, \dots, h$ et $S_h = A$, tel que $\text{Res}_A = \text{Res}_{\mathcal{D}}$. On va effectuer une récurrence sur h . Si $h = 0$, il n'y a rien à montrer. Sinon, posons $A' = S_{h-1}$ et $\mathcal{D}' = (S_0, \dots, S_{h-1})$. On a donc $\text{Res}_A = \text{Res}_{S_h} \circ \text{Res}_{\mathcal{D}'}$. Posons $M' = M_{A'}$. Soit α la racine positive dans $\Sigma(T_{M'})$ telle que M'_{α} soit le sous-groupe de Levi associé à A et qui reflète l'orientation de A en tant qu'hyperplan de A' . Par hypothèse de récurrence, il existe un opérateur différentiel holomorphe à coefficients réels constants D' sur $a_{M', \mathbb{C}}^{M'}$, tel que, pour tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \underline{d})$, on ait

$$(\text{Res}_{A'} \psi)(\sigma \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}}) = D' \left(\left(\prod_{S \in \mathcal{S}_{A'}} p_{\mathcal{R}(S)}^{d_S}(\lambda) \right) \psi_{\sigma}(\lambda + z\tilde{\alpha}) \right)_{|\lambda=0}$$

pour $\sigma \in A_{\text{reg}}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}} \in A'_{\text{reg}}$. Posons $p(\lambda) = \prod_{S \in \mathcal{S}_A - \mathcal{S}_{A'}} p_{\mathcal{R}(S)}^{d_S}(\lambda)$ pour $\lambda \in a_{M', \mathbb{C}}^*$.

Par la règle de Leibniz, il existe des polynômes Q_j à coefficients réels sur a_M^* et des opérateurs différentiels D_j sur $a_M^{M'}$ holomorphes à coefficients réels constants, tels que

l'on ait pour $z \neq 0$, mais près de 0, et toute fonction f méromorphe sur $a_M^{M'}$ et holomorphe en 0, avec m un certain entier ≥ 0 ,

$$D'(p(\lambda + z\tilde{\alpha})^{-1}f(\lambda))|_{\lambda=0} = p(z\tilde{\alpha})^{-m} \sum_j Q_j(z\tilde{\alpha})(D_j f(\lambda))|_{\lambda=0}.$$

On en déduit que

$$(\text{Res}_{A'} \psi)(\sigma \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}}) = p(z\tilde{\alpha})^{-m} \sum_j Q_j(z\tilde{\alpha}) D_j \left(\left(\prod_{S \in \mathcal{S}_A} p_{\Re(S)}^{d_S}(\lambda + z\tilde{\alpha}) \right) \psi_\sigma(\lambda + z\tilde{\alpha}) \right) |_{\lambda=0}.$$

On observe alors qu'il existe un entier m' et une constante $c \in \mathbb{R}$ tels que $p(z\tilde{\alpha}) = cz^{m'}$, et on trouve, puisque les fonctions de la forme $D_j(\cdot)|_{\lambda=0}$ dans l'expression ci-dessus sont régulières en $z = 0$,

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{S_h}(\text{Res}_{A'} \psi)(\sigma) \\ &= \text{Res}_{z=0}(\text{Res}_{A'} \psi)(\sigma \otimes \chi_{z\tilde{\alpha}}) \\ &= \frac{1}{(mm' - 1)!} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{mm' - 1} c^{-m} \sum_j Q_j(z\tilde{\alpha}) D_j \left(\left(\prod_{S \in \mathcal{S}_A} p_{\Re(S)}^{d_S}(\lambda + z\tilde{\alpha}) \right) \psi_\sigma(\lambda + z\tilde{\alpha}) \right) \right]_{\lambda=0} |_{z=0}. \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau la règle de Leibniz, on obtient une expression du type voulu, en se rappelant que les polynômes Q_j sont à coefficients réels. □

3.8.

Les résultats techniques de ce numéro seront utiles avec ceux de **3.7** pour établir des propriétés d'unicité des données de résidu.

Par ce qui a été expliqué en **1.2**, on peut introduire des variables z_1, \dots, z_n sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ déployant la suite exacte $1 \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M') \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow X(M \cap M^1/M^1) \rightarrow 1$, ainsi qu'une base de $a_{M,\mathbb{C}}^{M'}$ formé d'éléments de $a_M^{M'}$, telles que

- (i) les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ sont les polynômes de Laurent en z_1, \dots, z_n , les fonctions polynomiales sur $X(M \cap M^1/M^1)$ correspondant aux variables z_1, \dots, z_m pour un certain entier $m, 0 \leq m \leq n$;
- (ii) pour tout vecteur $\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)$ formé d'entiers rationnels, les fonctions sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'}$ qui sont les composées de monômes de Laurent sur $X(M^1 \cap M/M^1)$ de degrés partiels donnés par le vecteur \underline{k} avec l'application $\lambda \mapsto \chi_\lambda$, sont des produits d'expressions de la forme $q^{k_j \lambda_j}$ par une constante, les λ_j désignant les coordonnées de λ .

La notion de degré et de monôme utilisée dans le reste de cette section sera celle déterminée par le choix de base et de variables ci-dessus.

Lemme. Soit D un opérateur différentiel holomorphe sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ à coefficients constants donné par un monôme unitaire non nul. Soit $\sigma \in \mathcal{O}$. Il existe une fonction polynomiale ψ sur \mathcal{O} telle que $(D_\lambda \psi_\sigma(\lambda))|_{\lambda=0} \neq 0$, mais $(D'_\lambda \psi_\sigma(\lambda))|_{\lambda=0} = 0$ pour tout opérateur différentiel holomorphe à coefficients constants $\neq D$ venant d'un monôme unitaire de degré total inférieur ou égal à celui de D .

Preuve. Soit ψ une fonction polynomiale sur \mathcal{O} , invariante pour l'action par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$. Il existe des fonctions $p_{\underline{k}}$ sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ qui sont les composées de monômes de Laurent sur $X(M'^1 \cap M/M^1)$ de degrés partiels donnés par le vecteur \underline{k} avec l'application $\lambda \mapsto \chi_\lambda$, tels que, pour tout $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$, on ait $\psi(\sigma \otimes \chi_\lambda) = \sum_{\underline{k}} p_{\underline{k}}(\lambda)$. Par nos choix, si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et k_1, \dots, k_m sont les coordonnées de λ et \underline{k} respectivement, $p_{\underline{k}}$ est un produit d'expressions de la forme $q^{k_j \lambda_j}$ par une constante.

A tout opérateur différentiel holomorphe à coefficients constants D correspond donc un polynôme Q_D sur $\mathbb{R}^{\dim(a_{M,\mathbb{C}}^{M'*})}$, tel que $(D_\lambda \psi(\sigma \otimes \chi_\lambda))|_{\lambda=0} = \sum_{\underline{k}} Q_D(\log q_{\underline{k}}) p_{\underline{k}}(0)$. L'application $D \rightarrow Q_D$ est linéaire, et, si D vient d'un monôme, Q_D est un monôme du même degré.

Tout revient donc à choisir une famille $(a_{\underline{k}})$ de nombres complexes dont presque tous—sauf un nombre fini—sont nuls, telle que $(a_{\underline{k}})$ soit orthogonale à $(Q_{D'}(\log q_{\underline{k}}))$ pour tout $D' \neq D$ de degré total inférieur ou égal à celui de D , et non orthogonale à $(Q_D(\log q_{\underline{k}}))$. Or, ceci est toujours possible, puisque des monômes de degrés partiels distincts sont linéairement indépendants. \square

Proposition. Soit D un opérateur différentiel holomorphe sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ à coefficients constants. Soit $\sigma \in \mathcal{O}$, soit p un polynôme sur \mathcal{O} qui n'est pas identiquement nul sur $A := \mathcal{O}_{\sigma, M'}$, et soit \tilde{p} une fonction méromorphe sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ qui est régulière et non nulle dans l'origine de $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$. Supposons

$$\int_{\Re(\sigma')=\Re(\sigma)} D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)p_{\sigma'}(\lambda)\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} d_A \Im(\sigma') = 0$$

pour toute fonction polynomiale ψ sur \mathcal{O} .

Alors $D = 0$.

Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme. Sous les hypothèses de la proposition, on a $D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)p_{\sigma'}(\lambda)\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} = 0$ pour tout $\sigma' \in \mathcal{O}$ avec $\Re(\sigma') = \Re(\sigma)$.

Preuve. On peut écrire

$$p_{\sigma'}(\lambda)\psi_{\sigma'}(\lambda) = \sum_{\underline{k}} m_{\underline{k}}(\sigma')\psi_{\underline{k}}(\lambda),$$

où $m_{\underline{k}}(\sigma')$ est un polynôme sur $\mathcal{O}_{\sigma, M'}$ dont les degrés partiels par rapport aux variables de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$ sont donnés par le vecteur \underline{k} , et où $\psi_{\underline{k}}$ est une fonction sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ qui est le composé d'un polynôme sur $X(M \cap M'^1/M^1)$ avec l'application $\lambda \mapsto \chi_\lambda$. Il suffit de prouver que $D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)\psi_{\underline{k}}(\lambda))|_{\lambda=0} = 0$ pour tout \underline{k} avec $m_{\underline{k}} \neq 0$.

Or, par linéarité de D_λ , on trouve sous les hypothèses de la proposition par le théorème de Cauchy avec κ une constante non nulle et $\underline{0}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles,

$$0 = \int_{\Re(\sigma')=\Re(\sigma)} D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)p_{\sigma'}(\lambda)\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} d_{\mathcal{O}_{\sigma,M'}} \Im(\sigma') = \kappa m_{\underline{0}} D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)\psi_{\underline{0}}(\lambda))|_{\lambda=0}.$$

Comme $m_{\underline{0}}$ est constant, $m_{\underline{0}} \neq 0$ implique $(D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)\psi_{\underline{0}}(\lambda)))|_{\lambda=0} = 0$. Le résultat pour les autres \underline{k} se prouvent par le même argument, en remplaçant la fonction ψ par $m_{\underline{k}}^{-1}\psi$ pour tout \underline{k} tel que $m_{\underline{k}} \neq 0$. □

Démonstration de la proposition. Supposons par absurde $D \neq 0$. Notons $D_{\underline{k}}$ un monôme non nul de degré total maximal dans D . Par hypothèse, il existe $\sigma' \in \mathcal{O}_{\sigma,M'}$ tel que $p_{\sigma'}(0) \neq 0$. Choisissons ψ satisfaisant aux conclusions du premier lemme relatif à $D_{\underline{k}}$ et σ' . Alors $(D_{\underline{k}}\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} \tilde{p}(0)p_{\sigma'}(0) \neq 0$, et, par les règles de Leibniz, $D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)p_{\sigma'}(\lambda)\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} = \tilde{p}'(0)p_{\sigma'}(0)(D_{\underline{k}}\psi_{\sigma'}(\lambda))|_{\lambda=0} \neq 0$. Ceci contredit les conclusions du deuxième lemme, d'où une contradiction, l'espace des fonctions holomorphes sur $a_{M,\mathbb{C}}^{M'*}$ étant invariant par translations. □

3.9.

Proposition. Soient $Res_A^{(1)}$ et $Res_A^{(2)}$ deux données de résidus en A telles que $Res_A^{(1)} \psi = Res_A^{(2)} \psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_A)$. Alors $Res_A^{(1)} = Res_A^{(2)}$.

Preuve. Soit $\underline{d} \in \mathbb{N}^S$. Posons $M' = M_A$ et notons $D^{(1)}$ (respectivement $D^{(2)}$) un opérateur différentiel holomorphe à coefficients constants qui vérifie les conclusions de la Proposition 3.7 par rapport à $Res_A^{(1)}$ (respectivement $Res_A^{(2)}$) et \underline{d} . Il suffit de prouver que $D := D^{(1)} - D^{(2)} = 0$.

Soit $\sigma \in A_{reg}$. Par hypothèse, on a, avec $\tilde{p}(\lambda) = \prod_{S \in \mathcal{S}_A} (p_{\Re(S)}^{d_S}(\lambda) p_S^{-d_S}(\sigma \otimes \chi_\lambda))$ (cf. 3.4), $D_\lambda(\tilde{p}(\lambda)\psi(\sigma \otimes \chi_\lambda))|_{\lambda=0} = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. Par les arguments de la preuve de la Proposition 3.8, ceci implique $D = 0$. □

3.10.

Supposons \mathcal{S} stable par passage à la partie imaginaire, i.e. que $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha} \in \mathcal{S}$ implique $\mathcal{O}_{\Im_M(\sigma),\alpha} \in \mathcal{S}$ (chaque élément de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ est alors le translaté d'un hyperplan affine de $\Re(\mathcal{O})$ passant par l'origine $r(\mathcal{O})$ de $\Re(\mathcal{O})$ et appartenant à \mathcal{H}).

Avant d'énoncer le théorème des résidus, nous allons choisir selon le procédé suivant, pour tout $L \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$, un ensemble de points de L_{reg} qui est contenu dans la réunion des composantes connexes de L_{reg} dont la clôture contient l'origine $r(L)$ de L : Remarquons d'abord que, l'ensemble \mathcal{L} étant fini, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $L \in \mathcal{L}$ la boule $B(r(L), \epsilon)$ dans $r(\mathcal{O}) + a_{M'}^*$ de centre $r(L)$ et de rayon ϵ n'ait une intersection non vide avec un hyperplan affine $H \in \mathcal{H}$ que si celui-ci contient $r(L)$.

Fixons maintenant $L \in \mathcal{L}$ et notons M_L le sous-groupe de Levi semi-standard qui lui est associé. Par nos hypothèses, $r(\mathcal{O}) + a_{M_L}^* \in \mathcal{L}$. Désignons par $\mathcal{H}_0(r(\mathcal{O}) + a_{M_L}^*)$ l'ensemble

formé des $H \in \mathcal{H}(r(\mathcal{O}) + a_{M_L}^*)$ avec H passant par $r(\mathcal{O})$. Notons $\mathcal{P}_S(M_L)$ l'ensemble des composantes connexes de

$$a_{M_L,0}^* := a_{M_L}^* - \bigcup_{H \in \mathcal{H}_0(r(\mathcal{O}) + a_{M_L}^*)} (-r(\mathcal{O}) + H).$$

Par choix de ϵ , la translation de vecteur $r(L)$ dans a_0^* envoie $B(0, \epsilon) \cap a_{M_L,0}^*$ dans $B(r(L), \epsilon) \cap L_{\text{reg}}$. Choisissons pour tout $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$ un élément $\epsilon_Q \in Q \cap B(0, \epsilon)$. Alors les points $r(L) + \epsilon_Q$, $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$, se trouvent dans des composantes connexes de L_{reg} dont la clôture contient $r(L)$.

Théorème. *Soit C une composante connexe de $\mathfrak{R}(\mathcal{O})_{\text{reg}}$. Il existe pour tout $A \in \mathcal{A}(S)$ une donnée de résidu $\text{Res}_A = \text{Res}_A^C$ qui ne dépend que du choix de C , telle que, pour toute fonction ψ dans $\mathcal{R}(\mathcal{O}, S)$ et tout $r \in C$, on ait*

$$\int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \times \sum_{A \in \mathcal{A}(S), \mathfrak{R}(A)=L} \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A^C \psi)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma).$$

Par ailleurs, $\text{Res}_{\mathcal{O}} = \text{id}$ et, pour $S \in \mathcal{S}$, Res_S^C est un multiple de Res_S par un réel (qui peut être nul).

Remarque. On aurait évidemment pu prendre ci-dessus tout de suite la somme sur tous les éléments A de $\mathcal{A}(S)$ (ce que l'on fera plus tard), mais à ce stade il nous a semblé plus utile d'ordonner les éléments de $\mathcal{A}(S)$ par leur partie réelle.

Preuve. La preuve va suivre les lignes de celle du Théorème 1.13 dans [BS], en utilisant les résultats préliminaires établis dans les numéros précédents. Rappelons que l'article [BS] utilise une nouvelle approche inspirée de [HO1] et cite [A, MW1, L], la preuve de l'unicité des données de résidus étant plus indirecte dans le travail de Langlands (cf. [MW1, V.2.2 Remarques (2) et V.3.13 Remarques (ii)]).

Pour montrer l'existence, on va effectuer une récurrence sur la dimension m de a_M^* . Si $m = 0$, il n'y a rien à montrer. Soit $m > 0$ et supposons l'existence établie lorsque $\dim(a_M^*) < m$. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}(\sigma) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_{\mathcal{O}})} |\mathcal{P}_S(M_{\mathcal{O}})|^{-1} \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r(\mathcal{O})+\epsilon_Q} (\text{Res}_{\mathcal{O}} \psi)(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) \\ & \quad + \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_{\mathcal{O}})} |\mathcal{P}_S(M_{\mathcal{O}})|^{-1} \left(\int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) - \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r(\mathcal{O})+\epsilon_Q} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) \right). \end{aligned}$$

La première partie est identique à la somme des termes de l'énoncé correspondant à $L = \Re(\mathcal{O})$. Les termes entre parenthèses (\cdot) se décomposent en somme de termes de la forme

$$\int_{\Re(\sigma)=r_2} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\Im(\sigma) - \int_{\Re(\sigma)=r_1} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}\Im(\sigma)$$

avec r_1 et r_2 dans des composantes connexes adjacentes C_1 et C_2 de $\Re(\mathcal{O})_{\text{reg}}$.

Notons $H_{\alpha,c}$ l'hyperplan de $\Re(\mathcal{O})$ qui sépare C_1 et C_2 . On applique la Proposition 3.6 à la différence de ces intégrales et on obtient que celle-ci est modulo une constante réelle égale à

$$\sum_S \int_{\Re(\sigma)=r_{12}} (\text{Res}_S \psi)(\sigma) d_S \Im(\sigma),$$

la somme portant sur les hyperplans $S \in \mathcal{S}$ de partie réelle $H_{\alpha,c}$. Fixons un tel hyperplan S . Le sous-groupe de Levi associé à $H_{\alpha,c}$ étant M_α , l'hypothèse de récurrence s'applique à l'intégrale $\int_{\Re(\sigma)=r_{12}} (\text{Res}_S \psi)(\sigma) d_S \Im(\sigma)$, et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(\sigma)=r} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}}(\sigma) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(L)} \sum_{A \in \mathcal{A}(S), \Re(A)=L} c(A) \int_{\Re(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A \psi)(\sigma) d_A \Im(\sigma), \end{aligned}$$

où $c(A)$ désigne une constante réelle qui peut éventuellement être nulle. Mais peu importe, en multipliant Res_A par une constante convenable qui peut être nulle, on obtient une expression du type voulu.

Prouvons maintenant l'unicité. Il suffit de montrer que, si une famille $(\text{Res}_A)_{A \in \mathcal{A}(S)}$ de données de résidu vérifie

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \sum_{A \in \mathcal{A}(S), \Re(A)=L} \int_{\Re(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A \psi)(\sigma) d_A \Im(\sigma) = 0$$

pour toute $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$, alors $\text{Res}_A \equiv 0$ pour tout A .

On va effectuer une récurrence sur la dimension de $L = \Re(A)$. Soit $0 \leq m \leq \dim(a_M^*)$ et supposons $\text{Res}_A \equiv 0$ pour tout A avec $\Re(A)$ de dimension $> m$. (Pour $m = \dim(a_M^*)$, ceci est certainement vrai.) On a alors

$$0 = \sum_{L \in \mathcal{L}; \dim(L) \leq m} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \sum_{A \in \mathcal{A}(S), \Re(A)=L} \int_{\Re(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A \psi)(\sigma) d_A \Im(\sigma)$$

pour toute $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$. Fixons $A \in \mathcal{A}(S)$ avec $L := \Re(A)$ de dimension m . D'après le Lemme 3.3, il existe pour tout $A' \in \mathcal{A}(S)$, $A' \neq A$, dont la partie réelle est de dimension $\leq m$ un polynôme $p_{A'}$ sur \mathcal{O} qui est identiquement nul sur A' , mais qui n'est pas identiquement nul sur A .

Par suite, il existe, pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^S$, un polynôme p sur \mathcal{O} qui n'est pas identiquement nul sur A , telle que $\text{Res}_{A'}(p\psi) \equiv 0$ pour tout $A' \neq A$ et toute $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \underline{d})$. On en

déduit

$$0 = \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \int_{\Re(\sigma)=r(A)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A p\psi)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma).$$

Ceci est en particulier vérifié pour tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_A, \underline{d}_{|\mathcal{S}_A})$ (ici $\underline{d}_{|\mathcal{S}_A}$ désigne l'élément de $\mathbb{N}^{\mathcal{S}_A}$ de composante d_S en tout $S \in \mathcal{S}_A$). Pour de telles ψ , $\text{Res}_A(p\psi)$ est une fonction régulière sur A , en sorte que l'on peut remplacer $r(L) + \epsilon_Q$ par $r(L)$ par le théorème de Cauchy pour tout $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$. On obtient donc

$$0 = \int_{\Re(\sigma)=r(A)} (\text{Res}_A p\psi)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma).$$

Posons $M' = M_A$. D'après la Proposition 3.7, il existe un opérateur différentiel holomorphe $D = D_\lambda$ sur $a_{M, \mathbb{C}}^{M', *}$ à coefficients réels constants, tel que

$$(\text{Res}_A(p\psi))(\sigma) = D_\lambda \left(\left(\prod_{S \in \mathcal{S}_A} p_{\Re(S)}^{d_S}(\lambda) \right) p_\sigma(\lambda) \psi_\sigma(\lambda) \right)_{|\lambda=0}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_A, \underline{d}_{|\mathcal{S}_A})$, d'où, avec $\tilde{p}(\lambda) = \prod_{S \in \mathcal{S}_A} (p_{\Re(S)}^{d_S}(\lambda) p_S^{-d_S}(\sigma \otimes \chi_\lambda))$,

$$0 = \int_{\Re(\sigma)=r(A)} D_\lambda(\tilde{p}(\lambda) p_\sigma(\lambda) \psi_\sigma(\lambda))_{|\lambda=0} d_A \mathfrak{S}(\sigma)$$

pour toute fonction polynomiale ψ sur \mathcal{O} .

Comme \tilde{p} est une fonction méromorphe sur $a_{M, \mathbb{C}}^{M', *}$ qui est régulière et non nulle en 0, on peut appliquer la Proposition 3.9 qui montre que $D = 0$, d'où $\text{Res}_A \equiv 0$. \square

4. La fonction μ de Harish-Chandra, son système de racines singulières et son groupe de Weyl

On se fixe dans cette section un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$, et \mathcal{O} désignera l'orbite inertielle d'une représentation irréductible cuspidale de M .

4.1.

Proposition.

- (i) *Supposons M maximal. Si μ n'est pas constante sur \mathcal{O} , il existe une représentation unitaire $\sigma \in \mathcal{O}$ telle que $\mu(\sigma) = 0$. Posons $\Sigma_{\text{red}}(T_M) = \{\alpha, -\alpha\}$. Alors il existe une constante $c_\alpha > 0$ et des nombres réels strictement positifs $k := k_\alpha$ et $l := l_\alpha$ tels que l'on ait, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (et $\tilde{\alpha}$ défini dans **3.2**), l'identité de fonctions rationnelles*

$$\mu(\sigma \otimes \chi_{\lambda \tilde{\alpha}}) = c_\alpha \mu_{\Re}(\sigma \otimes \chi_{\lambda \tilde{\alpha}}) \mu_{\Im}(\sigma \otimes \chi_{\lambda \tilde{\alpha}})$$

avec

$$\mu_{\Re}(\sigma \otimes \chi_{\lambda \tilde{\alpha}}) = \frac{(1 - q^\lambda)(1 - q^{-\lambda})}{(1 - q^{k-\lambda})(1 - q^{k+\lambda})}$$

et

$$\mu_{\mathfrak{S}}(\sigma \otimes \chi_{(\pi i / \log q + \lambda)\tilde{\alpha}}) = \begin{cases} \frac{(1 - q^\lambda)(1 - q^{-\lambda})}{(1 - q^{l-\lambda})(1 - q^{l+\lambda})} & \text{si } \mu(\sigma \otimes \chi_{(\pi i / \log q)\tilde{\alpha}}) = 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) Soit $\sigma \in \mathcal{O}$ une représentation unitaire. L'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma_{\text{red}}(T_M)$ telles que $\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0$ forme un système de racines $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$. Si α, β sont des racines dans $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$ de même longueur, alors $k_\alpha = k_\beta$ et $l_\alpha = l_\beta$ (i.e. si l'un des deux nombres est défini, l'autre l'est aussi, et les deux nombres sont égaux).

Preuve. L'assertion (i) est le Théorème 1.6 de [S2]. (Remarquons que la preuve de ce théorème donnée dans [S2] repose sur la simplicité des pôles de μ^{M_α} dont la preuve dans [S1] est erronée, comme cela nous a été rapporté par A. Silberger. L'auteur connaît une autre preuve de ce résultat qui lui a été communiqué par J.-L. Waldspurger.) Concernant l'assertion (ii), le fait que $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$ est un système de racines est indiqué dans [S3, 3.5]. (La preuve est analogue à celle de la Proposition 4.2 ci-après.) Les autres assertions de (ii) résultent alors du fait que le groupe de Weyl de $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$ est inclus dans $W(M, \mathcal{O})$ (cf. [S3, 3.5]) et que la fonction μ est invariante par $W(M, \mathcal{O})$ (cf. 1.5). \square

Définition. Notons $\Sigma_{\text{sp}}^+(\sigma)$ un ensemble de racines positives dans $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$ pour un certain ordre. On définit

$$\mu_{\text{sp},\sigma} = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\text{sp}}^+(\sigma)} \mu_{\mathbb{R}}^{M_\alpha} \quad \text{et} \quad \mu_{\text{ns},\sigma} = \mu \mu_{\text{sp},\sigma}^{-1}.$$

Remarquons que $\mathfrak{S}(\sigma)$ est un point régulier pour $\mu_{\text{ns},\sigma}$ et que $\mu_{\text{ns},\sigma}(\mathfrak{S}(\sigma)) \neq 0$.

