

## APPROXIMATION HARMONIQUE, APPROXIMATION HOLOMORPHE ET TOPOLOGIE

P. M. GAUTHIER, W. HENGARTNER ET M. LABRÈCHE

Le but de cet article est de montrer qu'il n'y a pas de relation étroite entre ces trois concepts.

Soit  $K$  une partie compacte du plan complexe fini, et soit  $A(K)$  (resp.  $a(K)$ ) l'ensemble des fonctions continues sur  $K$  et holomorphes (resp. harmoniques) à l'intérieur  $K^0$  de  $K$ . Nous dirons que  $K$  est un ensemble d'approximation holomorphe (resp. harmonique) si toute fonction de  $A(K)$  (resp.  $a(K)$ ) peut être approchée uniformément sur  $K$  par des fonctions holomorphes (resp. harmoniques) sur  $K$ , i.e., dans un voisinage de  $K$ .

Pour un voisinage fixé  $\Omega$  de  $K$ , le théorème de Mergelian nous donne des conditions nécessaires et suffisantes, purement topologiques, pour que toute fonction de  $A(K)$  puisse être approchée uniformément sur  $K$  par des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ . D'autre part, on sait (par exemple [4]) qu'il n'est pas possible de caractériser topologiquement les ensembles d'approximation holomorphe. Nous verrons qu'il en est de même pour l'approximation harmonique.

Il est aussi naturel de s'interroger sur le rapport qui existe entre les ensembles d'approximation holomorphe et ceux d'approximation harmonique. En 1963, R. McKissick (voir [1], p. 192) construisit un ensemble d'approximation harmonique qui n'est pas un ensemble d'approximation holomorphe. Nous considérons le problème inverse et présentons un exemple d'ensemble d'approximation holomorphe qui n'est pas un ensemble d'approximation harmonique.

D'après le théorème de Runge, l'approximation par fonctions holomorphes sur  $K$  est équivalente à l'approximation par fonctions rationnelles dont les pôles sont hors de  $K$ . Puisque la situation est analogue pour l'approximation harmonique (voir [5], p. 347), le théorème suivant est essentiellement le théorème 5 dans [2].

*THEOREME A (Deny). Pour que  $K$  soit un ensemble d'approximation harmonique, il faut et il suffit que  $\mathbf{C} \setminus K$  et  $\mathbf{C} \setminus K^0$  soient effilés aux mêmes points.*

Ce théorème nous rappelle celui de Vituskin quant à la caractérisation des ensembles d'approximation holomorphe.

---

Reçu le 10 octobre, 1980. Etude subventionnée par le C.R.S.N.G. Canada et le Ministère de l'Éducation du Québec.

En vue d'utiliser le théorème de Deny, nous avons aussi besoin du critère de Wiener pour l'effilement.

THEOREME B ([5], p. 298-308). Soit  $\{r_n\}$  une suite de nombres positifs tels que

$$1 < a < \frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} < b, n \in \mathbf{N},$$

et notons par  $D_{z_0}(r_{n+1}, r_n)$ , l'anneau  $\{z : r_{n+1} < |z - z_0| < r_n\}$ . Pour qu'un ensemble  $E$  soit effilé en un point  $z_0 \in \bar{E}$ , il faut et il suffit que la série

$$\sum \frac{\log 1/r_n}{\log 1/C_n}$$

converge, où  $C_n$  est la capacité logarithmique de  $E \cap \bar{D}_{z_0}(r_{n+1}, r_n)$ .

Nous construisons maintenant un compact  $K_1$  qui n'est pas un ensemble d'approximation harmonique, et, par la suite, un homéomorphisme du plan sur lui-même qui envoie  $K_1$  sur un ensemble d'approximation harmonique  $K_2$ .

Considérons le disque fermé  $\bar{D} = \{z : |z| \leq \frac{1}{2}\}$  et posons

$$z_0 = 0, \quad r_n = 2^{-2^n} \quad \text{et} \quad B_n = \{z : r_{n+1} < \text{Im } z < r_n\}, n \in \mathbf{N}.$$

Dans chaque  $D_0(r_{n+1}, r_n)$ , nous pouvons construire une suite  $\{\Delta_k^n, k \in \mathbf{N}\}$  de disques ouverts de rayons  $\rho_k^n$  qui satisfont aux conditions suivantes:

- (I)  $\bar{\Delta}_k^n \cap \bar{\Delta}_j^m = \emptyset$  pour  $(n, k) \neq (m, j)$
- (II)  $\bar{\Delta}_k^n \subset \cup_{m \in \mathbf{N}} B_m$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- (III)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta_k^n = [r_{n+1}, r_n]$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- (IV)  $\sum_k \frac{1}{\log 1/\rho_k^n} < \frac{1}{2^{2^n}}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- (V)  $\cup_{k,n} \Delta_k^n \cap B_m \cap D_x(r_{m+1}, r_m) \neq \emptyset$  pour tout  $x \in [0, \frac{1}{4}]$  et tout  $m \in \mathbf{N}$ .