4.2.

Notons $\Sigma_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des $\alpha \in \Sigma_{\text{red}}(T_M)$ tels qu'il existe $w_\alpha \in W^{M_\alpha}(M, \mathcal{O})$ vérifiant $w_\alpha(P \cap M_\alpha) = \bar{P} \cap M_\alpha$. (L'élément w_α est nécessairement unique (cf. [Cs, 7.1]).)

Lemme. L'automorphisme induit par w_α sur a_M^* est une réflexion vérifiant $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Preuve. Comme $w_\alpha(P \cap M_\alpha)w_\alpha^{-1} = \bar{P} \cap M_\alpha$, il est clair que $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$. L'espace $a_M^{M_\alpha^*}$ étant de dimension 1, l'automorphisme induit par w_α sur $a_M^{M_\alpha^*}$ est une réflexion. Pour que l'automorphisme induit par w_α sur a_M^* soit une réflexion, il reste à vérifier que w_α agit trivialement dans $a_{M_\alpha}^*$. Or, ceci est immédiat, puisque $w_\alpha \in M_\alpha$ et que $a_{M_\alpha}^*$ a une base formée de caractères de M_α . \square

Notons $W_{\mathcal{O}}$ le sous-groupe de $W(M, \mathcal{O})$ engendré par les réflexions w_α avec $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. La proposition suivante est analogue à celle sur les racines ω -spéciales dans le numéro 3.5 dans [S3].

Proposition. L'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est un système de racines dans un sous-espace $a_{M,\mathcal{O}}^*$ de a_M^* . Il est invariant par $W(M, \mathcal{O})$. Son groupe de Weyl est engendré par les restrictions des réflexions w_α de a_M^* à ce sous-espace. Il est isomorphe à $W_{\mathcal{O}}$ au moyen de cette restriction. Le groupe $W_{\mathcal{O}}$ est distingué dans $W(M, \mathcal{O})$.

Preuve. On va appliquer les Propositions 8 et 9 du paragraphe 2, chapitre VI de [B]. Notons $a_{M,\mathcal{O}}^*$ le sous-espace de a_M^* engendré par $\Sigma_{\mathcal{O}}$. Remarquons d'abord que $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est stable pour l'action par $W(M, \mathcal{O})$, puisque $w^{-1}(P \cap M_{\alpha})w = wPw^{-1} \cap M_{w\alpha}$ et que $ww_{\alpha}w^{-1}(wPw^{-1} \cap M_{w\alpha}) = (w\bar{P}w^{-1} \cap M_{\alpha})$. Notons $W'_{\mathcal{O}}$ l'image de $W_{\mathcal{O}}$ dans $GL(a_{M,\mathcal{O}}^*)$ et w' l'image d'un élément $w \in W_{\mathcal{O}}$ par cette application.

Par ce qui précède, le groupe $W'_{\mathcal{O}}$ est engendré par des réflexions. Il est essentiel, i.e. aucun élément $\neq 0$ de $a_{M,\mathcal{O}}^*$ n'est invariant par $W'_{\mathcal{O}}$: comme $\Sigma_{\mathcal{O}}$ engendre $a_{M,\mathcal{O}}^*$ et que v invariant par $W_{\mathcal{O}}$ implique $\sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} wv \in \mathbb{R}^*v$, il suffit de vérifier que $\sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} w\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. Or, on a

$$\sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} w\alpha = \sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} w(w_{\alpha}\alpha) = - \sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} w\alpha,$$

d'où $\sum_{w \in W_{\mathcal{O}}} w\alpha = 0$.

Notons $L_{M,\mathcal{O}}$ le \mathbb{Z} -sous-module de $a_{M,\mathcal{O}}^*$ engendré par $\Sigma_{\mathcal{O}}$. Il est sans torsion et de type fini, donc libre de même rang que $a_{M,\mathcal{O}}^*$. On a vu que $L_{M,\mathcal{O}}$ est invariant par $W'_{\mathcal{O}}$. La Proposition 9 [B] prouve donc que $W'_{\mathcal{O}}$ est le groupe de Weyl d'un système de racines dans $a_{M,\mathcal{O}}^*$. Il résulte alors des propositions 8 et de la preuve de l'assertion ((iv) implique (ii)) de la Proposition 9 [B] que $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est un système de racines de groupe de Weyl $W'_{\mathcal{O}}$.

Il reste à voir que la restriction $W_{\mathcal{O}} \rightarrow W'_{\mathcal{O}}$ est injective. Soit $w \in W_{\mathcal{O}}$ d'image triviale dans $W'_{\mathcal{O}}$. Alors $w\alpha = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. Soit M' un sous-groupe de Levi minimal qui contient $\Sigma_{\mathcal{O}}$. Alors, $w \in M'$ et $\Sigma_{\mathcal{O}}$ engendre $a_M^{M'}$. Comme w opère trivialement sur $\Sigma_{\mathcal{O}}$, il s'en suit que $w = 1$. □

4.3.

Notons \mathcal{S}_{μ} le plus petit ensemble qui contient les hyperplans affines de \mathcal{O} qui sont singuliers pour μ et qui est stable par passage à la partie imaginaire, i.e. que $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha} \in \mathcal{S}_{\mu}$ implique $\mathcal{O}_{\Im(\sigma),\alpha} \in \mathcal{S}_{\mu}$.

Proposition. *L'ensemble \mathcal{S}_{μ} est $W(M, \mathcal{O})$ invariant. L'ensemble des $\alpha \in \Sigma(T_M)$ tels qu'il existe $\sigma \in \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha} \in \mathcal{S}_{\mu}$ est contenu dans $\Sigma_{\mathcal{O}}$.*

Preuve. La première assertion résulte de l'invariance de la fonction μ par $W(M, \mathcal{O})$. La deuxième assertion est due à Harish-Chandra (cf. [S1, Corollaire 5.4.2.3 et 5.4.2.2]). □

4.4.

Pour alléger les notations, on écrira dans la suite de ce paragraphe plus simplement \mathcal{S} au lieu de \mathcal{S}_{μ} .

Lemme. *Soit \mathcal{S}_0 le sous-ensemble de \mathcal{S} formé des hyperplans affines dont la partie réelle contient l'origine de a_M^* . L'opérateur rationnel $\sigma \mapsto \mu(\sigma)J_{P|P}(\sigma)$ est régulier sur $\mathcal{O} - \bigcup_{S \in \mathcal{S} - \mathcal{S}_0} S$.*

Preuve. Par la formule du produit pour la fonction μ et pour les opérateurs d'entrelacement, on se ramène au cas d'un sous-groupe parabolique maximal. Si $\Re(\sigma) >_P 0$ ou

$-\Re(\sigma) >_P 0$, alors $J_{P|\bar{P}}$ est régulier en la représentation cuspidale σ par les résultats de Harish-Chandra (cf. [S1, Th. 5.4.2.1]). Dans les autres cas, la régularité en σ de l'application dans l'énoncé résulte de [W, Corollaire V.2.3]. \square

4.5.

Notons $\Delta_{\mathcal{O}}$ la base de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ qui est formée de racines qui sont positives pour P . Si $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$, désignons par M_{Ω} le plus petit sous-groupe de Levi semi-standard M' contenant M tel que $\Omega \subseteq a_M^{M'^*}$. Comme M_{Ω} peut être obtenu en adjoignant successivement des racines de Ω à M , Ω forme une base de $a_M^{M'^*}$. Un sous-groupe de Levi M' de G qui contient M sera dit (P, \mathcal{S}) -standard, si $M' = M_{\Omega}$ pour un $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$. On écrira $\Omega = \Delta_{\mathcal{O}}^{M'}$.

Pour un sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard M' on pose alors

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{O}, M'}^+ &= \{w \in W_{\mathcal{O}} \mid w \text{ de longueur minimale dans } wW_{\mathcal{O}}^{M'}\}, \\ W_{\Delta_{\mathcal{O}}} &= \{w \in W(M, \mathcal{O}) \mid w\Delta_{\mathcal{O}} = \Delta_{\mathcal{O}}\}, \\ W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'} &= \text{système de représentants de } W_{\Delta_{\mathcal{O}}}W^{M'}(M, \mathcal{O})/W^{M'}(M, \mathcal{O}), \\ &\text{formé d'éléments de } W_{\Delta_{\mathcal{O}}} \text{ et contenant l'identité de } W(M, \mathcal{O}), \\ W_{M'}^+(M, \mathcal{O}) &= W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'}W_{\mathcal{O}, M'}^+. \end{aligned}$$

Remarque. $W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$ est un sous-groupe de $W(M, \mathcal{O})$ qui vérifie $W_{\mathcal{O}} \cap W_{\Delta_{\mathcal{O}}} = \{1\}$. Il existe bien des cas où $W_{\Delta_{\mathcal{O}}} \neq \{1\}$: les systèmes de racines de type A_n, D_n et E_6 possède par exemple des automorphismes ne venant pas d'un élément de leur groupe de Weyl (cf. [B]) et qui peuvent bien être réalisés par un élément du groupe de Weyl d'un système de racines plus grand de même rang.

Lemme. Un système de représentants de $W(M, \mathcal{O})/W^{M'}(M, \mathcal{O})$ dans $W(M, \mathcal{O})$ est donné par $W_{M'}^+(M, \mathcal{O})$.

Preuve. Soit $w \in W(M, \mathcal{O})$. Alors il existe $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}}$, tel que $ww_{\mathcal{O}}^{-1}$ vérifie $ww_{\mathcal{O}}^{-1}\Delta_{\mathcal{O}} \subseteq \Sigma(P)$. Comme $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est invariant par $W(M, \mathcal{O})$, il en suit que $w_{\Delta} := ww_{\mathcal{O}}^{-1} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$. Écrivons $w_{\Delta} = w_{\Delta, M'}w_{\Delta}^{M'}$ avec $w_{\Delta, M'} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'}$ et $w_{\Delta}^{M'} \in W^{M'}(M, \mathcal{O})$. Alors

$$w = w_{\Delta, M'}w_{\Delta}^{M'}w_{\mathcal{O}} = w_{\Delta, M'}(w_{\Delta}^{M'}w_{\mathcal{O}}w_{\Delta}^{M'^{-1}})w_{\Delta}^{M'}.$$

Comme $w_{\Delta}^{M'}w_{\mathcal{O}}w_{\Delta}^{M'^{-1}} \in W_{\mathcal{O}}$, il est clair que tout élément de $W(M, \mathcal{O})/W^{M'}(M, \mathcal{O})$ est représenté par un élément de $W_{M'}^+(M, \mathcal{O})$.

Prouvons l'unicité de cet élément: soient $w_{\Delta}, w'_{\Delta} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'}$ et $w, w' \in W_{\mathcal{O}, M'}^+$ et supposons que $w_{\Delta}w$ et $w'_{\Delta}w'$ soient dans la même classe à droite modulo $W^{M'}(M, \mathcal{O})$. Il existe donc $w'' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})$ tel que $w_{\Delta}w = w'_{\Delta}w'w''$. Alors $w'_{\Delta}w'w''w^{-1} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$, ce qui implique $w'w''w^{-1} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$. Comme w et w' sont de longueur minimale dans leur classe à droite modulo $W_{\mathcal{O}}^{M'}$, w'' doit vérifier $w''\Delta_{\mathcal{O}}^{M'} = \Delta_{\mathcal{O}}^{M'}$ et donc être un élément de $W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$. On en déduit $w''^{-1}w'w'' \in W_{\mathcal{O}, M'}^+$, $W_{\mathcal{O}}$ étant distingué dans $W(M, \mathcal{O})$, et $(w''^{-1}w'w'')w^{-1} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$. Comme d'autre part $(w''^{-1}w'w'')w^{-1} \in W_{\mathcal{O}}$, c'est l'élément neutre de ce groupe, d'où $w_{\Delta} = w'_{\Delta}w''$. Mais, comme w_{Δ} et w'_{Δ} sont des représentants

d'une même classe à droite modulo $W^{M'}(M, \mathcal{O})$, il en résulte $w'' = 1$, d'où l'égalité recherchée. \square

4.6.

Continuons à supposer M' (P, \mathcal{S}) -standard. Il existe alors $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ tel que $M' = M_A$. La composante connexe Q de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ qui contient les éléments λ de $a_{M_A}^*$ avec $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}} - \Omega$ sera dite (P, \mathcal{S}) -standard. On la notera P_A .

Lemme. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Pour tout élément w de $W_{\mathcal{O}}$, l'action par w sur a_M^* induit une application de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ sur $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_{wA})$. Soit $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$. Il existe un unique sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard M' de G tel que Q soit conjugué à l'élément (P, \mathcal{S}) -standard de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M')$ par un élément de $W_{\mathcal{O}}$. La classe à droite modulo $W_{\mathcal{O}}^{M_A}$ de cet élément est déterminée de façon unique.

Preuve. Soit M_1 le sous-groupe de Levi contenant M , tel que $\Delta_{\mathcal{O}}$ engendre $a_M^{M_1^*}$, i.e. $a_M^{M_1^*} = a_{M, \mathcal{O}}^*$. On a $M_A \subseteq M_1$ et tout élément de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ est uniquement déterminé par son intersection avec $a_M^{M_1^*}$. L'intersection de $a_{M_A}^*$ avec $a_M^{M_1^*}$ étant $a_{M_A}^{M_1^*}$, on se retrouve dans le contexte des chambres relevant d'un système de racines, où le résultat est connu (cf. [Ca, Th. 2.5.8 et Prop. 2.6.1, 2.6.3]). \square

4.7.

Posons, pour M' un sous-groupe de Levi de G contenant M ,

$$\mathcal{W}(M', \mathcal{O}) = \{w \in W(M, \mathcal{O}) \mid wM' = M'\}$$

et notons $W(M', \mathcal{O})$ le groupe quotient $\mathcal{W}(M', \mathcal{O})/W^{M'}(M, \mathcal{O})$.

Lemme. Soit M' un sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard. Le nombre de sous-groupes de Levi (P, \mathcal{S}) -standard de G conjugués à M' par un élément de $W(M, \mathcal{O})$ est égal à $|\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M')| |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M'}| / |W(M', \mathcal{O})|$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ avec $M' = M_A$, et notons $[A]_{P, \mathcal{S}}$ l'ensemble des $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ qui sont conjugués à A par un élément de $W(M, \mathcal{O})$ et qui sont tels que $M_{A'}$ soit (P, \mathcal{S}) -standard. On voit que $A' \in [A]_{P, \mathcal{S}}$, si et seulement si $M_{A'}$ est (P, \mathcal{S}) -standard et qu'il existe $w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})$ tel que $A' = wA$. Écrivons $w = w_{\Delta} w_{\mathcal{O}}$ avec $w_{\Delta} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}$ et $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}, M_A}^+$. Comme $W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$ envoie tout sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard sur un sous-groupe de Levi $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ -standard, il faut que $w_{\mathcal{O}}A \in [A]_{P, \mathcal{S}}$. Les éléments de $[A]_{P, \mathcal{S}}$ sont donc de la forme $w_{\Delta} w_{\mathcal{O}}A$ avec $w_{\Delta} \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}$ et $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}, M_A}^+$ tel que $w_{\mathcal{O}}A \in [A]_{P, \mathcal{S}}$. Notons $W_{\mathcal{O}, M_A}^+(P, \mathcal{S})$ le sous-ensemble de $W_{\mathcal{O}, M_A}^+$ décrit par cette propriété.

Par le Lemme 4.6, on définit une application de $W_{\mathcal{O}, M_A}^+(P, \mathcal{S})$ dans $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$, en associant à un élément w l'élément $w^{-1}P_{wA}$ de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$, où P_{wA} désigne l'élément (P, \mathcal{S}) -standard de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_{wA})$. Le Lemme 4.6 prouve également que cette application est surjective et qu'elle est injective. Par suite, $|W_{\mathcal{O}, M_A}^+(P, \mathcal{S})| = |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|$. On en

déduit que le sous-ensemble $W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})_{P,S}$ de $W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})$ formé des éléments w tels que $wA \in [A]_{P,S}$ est de cardinal $|\mathcal{P}_S(M_A)| |W_{\Delta_{\mathcal{O}, M_A}}|$. Il reste à voir que les fibres de l'application $W_{M_A}^+(M, \mathcal{O}) \rightarrow \{M_{A'} | A' \in [A]_{P,S}\}$, $w \mapsto wM_A$, sont tous en bijection avec $W(M_A, \mathcal{O})$.

Fixons $w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})$ et considérons la fibre au-dessus de wM_A . Si $w'M_A = wM_A$, alors il existe un unique élément $w'' \in W(M, \mathcal{O})$ avec $w''M_A = M_A$ tel que $ww'' = w'$, d'où une application de la fibre au-dessus de wM_A dans $W(M_A, \mathcal{O})$. Inversement, soit $w' \in W(M_A, \mathcal{O})$. Alors il existe un unique représentant w'' de w' dans $W(M, \mathcal{O})$ tel que $ww'' \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})$, et on a $ww''M_A = wM_A$. Par construction, ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. □

4.8.

On va maintenant appliquer le théorème de résidus du paragraphe 3 au système fini d'hyperplans affines $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mu$. Rappelons (cf. 1.4) que l'on a noté, pour $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, par M_A le sous-groupe de Levi semi-standard de G associé à A . Il contient M . Fixons $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$.

Lemme. *Pour tout $w \in W(M, \mathcal{O})$, on a $(\text{Res}_{wA}^{wC} \psi) \circ w = \text{Res}_A^C(\psi \circ w)$.*

Preuve. Soit r un point de C . Alors $wr \in wC$. Comme w est une transformation qui préserve les mesures, on a

$$\int_{\Re(\sigma)=r} (\psi \circ w)(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) = \int_{\Re(\sigma)=wr} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma).$$

L'ensemble \mathcal{S} (et donc $\mathcal{A}(\mathcal{S})$) étant invariant par w^{-1} , on trouve par le Théorème 3.10

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(\sigma)=r} (\psi \circ w)(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(M_L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \\ & \quad \times \sum_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_\mu), \Re(A)=L} \int_{\Re(\sigma)=w^{-1}(r(L)+\epsilon_Q)} (\text{Res}_{w^{-1}A}^C(\psi \circ w))(\sigma) d_{w^{-1}A} \mathfrak{S}(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(\sigma)=wr} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{Q \in \mathcal{P}_S(L)} |\mathcal{P}_S(M_L)|^{-1} \sum_{A \in \mathcal{A}, \Re(A)=L} \int_{\Re(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A^{wC} \psi)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma). \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\Re(\sigma)=r(L)+\epsilon_Q} (\text{Res}_A^{wC} \psi)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma) = \int_{\Re(\sigma)=w^{-1}(r(L)+\epsilon_Q)} (\text{Res}_A^{wC} \psi)(w\sigma) d_{w^{-1}A} \mathfrak{S}(\sigma),$$

le lemme résulte de l'unicité des données de résidu relatives à C et de l'invariance de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ par les éléments de $W(M, \mathcal{O})$ (cf. 4.3). \square

4.9.

Rappelons que $\mathfrak{R}(\mathcal{O}) = a_M^*$. Notons Res_A^P la donnée de résidu en A correspondant à la composante connexe de $\mathcal{R}(\mathcal{O})_{\text{reg}}$ (cet espace a été défini en 1.4) contenant les $\lambda \in a_M^*$ avec $\lambda \gg_P 0$. Rappelons (cf. 4.3) que $\mathcal{S}_{\mu^{M_A}}$ désigne le plus petit ensemble qui contient les hyperplans affines de \mathcal{O} qui sont singuliers pour la fonction μ^{M_A} définie relative à M_A et qui est stable par passage à la partie imaginaire.

Lemme. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. La donnée de résidu $\text{Res}_A^{P \cap M_A}$ définie sur $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_{\mu^{M_A}})$ se prolonge à $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ et y est égale à Res_A^P .

Preuve. Il est clair par définition d'une donnée de résidu que $\text{Res}_A^{P \cap M_A}$ se prolonge à $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$. L'égalité avec Res_A^P résulte alors de l'unicité des données de résidus et de 3.9: les deux données de résidus coïncident pour $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_A)$, puisque

$$\int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r \gg_P 0} \psi(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma) = \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r_1 \gg_{P \cap M_A} 0} \psi(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma)$$

pour de tels ψ . \square

4.10.

Lemme. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ et posons $\Sigma_{\mathcal{O}}^{M_A}(P \cap M_A) = \Sigma_{\mathcal{O}}^{M_A} \cap \Sigma^{M_A}(P \cap M_A)$. Si $w \in W(M, \mathcal{O})$ vérifie $w \Sigma_{\mathcal{O}}^{M_A}(P \cap M_A) \subseteq \Sigma(P)$, alors $\text{Res}_A^P(\psi) = \text{Res}_A^{w^{-1}P}(\psi)$.

Preuve. Comme une donnée de résidu en A est uniquement déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_A)$ (cf. 3.9), il suffit de montrer que, si $r \in a_M^*$ vérifie $r \gg_P 0$, alors $w^{-1}r$ est dans la même composante connexe de $\mathfrak{R}(\mathcal{O})_{\mathcal{S}_A, \text{reg}}$ que r . Or, si $r \gg_P 0$ et $w \Sigma_{\mathcal{O}}^{M_A}(P \cap M_A) \subseteq \Sigma(P)$, on a bien $\langle (w\alpha)^\vee, r \rangle \gg_P 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}^{M_A}(P \cap M_A)$. \square

4.11.

Le résultat suivant est une généralisation à notre situation du résultat principal de [BS].

Proposition. Notons $\Delta_{\mathcal{O}}$ la base de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ qui est formée de racines qui sont positives pour P . Alors on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r \gg_P 0} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}} \sum_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}), M_A = M_{\Omega}} \sum_{w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1} \\ & \quad \times \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r(A) + \epsilon_{P_A}} \text{Res}_A^P(\psi \circ w)(\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma). \end{aligned}$$

Preuve. Par 4.6, il existe pour tout $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ et tout Q dans $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ un unique sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard M' de G tel que Q soit conjugué à l'élément (P, \mathcal{S}) -standard de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M')$ par un élément w de $W_{\mathcal{O}}$. La classe modulo $W_{\mathcal{O}}^{M_A}$ de w est déterminée de façon unique. Remarquons que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est $W(M, \mathcal{O})$ -invariant (cf. 4.3). On définit donc une bijection entre l'ensemble des couples (A, Q) formé d'un élément A de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ et d'un élément Q de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ avec l'ensemble des couples (A, w) formé d'un élément w de $W_{\mathcal{O}, M_A}^+$ et d'un élément A de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ avec M_A (P, \mathcal{S}) -standard, en associant à (A, w) le couple (wA, wP_A) , P_A désignant la composante (P, \mathcal{S}) -standard de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$. De plus, on voit que l'on peut choisir les ϵ_Q dans la Proposition 3.10 tels que $w\epsilon_{P_A} = \epsilon_{wP_A}$ pour de tels w .

Avant d'appliquer ceci à la Proposition 3.10, ajoutons que, pour $w \in W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}$ et $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ avec M_A (P, \mathcal{S}) -standard, le sous-groupe de Levi $wM_A = M_{wA}$ est également (P, \mathcal{S}) -standard. Comme $wP_A = P_{wA}$ pour de tels w , on peut en outre choisir les ϵ_{P_A} tels que $w\epsilon_{P_A} = \epsilon_{P_{wA}}$. Il résulte alors de ces remarques et de la Proposition 3.10, ayant $W_{M_A}^+(M, \mathcal{O}) = W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A} W_{\mathcal{O}, M_A}^+$ par 4.5, que

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(\sigma)=r \gg_P 0} \psi(\sigma) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}} \sum_{A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}), M_A = M_{\Omega}} \sum_{w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1} \\ & \quad \times \int_{\Re(\sigma)=w(r(A)+\epsilon_{P_A})} (\text{Res}_{wA}^P \psi)(\sigma) d_{wA} \mathfrak{S}(\sigma). \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à remarquer que

$$\int_{\Re(\sigma)=w(r(A)+\epsilon_{P_A})} (\text{Res}_{wA}^P \psi)(\sigma) d_{wA} \mathfrak{S}(\sigma) = \int_{\Re(\sigma)=r(A)+\epsilon_{P_A}} (\text{Res}_{wA}^P \psi)(w\sigma) d_A \mathfrak{S}(\sigma),$$

et que, pour $w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})$, $(\text{Res}_{wA}^P \psi) \circ w = \text{Res}_A^{(w^{-1}P)}(\psi \circ w) = \text{Res}_A^P(\psi \circ w)$ par les lemmes de 4.8 et de 4.10, pour en déduire l'expression dans l'énoncé de la proposition. \square

4.12.

En généralisant les méthodes de [BS] on pourra probablement montrer que $\text{Res}_A^P = 0$, si $r(A)$ n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de $\Delta_{\mathcal{O}}^{M_A} := \Delta_{\mathcal{O}} \cap \Sigma^{M_A}(A_M)$ à coefficients ≥ 0 .

5. Les dérivées d'un coefficient matriciel

Proposition. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $D = D_{\lambda}$ un opérateur différentiel holomorphe à coefficients constants sur $a_{M, \mathbb{C}}^{G*}$. Soit (σ, E) une représentation irréductible lisse de M et τ dans $i_{P \cap K}^K E \otimes i_{P \cap K}^K E^{\vee}$.

Alors il existe une famille finie $\{(\tilde{\sigma}_j, \tilde{E}_j)\}_{j \in J}$ de représentations admissibles lisses de M de longueur finie et de sous-quotients irréductibles isomorphes à (σ, E) et une famille

$\{\tilde{\tau}_j\}_{j \in J}$ d'éléments de $i_{P \cap K}^K \tilde{E}_j \otimes i_{P \cap K}^K \tilde{E}_j^\vee$, telles que, pour $\lambda_0 \in a_{M, \mathbb{C}}^{G^*}$,

$$(D_\lambda E_{P, \sigma \otimes \chi_\lambda}^G(\tau))|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{j \in J} E_{P, \tilde{\sigma}_j \otimes \chi_{\lambda_0}}^G(\tilde{\tau}_j).$$

Par ailleurs, les restrictions à T_G des représentations $i_P^G \tilde{\sigma}_j$, $j \in J$, et $i_P^G \sigma$ agissent sur leurs espaces respectifs par le même caractère qui est égal à la restriction à T_G du caractère central de σ .

Avant de prouver le théorème, établissons le lemme suivant.

Lemme. Soit (σ, E) une représentation irréductible lisse de M , p_1 un polynôme sur $a_{M, \mathbb{C}}^G$ et $e_1 \otimes e_1^\vee$ dans $E \otimes E^\vee$. Alors l'application $m \mapsto p_1(H_M^G(m)) \langle \sigma(m)e_1, e_1^\vee \rangle$ est le coefficient matriciel d'une représentation admissible de longueur finie $\tilde{\sigma}$ de M dont les sous-quotients sont isomorphes à σ .

Preuve. Notons \tilde{E} l'espace vectoriel engendré par les applications lisses de M dans E de la forme $\tilde{e}_p : m \mapsto p(H_M^G(m))\sigma(m)e$ avec $e \in E$ et p polynôme sur $a_{M, \mathbb{C}}^G$. Faisons agir M sur \tilde{E} par translation à droite et notons $\tilde{\sigma}$ la représentation lisse de M qui correspond à cette action.

Notons l la dimension de $a_{M, \mathbb{C}}^G$. Munissons \mathbb{N}^l de l'ordre lexicographique. Fixons une base de $a_{M, \mathbb{C}}^G$. On a alors une notion de monôme sur $a_{M, \mathbb{C}}^G$ correspondant aux coordonnées par rapport à la base choisie. Lorsque p est un tel monôme, notons $\underline{\deg}(p)$ le vecteur dans \mathbb{N}^l dont les composantes sont les degrés partiels de p par rapport aux différentes coordonnées. On l'appellera le degré de p . Lorsque p est un polynôme, on désignera par $\underline{\deg}(p)$ le degré du monôme non nul dans p de degré maximal pour l'ordre lexicographique.

Pour $\underline{d} \in \mathbb{N}^l$, soit $\tilde{E}_{\leq \underline{d}}$ (respectivement $\tilde{E}_{< \underline{d}}$) le sous-espace de \tilde{E} engendré par les applications \tilde{e}_p avec $\underline{\deg}(p) \leq \underline{d}$ (respectivement $\underline{\deg}(p) < \underline{d}$). Ce sous-espace est stable pour l'action par $\tilde{\sigma}$. Notons $\tilde{\sigma}_{\leq \underline{d}}$ (respectivement $\tilde{\sigma}_{< \underline{d}}$) la représentation de M dans cet espace déduite de $\tilde{\sigma}$. Les représentations $\tilde{\sigma}_{\leq \underline{d}}$ et $\tilde{\sigma}_{< \underline{d}}$ sont admissibles, puisque σ l'est.

Soit p un monôme avec $\underline{\deg}(p) = \underline{d}$. Tout élément de $\tilde{E}_{\leq \underline{d}}/\tilde{E}_{< \underline{d}}$ est l'image d'une application de la forme \tilde{e}_p avec $e \in E$. Par ailleurs, on constate que l'application

$$m \mapsto (p(H_M^G(mm_1)) - p(H_M^G(m)))\sigma(m)(\sigma(m_1)e)$$

est dans $\tilde{E}_{< \underline{d}}$, puisque $\underline{\deg}(p(\cdot + H_M^G(m_1)) - p(\cdot)) < \underline{d}$. On en déduit que l'application de E dans $\tilde{E}_{\leq \underline{d}}/\tilde{E}_{< \underline{d}}$ qui associe à e la classe de \tilde{e}_p définit un isomorphisme entre σ et la représentation quotient $\tilde{\sigma}_{\leq \underline{d}}/\tilde{\sigma}_{< \underline{d}}$. Les représentations $\tilde{\sigma}_{\leq \underline{d}}$, $\underline{d} \in \mathbb{N}^l$, sont donc admissibles de longueur finie et leurs sous-quotients irréductibles sont isomorphes à σ .

Faisons correspondre à $e^\vee \in E^\vee$ l'application $\tilde{e}^\vee : \tilde{E}_{\leq \underline{d}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{e} \mapsto \langle \tilde{e}(1), e^\vee \rangle$. C'est un élément du dual lisse de $\tilde{E}_{\leq \underline{d}}$: il faut vérifier l'existence d'un sous-groupe ouvert H qui laisse \tilde{e}^\vee invariant. Comme e^\vee est dans le dual lisse de E , il existe un sous-groupe ouvert H contenu dans K qui laisse e^\vee invariant. On a alors pour tout $e \in E$, tout polynôme p

sur $a_{M,\mathbb{C}}^G$, et tout $h \in H$,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}(h)\tilde{e}_p, \tilde{e}^\vee \rangle &= \langle \tilde{e}_p(h), e^\vee \rangle \\ &= p(H_M^G(h))\langle \sigma(h)e, e^\vee \rangle \\ &= p(H_M^G(1))\langle e, e^\vee \rangle \\ &= \langle \tilde{e}_p(1), e^\vee \rangle \\ &= \langle \tilde{e}_p, \tilde{e}^\vee \rangle. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors du fait que (avec les notations de l'énoncé) l'application $m \mapsto p_1(H_M(m))\langle \sigma(m)e_1, e_1^\vee \rangle$ est égale au coefficient matriciel $m \mapsto \langle \tilde{\sigma}_{\leq d}(m)\tilde{e}_1, \tilde{e}_1^\vee \rangle$ de $\tilde{\sigma}_d$ avec $d = \text{deg}(p_1)$. □

Démonstration de la proposition. Il suffit de considérer le cas où $\tau = v \otimes v^\vee$.

Pour $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} \langle i_P^G(\sigma \otimes \chi)(g)v, v^\vee \rangle &= \int_K \langle v_\chi(kg), v^\vee(k) \rangle dk \\ &= \int_K \delta_P^{1/2}(m_P(kg))\chi(m_P(kg))\langle \sigma(m_P(kg))v(k_P(kg)), v^\vee(k) \rangle dk, \end{aligned}$$

où $m_P(kg)$ et $k_P(kg)$ désignent les composantes de kg selon la décomposition $G = MUK$.

Les applications étant lisses, l'intégrale est en fait une somme finie. L'opérateur différentiel commute donc avec l'intégrale et on obtient

$$\begin{aligned} D_\lambda(\langle i_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)(g)v, v^\vee \rangle)_{|\lambda=\lambda_0} &= \int_K D_\lambda(\delta_P^{1/2}(m_P(kg))\chi_\lambda(m_P(kg))\langle \sigma(m_P(kg))v(k_P(kg)), v^\vee(k) \rangle)_{|\lambda=\lambda_0} dk. \end{aligned}$$

Le terme sous l'intégrale est une expression de la forme

$$p_1(H_M^G(m_P(kg)))\delta_P^{1/2}(m_P(kg))\chi_\lambda(m_P(kg))\langle \sigma(m_P(kg))v(k_P(kg)), v^\vee(k) \rangle$$

avec p_1 polynôme sur $a_{M,\mathbb{C}}^G$ et $k \in K$.

D'après le lemme précédent, il existe une représentation admissible lisse de longueur finie $(\tilde{\sigma}, \tilde{E})$ et des éléments $\tilde{v}(k_P(kg)), \tilde{v}^\vee(k)$ de \tilde{E} et de \tilde{E}^\vee , tels que cette expression vaille $\delta_P^{1/2}(m_P(kg))\chi_{\lambda_0}(m_P(kg))\langle \tilde{\sigma}(m_P(kg))\tilde{v}(k_P(kg)), \tilde{v}^\vee(k) \rangle$. En prenant pour $(\tilde{\sigma}, \tilde{E})$ la représentation explicitée dans la preuve du lemme, on voit par ailleurs que

$$(\tilde{v}(k_P(kg)))(m) = p_1(H_M^G(m))\sigma(m)v(k_P(kg)) \quad \text{pour } m \in M$$

et $\langle \tilde{e}, \tilde{v}^\vee(k) \rangle = \langle \tilde{e}(1), v^\vee(k) \rangle$ pour $\tilde{e} \in \tilde{E}$.

On définit donc ainsi des applications $k \mapsto \tilde{v}(k)$ et $k \mapsto \tilde{v}^\vee(k)$. Montrons qu'elles sont à valeurs dans $i_{P \cap K}^K \tilde{E}$ et $i_{P \cap K}^K \tilde{E}^\vee$ respectivement: elles sont toutes les deux invariantes

à droite par un sous-groupe ouvert de K , puisque $i_P^G \sigma$ est lisse. Par ailleurs, on trouve pour $k_M \in K \cap M$, $k_U \in K \cap U$ et $k \in K$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(k_M k_U k)(m) &= p_1(H_M^G(m))\sigma(m)v(k_M k_U k) \\ &= p_1(H_M^G(m))\sigma(m)\sigma(k_M)v(k) \\ &= p_1(H_M^G(mk_M))\sigma(mk_M)v(k) \\ &= (\tilde{\sigma}(k_M)\tilde{v}(k))(m) \end{aligned}$$

ainsi que pour tout $\tilde{e} \in \tilde{E}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{e}, \tilde{v}^\vee(k_M k_U k) \rangle &= \langle \tilde{e}(1), v^\vee(k_M k_U k) \rangle \\ &= \langle \tilde{e}(1), \sigma^\vee(k_M)v^\vee(k) \rangle \\ &= \langle \sigma(k_M)^{-1}\tilde{e}(1), v^\vee(k) \rangle \\ &= \langle \tilde{\sigma}(k_M)^{-1}\tilde{e}, \tilde{v}^\vee(k) \rangle, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que $(\tilde{\sigma}(k_M^{-1})\tilde{e})(1) = \sigma(k_M^{-1})\tilde{e}(1)$, puisque $H_M^G(k_M^{-1}) = H_M^G(1)$.

On déduit de ceci que $D_\lambda(\langle i_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)(g)v, v^\vee \rangle)_{|\lambda=\lambda_0}$ est une expression de la forme

$$\begin{aligned} \int_K \delta_P^{1/2}(m_P(kg))\chi_{\lambda_0}(m_P(kg))\langle \tilde{\sigma}(m_P(kg))\tilde{v}(k_P(kg)), \tilde{v}^\vee(k) \rangle dk \\ = \int_K \langle (i_P^G(\tilde{\sigma} \otimes \chi_{\lambda_0})(g)\tilde{v})(k), \tilde{v}^\vee(k) \rangle dk \\ = \langle i_P^G(\tilde{\sigma} \otimes \chi_{\lambda_0})(g)\tilde{v}, \tilde{v}^\vee \rangle, \end{aligned}$$

d'où la proposition, puisque l'on a remarqué que $\tilde{v} \otimes \tilde{v}^\vee \in i_{P \cap K}^K \tilde{E} \otimes i_{P \cap K}^K \tilde{E}^\vee$.

La dernière assertion de la proposition concernant la restriction des représentation à T_G se voit par une vérification directe, en remarquant que $H_M^G(t) = 0$ pour $t \in T_G$. \square

6. Prolongement rationnel d'une identité polynomiale

6.1.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard et soit \mathcal{O} l'orbite inertielle d'une représentation irréductible cuspidale de M . Soit M' un sous-groupe de Levi semi-standard de G contenant M . Lorsque $\tilde{\xi}^{M'}$ est une application rationnelle sur \mathcal{O} à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de

$$i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^\vee,$$

notons $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}$ l'application rationnelle sur \mathcal{O} à valeurs dans $i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^\vee$ définie par

$$\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(\sigma) = \sum_{w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} (J_{P \cap M' | \overline{wP \cap M'}}^{M'}(\sigma)\lambda(w) \otimes J_{P \cap M' | wP \cap M'}^{M'}(\sigma^\vee)\lambda(w))\tilde{\xi}^{M'}(w^{-1}\sigma).$$

Si $\tilde{\xi}^{M'}$ est polynomiale, $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}$ est la composante en $(P \cap M', \mathcal{O})$ d'un élément de l'espace de Paley–Wiener $PW(M')$ pour M' (cf. 2.2). Par abus de notation, cet élément de l'espace de Paley–Wiener $PW(M')$ sera également noté $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}$, ce qui permettra par exemple d'écrire $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(P_1 \cap M', \sigma_1)$, si P_1 est un deuxième parabolique semi-standard de G de Levi semi-standard M et $\sigma_1 \in \mathcal{O}$.

On notera par ailleurs, pour $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, $\text{Stab}(A) = \{w \in W^{M_A}(M, \mathcal{O}) \mid wA = A\}$, et, pour $\sigma \in \mathcal{O}$, $\mathcal{E}_2(M', \sigma)$ l'ensemble des représentations de carré intégrable de M' de support cuspidal égal à la classe de $W^{M'}$ -conjugaison de σ . (Une condition nécessaire, pour que σ soit dans le support cuspidal d'une représentation de carré intégrable de M' est évidemment que la restriction de σ à $T_{M'}$ agit par un caractère unitaire.)

Pour simplifier, on écrira parfois $E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}, \xi, \sigma)$ à la place de $E_P^G((J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma) \otimes 1)\xi(\sigma))$, etc., et $\text{Res}_A(E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}, \xi, \sigma)(g))$ désignera $\text{Res}_A(E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}, \xi, \cdot)(g))(\sigma)$, etc.

L'objet de ce paragraphe est la preuve de la proposition suivante.

Proposition. *Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard contenant P avec $M' = M_A$ pour un certain élément A de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Fixons $\sigma \in A$ avec $\Re(\sigma) = r(A)$.*

Supposons qu'il existe une donnée de résidu Res_A en A , telle que, pour toute application polynomiale $\xi^{M'}$ sur \mathcal{O} à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^{\vee}$ et tout $g \in G$, on ait l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \gamma(M'/M) \deg(\sigma) \text{Res}_{wA}(E_{P \cap M'}^{M'}(J_{\bar{P} \cap M' | P \cap M'}^{M'-1}, \xi^{M'}, w(\sigma \otimes \chi'))(g)) \\ = |\text{Stab}(A)| \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)} \deg(\pi) E_{M'}^{M'}(\varphi_{\xi^{M'}}(M', \pi \otimes \chi'))(g) \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

de fonctions rationnelles sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$.

Soit $\tilde{\xi}^{M'}$ une application rationnelle sur \mathcal{O} à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^{\vee}$ telle que $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}$ soit le produit de la composante en $(P \cap M', \mathcal{O})$ d'un élément de l'espace de Paley–Wiener $PW(M')$ de M' par une fonction rationnelle $\tilde{\mu}$. Supposons qu'il existe un ensemble fini $\tilde{\mathcal{S}}$ d'hyperplans radiciels de \mathcal{O} de la forme $\mathcal{O}_{\sigma', \alpha}$ avec $\alpha \in \Sigma(P) - \Sigma^{M'}(P \cap M')$ tel que $\tilde{\xi}^{M'}$ et $\tilde{\mu}$ soient régulières sur $\mathcal{O} - \bigcup_{S \in \tilde{\mathcal{S}}} S$. Alors l'identité ci-dessus vaut pour $\tilde{\xi}^{M'}$.

Preuve. Remarquons que, pour $\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)$, $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(M', \pi \otimes \chi')$ est bien définie pour tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$ avec $\sigma \otimes \chi'$ régulier pour $\tilde{\mu}$. Le terme à droite de l'identité (6.1.1) est donc une fonction rationnelle sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$. La fonction à gauche est rationnelle par définition des données de résidu. Par prolongement analytique, il suffit donc de montrer qu'il existe $r_{M'} \in a_{M'}^*$, tel que l'identité (6.1.1) vaut en tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$ de partie réelle $>_{P'} r_{M'}$. Remarquons que $\Re(\sigma)_{M'} = 0$.

L'ensemble des sous-espaces affines radiciels A de \mathcal{O} dans $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ avec $M_A = M'$ étant fini, on peut choisir $r_{M'}$ dans la chambre de Weyl de $P \cap M'$ dans $a_{M'}^{M'^*}$, tel que tout point σ' d'un tel sous-espace vérifie $-r_{M'}^{M'} <_{P \cap M'} \Re(\sigma')^{M'} <_{P \cap M'} r_{M'}^{M'}$. On va alors prendre pour $r_{M'}$ un élément de la chambre de Weyl de P' dans $a_{M'}^*$, tel

que, pour tout $H_{\alpha,c} \in \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{S}})$ avec $\alpha \in \Sigma(P) - \Sigma^{M'}(P \cap M')$, et tout $\lambda^{M'} \in a_M^{M'*}$ avec $-r^{M'} \leq_{P \cap M'} \lambda^{M'} \leq_{P \cap M'} r^{M'}$, on ait $\langle \alpha^\vee, r_{M'} \rangle > \Re(c) - \langle \alpha^\vee, \lambda^{M'} \rangle$. (Ceci est possible, puisque les formes linéaires $\langle \alpha^\vee, \cdot \rangle$, $\alpha \in \Sigma(P) - \Sigma^{M'}(P \cap M')$, sont non nulles sur $a_{M'}^*$, alors que $\lambda^{M'}$ parcourt un compact.) Notons U le domaine des éléments de \mathcal{O} dont la partie réelle λ vérifie $\lambda_{M'} >_{P'} r_{M'}$ et $-r^{M'} <_{P \cap M'} \lambda^{M'} <_{P \cap M'} r^{M'}$. Les fonctions $\tilde{\xi}^{M'}$ et $\tilde{\mu}$ sont régulières sur U : en effet, par choix de $r_{M'}$, on a, pour $H_{\alpha,c} \in \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{S}})$ avec $\alpha \in \Sigma(P)$, et $\sigma' \in U$, $\langle \alpha^\vee, \Re(\sigma)_{M'} \rangle > \langle \alpha^\vee, r_{M'} \rangle > \Re(c) - \langle \alpha^\vee, \Re(\sigma')^{M'} \rangle$, et donc $\langle \alpha^\vee, \Re(\sigma) \rangle \neq \Re(c)$.

En particulier, la fonction $\chi \mapsto \tilde{\xi}^{M'}(\sigma \otimes \chi)$ est pour tout $r >_{P'} r_{M'}$ analytique sur le polydisque U_r de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ formé des caractères χ vérifiant

$$-r^{M'} <_{P \cap M'} \Re(\sigma \otimes \chi) <_{P \cap M'} r^{M'} \quad \text{et} \quad r_{M'} <_{P'} \Re(\chi) <_{P'} r.$$

Par la théorie des fonctions analytiques en plusieurs variables, $\tilde{\xi}^{M'}(\sigma \otimes \cdot)$ peut s'écrire comme limite d'une suite d'applications polynomiales (ξ_n) convergeant uniformément sur tout compact de U_r et prenant ses valeurs dans un même sous-espace de dimension finie de $i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^\vee$ que $\tilde{\xi}^{M'}$. Pour obtenir des applications polynomiales sur \mathcal{O} , on les rend invariantes par $\text{Stab}(\mathcal{O})$ (cf. 1.3). Ce procédé ne change rien à la convergence uniforme sur tout compact de U_r vers $\tilde{\xi}^{M'}$, puisque $\tilde{\xi}^{M'}$ est invariante.

Notons U_r l'ensemble des $\sigma \otimes \chi$ avec $\chi \in U_r$. Cet ensemble est égal au sous-ensemble de U formé des σ' avec $\Re(\sigma')_{P'} <_{P'} r$. On a donc montré l'existence d'une suite $(\xi_n^{M'})$ d'applications polynomiales sur \mathcal{O} qui converge uniformément sur tout compact de U_r vers $\tilde{\xi}^{M'}$. Remarquons que, comme σ a été choisie dans A , on a, par choix de $r^{M'}$ et grâce à l'invariance de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ par les éléments de $W^{M'}(M, \mathcal{O})$, $w(\sigma \otimes \chi') \in U_r$ pour tout $w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})$ et tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$, $r_{M'} <_{P'} \Re(\chi') <_{P'} r$.

Suite aux hypothèses de la proposition, l'identité (6.1.1) est vérifiée pour $\xi_n^{M'}$ en tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$, et donc en particulier si $r_{M'} <_{P'} \Re(\chi') <_{P'} r$. Il reste à voir, si la suite des valeurs en $\sigma \otimes \chi'$ converge pour $n \rightarrow \infty$ respectivement vers

$$\sum_{w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \gamma(M'/M) \deg(\sigma) \text{Res}_w(A)(E_{P \cap M'}^{M'}(J_{P \cap M' | P \cap M'}^{M'-1}, \tilde{\xi}^{M'}, w(\sigma \otimes \chi'))(g))$$

et

$$|\text{Stab}(A)| \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)} \deg(\pi) E_{M'}^{M'}(\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(M', \pi \otimes \chi'))(g).$$

L'identité (6.1.1) en χ' en résulte.

Étudions les deux cas séparément. Comme le calcul de la donnée de résidu Res_A ne fait intervenir que des combinaisons linéaires réelles de dérivées en direction d'éléments de $a_{M, \mathbb{C}}^{M'*}$ et qu'une suite de dérivées de $\xi_n^{M'}$ converge par le théorème de la convergence uniforme pour les fonctions holomorphes uniformément sur tout compact de U_r vers la dérivée de $\tilde{\xi}^{M'}$, on trouve pour tout $w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})$, ayant $w(\sigma \otimes \chi') \in U_r$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Res}_w(A)(E_{P \cap M'}^{M'}(J_{P \cap M' | P \cap M'}^{M'-1}, \xi_n^{M'}, w(\sigma \otimes \chi'))(g)) \\ = \text{Res}_w(A)(E_{P \cap M'}^{M'}(J_{P \cap M' | P \cap M'}^{M'-1}, \tilde{\xi}^{M'}, w(\sigma \otimes \chi'))(g)). \end{aligned}$$

Concernant le deuxième terme, il suffit de prouver que $\varphi_{\xi_n^{M'}}(M', \sigma \otimes \chi')$ converge vers $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(M', \sigma \otimes \chi')$. Notant μ^+ un dénominateur pour la fonction rationnelle $\mu^{M'}$ qui est invariant par $W^{M'}(M, \mathcal{O})$, on a une identité

$$\begin{aligned} &\varphi_{\mu^+ \xi_n^{M'}}(\sigma') \\ &= \sum_{w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \mu^+(\sigma') (J_{P \cap M' | \overline{wP \cap M'}}^{M'}(\sigma') \lambda(w) \otimes J_{P \cap M' | wP \cap M'}^{M'}(\sigma'^{\vee}) \lambda(w)) \xi_n^{M'}(w^{-1} \sigma') \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

de fonctions rationnelles sur \mathcal{O} . Choisissons un voisinage relativement compact et connexe U' de $\sigma \otimes \chi'$ dans U_r tel que $wU' \subseteq U_r$ pour tout $w \in W^{M'}(M, \mathcal{O})$. Comme l'opérateur

$$\sigma' \mapsto \mu^+(\sigma') (J_{P \cap M' | \overline{wP \cap M'}}^{M'}(\sigma') \lambda(w) \otimes J_{P \cap M' | wP \cap M'}^{M'}(\sigma'^{\vee}) \lambda(w))$$

est régulier sur \mathcal{O} (cf. 4.4) et que μ^+ est invariant par $W^{M'}(M, \mathcal{O})$, (6.1.2) converge uniformément sur tout compact de U' vers $\varphi_{\mu^+ \tilde{\xi}^{M'}}(\sigma')$. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n^{M'}}(\sigma') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\mu^+ \xi_n^{M'}}(\sigma')}{\mu^+(\sigma')} = \frac{\varphi_{\mu^+ \tilde{\xi}^{M'}}(\sigma')}{\mu^+(\sigma')} = \varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}(\sigma')$$

en tout point σ' de U' avec $\mu^+(\sigma') \neq 0$. Comme l'opérateur $\varphi_{\tilde{\xi}^{M'}}$ est régulier en $\sigma \otimes \chi'$ et que la limite définit un opérateur méromorphe sur U' , on en déduit l'égalité en $\sigma \otimes \chi'$ par prolongement analytique. \square

6.2.

La Proposition 6.1 sera utilisée dans la suite pour les applications rationnelles décrites dans le lemme suivant.

Lemme. Soit ξ une application polynomiale sur \mathcal{O} à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^{\vee}$. Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique (P, S) -standard, $P_1 = (P \cap M')U'$ et $\tilde{P}_1 = (P \cap M')\tilde{U}'$. Identifions

$$i_{\tilde{P}_1}^G E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P_1}^G E_{\mathcal{O}}^{\vee} \quad \text{avec} \quad i_{P', i_{P \cap M'}}^{M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P', i_{P \cap M'}}^{M'} E_{\mathcal{O}}^{\vee}.$$

Soient $g', g \in G$. L'application rationnelle $\tilde{\xi}_{g', g}^{M'} : \mathcal{O} \rightarrow i_{\tilde{P}_1 \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{\tilde{P}_1 \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^{\vee}$,

$$\sigma \mapsto \mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma) \left[\sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1} P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma) (J_{\tilde{P}_1 | \overline{w^{-1} P}}(\sigma) \lambda(w^{-1}) \otimes J_{P_1 | w^{-1} P}(\sigma^{\vee}) \lambda(w^{-1})) \xi(w\sigma) \right] (g'g, g')$$

est régulière en dehors d'un ensemble fini \tilde{S} d'hyperplans radiciels de \mathcal{O} de la forme $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$ avec $\alpha \in \Sigma(P_1) - \Sigma^{M'}(P \cap M')$. Par ailleurs,

$$\varphi_{\tilde{\xi}_{g', g}^{M'}}(\sigma) = \mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma) (\varphi_{\xi}(P_1, \sigma)(g'g, g')).$$

Remarque. L'application polynomiale $\sigma \mapsto \varphi_\xi(P_1, \sigma)(g'g, g')$ du lemme est bien la composante en $P_1 \cap M'$ d'un élément de l'espace de Paley–Wiener de M' , puisque les hypothèses de **2.3** valent relatives à cette application (ce qui est une vérification directe en utilisant la functorialité des opérateurs d'entrelacement vis-à-vis de l'induction parabolique).