Posons  $K_1 = \bar{D} \setminus \cup_{k,n} \Delta_k^n$ .

Par le critère de Wiener,  $\mathbf{C} \setminus K_1$  est effilé au point  $z = 0$ . Mais  $\mathbf{C} \setminus K_1^0$  n'est pas effilé en ce point car cet ensemble contient le segment  $(0, \frac{1}{4})$ . Donc, par le théorème de Deny,  $K_1$  n'est pas un ensemble d'approximation harmonique.

Nous construisons maintenant l'ensemble  $K_2$ . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de  $\Delta_k^n$  dans chaque  $B_m$ , et à cause de la façon dont ils ont été construits, on peut entourer chacun des  $\bar{\Delta}_k^n$  par un domaine de Jordan  $J_k^n$  satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(I') \quad \bar{J}_k^n \cap \bar{J}_j^m = \emptyset \quad \text{pour } (n, k) \neq (m, j).$$

$$(II') \quad \bar{J}_k^n \subset D \cap [\cup_{m \in \mathbf{N}} B_m] \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N} \text{ et tout } n \in \mathbf{N}.$$

$$(III') \quad \text{Si } \bar{J}_k^n \subset B_m, \text{ alors } \text{diam}(\bar{J}_k^n) < 5 \cdot r_m.$$

(IV') Pour tout  $x \in [0, \frac{1}{4}]$  et tout  $m \in \mathbf{N}$ , il y a un  $n$ , un  $k$  et une composante  $G$  de  $\bar{J}_k^n \cap D_x(r_{m+1}, r_m)$  telle que

$$\text{diam } G > r_m - r_{m+1}.$$

Pour chaque  $n$  et  $k$ , soit  $V_k^n$  un domaine de Jordan tel que

$$\bar{\Delta}_k^n \subset V_k^n \subset \bar{V}_k^n \subset J_k^n.$$

Evidemment, les  $V_k^n$  satisfont aux conditions (I'), (II') et (III'). Nous pouvons supposer qu'ils satisfont également à la condition (IV'). Posons

$$K_2 = \bar{D} \setminus \cup_{k,n} V_k^n.$$

Pour chaque  $n$  et  $k$ , soit  $\varphi_k^n : J_k^n \rightarrow J_k^n$  un homéomorphisme qui fixe  $\partial J_k^n$  et envoie  $\Delta_k^n$  sur  $V_k^n$ . Posons

$$\varphi = \begin{cases} \text{Identité sur } \mathbf{C} \setminus \cup_{k,n} J_k^n \\ \varphi_k^n \text{ sur } J_k^n \text{ pour tout } n \text{ et tout } k. \end{cases}$$

A cause de la condition (III'),  $\text{diam}(J_k^n) \rightarrow 0$  lorsque les  $J_k^n$  s'accablent sur  $(0, \frac{1}{4})$ . Donc  $\varphi$  est continue sur  $[0, \frac{1}{4}]$ , et  $\varphi$  est un homéomorphisme.

Par la condition (IV') et le critère de Wiener,  $\mathbf{C} \setminus K_2$  n'est effilé en aucun point de  $[0, \frac{1}{4}]$ , et, par conséquent, en aucun point de son adhérence. En d'autres mots,  $\mathbf{C} \setminus K_2$  et  $\mathbf{C} \setminus K_2^0$  sont effilés aux mêmes points, et, d'après le théorème de Deny,  $K_2$  est un ensemble d'approximation harmonique. Donc la propriété "ensemble d'approximation harmonique" n'est pas une propriété topologique.

Notons enfin que, malgré le fait que  $K_1$  ne soit pas un ensemble d'approximation harmonique, il en est un d'approximation holomorphe. En effet, définissons la frontière intérieure d'un compact comme étant l'ensemble des points de la frontière qui ne sont situés sur la frontière d'aucune composante complémentaire. Puisque la frontière intérieure de  $K_1$  coïncide avec l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$ , on a (voir [3], p. 238) que  $K_1$  est un ensemble d'approximation holomorphe.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. A. Browder, *Introduction to function algebras* (W. A. Benjamin, New York, 1969).
2. J. Deny, *Systèmes totaux de fonctions harmoniques*, Annales de l'Institut Fourier, 1 (1949), 103–113.
3. T. W. Gamelin, *Uniform algebras* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969).

4. P. M. Gauthier, *On the possibility of rational approximation*, in: *Padé and rational approximation* (Proc. Internat. Sympos., Univ. South Florida, Tampa, Fla, 1976), 261–264.
5. N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory* (Springer-Verlag, New York, 1972).

*Université de Montréal,  
Montréal, Québec*