Preuve. La fonction $\mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}$ est polynomiale sur \mathcal{O} , si $w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})$: pour que cette fonction ait un pôle, il faut par la formule du produit pour la fonction μ et **4.3** qu'il existe une racine $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}^{M'} \cap \Sigma(P)$ qui est négative pour $w^{-1}P \cap M'$. Or, comme w est le produit d'un élément de W qui envoie $\Delta_{\mathcal{O}}$ dans lui-même par un élément de $W_{\mathcal{O}}$ de longueur minimale dans sa classe à droite modulo $W_{\mathcal{O}}^{M'}$, $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}^{M'} \cap \Sigma(P)$ implique $w\alpha \in \Sigma(P)$, i.e. α est nécessairement positif pour $w^{-1}P \cap M'$.

Par la formule de décomposition pour les opérateurs d'entrelacement, on sait de même qu'un hyperplan de la forme $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$ avec $\alpha \in \Sigma^{M'}(P \cap M')$ est singulier pour $J_{(M' \cap \bar{P})U' | \overline{w^{-1}P}}($ respectivement $J_{P_1 | w^{-1}P}$), seulement s'il existe $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}}^{M'} \cap \Sigma(P)$ qui est négative pour $w^{-1}P \cap M'$. Or, on vient de voir qu'un tel α n'existe pas. Il est clair que les hyperplans de cette forme ne sont pas non plus singuliers pour $\mu_{P_1 | \bar{P}_1}$. Ceci prouve la première assertion du lemme.

Déterminons maintenant

$$\varphi_{\xi_{g', g'}^{M'}}^{M'}$$

en un point générique σ . Comme $\mu_{P_1 | \bar{P}_1}$ est invariante par $W^{M'}(M, \mathcal{O})$ en tant que quotient des fonctions $W^{M'}(M, \mathcal{O})$ -invariantes μ et $\mu^{M'}$, le produit de $\mu_{P_1 | \bar{P}_1}(\sigma)^{-1}$ avec

$$\sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} (J_{P_1 \cap M' | \overline{w'P_1 \cap M'}}^{M'}(\sigma)\lambda(w') \otimes J_{P_1 \cap M' | w'P_1 \cap M'}^{M'}(\sigma)\lambda(w')) \tilde{\xi}_{g', g'}^{M'}(w'^{-1}\sigma)$$

est l'évaluation en $(g'g, g')$ de

$$\begin{aligned} & \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) \\ & \times (J_{P_1 | (\overline{w'P} \cap M')U'}(\sigma)\lambda(w') J_{(\bar{P} \cap M')U' | \overline{w^{-1}P}}(w^{-1}\sigma)\lambda(w^{-1}) \\ & \quad \otimes J_{P_1 | w'P_1}(\sigma^\vee)\lambda(w') J_{P_1 | w^{-1}P}(w'^{-1}\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})) \xi(ww'^{-1}\sigma) \\ & = \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) \\ & \quad \times (J_{P_1 | (\overline{w'P} \cap M')U'}(\sigma) J_{(\overline{w'P} \cap M')U' | \overline{w'w^{-1}P}}(\sigma)\lambda(w'w^{-1}) \\ & \quad \otimes J_{P_1 | w'P_1}(\sigma^\vee) J_{w'P_1 | w'w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w'w^{-1})) \xi(ww'^{-1}\sigma) \\ & = \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) j_{w'w^{-1}P \cap M' | w'P \cap M'}^{M'}(\sigma) \\ & \quad \times (J_{P_1 | \overline{w'w^{-1}P}}(\sigma)\lambda(w'w^{-1}) \otimes J_{P_1 | w'w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w'w^{-1})) \xi(ww'^{-1}\sigma), \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule du produit pour les opérateurs d’entrelacement. Comme

$$\begin{aligned} & j_{w'w^{-1}P \cap M' | w'P \cap M'}^{M'}(\sigma) \text{id} \\ &= \lambda(w'^{-1}) J_{w'w^{-1}P \cap M' | w'P \cap M'}^{M'}(\sigma) J_{wP \cap M' | w'w^{-1}P \cap M'}^{M'}(\sigma) \lambda(w') \\ &= J_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) J_{P \cap M' | w^{-1}P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) \\ &= j_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) \text{id}, \end{aligned}$$

on a

$$\mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'^{-1}\sigma) j_{w'w^{-1}P \cap M' | w'P \cap M'}^{M'}(\sigma) = 1.$$

Remarquons que $W(M, \mathcal{O}) = W^{M'}(M, \mathcal{O})(W_{M'}^+(M, \mathcal{O}))^{-1}$ par 4.5. L’expression que l’on a obtenu est donc égale à $(J_{P_1|P}(\sigma) \otimes J_{P|P_1}(\sigma^\vee)^{-1})\varphi_\xi(\sigma)$, ce qui vaut $\varphi_\xi(P_1, \sigma)$, d’où le lemme. □

7. L’élément $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ de l’espace de Paley–Wiener

7.1.

Fixons un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G et l’orbite inertielle \mathcal{O} d’une représentation irréductible cuspidale de M . Fixons en outre un sous-groupe ouvert compact distingué H de K admettant une décomposition d’Iwahori par rapport à tout couple parabolique semi-standard de G et tel que $E_{\mathcal{O}}^{H \cap M} \neq 0$. On a défini dans [H1, B.4] l’application polynomiale $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ suivante sur \mathcal{O} à valeurs dans $i_P^G E_{\mathcal{O}} \otimes i_P^G E_{\mathcal{O}}^\vee$.

Désignons pour une représentation lisse (π, V) de G par V_P son module de Jacquet qui est une représentation lisse de M . L’espace V_P est somme directe de deux sous-espace M -équivariante $V_P(\mathcal{O})$ et $V_P(\text{hors}\mathcal{O})$ tels que tout sous-quotient irréductible de la représentation de M dans $V_P(\mathcal{O})$ soit dans \mathcal{O} et qu’aucun sous-quotient de la représentation de M dans $V_P(\text{hors}\mathcal{O})$ ne le soit.

Pour H un sous-groupe ouvert compact de G admettons une décomposition d’Iwahori par rapport à $P = MU$, le foncteur de Jacquet $V^H \rightarrow V_P^{H \cap M}$ défini relatif aux invariants par H et par $H \cap M$ admet une section canonique sur un sous-espace noté $S_P^H(V)$ de V^H .

La valeur de $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ en un point σ de \mathcal{O} est alors égale à la projection de $i_{P \cap K}^K E_\sigma$ sur $S_P^H(i_{P \cap K}^K E_\sigma)(\mathcal{O})$ de noyau égal à l’intersection des éléments de $S_P^H(i_{P \cap K}^K E_\sigma^\vee)(\mathcal{O}^\vee)$.

On a montré qu’il existe un élément $\varphi_{\mathcal{O}}$ de l’espace de Paley–Wiener de $PW(G)$ tel que $(\varphi_{\mathcal{O}})_{P,\mathcal{O}} = \varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ et que $(\varphi_{\mathcal{O}})_{P',\mathcal{O}'} = 0$, si \mathcal{O}' n’est pas conjugué à \mathcal{O} .

Choisissons des éléments $v_i \in (i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}})^H$ (respectivement $v_i^\vee \in (i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee)^H$), $i \in I$, à support dans $(\bar{P} \cap K)H$ (respectivement $(P \cap K)H$), tels que $e_i := v_i(1)$ (respectivement $e_i^\vee := v_i^\vee(1)$) forment des bases de $E_{\mathcal{O}}^{M \cap H}$ (respectivement $(E_{\mathcal{O}}^\vee)^{M \cap H}$) qui sont duales. Posons $c = \text{mes}_{\bar{U}_P}(H \cap U_P) \text{mes}_{\bar{U}_P}(H \cap \bar{U}_P)$. On a montré dans [H1, B.5] qu’une solution polynomiale de la relation (#) de l’introduction relative à $\varphi_{P,\mathcal{O}}^H$ est donnée par

$$\xi_{\varphi_{P,\mathcal{O}}^H} := c^{-1} \sum_{i \in I} v_i \otimes v_i^\vee.$$

Notons $f_{\varphi_{\mathcal{O}}}$ l’élément de $C_c^\infty(G)$ qui correspond à $\varphi_{\mathcal{O}}$ (cf. 2.3).

Lemme. Soit π une représentation de carré intégrable de G dont le support cuspidal est contenu dans la classe de W -conjugaison de \mathcal{O} . Alors $\text{tr}(\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}}))$ est un entier strictement positif.

Preuve. Notons V_{π} l'espace de π . D'après [H1, B.3.4.1], on a $(V_{\pi})_P(\mathcal{O}) \neq 0$. Par réciprocity de Frobenius, il existe donc $\sigma \in \mathcal{O}$, tel que $\pi \hookrightarrow i_P^G \sigma$. Il en résulte en outre que $S_P^H(i_P^G \sigma)(\mathcal{O}) \cap V_{\pi} \supseteq S_P^H(V_{\pi})(\mathcal{O}) \neq 0$ (dans les notations de [H1, B.2]) et que $\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}}) = \varphi_{P,\mathcal{O}}^H(\sigma) |_{V_{\pi}}$. L'endomorphisme $\pi(f_{\varphi})$ est donc comme restriction d'une projection une projection ou bien identiquement 0. Comme la trace d'une projection est toujours un entier strictement positif, il reste à montrer que $\pi(f_{\varphi}) \neq 0$. Or, d'après ce qui précédait, il existe $v \in S_P^H(i_P^G \sigma)(\mathcal{O}) \cap V_{\pi}$, $v \neq 0$, et on a $\pi(f_{\varphi})(v) = \varphi_{P,\mathcal{O}}^H(\sigma)(v) = v \neq 0$, d'où le lemme. \square

7.2.

Lemme. L 'application rationnelle

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma \mapsto E_{P,\sigma}^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1)\xi_{\varphi_{P,\mathcal{O}}^H}(\sigma))(1)$$

est constante et > 0 .

Preuve. Remarquons d'abord que, pour σ régulier,

$$\begin{aligned} E_{P,\sigma}^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1)\xi_{\varphi_{P,\mathcal{O}}^H}(\sigma))(1) &= c^{-1} \sum_{i \in I} E_{P,\sigma}^G(J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i \otimes v_i^{\vee})(1) \\ &= c^{-1} \sum_{i \in I} \langle J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i, v_i^{\vee} \rangle \\ &= c^{-1} \sum_{i \in I} \int_K \langle (J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(k), v_i^{\vee}(k) \rangle dk. \end{aligned}$$

Soit $p \in P \cap K$ et $h \in H$. Notons $m_P(p)u_P(p)$ la décomposition de p selon la décomposition $P = MU$. On a

$$\begin{aligned} (J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(ph) &= ((i_P^G \sigma)(h)J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(p) \\ &= (J_{P|\bar{P}}(\sigma)(i_{\bar{P}}^G \sigma)(h)v_i)(p) \\ &= (J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(p) \\ &= \sigma(m_P(p))(J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(1), \end{aligned}$$

avec, d'après le Lemme B.5.2.1 de [H1],

$$(J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(1) = \text{mes}_{U_P}(H \cap U_P)e_i,$$

alors que $v_i^{\vee}(ph) = \sigma^{\vee}(m_P(p))v_i^{\vee}(1) = \sigma^{\vee}(m_P(p))e_i^{\vee}$.

Comme $\text{supp}(v_i^{\vee}) \subseteq (P \cap K)H$ et que $\langle e_i, e_i^{\vee} \rangle = 1$, on en déduit que

$$\int_K \langle (J_{P|\bar{P}}(\sigma)v_i)(k), v_i^{\vee}(k) \rangle dk = \text{mes}((P \cap K)H) \text{mes}_{U_P}(H \cap U_P).$$

Par suite, $E_{P,\sigma}^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1)\xi_{\varphi_{P,\mathcal{O}}^H}(\sigma))(1)$ est constant et > 0 pour σ dans un ouvert de Zariski de \mathcal{O} , d'où le lemme par prolongement analytique. \square

8. La décomposition spectrale

Dans tout ce paragraphe, on fixe un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G et l'orbite inertielle \mathcal{O} d'une représentation irréductible cuspidale de M . Par ailleurs, le symbole \mathcal{S} désignera dans tout ce paragraphe l'ensemble fini \mathcal{S}_μ d'hyperplans affines de \mathcal{O} associé à la fonction μ de Harish-Chandra définie relative à \mathcal{O} (cf. 4.3).

8.1.

Appelons un sous-espace affine radiciel A de \mathcal{O} résiduel pour μ , s'il existe une fonction polynomiale p sur \mathcal{O} et une donnée de résidu Res_A en A , tel que $Res_A(p\mu) \neq 0$. Notons $\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ formé des sous-espaces affines qui sont résiduels pour μ .

Notons $rg_{ss}(H)$ le rang semi-simple d'un groupe réductif H . Si M' est un sous-groupe de Levi de G , on appelle $rg_{ss}(G) - rg_{ss}(M')$ le rang parabolique de M' (relatif à G).

Le lemme suivant est une reformulation de résultats combinatoires de Heckman–Opdam et Opdam.

Lemme. Soit Σ' un système de racines dans $a_M^{G^*}$ de dimension m de groupe de Weyl W' , soit q_1 un réel > 1 et soit $\underline{k} = (k_\alpha)_{\alpha \in \Sigma'}$ une famille de nombres > 0 tels que $k_{w\alpha} = k_\alpha$ pour tout $w \in W'$. Posons pour $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^{G^*}$

$$\mu(\lambda, \underline{k}) = \prod_{\alpha \in \Sigma'} \frac{1 - q_1^{\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle}}{1 - q_1^{k_\alpha + \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle}}.$$

Pour qu'il existe une suite strictement croissante de sous-groupes de Levi

$$M \subset M_1 \subset \dots \subset M_{m-1} \subset M_m = G$$

et une fonction p méromorphe sur $a_{M,\mathbb{C}}^{G^*}$ et holomorphe en un voisinage de λ telle que les résidus successifs de $p\mu(\cdot, \underline{k})$ par rapport aux sous-espaces $\lambda + a_{M_i,\mathbb{C}}^{G^*}$ soient non nuls, il faut et il suffit que λ soit un pôle d'ordre m de $\mu(\cdot, \underline{k})$ (l'ordre d'un pôle étant défini comme dans (3.4)). Ces pôles de $\mu(\cdot, \underline{k})$ sont d'ordre maximal.

De plus, si λ est un pôle d'ordre maximal m de $\mu(\cdot, \underline{k})$, alors les résidus successifs de $\mu(\cdot, \underline{k})$ par rapport aux sous-espaces $\lambda + a_{M_i,\mathbb{C}}^{G^*}$ sont des fonctions non nulles qui ont des pôles simples par rapport aux sous-espaces $\lambda + a_{M_{i+1},\mathbb{C}}^{G^*}$.

Preuve. Il résulte de [HO1, Théorème 3.9 et identité (3.17)] que la condition est suffisante, pour que λ soit un pôle d'ordre m , et que les pôles des résidus successifs par rapport aux $a_{M_i,\mathbb{C}}^{G^*}$ sont alors simples. La réciproque et la maximalité de l'ordre de ces pôles résultent de [O2, Corollaire 7.10 et Remarque 7.11]. □

Proposition. Pour qu'un sous-espace affine radiciel A de \mathcal{O} soit dans $\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$, il faut et il suffit qu'un (ou tout) élément de A_{reg} soit un pôle de μ^{M_A} d'ordre égal au rang parabolique de M défini relatif à M_A . Ces pôles sont d'ordre maximal pour μ^{M_A} .

Preuve. Soit $\sigma \in A_{\text{reg}}$. Considérons d'abord le cas $M_A = G$. On a alors $A = A_{\text{reg}}$. En échangeant P le cas échéant, on peut supposer $\Re(\sigma) \geq_P 0$. Si $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$ est un hyperplan singulier pour μ , alors $\mu^{M_\alpha}(\Im(\sigma)) = 0$ par 4.1. Si μ^{M_α} s'annule sur $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha}$, alors la projection $\Re(\sigma)^{M_\alpha}$ de $\Re(\sigma)$ sur $a_M^{M_\alpha^*}$ est nulle (cf. 4.1). Notons $\Sigma_{\text{sp}}^+(\sigma)$ le sous-ensemble de l'ensemble $\Sigma_{\text{sp}}(\sigma)$ (défini en 4.1), formé des racines qui sont positives pour P . Écrivons $\mu = \mu_{\text{ns}, \sigma} \mu_{\text{sp}, \sigma}$ avec les notations de 4.1 et posons $\sigma_0 := \Im(\sigma)$. La fonction $\lambda \mapsto \mu_{\text{ns}, \sigma}(\sigma_0 \otimes \chi_\lambda)$ est alors régulière et non nulle dans la partie réelle de tout hyperplan affine qui appartient à \mathcal{S} et qui contient A (i.e. qui est un élément de \mathcal{S}_A). On peut écrire

$$\mu_{\text{sp}, \sigma}(\sigma_0 \otimes \chi_\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_{\text{sp}}^+(\sigma)} \frac{(1 - q^{-m_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle})(1 - q^{m_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle})}{(1 - q^{k_\alpha - m_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle})(1 - q^{k_\alpha + m_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle})} \tag{8.1.1}$$

avec des nombres rationnels $m_\alpha > 0$ qui vérifient $m_{w\alpha} = m_\alpha$ pour $w \in W(M, \mathcal{O})$ (en fait $m_\alpha = \langle \alpha^\vee, \tilde{\alpha} \rangle^{-1}$, ce qui est clairement invariant par $W(M, \mathcal{O})$).

Posons $m = \text{rg}_{\text{ss}}(G) - \text{rg}_{\text{ss}}(M)$, $q_1 = q^{m_\alpha}$ et $k'_\alpha = k_\alpha/m_\alpha$. Comme, par ce qui précède, $k'_\alpha = k'_{w\alpha}$ pour $w \in W(M, \mathcal{O})$, on peut appliquer le lemme à l'expression (8.1.1).

Pour que $A \in \mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$, il faut qu'il existe une suite strictement croissante $M \subset M_1 \subset \dots \subset M_{m-1} \subset M_m = G$ de sous-groupes de Levi de G et un polynôme p sur \mathcal{O} tel que les résidus successifs de $\lambda \mapsto p\mu_{\text{sp}, \sigma}(\sigma_0 \otimes \chi_\lambda)$ par rapport aux sous-espaces $\Re(\sigma) + a_{M_i, \mathbb{C}}^{G^*}$ soient non nuls. On déduit alors du lemme que ceci implique que σ est un pôle d'ordre m de μ .

Réciproquement, le lemme montre que, si σ est un pôle d'ordre m de μ , alors il existe une suite strictement croissante $M \subset M_1 \subset \dots \subset M_{m-1} \subset M_m = G$ telle que les résidus successifs de $\lambda \mapsto \mu_{\text{sp}, \sigma}(\sigma_0 \otimes \chi_\lambda)$ par rapport aux sous-espaces $\Re(\sigma) + a_{M_i, \mathbb{C}}^{G^*}$ soient des fonctions non nulles qui ont des pôles simples par rapport aux sous-espaces $\Re(\sigma) + a_{M_{i+1}, \mathbb{C}}^{G^*}$. Comme $\lambda \mapsto \mu_{\text{ns}, \sigma}(\sigma_0 \otimes \chi_\lambda)$ est régulière et non nulle dans la partie réelle de tout hyperplan affine de \mathcal{S} qui contient A , ceci implique bien que $A \in \mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$.

On déduit du lemme également que ces pôles sont d'ordre maximal.

Soit maintenant $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, $M_A \neq G$. Comme les hyperplans affines appartenant à $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\mu^{M_A}}$ sont définis par des racines n'appartenant pas à $\Sigma(P \cap M_A)$, ils ne contiennent pas A . Tout élément A' de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ qui contient A appartient par conséquent à $\mathcal{A}(\mathcal{S}_{\mu^{M_A}})$. Appliquons ce que l'on vient de montrer à M_A : pour que tout élément de A_{reg} soit un pôle de μ^{M_A} d'ordre égal au rang parabolique de M relatif à M_A , il faut et qu'il suffit que $A \in \mathcal{A}_{\mu^{M_A}}(\mathcal{S}_{\mu^{M_A}})$. Il reste donc à voir que $A \in \mathcal{A}_{\mu^{M_A}}(\mathcal{S}_{\mu^{M_A}})$ équivaut à $A \in \mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$.

Soit p une fonction polynomiale sur \mathcal{O} et soit \mathcal{D} une suite décroissante de sous-espaces affines de \mathcal{O} contenant A et définissant un opérateur résidu en A (cf. 3.7). Soit σ dans A_{reg} . Le point σ est alors régulier pour $\mu(\mu^{M_A})^{-1}$, et on déduit du lemme ci-dessus appliqué à μ^{M_A} et à $a_M^{M_A^*}$ que, pour que les résidus successifs de μ^{M_A} par rapport aux sous-espaces affines appartenant à \mathcal{D} aient des pôles simples (par rapport à ces sous-espaces), il suffit que ou bien $\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu)(\sigma) \neq 0$ ou bien $\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu^{M_A})(\sigma) \neq 0$. On a alors

$$(\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu))(\sigma) = (\mu(\mu^{M_A})^{-1})(\sigma)(\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu^{M_A}))(\sigma).$$

Comme $\mu(\mu^{M_A})^{-1}$ ne s'annule par définition de \mathcal{S} pas sur A_{reg} , il en suit que $\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu)(\sigma) \neq 0$ équivaut à $\text{Res}_{\mathcal{D}}(p\mu^{M_A})(\sigma) \neq 0$, d'où l'équivalence recherchée entre $A \in \mathcal{A}_{\mu^{M_A}}(\mathcal{S}_{\mu^{M_A}})$ et $A \in \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$. \square

Remarque. Pour tous $A \in \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$, $\sigma \in A_{reg}$ et toute fonction rationnelle ψ sur \mathcal{O} régulière sur A_{reg} , nous avons montré au cours de la preuve de la proposition l'identité

$$(\text{Res}_A^P \psi \mu)(\sigma) = \psi(\sigma)(\text{Res}_A^P \mu)(\sigma). \tag{8.1.2}$$

Nous avons également établi à la fin de la preuve de la proposition le résultant suivant.

Corollaire. Soit M' un sous-groupe de Levi semi-standard de G , $M' \supseteq M$. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_{\mu^{M'}})$.

Pour que A soit dans $\mathcal{A}_{\mu^{M'}}(\mathcal{S}_{\mu^{M'}})$, il faut et il suffit que A appartienne à $\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$.

8.2.

On est maintenant en mesure d'énoncer et de prouver notre résultat principal. Appelons sous-groupe parabolique (P, \mathcal{S}) -standard de G tout sous-groupe parabolique semi-standard de la forme $P' = M'U'$, où $M' = M_A$ est un sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard, tel que P_A contienne la chambre de Weyl associée à P' dans $a_{M_A}^*$ (cf. 4.6). Rappelons que l'on a noté (cf. 6.1) $\text{Stab}(A) = \{w \in W^{M_A}(M, \mathcal{O}) \mid wA = A\}$ pour $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. On désignera par $[A]$ la classe de $W^{M_A}(M, \mathcal{O})$ -conjugaison de A . On fixe un ensemble de représentants $[\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ de ces classes. On pose $[\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})] := [\mathcal{A}(\mathcal{S})] \cap \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$.

Rappelons également que $\mathcal{E}_2(M', \sigma)$ désigne l'ensemble des représentations de carré intégrable de M' dont le support cuspidal contient σ (cf. 6.1) et que, pour $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$, M_{Ω} désigne le plus petit sous-groupe de Levi M' de G contenant M et tel que $\Omega \subseteq a_{M'}^{M'*}$ (cf. 4.6).

Théorème. Pour toute application polynomiale $\xi : \mathcal{O} \rightarrow i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^{\vee}$ à valeurs dans un sous-espace de dimension finie et tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} & \gamma(G/M) \int_{\Re(\sigma)=r \gg_{P^0}} \text{deg}(\sigma) E_P^G((J_{P|P}^{-1}(\sigma) \otimes 1)\xi(\sigma))(g) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}} \sum_{A \in [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})], M_A = M_{\Omega}} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1} \gamma(G/M) |\text{Stab}(A)|^{-1} \\ & \quad \times \int_{\Re(\sigma)=r(A)} \text{deg}(\sigma) \\ & \quad \times \sum_{w' \in W^{M_A}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{w'A}^P(E_P^G((J_{P|P}^{-1}(ww'\sigma) \otimes 1) \\ & \quad \times \xi(ww'\sigma))(g) d_A \mathfrak{S}(\sigma). \tag{8.2.1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $A \in [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$, tout $\sigma \in A$ vérifiant $\Re(\sigma) = r(A)$ et tout $g \in G$, on a, avec $M' = M_A$ et $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique (P, \mathcal{S}) -standard, l'identité

suivante de fonctions rationnelles en $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$:

$$\begin{aligned} & \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} \\ & \times \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{w'A}^P(E_P^G((J_{\bar{P}|P}^{-1}(ww'(\sigma \otimes \chi')) \otimes 1)\xi(ww'(\sigma \otimes \chi')))(g)) \\ & = \gamma(G/M') \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)} \deg(\pi) \mu(\pi \otimes \chi') E_{P'}^G(\varphi_\xi(P', \pi \otimes \chi'))(g). \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

De plus, pour que $\sigma \in \mathcal{O}$ vérifie $\mathcal{E}_2(G, \sigma) \neq \emptyset$, il faut qu'il appartienne à un élément A de $\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})$ qui vérifie $M_A = G$.

Preuve. Pour simplifier les notations (et économiser de la place), on va identifier $i_{P' \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{P' \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^\vee$ à un sous-espace de $\text{End}(i_{P' \cap K}^K E_{\mathcal{O}}, i_{P' \cap K}^K E_{\mathcal{O}})$, etc., via le plongement usuel. Ainsi $(J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma) \otimes 1)\xi(\sigma)$ s'identifie à $J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma)\xi(\sigma)$.

Par le théorème des résidus **4.11**,

$$\begin{aligned} & \gamma(G/M) \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r \gg_P 0} \deg(\sigma) E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma)\xi(\sigma))(g) d_{\mathcal{O}} \mathfrak{S}(\sigma) \\ & = \sum_{\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}} \sum_{A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})], M_A = M_\Omega} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1} \gamma(G/M) \\ & \quad \times \int_{\mathfrak{R}(\sigma)=r(A)+\epsilon_A} \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} \\ & \quad \times \sum_{w' \in W^{M_A}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M_A}^+(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{w'A}^P(E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(ww'\sigma)\xi(ww'\sigma))(g)) d_A \mathfrak{S}(\sigma). \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

On va montrer que les contributions des termes venant d'un élément de $[\mathcal{A}(\mathcal{S})] - [\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})]$ sont nulles, que les identités (8.2.2) sont vérifiées pour tout $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ et que la somme sous l'intégrale (8.2.3) est régulière en tout σ avec $\mathfrak{R}(\sigma) = r(A)$. A l'aide de la formule de Plancherel, ceci prouvera le théorème.

On va effectuer une récurrence sur le rang semi-simple de G . Les différentes étapes de la preuve (traitement de la partie 'continue' de (8.2.3) à l'aide de l'hypothèse de récurrence, identification de la partie continue de (8.2.3) avec celle de la formule de Plancherel, traitement de la partie 'discrète') sont réparties sur les numéros **8.3**, **8.4** et **8.5** ci-après. \square

8.3.

On va effectuer une récurrence sur le rang semi-simple de G . Si $\text{rg}_{\text{ss}}(G) = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons le théorème prouvé pour tout groupe de rang semi-simple plus petit que celui de G . Soit $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$ tel que $M' := M_\Omega \neq G$. Soit $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ avec

$M' = M_A$ et notons P' un sous-groupe parabolique (P, \mathcal{S}) -standard de Levi M' . Posons $P_1 = (M' \cap P)U'$. C'est un sous-groupe parabolique semi-standard contenu dans P' de sous-groupe de Levi M . Comme $\Delta_{\mathcal{O}} \subseteq \Sigma(P)$ et que P' est (P, \mathcal{S}) -standard, tout élément $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$ vérifie ou $\alpha \in \Sigma(P \cap M')$ ou $\alpha|_{M'} \in \Sigma(P')$. On en déduit $\Delta_{\mathcal{O}} \subseteq \Sigma(P_1)$.

On a alors pour $\sigma \in \mathcal{O}$ en position générique, en utilisant les règles de composition, d'adjonction et de compatibilité vis-à-vis de l'induction parabolique pour les opérateurs d'entrelacement (où on identifie $i_{P_1}^G$ avec $i_{P'}^G i_{P_1 \cap M'}^{M'}$) (cf. [W, ch. IV])

$$\begin{aligned}
 & \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} E_P^G(J_{P|\bar{P}}(w\sigma)\xi(w\sigma))(g) \\
 &= \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} E_P^G(\lambda(w)\lambda(w^{-1})J_{P|\bar{P}}(w\sigma)\xi(w\sigma))(g) \\
 &= \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} E_P^G(\lambda(w)J_{w^{-1}P|\overline{w^{-1}\bar{P}}}(\sigma)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma))(g) \\
 &= \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma) \\
 & \quad \times E_{P_1}^G(\lambda(w)J_{w^{-1}P|P_1}(\sigma)J_{P_1|(M' \cap \bar{P})U'}(\sigma) \\
 & \quad \times J_{(M' \cap \bar{P})U'|\overline{w^{-1}\bar{P}}}(\sigma)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma))(g) \\
 &= \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} E_{P_1}^G((J_{P_1|(M' \cap \bar{P})U'}(\sigma) \otimes 1) \\
 & \quad \times [\mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma)(J_{(M' \cap \bar{P})U'|\overline{w^{-1}\bar{P}}}(\sigma)\lambda(w^{-1}) \\
 & \quad \otimes J_{P_1|w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma)])(g) \\
 &= \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} E_{P'}^G(i_{P'}^G(J_{M' \cap P | M' \cap \bar{P}}^{M'}(\sigma) \otimes 1) \\
 & \quad \times [\mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma)(J_{(M' \cap \bar{P})U'|\overline{w^{-1}\bar{P}}}(\sigma)\lambda(w^{-1}) \\
 & \quad \otimes J_{P_1|w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma)])(g) \\
 &= \int_{P' \setminus G} E_{P \cap M'}^{M'} \left(J_{P \cap M' | \bar{P} \cap M'}^{M'}(\sigma) \right. \\
 & \quad \times \left[\sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma) \right. \\
 & \quad \times ((J_{(M' \cap \bar{P})U'|\overline{w^{-1}\bar{P}}}(\sigma)\lambda(w^{-1}) \\
 & \quad \otimes J_{P_1|w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma))(\bar{g}'g, \bar{g}') \left. \right) \left. \right] (1) d\bar{g}'.
 \end{aligned}$$

Posons $\tilde{P}_1 = (M' \cap P)\bar{U}'$. Comme l'intégrale est en fait une somme finie, il s'en suit que, pour A' dans $[A]$ et $\sigma \in A'$ en position générique

$$\begin{aligned} & \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{A'}(E_{\tilde{P}}^G(J_{\tilde{P}|P}^{-1}(w\sigma)\xi(w\sigma))(g)) \\ &= \int_{P' \setminus G} \text{Res}_{A'} \left(E_{P \cap M'}^{M'} \left(J_{\tilde{P} \cap M' | P \cap M'}^{M'-1}(\sigma) \right. \right. \\ & \quad \times \left[\mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma) \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma) \right. \\ & \quad \times (J_{(\tilde{P} \cap M')U' | \overline{w^{-1}P}}(\sigma)\lambda(w^{-1}) \\ & \quad \left. \left. \otimes J_{P_1 | w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma) \right] (\bar{g}'g, \bar{g}') \right) (1) \, d\bar{g}'. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

L'application rationnelle $\tilde{\xi}_{g',g'}^{M'} : \mathcal{O} \rightarrow i_{\tilde{P} \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}} \otimes i_{\tilde{P} \cap K \cap M'}^{K \cap M'} E_{\mathcal{O}}^\vee$,

$$\sigma \mapsto \mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma) \left[\sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(\sigma) ((J_{(\tilde{P} \cap M')U' | \overline{w^{-1}P}}(\sigma)\lambda(w^{-1}) \otimes J_{P_1 | w^{-1}P}(\sigma^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma)) (g'g, g') \right]$$

vérifie d'après **6.2** les hypothèses de la Proposition 6.1. Le Lemme 6.2 montre par ailleurs que

$$\varphi_{\tilde{\xi}_{g',g'}^{M'}}(\sigma) = \mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma)(\varphi_\xi(P_1, \sigma)(g'g, g'))$$

(dans les notations de **6.2**).

Fixons $\sigma \in A$ avec $\mathfrak{R}(\sigma) = r(A)$. On trouve alors par la Proposition **6.1** avec l'hypothèse de récurrence, en utilisant l'égalité $\gamma(G/M) = \gamma(G/M')\gamma(M'/M)$, et en posant $\sigma' = \sigma \otimes \chi'$ l'égalité

$$\begin{aligned} & |\text{Stab}(A)|^{-1} \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \gamma(G/M) \text{deg}(\sigma) \\ & \times \text{Res}_{w'A}^{P \cap M'} \left(E_{P \cap M'}^{M'} \left(J_{P \cap M' | \tilde{P} \cap M'}^{M'-1}(w'\sigma') \right. \right. \\ & \quad \times \left[\mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(w'\sigma') \right. \\ & \quad \times \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \mu_{w^{-1}P \cap M' | P \cap M'}^{M'}(w'\sigma') \\ & \quad \times (J_{(\tilde{P} \cap M')U' | \overline{w^{-1}P}}(w'\sigma')\lambda(w^{-1}) \\ & \quad \left. \left. \otimes J_{P_1 | w^{-1}P}(w'\sigma'^\vee)\lambda(w^{-1})\xi(w\sigma') \right] (g'g, g') \right) (1) \\ &= \gamma(G/M') \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)} \text{deg}(\pi) \mu_{P_1 | \tilde{P}_1}(\sigma') E_{M'}^{M'}(\varphi_\xi(P_1, \pi \otimes \chi')(g'g, g'))(1). \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

de fonctions rationnelles en $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$. Remarquons que, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{E}_2(M', \sigma)$ est vide, si $A \notin \mathcal{A}_{\mu_{M'}}(\mathcal{S}_{\mu_{M'}})$, ce qui équivaut par le Corollaire 8.1 à $A \notin \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$. La somme (8.3.2) est donc nulle, si $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})] - [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$.

En appliquant 4.9, en intégrant l'égalité ci-dessus sur $P' \backslash G$ par rapport à \bar{g}' , en insérant le résultat dans l'identité (8.3.1) et en utilisant l'identité $\mu_{P_1 | \bar{P}_1}(\sigma \otimes \chi') = \mu(\pi \otimes \chi')$, on en déduit l'identité

$$\begin{aligned} & \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} \\ & \times \sum_{w' \in W^{M'}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{M'}^+(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{w'A}^P(E_{\bar{P}}^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(ww'(\sigma \otimes \chi'))\xi(ww'(\sigma \otimes \chi')))(g)) \\ & = \gamma(G/M') \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M', \sigma)} \mu(\pi \otimes \chi') \deg(\pi) E_{P'}^G(\varphi_{\xi}(P', \pi \otimes \chi'))(g), \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

de fonctions rationnelles sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M')$, où $\mathcal{E}_2(M', \sigma) = \emptyset$, si $A \notin \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$. Ceci implique bien les identités (8.2.2) du théorème pour tout $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$, $M_{\Omega} \neq G$ et que les termes dans (8.2.3) indexés par $[\mathcal{A}(\mathcal{S})] - [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$ sont nuls. Comme la fonction μ est régulière en une représentation de carré intégrable (cf. [W, IV.3(6)]), la fonction définie par (8.3.3) est régulière en tout χ' avec $\Re(\chi') = 0$. On peut donc poser $\epsilon_A = 0$ dans (8.2.3).

8.4.

On va maintenant montrer que la somme des termes dans (8.2.3) indexés par les sous-ensembles Ω de $\Delta_{\mathcal{O}}$, $M_{\Omega} \neq G$, s'identifie à la partie continue de la formule de Plancherel.

Soit $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$ tel que $M_{\Omega} \neq G$, et supposons qu'il existe $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ tel que $M_A = M_{\Omega}$. Désignons par $[A]_{P, \mathcal{S}}$ l'ensemble des $A' \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ qui sont conjugués à A par un élément de $W(M, \mathcal{O})$ et qui sont tels que $M_{A'}$ soit (P, \mathcal{S}) -standard. (L'ensemble $[A]_{P, \mathcal{S}}$ n'est qu'un sous-ensemble de celui désigné par le même symbole à l'intérieur de la preuve du Lemme 4.7.) Fixons pour tout A' de $[A]_{P, \mathcal{S}}$ un élément $\sigma_{A'}$ de A' avec $\Re(\sigma_{A'}) = r(A')$, et un sous-groupe parabolique (P, \mathcal{S}) -standard de Levi $M_{A'}$ que l'on notera (abusivement) $P_{A'}$. On peut supposer que les représentations $\sigma_{A'}$ sont mutuellement conjuguées. Comme les identités (8.2.2) ont été établies pour les éléments de $[A]_{P, \mathcal{S}}$, la somme des termes dans (8.2.3), indexés par les éléments de $[A]_{P, \mathcal{S}}$, est égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{A' \in [A]_{P, \mathcal{S}}} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_{A'}}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_{A'})|^{-1} \gamma(G/M_{A'}) \\ & \times \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})} \int_{\mathcal{O}_{\pi, 0}} \deg(\pi') E_{P_{A'}}^G(\varphi_{\xi}(P_{A'}, \pi'))(g) \mu(\pi') d\pi'. \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Remarquons que les constantes $|W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_{A'}}|$, $|\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_{A'})|$ et $\deg(\sigma_{A'})$ ne dépendent pas du choix de $A' \in [A]_{P, \mathcal{S}}$ et que, par 4.7,

$$|\{M_{A'} \mid A' \in [A]_{P, \mathcal{S}}\}| = \frac{|\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)| |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|}{|W(M_A, \mathcal{O})|}.$$

Par ailleurs, on a, pour $w \in W(M, \mathcal{O})$, $\mathcal{E}_2(wM_A, w\sigma_A) = \{w\pi \mid \pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)\}$ et $\gamma(G/M_A) = \gamma(G/wM_A)$. On en déduit avec [W, V.3.1] que les termes dans la somme (8.4.1) ne dépendent pas du choix de $A' \in [A]_{P,S}$. Par suite, (8.4.1) est égal à

$$\begin{aligned} & \gamma(G/M_A) |W(M_A, \mathcal{O})|^{-1} \\ & \times \sum_{A' \in [A]_{P,S}, M_{A'} = M_A} \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})} \int_{\mathcal{O}_{\pi,0}} \deg(\pi') E_{P_{A'}}^G(\varphi_\xi(P_{A'}, \pi'))(g) \mu(\pi') d\pi'. \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Soit $\pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)$. On peut identifier $W(M_A, \mathcal{O}_{\pi,0})$ à un sous-groupe de $W(M_A, \mathcal{O})$: soit $w \in W(M_A, \mathcal{O}_{\pi,0})$. Alors $w\sigma_A$ est dans le support cuspidal de $w\pi$ et, comme $w\pi \in \mathcal{O}_{\pi,0}$, il existe $w' \in W^{M_A}$ tel que $ww'\sigma_A \in \mathcal{O}$, d'où $ww'\mathcal{O} = \mathcal{O}$. La classe à droite modulo $W^{M_A}(M, \mathcal{O})$ de w' est déterminée de façon unique.

L'ensemble des $\mathcal{O}_{\pi',0}$ avec π' dans la réunion des $\mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})$ avec $A' \in [A]_{P,S}$, $M_{A'} = M_A$ et $\mathcal{O}_{\pi',0}$ conjugués à $\mathcal{O}_{\pi,0}$ par un élément de W est sans multiplicité, puisque A' ne peut être conjugué à A par un élément de $W^{M_A}(M, \mathcal{O})$ (les éléments de $[A]_{P,S}$ étant des représentants de ces classe de conjugaison). On vérifie par ailleurs que cet ensemble est égal à l'orbite de $\mathcal{O}_{\pi,0}$ pour l'action par conjugaison par $W(M_A, \mathcal{O})$. Inversement, toute orbite $\mathcal{O}_{\pi',0}$ avec π' dans la réunion des $\mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})$, $A' \in [A]_{P,S}$ et $M_{A'} = M_A$, est conjuguée par un élément de W à une orbite de la forme $\mathcal{O}_{\pi,0}$ avec $\pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)$.

En rassemblant les représentations π' dans la réunion des $\mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})$ avec $A' \in [A]_{P,S}$ et $M_{A'} = M_A$, dont les orbites $\mathcal{O}_{\pi',0}$ sont conjuguées et qui ont par [W, V.3.1] la même contribution dans (8.4.2), l'identité (8.4.2) devient donc

$$\gamma(G/M_A) \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)} |W(M_A, \mathcal{O}_{\pi,0})|^{-1} \int_{\mathcal{O}_{\pi,0}} \deg(\pi') E_{P_A}^G(\varphi_\xi(P_A, \pi'))(g) d\pi'. \tag{8.4.3}$$

Notons $L^2(G)_{[A]_{P,S}}$ le sous-espace de l'espace hilbertien $L^2(G)$ engendré par les combinaisons linéaires des fonctions de la forme

$$g \mapsto \int_{\mathcal{O}_{\pi,0}} E_{P_A}^G(\varphi_\xi(P_A, \pi'))(g) d\pi', \tag{8.4.4}$$

avec $\pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)$. En comparant (8.4.3) avec (2.5.1), on voit en utilisant la Proposition VII.2.2 de [W] que (8.4.3) est la projection orthogonale de f_ξ , considéré comme élément de $L^2(G)$, sur $L^2(G)_{[A]_{P,S}}$.

Si on change de classe $[A]_{P,S}$, (8.4.3) définit une fonction qui est orthogonale à l'espace $L^2(G)_{[A]_{P,S}}$, puisque des fonctions de la forme (8.4.4) correspondant à des orbites unitaires non conjuguées sont orthogonales (cf. [W, Proposition VII.2.2]).

Pour conclure que la somme des termes dans (8.2.3) indexés par les $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$, $M_\Omega \neq G$, est égale à la partie continue de la formule de Plancherel, il reste à vérifier que, pour tout $(P' = M'U', \mathcal{O}'_0) \in \Theta_2(\mathcal{O})$ avec $M' \neq G$, il existe $A \in [A_\mu(\mathcal{S})]$, $\sigma_A \in A$ et $\pi \in \mathcal{E}_2(M_A, \sigma_A)$, tel que M_A soit (P, \mathcal{S}) -standard et que \mathcal{O}'_0 soit conjugué à $\mathcal{O}_{\pi,0}$.

Par hypothèse de récurrence, pour que $\mathcal{E}_2(M', \sigma) \neq \emptyset$ pour un $\sigma \in \mathcal{O}$, il faut qu'il existe $A \in \mathcal{A}_{\mu M'}(\mathcal{S}_{\mu M'}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$ tel que $M' = M_A$. Par le Lemme 4.6, M' est conjugué à

un sous-groupe de Levi (P, \mathcal{S}) -standard de G par un élément w de $W(M, \mathcal{O})$. Soit π dans $w\mathcal{O}'_0$. Par hypothèse de récurrence, il existe alors $A' \in [\mathcal{A}_{\mu^{M'}}(\mathcal{S}_{\mu^{M'}})] \subseteq [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$, $\sigma_{A'} \in A'$ tels que $\pi \in \mathcal{E}_2(M_{A'}, \sigma_{A'})$.

Tous les termes de la partie continue de la formule de Plancherel apparaissent donc bien dans la partie continue de (8.2.3).

8.5.

Supposons maintenant $M_{\Delta_{\mathcal{O}}} = G$ et considérons les termes dans (8.2.3) qui sont indexés par $\Delta_{\mathcal{O}}$. La fonction

$$f_{\xi} : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_{\Re(\sigma)=r \gg_P 0} E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma)\xi(\sigma))(g^{-1}) d_{\mathcal{O}}\mathfrak{S}(\sigma)$$

est lisse à support compact, donc de carré intégrable. D’après [W, Proposition VI.3.1], pour M' un sous-groupe de Levi $\supseteq M$, $\pi' \in \mathcal{E}_2(M')$, la fonction

$$g \mapsto \int_{\mathcal{O}_{\pi',0}} E_{P'}^G(\varphi_{\xi}(\pi', P'))(g)\mu(\pi') d\pi'$$

est dans l’espace de Schwartz–Harish-Chandra et donc également de carré intégrable. On déduit alors de (8.2.3) et des identités (8.2.2) que l’on vient d’établir pour $M_{\Omega} \neq G$ que la fonction sur G définie pour $g \in G$ par

$$\sum_{A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})], M_A = G} \gamma(G/M) \int_{\Re(\sigma')=r(A)+\epsilon_A} \deg(\sigma')|\text{Stab}(A)|^{-1} \times \sum_{w' \in W(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{w'A}^P(E_P^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(w'\sigma')\xi(w'\sigma'))(g)) d_A \mathfrak{S}(\sigma') \quad (8.5.1)$$

est de carré intégrable pour toute application polynomiale ξ sur \mathcal{O} et, comme la somme des termes indexés par les $\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}$, $M_{\Omega} \neq G$, dans (8.2.3) s’identifie à la partie continue de la formule de Plancherel, l’expression (8.5.1) est égale à

$$\sum_{(G, \mathcal{O}'_0) \in \Theta_2(\mathcal{O})} \int_{\mathcal{O}'_0} \deg(\pi') E_G^G(\varphi_{\xi}(G, \pi'))(g) d(\pi'). \quad (8.5.2)$$

Remarquons d’abord que, si $M_A = G$, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A) = \{a_G^*\}$. Par suite, on peut choisir $\epsilon_A = 0$ dans (8.5.1).

Soit $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ et $\sigma \in A$ avec $\Re(\sigma) = r(A)$. Il faut établir les identités (8.2.2) et montrer que la valeur de chaque côté est nulle, si $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})] - [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$. Notons χ_{σ} la restriction à T_G du caractère central de σ qui est par choix de σ un caractère unitaire. Rappelons l’application $p_{\chi_{\sigma}}$ définie dans [W, VIII.4]: elle associe à une fonction f de l’espace de Schwartz–Harish-Chandra la fonction $p_{\chi_{\sigma}}(f) : G \rightarrow \mathbb{C}$ bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact définie par $p_{\chi_{\sigma}}(f)(g) = \int_{T_G} \chi_{\sigma}^{-1}(t)f(tg) dt$. Elle vérifie $p_{\chi_{\sigma}}(f)(tg) = \chi_{\sigma}(t)f(g)$ pour tout $t \in T_G$ et $g \in G$. Comme les fonctions définies sur G

par les identités (8.5.1) et (8.5.2) sont dans l'espace de Schwartz–Harish-Chandra, on peut leur appliquer la transformation p_{χ_σ} .

Notons $\mathcal{E}_2(G, \mathcal{O})$ l'ensemble des représentations de carré intégrable de G dont le support cuspidal contient un élément de \mathcal{O} , et $\mathcal{E}_2(G, \mathcal{O})_{\chi_\sigma}$ (respectivement A_{χ_σ}) le sous-ensemble de $\mathcal{E}_2(G, \mathcal{O})$ (respectivement d'un élément A de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$), formé des représentations π' (respectivement σ') dont la restriction à T_G agit par le caractère χ_σ . En refaisant les arguments de la preuve de [W, Théorème VIII.4.2], on voit que la fonction définie par (8.5.2) devient, si on lui applique p_{χ_σ} , égale à celle définie pour $g \in G$ par

$$\sum_{\pi' \in \mathcal{E}_2(G, \mathcal{O})_{\chi_\sigma}} \deg(\pi') E_G^G(\varphi_\xi(G, \pi'))(g). \tag{8.5.3}$$

Remarquons que l'espace A est formé des $\sigma \otimes \chi'$ avec $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$. Comme la valeur de $J_{P|P}$ en une représentation ne change pas si on tensorise celle-ci par un élément de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$, les fonctions sous l'intégrale (8.5.1) sont polynomiales. On peut donc refaire de nouveau les arguments de [W, Théorème VIII.4.2] pour montrer que la fonction définie par (8.5.1) devient, si on lui applique p_{χ_σ} , égale à celle définie pour $g \in G$ par

$$\gamma(G/M) |\text{Stab}(A)|^{-1} \sum_{\sigma' \in A_{\chi_\sigma}} \deg(\sigma') \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{wA}^P(E_P^G(J_{P|P}^{-1}(w\sigma')\xi(w\sigma'))(g)). \tag{8.5.4}$$

Choisissons un polynôme p sur \mathcal{O} invariant pour l'action par $W(M, \mathcal{O})$ et pour celle par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$, non nul en σ et qui s'annule en un ordre élevé en tout $\sigma' \in \mathcal{O}$ qui ne soit pas conjugué à σ et qui appartienne ou au support cuspidal d'un élément π' de $\mathcal{E}_2(G)_{\chi_\sigma}$ avec $\varphi_\xi(G, \sigma') \neq 0$ ou à A_{χ_σ} pour un $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})]$ vérifiant $M_A = G$. L'ensemble de ses $\sigma' \in \mathcal{O}$ est fini par définition de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ et par [W, VIII.1.1(1)]. On peut par ailleurs supposer que les dérivées de p en σ s'annulent à un ordre suffisamment élevé. (L'existence d'une fonction polynomiale p_1 sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ invariante pour l'action par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$ s'annulant à un ordre élevé en un nombre fini de points donnés et ne s'annulant pas sur l'ensemble fini correspondant aux conjugués de σ est élémentaire, puisque le quotient de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$ est un produit de tores \mathbb{C}^\times (cf. 1.2). En prenant le produit de p_1 avec ses conjugués, on en déduit une fonction polynomiale p sur \mathcal{O} qui est invariante pour l'action $W(M, \mathcal{O})$ et par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$ et qui a toutes les propriétés demandées sauf peut-être que ses dérivées en σ ne s'annulent pas à un ordre suffisamment élevé. En remplaçant p par son produit avec $-p + 2p(\sigma)$ qui est un polynôme $W(M, \mathcal{O})$ -invariant sur \mathcal{O} et en répétant ce procédé un nombre suffisant de fois, on aboutit finalement à une fonction polynomiale p qui possède toutes les propriétés demandées.)

On déduit de (8.5.3) et (8.5.4), en calculant Res_{wA}^P à l'aide d'opérateurs différentiels holomorphes à coefficients constants (cf. 3.7) en utilisant les règles de Leibniz, l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi' \in \mathcal{E}_2(G, \sigma)} \deg(\pi') E_G^G(\varphi_{p\xi}(G, \pi'))(g) \\ &= \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{wA}^P(E_P^G(J_{P|P}^{-1}(w\sigma)((p\xi)(w\sigma)))(g)) \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

pour toute application polynomiale $\xi : \mathcal{O} \rightarrow i_{\bar{P} \cap K}^K E_{\mathcal{O}} \otimes i_{\bar{P} \cap K}^K E_{\mathcal{O}}^{\vee}$ à image dans un espace de dimension finie, où on a utilisé que $\varphi_{p\xi}(\pi', G) = p(\sigma')\varphi_{\xi}(\pi', G)$ pour tout π' dans $\mathcal{E}_2(G, \sigma')$ et tout σ' dans la réunion de $A_{\chi\sigma}$ avec $\mathcal{E}_2(G, \mathcal{O})_{\chi\sigma}$, ainsi que le fait que les dérivées de p en σ' s'annulent à un ordre élevé. Les mêmes arguments montrent que l'on peut 'diviser par p ' pour obtenir l'identité (8.2.2) en σ avec $M' = G$ (et $\chi' = 1$). On en déduit que l'identité (8.2.2) est vérifiée relative à σ pour tout $\chi' \in \mathfrak{X}_0^{\text{nr}}(G)$ et donc, puisque les deux applications dans (8.2.2) sont rationnelles, en tout $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(G)$.

Choisissons $\xi = \xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H$ (cf. 7.1). Comme l'application $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sigma' \mapsto E_{\bar{P}}^G(J_{P|\bar{P}}(\sigma')\xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H(\sigma'))(1)$$

est constante (cf. 7.2) et que $E_{\bar{P}}^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma')\xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H(\sigma')) = E_{\bar{P}}^G(J_{P|\bar{P}}(\sigma')\xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H(\sigma'))\mu(\sigma')$, on voit par définition de $\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$ que

$$\text{Res}_A^P(E_{\bar{P}}^G(J_{\bar{P}|P}^{-1}(\sigma)\xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H(\sigma))(1)) = 0,$$

si $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}) - \mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$. On en déduit que chacun des termes dans (8.2.2) évalués en $g = 1$ est nul si $A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})] - [\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})]$, i.e. que l'on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(G, \sigma)} \text{deg}(\pi) \text{tr}(\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}})) = 0,$$

avec $f_{\varphi_{\mathcal{O}}} = f_{\xi_{\bar{P}, \mathcal{O}}^H}$ (cf. 2.2, 2.3 et 7.1 pour les notations). Comme $\text{tr}(\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}}))$ est par 7.1 un entier strictement positif pour tout $\pi \in \mathcal{E}_2(G, \sigma)$, il s'en suit que $\mathcal{E}_2(G, \sigma) = \emptyset$. Ceci prouve les dernières assertions du théorème.

8.6.

Corollaire. *Pour qu'un élément σ de \mathcal{O} appartienne au support cuspidal d'une représentation de carré intégrable de G , il faut que σ soit un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M . Ces pôles sont d'ordre maximal. Réciproquement, un pôle σ de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M correspond ainsi à une représentation de carré intégrable de G , si et seulement si l'espace affine $A = \mathcal{O}_{\sigma, G}$ vérifie*

$$\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{wA}^P \mu_{\text{sp}, \sigma})(w\sigma) \neq 0$$

et si $\Re(\sigma) = r(A)$.

Preuve. La première partie est une conséquence directe de la dernière assertion du Théorème 8.2 avec la caractérisation de $\mathcal{A}_{\mu}(\mathcal{S})$ donnée par la Proposition 8.1. Concernant la deuxième assertion, l'identité (8.2.2) du Théorème 8.2 et le Lemme 7.2 prouvent qu'avec

les notations du paragraphe 7 et $A = \mathcal{O}_{\sigma, G}$

$$\begin{aligned} \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} E_P^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1) \xi_{P, \mathcal{O}}^H(\sigma))(1) &= \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{wA}^P \mu)(w\sigma) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(G, \sigma)} \deg(\pi) \text{tr}(\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}})) \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

si $\mathfrak{R}(\sigma) = r(A)$. Comme $E_P^G((J_{P|\bar{P}}(\sigma) \otimes 1) \xi_{P, \mathcal{O}}^H(\sigma))(1)$ et $\text{tr}(\pi(f_{\varphi_{\mathcal{O}}}))$ sont des nombres > 0 par les Lemmes 7.1 et 7.2 respectivement, $\mathcal{E}_2(G, \sigma) \neq \emptyset$ équivaut à

$$\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{wA}^P \mu)(\sigma) \neq 0.$$

On peut finalement remplacer μ par $\mu_{\text{sp}, \sigma}$ suite à l'identité (8.1.2), puisque $\mu_{\text{ns}, \sigma}$ est régulière et non nulle en A_{reg} et invariante par $W(M, \mathcal{O})$ (cf. 4.1).

Il reste à remarquer qu'une condition nécessaire, pour que σ soit dans le support cuspidal d'une représentation de carré intégrable de G , est que σ agit sur T_G par un caractère unitaire, ce qui équivaut à $\mathfrak{R}(\sigma) = r(A)$. \square

Remarque. La somme $\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{wA}^P \mu_{\text{sp}, \sigma})(w)$ comporte beaucoup de termes qui sont en effet nuls. D'abord, comme on l'a déjà remarqué en 4.12, on devrait avoir $\text{Res}_{wA}^P \mu = 0$, si $r(wA)$ n'est pas une somme d'éléments de $\Delta_{\mathcal{O}}$ à coefficients ≥ 0 . Si $\mathfrak{R}(\sigma)$ est dans la composante (P, \mathcal{S}) -standard P_A de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)$ (définie dans 4.6) (Silberger appelle σ dans [S3] alors un point de Casselman), il est facile de voir (cf. par exemple les arguments utilisés pour la Remarque 3.16 dans [HO1]) que $\text{Res}_{wA}^P \mu = 0$ si $w \notin \text{Stab}(A)$. Par ailleurs, $J_{P|\bar{P}}$ est dans ce cas régulier en σ . Notons ι l'inclusion de l'image de $J_{P|\bar{P}}(\sigma)$ dans $i_{P \cap K}^K E$ et p un projecteur de $i_{P \cap K}^K E$ sur l'image de $J_{P|\bar{P}}(\sigma)$. Par la relation (#) de l'introduction, on trouve avec $\text{Stab}(\Delta_{\mathcal{O}}) = W_{\Delta_{\mathcal{O}}}$ et les identifications de 2.1

$$\varphi_{\xi}(\sigma) \circ \iota = \sum_{w \in \text{Stab}(\Delta_{\mathcal{O}})} (J_{P|\bar{wP}}(\sigma) \lambda(w) \xi(w^{-1} \sigma) \lambda(w^{-1}) J_{wP|P}(\sigma)) \circ \iota.$$

Remarquons que, pour $w \in \text{Stab}(\Delta_{\mathcal{O}})$, l'opérateur $J_{P|\bar{wP}}(\sigma) \lambda(w)$ a la même image que $J_{P|\bar{P}}(\sigma)$. On en déduit, puisque l'image de $J_{P|\bar{P}}(\sigma)$ est stable par $\varphi_{\xi}(\sigma)$ (cet endomorphisme venant d'un élément de l'espace de Paley–Wiener), que

$$\begin{aligned} E_P^G(\varphi_{\xi}(\sigma) \circ \iota) &= \sum_{w \in \text{Stab}(\Delta_{\mathcal{O}})} E_P^G((p J_{P|\bar{wP}}(\sigma) \lambda(w) \otimes \iota^{\vee} J_{P|wP}(\sigma^{\vee}) \lambda(w)) \xi(w^{-1} \sigma)) \\ &= \sum_{w \in \text{Stab}(\Delta_{\mathcal{O}})} E_P^G(J_{P|\bar{P}}(w\sigma) \xi(w\sigma)). \end{aligned}$$

Il résulte alors de l'identité (8.2.2) avec les Lemmes 4.8 et 4.10, compte tenu de (8.1.2) et de l'invariance de μ par $W(M, \mathcal{O})$, que

$$\sum_{\pi \in \mathcal{E}_2(G, \sigma)} \deg(\pi) E_P^G(\varphi_{\xi}(G, \pi)) = \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} E_P^G(\varphi_{\xi}(\sigma) \circ \iota) (\text{Res}_A^P \mu)(\sigma).$$

Par suite, l'image de ι dans $i_{P \cap K}^K E$ correspond à une somme directe de représentations de carré intégrable (ce qui a déjà été montré par Silberger (cf. [S3, Theorem 4.1.1])). Si on note $m(\pi, \sigma)$ la multiplicité d'une représentation irréductible de carré intégrable π dans l'image de ι , on voit de plus que l'on a, par l'indépendance linéaire des coefficients matriciels de représentations irréductibles non équivalentes,

$$\deg(\pi) = \gamma(G/M) \deg(\sigma) |\text{Stab}(A)|^{-1} m(\pi, \sigma) (\text{Res}_A^P \mu)(\sigma).$$

En particulier, si $\Re(\sigma) >_P 0$ (ce que Silberger appelle dans [S3] un point propre de Casselman), il est facile de voir que l'image de $J_{P|\bar{P}}(\sigma)$ correspond à une seule sous-représentation irréductible π de $i_{\bar{P}}^G \sigma$ qui est de carré intégrable par ce qui précédait. On trouve donc dans ce cas $\deg(\pi) = \gamma(G/M) \deg(\sigma) (\text{Res}_A^P \mu)(\sigma)$.

Si $\Re(\sigma)$ n'est pas dans P_A , on peut obtenir des expressions assez compliquées (voir par exemple le cas de l'identité (2) + (7) + (10) dans A.3), dont il semble difficile de déduire des informations précises sur le degré formel des sous-quotients de carré intégrable ou sur leur position dans la représentation induite. Il semble toutefois éventuellement possible de déduire de ces expressions une certaine propriété d'invariance des degrés formels des représentations de carré intégrable ayant le même support cuspidal comme cela a été fait dans [O2] pour des identités semblables dans le cas de la série principale non ramifiée. Mentionnons également [HO2] où sont calculés les degrés formels de certaines représentations de carré intégrable qui apparaissent dans la série principale non ramifiée de G .

8.7.

Le résultat suivant est dû à E. Opdam.

Théorème (cf. [O2], Theorem 3.29). *Soit $\sigma \in \mathcal{O}$ un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M . Alors*

$$\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} \text{Res}_{wA}^P \mu_{\text{sp}, \sigma}(w\sigma) \neq 0.$$

Remarque. La convention 2.1 dans l'article [O2] qui n'a été faite que pour des raisons de notations et qui ne joue aucun rôle dans [O2] est d'ailleurs dans notre situation équivalente à la rationalité des points de réductibilité pour les induites paraboliques de représentations cuspidales. Elle a été démontrée pour les groupes classiques déployés par C. Moeglin (cf. [M3]). Pour les représentations génériques, elle résulte des travaux de Shahidi [Sh].

Corollaire. *Soit $\sigma \in \mathcal{O}$ tel que $\Re(\sigma)_G = 0$. Pour que σ appartienne au support cuspidal d'une représentation de carré intégrable, il faut et il suffit que σ soit un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M . Ces pôles sont d'ordre maximal.*

Annexe A. L'exemple d'un groupe déployé semi-simple de type G_2

Dans cet annexe, on va traiter l'exemple de la série principale non ramifiée d'un groupe semi-simple de type G_2 en détail et 'à la main'. C'est le groupe de rang semi-simple minimal pour lequel l'analyse des combinaisons linéaires de coefficients matriciels qui apparaissent dans le Théorème 8.2 n'est pas sans difficulté. Ce problème apparaît également pour des groupes classiques (déployé ou non) de rang plus élevé et d'autres groupes. Comme on l'a déjà remarqué, c'est l'analogue local des analyses effectuées dans l'annexe 3 de [MW1]. Nous n'allons toutefois ici pas aussi loin dans le cas difficile des identités (2) + (7) + (10) (cf. A.3) pour des raisons expliquées dans l'introduction.

Remarquons finalement que le cas d'un groupe de type A_n peut se traiter entièrement à la main, comme cela a été fait pour la série principale non ramifiée dans le manuscrit [H3], où on utilise un chemin d'intégration analogue à celui effectué dans [MW2]. Déjà pour la série principale non ramifiée de Sp_4 , nous avons rencontré des pôles qui s'annulent, ce qui paraissait compliqué à montrer par une méthode directe. Disons tout de suite que ce dernier cas de figure n'apparaît pas pour un groupe de type G_2 .

A.1.

Soit G un tel groupe. Fixons un sous-groupe parabolique minimal $B = MU$ de G . Le sous-groupe de Levi M est un tore déployé maximal de G . Remarquons que tout sous-groupe de Levi M_γ de G obtenu en associant à M une racine γ est isomorphe à GL_2 . On notera $St_{2,\gamma}$ la représentation de Steinberg de M_γ . L'ensemble des racines positives simples associé à B sera noté $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, α désignant la racine courte. L'ensemble des racines pour G relatives à M qui sont positives pour B , noté Σ^+ , est alors

$$\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}.$$

Remarquons que le système des coracines Σ^\vee est également de type G_2 . L'ensemble $\Sigma^{\vee+}$ des coracines positives pour B s'écrit

$$\{\alpha^\vee, \beta^\vee, \alpha^\vee + \beta^\vee, \alpha^\vee + 2\beta^\vee, \alpha^\vee + 3\beta^\vee, 2\alpha^\vee + 3\beta^\vee\},$$

en remarquant que α^\vee est une racine longue.

Plus précisément,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^\vee &= \alpha^\vee + 3\beta^\vee, & (2\alpha + \beta)^\vee &= 2\alpha^\vee + 3\beta^\vee, \\ (3\alpha + \beta)^\vee &= \alpha^\vee + \beta^\vee, & (3\alpha + 2\beta)^\vee &= \alpha^\vee + 2\beta^\vee, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -3$ et $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$.

Le groupe de Weyl W correspondant à A_M est engendré par les symétries s_α et s_β . C'est en fait le groupe diédral d'ordre 12 engendré par s_β et $s_\alpha s_\beta$ avec $s_\beta^2 = (s_\alpha s_\beta)^6 = 1$. On a $s_\alpha(\beta) = 3\alpha + \beta$, $s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$.

Notons $\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}$ la base de a_M^* qui est duale à $\{\alpha^\vee, \beta^\vee\}$. On a $\omega_\alpha = 2\alpha + \beta$, $\omega_\beta = 3\alpha + 2\beta$. Par suite,

$$s_\alpha(\omega_\alpha) = \omega_\beta - \omega_\alpha, \quad s_\alpha(\omega_\beta) = \omega_\beta, \quad s_\beta(\omega_\alpha) = \omega_\alpha, \quad s_\beta(\omega_\beta) = 3\omega_\alpha - \omega_\beta.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\mu(\chi_{z_\alpha \omega_\alpha + z_\beta \omega_\beta}) \\ &= \frac{(1 - q^{z_\alpha})(1 - q^{-z_\alpha})(1 - q^{z_\beta})(1 - q^{-z_\beta})}{(1 - q^{-1+z_\alpha})(-1 - q^{-1-z_\alpha})(1 - q^{-1+z_\beta})(-1 - q^{-1-z_\beta})} \\ &\quad \times \frac{(1 - q^{z_\alpha+z_\beta})(1 - q^{-z_\alpha-z_\beta})(1 - q^{z_\alpha+2z_\beta})(1 - q^{-z_\alpha-2z_\beta})}{(1 - q^{-1+z_\alpha+z_\beta})(1 - q^{-1-z_\alpha-z_\beta})(1 - q^{-1+z_\alpha+2z_\beta})(1 - q^{-1-z_\alpha-2z_\beta})} \\ &\quad \times \frac{(1 - q^{z_\alpha+3z_\beta})(1 - q^{-z_\alpha-3z_\beta})(1 - q^{2z_\alpha+3z_\beta})(1 - q^{-2z_\alpha-3z_\beta})}{(1 - q^{-1+z_\alpha+3z_\beta})(1 - q^{-1-z_\alpha-3z_\beta})(1 - q^{-1+2z_\alpha+3z_\beta})(1 - q^{-1-2z_\alpha-3z_\beta})} \end{aligned}$$

Les hyperplans affines radiciels dans $\mathcal{O} = \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ qui sont singuliers pour μ sont donnés par $S_\gamma := \mathcal{O}_{\chi_{\gamma/2, \gamma}}$ avec $\gamma \in \Sigma^+$. (On munit ces hyperplans donc de l'orientation donnée par le choix de Σ^+ .) L'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mu$ est donc formé de ces hyperplans S_γ ainsi que de leurs parties imaginaires (égales à $\mathcal{O}_{1, \gamma}$).

Les hyperplans singuliers pour l'opérateur d'entrelacement $J_{B|\bar{B}}$ se déterminent en le décomposant en opérateurs d'entrelacement définis par rapport à des sous-groupes paraboliques adjacents. Soient B' et B'' deux sous-groupes de Borel adjacents dont l'intersection est un sous-groupe de Borel de M_γ . Rappelons que M_γ est isomorphe à GL_2 . Pour ce groupe, les opérateurs d'entrelacement définis relatifs aux caractères non ramifiés de M sont bien connus. On en déduit que $J_{B'|B''}$ est régulier en χ_λ , si et seulement si $q^{-\langle \lambda, \gamma^\vee \rangle} \neq 1$. L'opérateur défini en χ_λ est alors bijectif, si et seulement si $q^{-\langle \lambda, \gamma^\vee \rangle} \notin \{q^{-1}, q\}$. Remarquons qu'un opérateur d'entrelacement qui est le composé de plusieurs opérateurs d'entrelacement dont certains ont des pôles en χ_λ et d'autres ne sont pas injectifs en χ_λ peut bien être défini en χ_λ .

A.2.

Notons E l'espace de la représentation unité de M . Pour calculer l'intégrale

$$\int_{\Re(\chi) = r \gg_{B^0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi) \mu(\chi) d\mathfrak{S}(\chi) \tag{A.2.1}$$

pour une application polynomiale $\xi : \mathcal{O} \rightarrow i_{B \cap K}^K E \otimes i_{B \cap K}^K E^\vee$ donnée, on va effectuer le chemin \mathcal{C} dans a_M^* dans la Figure 2 (p. 381) décrit dans [MW2, Appendice 3]. On identifiera dans la suite parfois la valeur de ξ en un caractère non ramifié χ à un élément de $\text{Hom}(i_{B \cap K}^K E, i_{B \cap K}^K E)$.

A cette occasion, on trouve des pôles, lorsque l'on coupe les hyperplans $H_{\gamma, 1}$ de a_M^* (qui sont donnés par $\langle \lambda, \gamma^\vee \rangle = 1, \gamma \in \Sigma^+$). L'origine de ces hyperplans est le point $\frac{1}{2}\gamma$. Soit δ une racine dans Σ , tel que $\{\gamma, \delta\}$ soit un ensemble de racines simples pour un certain ordre sur a_M^* . Soit $\{\omega_\gamma, \omega_\delta\}$ la base duale à la base $\{\gamma^\vee, \delta^\vee\}$ de a_M . Tout point de $H_{\gamma, 1}$ s'écrit alors sous la forme $\frac{1}{2}\gamma + t_\delta \omega_\delta$. Écris sous cette forme, les points d'intersection du

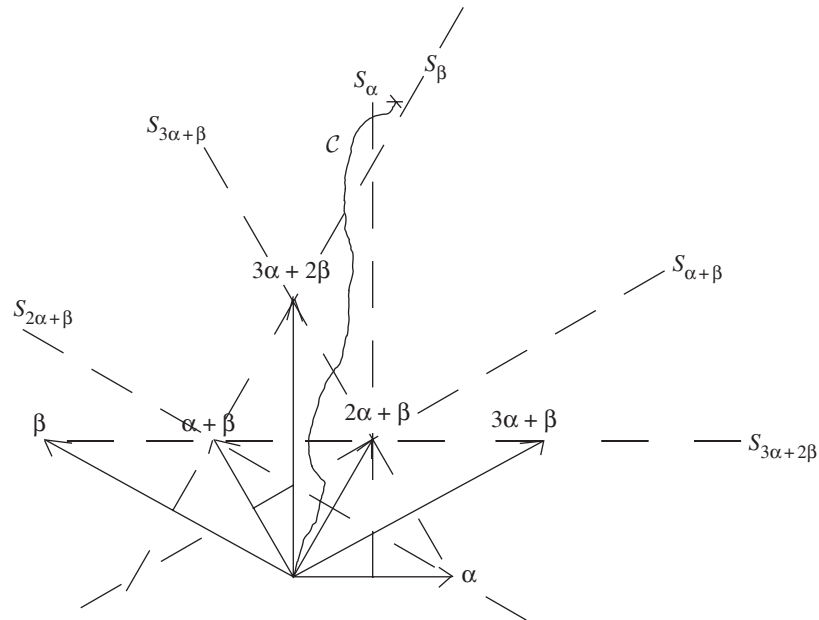


Figure 2.

chemin C avec les éléments de $\mathcal{H}(S)$ sont:

$$\begin{aligned}
 \gamma = \alpha, \delta = \beta &: \frac{1}{2}\alpha + t_\delta\omega_\beta && (t_\delta \gg 0), \\
 \gamma = \beta, \delta = \alpha &: \frac{1}{2}\beta + t_\delta\omega_\alpha && (\frac{3}{2} < t_\delta < \frac{5}{2}), \\
 \gamma = 3\alpha + \beta, \delta = -(2\alpha + \beta) &: \frac{1}{2}(3\alpha + \beta) + (-t_\delta)(-\alpha - \beta) && (-\frac{3}{2} < t_\delta < -\frac{1}{2}), \\
 \gamma = 3\alpha + 2\beta, \delta = -(\alpha + \beta) &: \frac{1}{2}(3\alpha + 2\beta) + t_\delta\alpha && (0 < t_\delta < \frac{1}{2}), \\
 \gamma = \alpha + \beta, \delta = -(3\alpha + 2\beta) &: \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + (-t_\delta)(-3\alpha - \beta) && (-\frac{1}{6} < t_\delta < 0), \\
 \gamma = 2\alpha + \beta, \delta = -(3\alpha + \beta) &: \frac{1}{2}(2\alpha + \beta) + t_\delta\beta && (-\frac{1}{2} < t_\delta < \frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

Posons $r_\delta = t_\delta\omega_\delta$. Comme $H_{\gamma,1}$ est la partie réelle d'un unique hyperplan singulier S_γ , le calcul de l'intégrale (A.2.1) le long du chemin C donne

$$\begin{aligned}
 &\int_{S_{\alpha,r_\beta}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)(\chi) d\Im(\chi) \\
 &+ \int_{S_{\beta,r_\alpha}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\text{Res}_{S_\beta} \mu)(\chi) d\Im(\chi) \\
 &+ \int_{S_{3\alpha+\beta,r_{-2\alpha-\beta}}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\text{Res}_{S_{3\alpha+\beta}} \mu)(\chi) d\Im(\chi) \\
 &+ \int_{S_{3\alpha+2\beta,r_{-\alpha-\beta}}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\text{Res}_{S_{3\alpha+2\beta}} \mu)(\chi) d\Im(\chi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \int_{S_{\alpha+\beta, r-3\alpha-2\beta}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi) (\text{Res}_{S_{\alpha+\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \\
 &+ \int_{S_{2\alpha+\beta, r-(3\alpha+\beta)}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi) (\text{Res}_{S_{2\alpha+\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \\
 &+ \int_{\Re(\chi)=0} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi) \mu(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi).
 \end{aligned}$$

Il reste maintenant à rejoindre l'axe unitaire, i.e. à effectuer à chaque intégrale un décalage vers $r_\delta = 0$. Pour déterminer les pôles qui apparaissent, posons $\tilde{B}_\alpha = (M_\alpha \cap B)\bar{U}_\alpha$ et $\tilde{B}_\beta = (M_\beta \cap B)\bar{U}_\beta$. On a

$$\begin{aligned}
 \mu_{B|\tilde{B}_\alpha}(\chi_{\alpha/2+z_\beta\omega_\beta}) &= \frac{(1 - q^{1/2+z_\beta})(1 - q^{1/2-z_\beta})(1 - q^{2z_\beta})(1 - q^{-2z_\beta})}{(1 - q^{-3/2+z_\beta})(-1 - q^{-3/2-z_\beta})(1 - q^{-1+2z_\beta})(-1 - q^{1-2z_\beta})} \\
 &\quad \times \frac{(1 - q^{1/2+3z_\beta})(1 - q^{1/2-3z_\beta})}{(1 - q^{-3/2+3z_\beta})(1 - q^{-3/2-3z_\beta})}
 \end{aligned}$$

et

$$\mu_{B|\tilde{B}_\beta}(\chi_{z_\alpha\omega_\alpha+\beta/2}) = \frac{(1 - q^{3/2-z_\alpha})(1 - q^{3/2+z_\alpha})(1 - q^{2z_\alpha})(1 - q^{-2z_\alpha})}{(1 - q^{-5/2-z_\alpha})(1 - q^{-5/2+z_\alpha})(1 - q^{-1+2z_\alpha})(1 - q^{-1-2z_\alpha})}.$$

Ces formules restent valables, si on remplace α par une racine courte ou β par une racine longue, tout en remplaçant ω_β ou ω_α de façon appropriée, les constantes restant les mêmes.

On remarque qu'avec B_γ un sous-groupe de Borel pour lequel γ est simple positif et $\tilde{B}_\gamma = (M_\gamma \cap B)\bar{U}_\gamma$, on a

$$(\text{Res}_{S_\gamma} \mu) = \mu_{B_\gamma|\tilde{B}_\gamma}(\text{Res}_{S_\gamma} \mu^{M_\gamma}),$$

puisque les pôles de μ^{M_γ} sont simples. Les pôles de $\text{Res}_{S_\gamma} \mu$ sont donc donnés par ceux de $\mu_{B|\tilde{B}_\gamma}$.

Effectuons maintenant à chaque intégrale ci-dessus le changement de contours de r_δ à 0. Le calcul de $\mu_{B_\gamma|\tilde{B}_\gamma}$ ci-dessus montre qu'aucun pôle de $J_{B|\bar{B}}$ n'apparaît lors de ce procédé qui n'est pas également un pôle de la fonction $\mu_{B_\gamma|\tilde{B}_\gamma}$ (compte tenu de ce qui a été dit sur les hyperplans singuliers de $J_{B|\bar{B}}$ à la fin de A.1). Notons $|\omega_\delta|$ l'unique élément de $\Sigma^+ \cap \{\omega_\delta, -\omega_\delta\}$, fixons $z_0 \in \mathbb{C}$ et notons z'_0 l'unique nombre complexe qui vérifie $z_0\omega_\delta = z'_0|\omega_\delta|$. Alors on définit $\text{Res}_{\gamma/2+z_0\omega_\delta}^+$ comme étant l'opérateur $\mathcal{R}(S_\gamma, \mathcal{S}(S_\gamma)) \rightarrow \mathbb{C}$ qui associe à ψ la valeur $\text{Res}_{z=z'_0} \psi(\chi_{\gamma/2+z|\omega_\delta|})$. (Remarquons qu'en notant δ_1 la racine dans $\Sigma(A_{M_\gamma})$ qui est la restriction à A_{M_γ} de l'unique racine positive dans $\{\delta, -\delta\}$, l'élément de $a_{M_\gamma}^*$ que l'on a noté $\tilde{\delta}_1$ en 3.2 est égal à $|\omega_\delta|$.)

Pour l'intégrale (A.2.1) on obtient alors

$$\text{Res}_{\alpha/2+3\omega_\beta/2}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)) \tag{1}$$

$$+ \text{Res}_{\alpha/2+\omega_\beta/2}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)) \tag{2}$$

$$+ \text{Res}_{\alpha/2+(1/2+\pi i/\log q)\omega_\beta}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)) \tag{3}$$

$$+ \operatorname{Res}_{\alpha/2+(1/2+2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_\alpha} \mu)) \tag{4}$$

$$+ \operatorname{Res}_{\alpha/2+(1/2+4\pi i/3 \log q)\omega_\beta}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_\alpha} \mu)) \tag{5}$$

$$+ \int_{S_{\alpha,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_\alpha} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{6}$$

$$+ \operatorname{Res}_{\beta/2+\omega_\alpha/2}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_\beta} \mu)) \tag{7}$$

$$+ \operatorname{Res}_{\beta/2+(1/2+\pi i/\log q)\omega_\alpha}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_\beta} \mu)) \tag{8}$$

$$+ \int_{S_{\beta,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_\beta} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{9}$$

$$+ \operatorname{Res}_{(3\alpha+\beta)/2+(\alpha+\beta)/2}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_{3\alpha+\beta}} \mu)) \tag{10}$$

$$+ \operatorname{Res}_{(3\alpha+\beta)/2+(1/2+\pi i/\log q)(\alpha+\beta)}^+(E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \cdot)(\operatorname{Res}_{S_{3\alpha+\beta}} \mu)) \tag{11}$$

$$+ \int_{S_{3\alpha+\beta,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_{3\alpha+\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{12}$$

$$+ \int_{S_{3\alpha+2\beta,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_{3\alpha+2\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{13}$$

$$+ \int_{S_{\alpha+\beta,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_{\alpha+\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{14}$$

$$+ \int_{S_{2\alpha+\beta,0}} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)(\operatorname{Res}_{S_{2\alpha+\beta}} \mu)(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{15}$$

$$+ \int_{\Re(\chi)=0} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, \chi)\mu(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi) \tag{16}$$

A.3.

Il reste à rassembler les différents termes obtenus. Remarquons que, si ι est l'injection d'une sous-représentation de $i_B^G \chi$ dans $i_{B \cap K}^K E$, alors l'image de $\varphi_\xi(\chi) \circ \iota$ est incluse dans celle de ι . Soit p un projecteur de $i_{B \cap K}^K E$ sur l'image de ι . On va utiliser à plusieurs reprises le fait suivant:

$$\left. \begin{aligned} \text{si } J \text{ est un élément de } i_{B \cap K}^K E \otimes i_{B \cap K}^K E^\vee \text{ tel que l'endomorphisme} \\ \text{de } i_{B \cap K}^K E \text{ correspondant ait l'image incluse dans celle de } p, \\ \text{alors } E_{B,\chi}^G((p \circ \iota^\vee)J) = E_{B,\chi}^G(J). \end{aligned} \right\} \tag{A.3.1}$$

(16): Comme par un changement de variable,

$$(16) = \int_{\Re(\chi)=0} E_B^G(J_{B|\bar{B}}, \xi, w^{-1}\chi)\mu(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi),$$

pour tout $w \in W$, il résulte de la relation (#) de l'introduction que

$$(16) = \frac{1}{|W|} \int_{\Re(\chi)=0} E_B^G(\varphi_\xi(\chi))\mu(\chi) \, d\mathfrak{S}(\chi).$$

(6) + (14) + (15): Notons ι l'injection de $i_{P_\alpha}^G(\text{St}_{2,\alpha} \otimes \chi_{z_\beta \omega_\beta})$ dans $i_B^G(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta})$ et p la projection de $i_{B \cap K}^K E$ sur l'image de ι de noyau égal à $\text{Im}(J_{B|s_\alpha B}(\chi_{-\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}))$. Si $w \in W$ vérifie $l(s_\alpha w) < l(w)$, alors $J_{wB|B}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \circ \iota = 0$. On en déduit pour z_β dans un ouvert dense de \mathbb{C}

$$\begin{aligned} & \varphi(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \circ \iota \\ &= \sum_{\substack{w \in W \\ l(s_\alpha w) > l(w)}} p J_{B|\overline{wB}}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \lambda(w) \xi(w^{-1} \chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \lambda(w^{-1}) J_{wB|B}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}^\vee) \iota. \end{aligned}$$

Comme $\text{Im}(J_{B|\overline{wB}}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta})) \subseteq \text{Im}(p)$, si $l(s_\alpha w) > l(w)$, on en déduit par (A.3.1)

$$E_B^G(\varphi(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \circ \iota) = \sum_{\substack{w \in W \\ l(s_\alpha w) > l(w)}} E_B^G(J_{B|\overline{wB}}(w^{-1} \chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}) \xi(w^{-1} \chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta})).$$

En calculant les $w^{-1} \chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta}$, on trouve alors

$$(6) + (14) + (15) = \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha,0}} E_B^G(\varphi_\xi(\chi) \circ \iota) (\text{Res}_{S_\alpha} \mu)(\chi) d\text{Im}(\chi).$$

(9) + (12) + (13): C'est analogue au cas précédent, en échangeant α et β .

(1): L'opérateur d'entrelacement $J_{B|\overline{B}}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta})$ est régulier en $z_\beta = \frac{3}{2}$. On a $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\omega_\beta = \omega_\alpha + \omega_\beta$. Soit ι l'injection de l'image de $J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta})$. Il est immédiat par la relation (#) de l'introduction que

$$\varphi_\xi(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta}) \circ \iota = p J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta}) \xi(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta}) \iota,$$

d'où l'on déduit par (A.3.1) que

$$(1) = E_B^G(\varphi_\xi(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta}) \circ \iota) \text{Res}_{\alpha/2+3\omega_\beta/2}^+(\text{Res}_{S_\alpha}(\mu)).$$

La représentation $i_B^G \chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta}$ possède (par exemple par la remarque de 8.6) un unique sous-quotient irréductible de carré intégrable $\pi(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta})$ qui correspond à l'image de l'opérateur d'entrelacement $J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta})$. Par l'identité (8.6.1), on trouve $\text{deg}(\pi(\chi_{\omega_\alpha + \omega_\beta})) = \gamma(G/M) \text{Res}_{\alpha/2+3\omega_\beta/2}^+(\text{Res}_{S_\alpha}(\mu))$.

(4) + (5): L'opérateur d'entrelacement $J_{B|\overline{B}}(\chi_{\alpha/2+z_\beta \omega_\beta})$ est régulier en $z_\beta = \frac{1}{2} + 2\pi i/3 \log q$. On a

$$\frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi i}{3 \log q}\right)\omega_\beta = \omega_\alpha + \left(\frac{2\pi i}{3 \log q}\right)\omega_\beta.$$

Soit ι l'injection de $\text{Im}(J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}))$ dans $i_{B \cap K}^K E$ et p la projection de $i_{B \cap K}^K E$ sur l'image de ι de noyau égal à celui de $J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})$. On vérifie que $J_{wB|B}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \circ \iota = 0$ sauf si $w \in \{1, s_\beta\}$. Par suite,

$$\begin{aligned} & \varphi_\xi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \circ \iota \\ &= p J_{B|\overline{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \xi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \iota \\ & \quad + p J_{B|\overline{s_\beta B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \\ & \quad \quad \times \lambda(s_\beta) \xi(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \lambda(s_\beta) J_{s_\beta B|B}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \iota. \end{aligned}$$

Remarquons que l'opérateur $J_{s_\beta \bar{B} | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})$ est bijectif. L'image de l'opérateur $J_{B | s_\beta \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})$ est donc incluse dans $\text{Im}(J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}))$. On en déduit par (A.3.1) que

$$\begin{aligned} & E_B^G(\varphi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \circ \iota) \\ &= E_B^G(J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})\xi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})) \\ & \quad + E_B^G(J_{B | \bar{B}}(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})\xi(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})), \end{aligned}$$

d'où

$$(4) + (5) = E_B^G(\varphi\xi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}) \circ \iota)(\text{Res}_{\alpha/2 + (1/2 + (2\pi i/\log q))\omega_\beta}^+(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)),$$

les deux résidus qui apparaissent dans (4) et (5) étant égaux.

On peut montrer facilement (comparer [Mu, Proposition 4.2]) que la représentation $i_B^G \chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta}$ possède un unique sous-quotient irréductible de carré intégrable que l'on notera $\pi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})$ et que celui-ci correspond à l'image de l'opérateur $J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})$. Par l'identité (8.6.1), on en déduit que

$$\text{deg}(\pi(\chi_{\omega_\alpha + (2\pi i/3 \log q)\omega_\beta})) = \gamma(G/M)(\text{Res}_{\alpha/2 + (1/2 + (2\pi i/\log q))\omega_\beta}^+(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)).$$

(3) + (8) + (11): L'opérateur d'entrelacement $J_{B | \bar{B}}(\chi_{\alpha/2 + z_\beta \omega_\beta})$ est régulier en $z_\beta = \frac{1}{2} + \pi i/\log q$. On a

$$\frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi i}{\log q}\right)\omega_\beta = \omega_\alpha + \frac{\pi i}{\log q}\omega_\beta.$$

Soit ι l'injection de $\text{Im}(J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}))$ dans $i_{B \cap K}^K E$ et p la projection de $i_{B \cap K}^K E$ sur l'image de ι de noyau égal à celui de $J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})$. On vérifie que $J_{wB | B}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \circ \iota = 0$, sauf si $w \in \{1, s_\beta, s_\beta s_\alpha\}$. Par suite,

$$\begin{aligned} & \varphi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \circ \iota \\ &= pJ_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\xi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\iota \\ & \quad + pJ_{B | s_\beta \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \\ & \quad \quad \times \lambda(s_\beta)\xi(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\lambda(s_\beta)J_{s_\beta B | B}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\iota \\ & \quad + pJ_{B | s_\beta s_\alpha \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \\ & \quad \quad \times \lambda(s_\beta s_\alpha)\xi(s_\beta s_\alpha \chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\lambda(s_\beta s_\alpha)J_{s_\beta s_\alpha B | B}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})\iota. \end{aligned}$$

Remarquons que les opérateurs

$$J_{s_\beta \bar{B} | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \quad \text{et} \quad J_{s_\beta s_\alpha \bar{B} | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})$$

sont inversibles. Par suite, les images de

$$J_{B | s_\beta \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}) \quad \text{et de} \quad J_{B | s_\beta s_\alpha \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta})$$

sont égales à celle de

$$J_{B | \bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i/\log q)\omega_\beta}).$$

On en déduit avec (A.3.1) que

$$\begin{aligned} & E_B^G(\varphi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta}) \circ \iota) \\ &= E_B^G(J_{B|\bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})\xi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})) \\ &\quad + E_B^G(J_{B|\bar{B}}(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})\xi(s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})) \\ &\quad + E_B^G(J_{B|\bar{B}}(s_\alpha s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})\xi(s_\alpha s_\beta \chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(3) + (8) + (11) = E_B^G(\varphi_\xi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta}) \circ \iota)(\text{Res}_{\alpha/2+(1/2+\pi i / \log q)\omega_\beta}^+(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)),$$

les résidus de μ qui apparaissent dans (3), (8) et (11) étant égaux.

On peut montrer facilement (comparer [Mu, Proposition 4.1]) que la représentation $i_B^G \chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta}$ possède un unique sous-quotient irréductible de carré intégrable que l'on notera $\pi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})$ et que celui-ci correspond à l'image de l'opérateur $J_{B|\bar{B}}(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})$. Par l'identité (8.6.1) on en déduit alors que

$$\text{deg}(\pi(\chi_{\omega_\alpha + (\pi i / \log q)\omega_\beta})) = \gamma(G/M)(\text{Res}_{\alpha/2+(1/2+\pi i / \log q)\omega_\beta}^+(\text{Res}_{S_\alpha} \mu)).$$

(2) + (7) + (10): Ce cas est bien plus compliqué, puisque l'opérateur d'entrelacement $J_{B|\bar{B}}(\chi_{\alpha/2+z_\beta\omega_\beta})$ n'est pas régulier en $z_\beta = \frac{1}{2}$. Remarquons que $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega_\beta = \omega_\alpha$.

Il est connu (cf. [Mu]) que la représentation $i_B^G \chi_{\omega_\alpha}$ possède exactement deux sous-quotients qui sont de carré intégrable. Ils sont non isomorphes. Notons $\text{St}_{2,\alpha}$ et $\text{St}_{2,\beta}$ respectivement les représentations de Steinberg de M_α et de M_β . Alors la sous-représentation semi-simple maximale de $i_{P_\alpha}^G(\text{St}_{2,\alpha} \chi_{\omega_\beta/2})$ est de longueur 1 et de carré intégrable. Notons-la $\pi_1(\chi_{\omega_\alpha})$. La sous-représentation semi-simple maximale de $i_{P_\beta}^G(\text{St}_{2,\beta} \chi_{\omega_\alpha/2})$ est somme directe de deux représentations irréductibles de carré intégrables dont l'une est isomorphe à $\pi_1(\chi_{\omega_\alpha})$. Désignons l'autre par $\pi_2(\chi_{\omega_\alpha})$. Le degré formel de ces deux représentations est calculé dans [R] (avec une normalisation des mesures différente de la nôtre). On a $\text{deg}(\pi_1(\chi_{\omega_\alpha})) = \frac{1}{2} \text{deg}(\pi_2(\chi_{\omega_\alpha}))$.

On peut retrouver ces résultats par calcul direct en prenant pour ξ l'application polynomiale constante de valeur $\lambda(w_0)1_{\mathcal{I}w_0\mathcal{I}} \otimes 1_{\mathcal{I}}$, \mathcal{I} désignant le sous-groupe d'Iwahori qui correspond à B . Pour déterminer les termes (2), (7) et (10), on peut alors utiliser la description de Bernstein et Rogawski des opérateurs d'entrelacement définis relatifs à l'algèbre d'Iwahori–Hecke, comme cela est expliqué dans l'annexe 3 de [MW1]. Tout est alors explicite et on retrouve les résultats ci-dessus par calcul (éventuellement à l'aide d'un logiciel).

Il serait probablement possible de simplifier les calculs et de rendre le tout un peu plus intelligible, en employant une méthode semblable à celle utilisée dans l'annexe 3 de [MW1].

Nous renonçons ici à aller plus loin dans l'analyse de ce cas, d'une part puisque les résultats sont déjà connus, et d'autre part puisque l'on n'a pas trouvé de méthode vraiment intelligente pour traiter la somme des trois termes qui serait par ailleurs susceptible de se généraliser.

Annexe B. Preuve du théorème de Opdam

B.1.

Pour la commodité du lecteur, nous donnons ci-après avec l'autorisation de l'auteur une preuve du Théorème 8.7 qui est—comme déjà signalé dans le texte—dû à E. Opdam (cf. [O2, Theorem 3.29]). La preuve ci-dessous est essentiellement la sienne. La motivation pour l'insérer ici vient du fait que la preuve de ce résultat dans l'article [O2] est assez concise et rédigée dans un langage différent du nôtre.

Remarquons que, comme nous travaillons dans le cadre des groupes p -adiques, notre résultat concerne la fonction μ de Harish-Chandra, alors que Opdam s'intéresse aux fonctions μ venant des algèbres d'Iwahori–Hecke.

B.2.

Par le théorème des résidus 3.10, la Proposition 4.11 et les notations de 8.1 et 8.2, il existe une unique famille de données de résidus Res_A^P , $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, vérifiant

$$\text{Res}_{wA}(\psi \circ w^{-1}) = (\text{Res}_A \psi) \circ w^{-1} \quad \text{pour tout } w \in W(M, \mathcal{O}), \quad w\Sigma_{\mathcal{O}}^{MA}(P \cap M_A) \subseteq \Sigma(P)$$

(cf. Lemmes 4.8 et 4.11), telles que, pour toute fonction rationnelle ψ dans $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$, on ait

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(\sigma)=r \gg_P 0} \psi(\sigma) \, d\mathfrak{S}(\sigma) \\ &= \sum_{\Omega \subseteq \Delta_{\mathcal{O}}} \sum_{A \in [\mathcal{A}(\mathcal{S})], M_A = M_{\Omega}} |W_{\Delta_{\mathcal{O}}, M_A}|^{-1} |\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1} |\text{Stab}(A)|^{-1} \\ & \quad \times \int_{\Re(\sigma)=r(A)+\epsilon_A} \sum_{w' \in W^{MA}(M, \mathcal{O})} \sum_{w \in W_{MA}^+(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{w'A}^P \psi(w.))(w'\sigma) \, d_A \mathfrak{S}(\sigma) \end{aligned}$$

(cf. 8.2.3).

La première partie de la preuve du Théorème 3.10 donne par ailleurs un procédé récursif de calcul de ces données de résidu: appelons point singulier d'un sous-espace affine $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ tout point de $L - L_{\text{reg}}$. Fixons $r \gg_P 0$. Choisissons pour tout $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M)$ un chemin de r à $r(\mathcal{O}) + \epsilon_Q$ qui ne contient qu'un nombre fini de points singuliers de a_M^* , chacun se trouvant sur un unique hyperplan affine $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$. (Rappelons que $r(\mathcal{O}) = 0$.) Chaque point singulier traversé donne lieu à des opérateurs résidus $\pm \text{Res}_S$, correspondant aux $S \in \mathcal{S}$ dont la partie réelle contient ce point.

On continue alors ce procédé avec chaque point singulier rencontré sur les chemins ci-dessus relatif à l'hyperplan affine $H \in \mathcal{H}$ qui le contient, en remplaçant, pour tout $S \in \mathcal{S}$ de partie réelle H , $r(\mathcal{O})$, M et $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M)$ respectivement par $r(H)$, M_H et $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_H)$. On obtient alors de nouveaux opérateurs de résidu relatifs à des hyperplans affines A de \mathcal{S} . On compose ceux-ci avec Res_S pour obtenir des opérateurs résidus Res_A relatifs à \mathcal{O} . On continue ce procédé jusqu'à ce que l'on aboutisse à des sous-espaces affines vérifiant $A = A_{\text{reg}}$. (C'est certainement vérifié si A est un singleton.)

La donnée de résidu Res_A^P en un élément $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ se déduit alors, après normalisation par la constante $|\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_A)|^{-1}$ (cf. **3.10**), de la somme des opérateurs résidus en A qui apparaissent lors du procédé ci-dessus.

Remarquons que, pour tout $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, toute donnée de résidus Res_A en A , tout $\psi \in \mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ et tout $\sigma \in A_{\text{reg}}$, la fonction $\lambda \mapsto (\text{Res}_A \psi)(\sigma \otimes \chi_\lambda)$ est régulière sur a_G^* . Pour le calcul des données de résidu Res_A^P , seule importe donc la projection du chemin sur a_G^* .

B.3.

L'objet de cette annexe est la preuve du théorème suivant.

Théorème. *Soit $A \in [\mathcal{A}_\mu(\mathcal{S})]$ tel que $M_A = G$. Alors*

$$\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} (\text{Res}_{wA}^P \mu)(w\sigma) \neq 0$$

pour tout $\sigma \in A$.

Remarque. Le résultat figurant dans le Théorème 8.7 concerne la fonction $\mu_{\text{sp}, \sigma}$, $\sigma \in A$, et non pas la fonction μ . Les deux assertions sont équivalentes grâce à (8.1.2), puisque $\mu_{\text{ns}, \sigma}$ est régulière sur A et invariant par $W(M, \mathcal{O})$. La formulation du Théorème 8.7 avait été motivé par le fait que le Théorème 3.29 de l'article [O2], où on travaille avec des fonctions μ venant des algèbres d'Iwahori–Hecke, s'y applique directement.

B.4.

On réduira d'abord la preuve du théorème à celle de la proposition suivante.

Proposition. *Il existe un sous-groupe parabolique P' de sous-groupe de Levi M et $\tau \in A$ tel que $(\text{Res}_A^{P'} \mu)(\tau) \neq 0$.*

B.5.

Il faut donc prouver la proposition suivante.

Proposition. *Supposons la Proposition B.4 vérifiée. Alors le Théorème B.3 est vraie.*

Comme les chambres dans a_M^* relatives à $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ sont conjuguées par les éléments de $W(M, \mathcal{O})$, il existe $w \in W(M, \mathcal{O})$ tel que $\text{Res}_A^{w^{-1}P'} = \text{Res}_A^{P'}$. Par **4.8**, on a donc

$$0 \neq (\text{Res}_A^{P'} \mu)(\sigma) = (\text{Res}_A^{w^{-1}P'} \mu)(\tau) = (\text{Res}_{wA}^P \mu)(w\tau).$$

Le lemme suivant est élémentaire:

Lemme. *Il existe une fonction polynomiale ψ sur \mathcal{O} qui ne s'annule pas en $w\tau$ et qui vérifie $\psi(w'\tau) = 0$ pour tout $w \in W(M, \mathcal{O})$ tel que $w'\tau \neq w\tau$.*

Soit ψ une fonction sur \mathcal{O} vérifiant le lemme et appliquons le Théorème 8.2 à $\xi = \psi \xi_{P,\mathcal{O}}^H$ et $g = 1$. Le terme de gauche de l'égalité (8.2.2) de ce théorème vaut alors $\sum_{w' \in W(M,\mathcal{O})} (\text{Res}_{w'A}^P(\psi\mu))(w'\tau)$. Comme $(\text{Res}_{w'A}^P(\psi\mu))(w'\tau) = \psi(w'\tau)(\text{Res}_{w'A}^P\mu)(w'\tau)$ par (8.1.2), cette expression est non nulle par choix de ψ . L'ensemble $\mathcal{E}_2(G, \tau)$ est donc non vide, d'où $\sum_{w' \in W(M,\mathcal{O})} (\text{Res}_{w'A}^P\mu)(w'\tau) \neq 0$ par **8.6**.

B.6.

La preuve de la Proposition B.4 se fait en plusieurs étapes par récurrence sur le rang parabolique de M . Si $\dim(a_M^{G*}) = 1$, on se trouve dans le cadre des fonctions complexes d'une variable où la proposition est élémentaire.

Supposons donc $\dim(a_M^{G*}) > 1$. Comme par la remarque à la fin de B.2, seule la projection des chemins sur a_M^{G*} importe, il suffit de considérer le cas où G est semi-simple (et donc $a_M^{G*} = a_M^*$). Notons \mathcal{S}_τ l'ensemble des hyperplans affines de \mathcal{S} passant par τ , \mathcal{H}_τ l'ensemble des parties réelles des éléments de \mathcal{S}_τ et S la sphère dans a_M^* de centre $r_\tau := \Re(\tau)$ passant par l'origine de a_M^* . (Le symbole S ne désignera donc plus un sous-espace affine de \mathcal{O} .) Toute droite L qui appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$ est partagée par r_τ en deux demi-droites. Le lemme suivant (qui est analogue à la Remarque 3.14 de [HO2]) montre qu'une et une seule des deux demi-droites contient $r(L)$.

Lemme. On a $r(L) \neq r_\tau$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_\tau)$ avec $L = \Re(A)$. Notons μ_{MA} la fonction rationnelle égale à $\mu(\mu^{MA})^{-1}$. Alors, par les résultats du paragraphe 8, l'hypothèse de récurrence, et l'holomorphie de la fonction μ de Harish-Chandra en une représentation de carré intégrable, la fonction

$$\sum_{w \in W^{MA}(M,\mathcal{O})} (\text{Res}_{wA} \mu)(w\sigma) = \mu_{MA}(\sigma) \sum_{w \in W^{MA}(M,\mathcal{O})} (\text{Res}_{wA} \mu^{MA})(w\sigma)$$

est régulier pour $\Re(\sigma) = r(L)$, d'où $r(L) \neq r_\tau$. □

Dessignons en blanc la demi-droite qui contient $r(L)$ et l'autre en noir.

Choisissons un point r_1 sur la sphère S qui se trouve sur une demi-droite noire et qui est de distance à 0 minimale avec cette propriété. Notons B la boule dans a_M^* de centre 0 passant par r_1 .

La droite l passant par r_1 et r_τ peut s'écrire sous la forme $r_1 + a_{M_1}^*$ avec M_1 un sous-groupe de Levi maximal de G . Notons A_1 l'élément de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_\tau)$ de partie réelle $r_1 + a_{M_1}^*$. (Il est déterminé de façon unique, puisque ses éléments sont nécessairement de la forme $\tau \otimes \chi_\lambda$, $\lambda \in a_{M_1}^*$.) Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-groupe parabolique P' de G tel que l'on ait $(\text{Res}_{A_1^{M_1 \cap P'}} \mu^{M_1})(\sigma) \neq 0$ pour tout $\sigma \in A_1$. On peut choisir P' de telle sorte que $P'M_1$ soit un sous-groupe parabolique de Levi M_1 et que $r_1 - r_\tau >_{P'M_1} 0$.

Remarquons que l'opérateur $\text{Res}_A^{P'}$ est déterminé, grâce à **3.9**, par sa restriction à l'espace $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_\tau)$. En particulier, les hyperplans de la forme $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}(\sigma),\alpha}$, $\mathcal{O}_{\sigma,\alpha} \in \mathcal{S}_\tau$ (cf. **3.10**) peuvent être négligés lors du calcul des résidus. (Ils apparaissent toutefois ci-dessous dans la définition des ensembles $\mathcal{P}_S(M_L)$ et des points ϵ_Q (cf. **3.10**.)

B.7.

Avant de décrire un procédé qui calcule les données de résidus relatives à $\mathcal{R}(\mathcal{O}, \mathcal{S}_\tau)$ et à P' et qui montre que $(\text{Res}_A^{P'} \mu)(\tau) \neq 0$, on va expliciter dans cette section certains points de a_M^* . La proposition simple suivante nous servira à plusieurs reprises.

Proposition. *Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\tau)$ et $p \in L_{\text{reg}}$. La demi-droite partant de r_τ et passant par p (et privée du point r_τ) est contenue dans une et une seule composante connexe de L_{reg} .*

Preuve. Sinon, cette demi-droite contiendrait un point singulier p' qui serait donc contenu dans un hyperplan $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_\tau)$ qui ne contient pas L . Mais alors, comme $r_\tau \in H$, la droite passant par p' et r_τ serait incluse dans H . Ainsi p serait singulier, d'où une contradiction. \square

Pour tout $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\tau)$, notons $\widetilde{r(L)}$ le point d'intersection de S avec la demi-droite partant de r_τ et passant par $r(L)$. On vérifie facilement que $\widetilde{r(L)}$ est le point de $L \cap S$ à distance minimale de 0. Si $\dim(L) > 1$, $L \cap S$ est connexe, et on appelle $\widetilde{r(L)}$ l'origine sphérique de L ou de $L \cap S$. Si L est une droite, $\widetilde{r(L)}$ est formé de deux points que l'on appelle des origines sphériques. Le point $\widetilde{r(L)}$ est blanc et l'autre noir d'après la convention faite au numéro précédent.

Pour tout $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$, soit $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ le point d'intersection de S avec la demi-droite partant de r_τ et passant par $r(L) + \epsilon_Q$. La proposition ci-dessus montre que $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ et $r(L) + \epsilon_Q$ sont dans une même composante connexe de L_{reg} .

Pour tout $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\tau)$ d'origine sphérique dans l'intérieur de \widetilde{B} et tout $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$, on peut supposer ϵ_Q choisi suffisamment près de 0, pour que $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ soit à l'intérieur de B .

On observe alors que, si p est un point à l'intérieur du segment de r_τ à r_1 , l'intersection de S avec l'hyperplan affine $p + a_M^{M_1^*}$ est une sphère $S_p^{M_1}$ de centre p . On peut choisir p de telle sorte que les hyperplans affines $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_\tau)$ qui ont une intersection $\neq \{r_\tau\}$ avec le cône fermé de centre r_τ contiennent tous l (où, rappelons-le, l désigne la droite passant par r et r_τ).

Supposons p choisi avec cette propriété. Remarquons que $r_1 + a_M^{M_1^*}$ est le plan tangent à S en r_1 . Notons $S_1^{M_1}$ la projection orthogonale de $S_p^{M_1}$ sur $r_1 + a_M^{M_1^*}$ et $0_1^{M_1}$ celle de 0. Pour $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\tau)$, $L \supseteq l$, soit $r(L)_1^{M_1}$ la projection orthogonale de $r(L)$ et, pour $Q \in \mathcal{P}_S(M_L)$, $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q,1}^{M_1}$ celle de $r(L) + \epsilon_Q$. Il en suit que $r(L)_1^{M_1}$ est le point de $L \cap (r_1 + a_M^{M_1^*})$ de distance minimale à $0_1^{M_1}$.

Par ailleurs, le résultat suivant vaut:

Lemme. *Le point $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q,1}^{M_1}$ n'est contenu dans aucun hyperplan $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_\tau)$ qui contient l et non pas L .*

Preuve. Supposons que H soit un tel hyperplan. Alors H contiendrait également la droite par $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q,1}^{M_1}$ parallèle à l , et, par suite, $r(L) + \epsilon_Q \in H \cap L_{\text{reg}}$, ce qui est impossible. \square

B.8.

Fixons un point $0'$ de la demi-droite allant de r_1 à $0_1^{M_1}$ et qui se trouve à l'intérieur de la sphère $S_1^{M_1}$. Considérons la projection centrale de centre r_1 et de rapport $\lambda = d(r_1, 0')d(r_1, 0_1^{M_1})^{-1}$. Notons, pour $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\tau)$, $L \supseteq l$, et $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{S}(M_L)$, $r(L)'$ et $r(L)' + \epsilon'_Q$ respectivement les images de $r(L)_1^{M_1}$ et de $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q,1}^{M_1}$ par cette projection. Remarquons que $r(a_M^*)' = 0'$ et que $r(l)' = r_1$.

Lemme. *Le point $r(L)'$ est le point de $L \cap (r_1 + a_M^{M_1})$ à distance minimale de $0'$. Il appartient à l'intérieur de $S_1^{M_1}$ et à l'intérieur de B . Quitte à remplacer éventuellement ϵ_Q par un point de norme absolue plus petite, $r(L)' + \epsilon'_Q$ se trouve à l'intérieur de $S_1^{M_1}$ ainsi qu'à l'intérieur de B . Il appartient alors également à L_{reg} .*

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate du fait qu'une projection centrale laisse invariant les arcs et multiplie les distances par son rapport. Comme $L \cap (r_1 + a_M^{M_1*})$ contient r_1 et que $r(L)'$ est donc plus près de $0'$ que r_1 , $r(L)'$ se trouve par le théorème de Pythagore à l'intérieur de $S_1^{M_1}$. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle d'extrémités r_1 , $r(L)_1^{M_1}$ et $0_1^{M_1}$, on en déduit également que $r(L)'$ est plus proche de $0_1^{M_1}$ (et donc de 0) que r_1 , si $L \neq l$. Par suite $r(L)'$ se trouve à l'intérieur de B . Il est alors clair que l'on peut également supposer $r(L)' + \epsilon'_Q$ à l'intérieur de $S_1^{M_1}$ ainsi qu'à l'intérieur de B , quitte à remplacer ϵ_Q par un point de norme absolue plus petite. Par choix de $S_1^{M_1}$, ce point n'appartient donc à aucun hyperplan affine $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$ qui ne contient pas l . Suite à la proposition et le Lemme B.7, il ne se trouve pas non plus sur un hyperplan contenant l et non pas L . Il est donc régulier. □

B.9.

Lemme. *Soit r un point régulier de $S_1^{M_1}$ tel que la projection orthogonale de $r - r_1$ sur $a_M^{M_1*}$ soit dans la chambre de Weyl positive de $P' \cap M_1$. Alors, r se trouve dans la même composante connexe de $a_{M,\text{reg}}^*$ que tout élément de a_M^* qui est suffisamment positive dans la chambre de Weyl de P' .*

Preuve. Considérons la demi-droite partant de r_τ et passant par r . Les points $\neq r_\tau$ sont tous régulier grâce à la Proposition B.7, puisque r l'est, et ils correspondent aux valeurs de l'application $r(t) = r + t\overrightarrow{r_\tau r}$, $t > 0$. Il suffit donc de montrer que $\langle r(t), \alpha^\vee \rangle$ est strictement croissante en t pour toute racine α qui est ou dans $\Sigma(P' \cap M_1)$ ou dans $\Sigma(P'M_1)$.

Si $\alpha \in \Sigma(P' \cap M_1)$, $\langle r - r_\tau, \alpha^\vee \rangle = \langle r - r_1, \alpha^\vee \rangle$ et donc $\langle r(t), \alpha^\vee \rangle = \langle r, \alpha^\vee \rangle + t\langle r - r_1, \alpha^\vee \rangle$. Comme $\langle r - r_1, \alpha^\vee \rangle > 0$ par choix de P' , la fonction $r(t)$ est donc strictement croissante dans ce cas. Si $\alpha \in \Sigma(P'M_1)$, $\langle r - r_\tau, \alpha^\vee \rangle = \langle r_1 - r_\tau, \alpha^\vee \rangle$ et donc $\langle r(t), \alpha^\vee \rangle = \langle r, \alpha^\vee \rangle + t\langle r_1 - r_\tau, \alpha^\vee \rangle$. Comme $\langle r_1 - r_\tau, \alpha^\vee \rangle > 0$ par choix de P' , on conclut de même que la fonction $r(t)$ est strictement croissante. □

B.10.

Choisissons $r \in a_M^*$ vérifiant les hypothèses du Lemme B.9. On déduit de ce lemme que l'on peut choisir r comme point de départ pour calculer les données de résidus relatives à P' et \mathcal{S}_τ .

Rappelons (cf. B.6) que l'on a noté A_1 l'unique élément de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_\tau)$ de partie réelle l et que $\mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$ est alors égal à l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ qui contiennent l . Observons que, si $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$, tout élément $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_\tau}(M_L)$ est un sous-ensemble d'un élément $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$. Choisissons pour tout $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$ un $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_\tau}(M_L)$ vérifiant $Q \subseteq Q'$, et posons $\epsilon_{Q'} := \epsilon_Q$. (On écrira alors en particulier $\epsilon'_{Q'} := \epsilon'_Q$.)

Commençons par effectuer le procédé décrit en B.2, partant de r , mais relatif au choix de $0'$ comme origine et relatif aux points $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$, $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$, en se rappelant que $r(L)'$ est le point de L à distance minimale de $0'$. (On commence donc par relier r aux points $0' + \epsilon'_{Q'}$, $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M)$, et ainsi de suite. Tous les chemins peuvent donc être pris à l'intérieur de $S_1^{M_1}$, en sorte que l'on ne rencontre en effet que des sous-espaces affines $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$, et ainsi de suite.) Le lemme suivant montre que suite à ce procédé la donnée de résidus $\text{Res}_{A_1}^{P'}$ a déjà été calculée:

Lemme. *Il existe un chemin de $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ à $r(L) + \epsilon_Q$ qui ne rencontre aucun point singulier de L relatif à $\mathcal{H}(\mathcal{S}_{A_1})$.*

Preuve. Supposons d'abord $L \neq l$. Notons $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ la projection de $r(L)' + \epsilon'_Q$ sur S parallèle à la droite l . Ce point est donc plus proche de 0 que $r(L)' + \epsilon'_Q$, et il appartient donc à B grâce au Lemme B.8. Relions $r(L)' + \epsilon'_Q$ à $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ par la droite passant par ces deux points. Par choix de $S_1^{M_1}$, ce chemin ne contient aucun point singulier de L relatif à \mathcal{S}_{A_1} (et d'ailleurs pas non plus relatif à \mathcal{S}_τ). Par ailleurs, il reste à l'intérieur de B , puisque tout point sur ce chemin est plus près de 0 que $r(L)' + \epsilon'_Q$.

On remarque alors que le point $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ est à l'intérieur de B , puisque $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ y est et que $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ est (quitte à changer éventuellement ϵ_Q par un point de norme absolue plus petite) nécessairement plus proche de 0 .

L'hyperplan affine qui contient r_1 et qui est orthogonale à la droite passant par 0 et r_τ partage l'espace a_M^* en deux régions. On observe que l'intersection de S avec la région qui contient 0 est précisément $B \cap S$. Une des deux arcs sur S reliant $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ à $r(L) + \tilde{\epsilon}_Q$ est donc contenue dans B .

Par ailleurs, cet arc ne rencontre aucun hyperplan affine $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_{A_1})$ ne contenant pas L : sinon, il en serait de même de sa projection orthogonale sur $r_1 + a_M^{M_1*}$. Rappelons que $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ est sur la demi-droite partant de r_τ et passant par $r(L) + \epsilon_{Q'}$. La projection orthogonale de $r(L) + \epsilon_{Q'}$ sur $r_1 + a_M^{M_1*}$ étant $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q',1}^{M_1}$ et celle de r_τ étant r_1 , l'image de $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$ par cette projection orthogonale se trouve sur la droite passant par r_1 et $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q',1}^{M_1}$. Cette droite contient également le point $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$, qui est la projection orthogonale de $\widetilde{r(L)' + \epsilon'_Q}$. Il en suit que la projection orthogonale de l'arc est un segment de la demi-droite partant de r_1 et passant par $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q',1}^{M_1}$. Ce segment ne contient pas r_1 . Comme $r(L)_1^{M_1} + \epsilon_{Q',1}^{M_1}$ est régulier relatif à \mathcal{S}_{A_1} par le Lemme B.7, suite à la Proposition B.7, aucun point de ce segment ne peut appartenir à un hyperplan affine $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_{A_1})$ ne contenant pas L .

On relie alors le point $\widetilde{r(L)} + \widetilde{\epsilon}_{Q'}$ à $r(L) + \epsilon_{Q'}$ par la droite passant par ces points. La Proposition B.7 montre que celle-ci ne contient aucun point singulier relatif à \mathcal{S}_{A_1} . On fait de même pour $L = l$. Ceci prouve le lemme. \square

B.11.

Lemme. Soient $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$, $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$ et $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_L)$ tel que $Q \subseteq Q'$. Alors $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ et $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ sont dans une même composante connexe de L_{reg} .

Preuve. Par définition de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$ et de $\epsilon_{Q'}$, $r(L) + \epsilon_Q$ et $r(L) + \epsilon_{Q'}$ sont dans une même composante connexe de L relatif à $\mathcal{H}(\mathcal{S}_{A_1})$. Cette composante connexe contient par un raisonnement analogue au Lemme B.7 également $r(L)'_1 + \epsilon_{Q',1}^{M_1}$, et par suite elle contient les projections centrales $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ et $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ de ces points. Ils peuvent donc être reliés par un chemin à l'intérieur de $S_1^{M_1}$ qui ne peut donc, par choix de $S_1^{M_1}$, rencontrer aucun hyperplan $H \in \mathcal{H}(\mathcal{S}_\tau)$ qui contient L et qui ne contient pas l . \square

B.12.

Effectuons maintenant un procédé suivant B.2 pour calculer les données de résidus relatives à \mathcal{S}_τ . Il faut donc prendre en compte tous les hyperplans affines de \mathcal{S}_τ et considérer, pour $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$ les éléments de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\tau}(M_L)$ et pas seulement ceux de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$. Soit d'abord $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_{A_1})$, $L \neq l$, et $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_\tau}(M_L)$. Il existe alors $Q' \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}_{A_1}}(M_L)$ avec $Q \subseteq Q'$. Comme $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ et $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ se trouvent par B.11 dans la même composante connexe de L_{reg} , on peut les relier sans rencontrer de point singulier. Ensuite, on relie $r(L)' + \epsilon'_{Q'}$ à $r(L) + \epsilon_Q$ par le même procédé que $r(L)' + \epsilon_{Q'}$ à $r(L) + \epsilon_Q$. (En effet, $\epsilon_{Q'}$ et ϵ_Q sont interchangeable.) Ce chemin reste à l'intérieur de B .

Ce chemin ne rencontre seulement un nombre fini de points singuliers: s'il y en a, ils se trouvent, par ce qui a été dit dans la preuve du Lemme B.10, sur l'arc de $r(L)' + \widetilde{\epsilon}'_{Q'}$ à $r(L) + \widetilde{\epsilon}_Q$. S'il existait une infinité de points, au moins deux d'entre eux se trouveraient sur un même hyperplan affine. La droite passant par ces deux points serait donc contenue dans cet hyperplan et donc, comme cet hyperplan contient $\widetilde{r_\tau}$, également la droite passant par $r(L)' + \widetilde{\epsilon}'_{Q'}$ et $r(L) + \widetilde{\epsilon}_Q$, ce qui contredit le fait que $r(L) + \widetilde{\epsilon}_Q$ est régulier. Quitte à déformer le chemin dans un très petit voisinage, on peut également supposer que tout point singulier de ce chemin se trouve sur un et un seul hyperplan affine singulier de L , sans que les autres propriétés de ce chemin n'aient changé.

On continue alors le procédé avec chacun des points singuliers relatif à l'hyperplan affine singulier de L qui le contient. Comme ces points se trouvent à l'intérieur de B , l'origine sphérique de cet hyperplan affine de L se trouve également à l'intérieur de B . On peut donc prendre les chemins à l'intérieur de B . Et ainsi de suite.

On aboutit alors à des points $\widetilde{r(L)} + \widetilde{\epsilon}_Q$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $L \neq l$, $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(M_L)$, à l'intérieur de B (sans rencontrer des origines sphériques noires d'une droite L), auxquels il faut ajouter le point r_1 .

Par nos choix et par la Proposition B.7, on peut relier les points $\widetilde{r(L)} + \widetilde{\epsilon}_Q$, $L \neq l$, à $r(L) + \epsilon_Q$ par la droite passant par ces points, sans rencontrer de point singulier. Si on va de r_1 à $r(l)$ par la droite l , on rencontre un unique point singulier qui est r_τ . (On

peut ensuite continuer vers les points $r(l) + \epsilon_Q$, $Q \in \mathcal{P}_S(M_l)$, sans rencontrer de point singulier, puisque $r(l)$ est nécessairement régulier pour S_τ .)

Pour terminer la preuve de la Proposition B.4, il reste donc à vérifier qu'en traversant r_τ , on trouve une donnée de résidu $\text{Res}_A^{P'}$ qui vérifie $(\text{Res}_A^{P'} \mu)(\tau) \neq 0$. Suite à B.7 et ce qui précédait, on a $\text{Res}_A^{P'} = \pm \text{Res}_\tau \text{Res}_{A_1}^{P'}$, où Res_τ désigne l'opérateur qui associe à une fonction méromorphe sur la droite affine A_1 dans \mathcal{O} son résidu en τ . En notant $\mu_{M_{A_1}}$ la fonction méromorphe $\mu(\mu^{M_{A_1}})^{-1}$ définie sur A_1 , on trouve par (8.1.2) $(\text{Res}_{A_1}^{P'} \mu)(\sigma) = \mu_{M_{A_1}}(\sigma)(\text{Res}_{A_1}^{P'} \mu^{M_{A_1}})(\sigma)$ pour $\sigma \in A_1$. Par 4.9, l'hypothèse de récurrence et la remarque à la fin de B.2, $\text{Res}_{A_1}^{P'} \mu^{M_{A_1}} = \text{Res}_{A_1}^{P' \cap M_1} \mu^{M_{A_1}}$ est une fonction constante non nulle sur A_1 . Comme, par le Lemme 8.1, $(\text{Res}_\tau \mu_{M_{A_1}}) \neq 0$, la Proposition B.4 est prouvée.

Remerciements. Lors des différentes étapes de ce travail l'auteur a bénéficié d'un séjour à l'Institute for Advanced Study in Princeton en correspondance avec R. P. Langlands (financé par une bourse Feodor–Lynen de La Fondation Alexander von Humboldt et par la bourse DMS 97-29992 de la NSF) et d'un séjour à l'Université Paris VII en correspondance avec M.-F. Vignéras (financé par le Nachkontaktprogramm de La Fondation Alexander von Humboldt). Mon tuteur auprès de La Fondation Alexander von Humboldt était E.-W. Zink.

A ces occasions et lors d'autres séjours à Paris, l'auteur a bénéficié de quelques discussions avec R. P. Langlands, C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, ce qui l'a aidé à guider ses démarches. Il les remercie vivement de lui avoir consacré du temps.

Je remercie également P. Gérardin et les autres membres de l'équipe de Théorie de Groupes pour le bon accueil en leur sein lors de mes différents séjours à Paris, ainsi que L. Clozel pour des encouragements.

Mes remerciements vont de même à W. Hoffmann pour une remarque sur les dérivées de coefficients matriciels et surtout à E. Opdam qui m'a consacré du temps en m'expliquant son travail et qui a autorisé l'annexe B.

Ma reconnaissance va finalement à A. Silberger pour m'avoir communiqué la conjecture sur les supports cuspidaux des représentations spéciales à un moment où j'étais ignorant et qui m'avait motivé à aller au bout de cette décomposition spectrale.

Pour l'examen détaillé de mon travail qui constitue une majeure partie de ma thèse d'Habilitation, je remercie tout particulièrement J.-L. Waldspurger.

References

- [A] J. ARTHUR, A Paley–Wiener theorem for real reductive groups, *Acta Math.* **150** (1983), 1–89.
- [B] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 4–6 (Masson, Paris, 1981).
- [Ca] R. W. CARTER, *Finite groups of Lie type* (Wiley, 1993).
- [Cs] W. CASSELMAN, *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*, non publié.
- [HO1] G. J. HECKMAN ET E. M. OPDAM, Yang's system of particles and Hecke algebras, *Ann. Math.* **145** (1997), 139–173.
- [HO2] G. J. HECKMAN ET E. M. OPDAM, Harmonic analysis for affine Hecke algebras, dans *Current developments in mathematics*, pp. 37–60 (International Press, Boston, MA, 1997).

- [H1] V. HEIERMANN, Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p -adique, *Commun. Math. Helv.* **76** (2001), 388–415.
- [H2] V. HEIERMANN, *Une caractérisation semi-simple des L^2 -paires de Lusztig*, manuscrit (IAS Princeton, NJ, 1999).
- [H3] V. HEIERMANN, *Vers le spectre résiduel d'un groupe p -adique*, manuscrit, non publié.
- [KL] D. KAZHDAN ET G. LUSZTIG, Proof of the Deligne–Langlands conjecture for Hecke algebras, *Invent. Math.* **87** (1987), 153–215.
- [L] R. P. LANGLANDS, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 544 (Springer, 1976).
- [M1] C. MOEGLIN, Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales; le cas des groupes classiques p -adiques, *Ann. Math.* **151** (2000), 817–847.
- [M2] C. MOEGLIN, Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p -adiques; paramètres de Langlands et exhaustivité, *J. Eur. Math. Soc.* **4** (2002), 143–200.
- [M3] C. MOEGLIN, *Points de réductibilité pour les induites de cuspidales*, prépublication (2001).
- [MT] C. MOEGLIN ET M. TADIC, Construction of discrete series for classical p -adic groups, *J. Am. Math. Soc.* **15** (2002), 715–786.
- [MW2] C. MOEGLIN ET J.-L. WALDSPURGER, Le spectre résiduel de GL_n , *Ann. Ecole Norm. Sup.* **22** (1989), 605–674.
- [MW1] C. MOEGLIN ET J.-L. WALDSPURGER, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'écriture*, Progress in Mathematics, vol. 113 (Birkhäuser, Basel, 1994).
- [Mo1] L. E. MORRIS, Eisenstein series for reductive groups over global function fields I: the cusp form case, *Can. J. Math.* **34** (1982), 91–168.
- [Mo2] L. E. MORRIS, Eisenstein series for reductive groups over global function fields II: the general case, *Can. J. Math.* **34** (1982), 1112–1182.
- [Mu] G. MUIC, The unitary dual of p -adic G_2 , *Duke Math. J.* **90** (1997), 465–493.
- [O1] E. M. OPDAM, A generating function for the trace of the Iwahori–Hecke algebra, dans *Studies in memory of Issai Schur* (ed. A. Joseph, A. Melnikov, R. Rentschler), Progress in Mathematics, vol. 210, pp. 301–323 (Birkhäuser, 2003).
- [O2] E. M. OPDAM, On the spectral decomposition of affine Hecke algebras, arXiv:math.RT/0101007 v3 11 Oct. 2002, à paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*.
- [R] M. REEDER, On the Iwahori-spherical discrete series for p -adic Chevalley groups; formal degrees and L -packets, *Ann. Ecole Norm. Sup.* **27** (1994), 463–491.
- [Sh] F. SHAHIDI, A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p -adic groups, *Ann. Math.* **132** (1990), 273–330.
- [S1] A. SILBERGER, *Introduction to harmonic analysis on reductive p -adic groups*, Mathematical Notes of Princeton University, no. 23 (Princeton, NJ, 1979).
- [S2] A. SILBERGER, Special representations of reductive p -adic groups are not integrable, *Ann. Math.* **111** (1980), 571–587.
- [S3] A. SILBERGER, Discrete series and classification of p -adic groups I, *Am. J. Math.* **103** (1981), 1241–1321.
- [BS] E. P. VAN DEN BAN AND H. SCHLICHTKRULL, A residue calculus for root systems, *Compositio Math.* **123** (2000), 27–72.
- [W] J.-L. WALDSPURGER, La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d'après Harish-Chandra), *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), 235–333.
- [Z] A. V. ZELEVINSKY, Induced representations of reductive p -adic groups, II, On irreducible representations of $GL(n)$, *Ann. Ecole Norm. Sup.* **13** (1980), 165–210.

