GÉNÉRALISATION DU SCALAIRE DE COURBURE ET DU SCALAIRE PRINCIPAL D'UN ESPACE FINSLÉRIEN À N DIMENSIONS

ARTHUR MOÓR

Introduction. Dans ses mémoires "Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume" [1] et "On Finsler and Cartan Geometries III," [3] Berwald a définie deux invariants fondamentaux des espaces finslériens à deux dimensions. Dans le présent travail nous allons établir une formule pour le scalaire de courbure et une pour le scalaire principal, qui définissent un invariant de l'espace finslérien à n dimensions, et qui sont identiques, pour deux dimensions, aux invarients définis par L. Berwald. Notre idée fondamentale sera d'exprimer le vecteur normal (h^i, h_i)—qui n'est défini qu'à deux dimensions—par le vecteur d'Euler, déjà défini pour n dimensions.

Dans II nous donnons aussi quelques autres invariants de l'espace à deux dimensions formés par le vecteur d'Euler.

I. Les tenseurs fondamentaux de l'espace

Les tenseurs fondamentaux d'un espace finslérien sont les suivants:

1. Le vecteur unitaire porté dans la direction de son élément d'appui (x, x'). Si

$$ds = F\,(x^1, x^2, \ldots, x^n, x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)\, dt, \quad x'^i = \frac{dx}{dt}$$

est la distance de deux points infiniment voisins de l'espace, où F est positivement homogène et du premier degré par rapport aux x'^i, alors F est la fonction fondamentale de la géométrie—en ce cas, les composantes du vecteur nommé seront [4, pp. 12-13]:

$$l^i = \frac{x'^i}{F}, \qquad l_i = \frac{\partial F}{\partial x'^i}. \tag{1}$$

2. Le tenseur métrique [4, pp. 10-12]:

$$g_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \partial x'^k}. \tag{2}$$

3. Le vecteur normal unitaire, qui est alors perpendiculaire à l^i [3, p. 193] pour deux dimensions:

$$h^i = -\,\epsilon^{ik} l_k, \quad h_i = -\,\epsilon_{ik} l^k \qquad (i, k = 1, 2) \tag{3}$$

Received July 4, 1949.

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-028-1 Published online by Cambridge University Press

où le tenseur ϵ^{ik} a les composantes:

$$\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0, \quad \epsilon^{12} = \frac{1}{\sqrt{F^3 F_1}}, \quad \epsilon^{21} = -\frac{1}{\sqrt{F^3 F_1}} \tag{4a}$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{12} = \sqrt{F^3 F_1}, \quad \epsilon_{21} = -\sqrt{F^3 F_1}. \tag{4b}$$

F_1 designe la fonction [1, pp. 193-198]

$$F_1 = \frac{1}{x'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -\frac{1}{x'y'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} = \frac{1}{y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}. \tag{5}$$

$\sqrt{F^3 F_1}$ est donc la racine du discriminant

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Dans le cas de deux dimensions, nous écrivons (x', y') au lieu de (x'^1, x'^2).

4. Le vecteur d'Euler, dont les composantes sont [5, pp. 84-87]

$$\rho_i = F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{x'^i}. \tag{6}$$

Dans le cas de deux dimensions, ρ_i a la forme [2, p. 38]:

$$\rho_1 = F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = y'T, \tag{6a}$$

$$\rho_2 = F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = -x'T, \tag{6b}$$

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x''). \tag{7}$$

On peut exprimer la variation δs de l'intégrale:

$$s = \int_{t_0}^{t} F(x, y, x', y')\, dt \tag{8}$$

par ρ_1 et ρ_2 par conséquent:

$$\delta s = \int_{t_0}^{t} (\rho_1\, \delta x + \rho_2\, \delta y)\, dt.$$

Pour les extrémales de l'intégrale (8) on a les équations [5, p. 86]

$$\rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 0. \tag{9}$$

II. Invariants formés par l^i, h^i, ρ_i

1. Courbure extrémale. Si α_i est un vecteur covariant et β^i un vecteur contrevariant, on aura un invariant par la construction du produit scalaire:

$$A = \alpha_i \beta^i.$$

Ainsi les fonctions:

(10) $$A_1 = \rho_i l^i \qquad (i = 1, 2)$$

(11) $$A_2 = \rho_i h^i \qquad (i = 1, 2)$$

sont les invariants de l'espace caractérisé par l'intégrale (8) ou par le tenseur métrique (2)

De (1) et (6a), (6b) il résulte:

$$A_1 = 0.$$

Le vecteur ρ_i est alors perpendiculaire à l^i.

Nous allons maintenant calculer l'invariant A_2. (6a) et (6b) nous donnent:

$$A_2 = T(y'h^1 - x'h^2)$$

et, à cause de (3) et (4a), (4b)

$$h^1 = -\frac{1}{\sqrt{F^3F_1}}\, l_2, \qquad h^2 = \frac{1}{\sqrt{F^3F_1}}\, l_1;$$

alors

$$A_2 = -\frac{T}{\sqrt{F^3F_1}}\,(x'l_1 + y'l_2).$$

Nous obtenons pour A_2 par suite de l'homogénéité de F

$$A_2 = -\frac{TF}{\sqrt{F^3F_1}}\,.$$

L'invariant

(12) $$\frac{1}{r} = \frac{T}{\sqrt{F^3F_1}}$$

a été nommé par Berwald "courbure extrémale".[1] A_2 sera ainsi:

(13) $$A_2 = -\frac{F}{r}.$$

A_2 sera nul pour les extrémales de l'intégrale (8), car en ce cas on a

$$\frac{1}{r} = 0.$$

Les équations (11), (13) et (6a), (6b) fournissent pour $1/r$ les expressions

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= -\frac{1}{F}\,(\rho_1 h^1 + \rho_2 h^2)\\ &= -\frac{T}{F}\,(y'h^1 - x'h^2)\\ &= -\,T\,(l^2h^1 - h^2l^1)\,.\end{aligned}$$

[1]Cf. [2] pp. 38-42. Berwald designe ici la courbure extrémale par $1/\rho$.

Si

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

sont les équations d'une extrémale de (8), A_2 sera nul mais ρ_1 ne sera pas perpendiculaire à h^i puisque $\rho_i = 0$.

2. Scalaire de courbure. On peut aussi exprimer le scalaire de coubure par les vecteurs l, h, ρ. Le scalaire de courbure est défini par l'équation[2]

$$\Re = \Re(x, y, x', y',) = \tfrac{1}{2} R_0{}^j{}_{ik} h_j \epsilon^{ik}.$$

On peut vérifier facilement que

$$\epsilon^{ik} = l^i h^k - l^k h^i$$

[3, p. 89] et, par conséquent,

$$\Re = \tfrac{1}{2} R_0{}^j{}_{ik} (l^i h_j h^k - l^k h_j h^i). \tag{14}$$

Calculons les composantes contrevariantes du vecteur ρ. On a

$$\rho^i = g^{ik} \rho_k.$$

Les composantes du tenseur g^{ik} sont:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{F^3 F_1}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{F^3 F_1}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{F^3 F_1}$$

où

$$g_{ik} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \, \partial x'^k}.$$

On tire de ces équations pour ρ_i à l'aide de (6a), (6b),

$$\rho^1 = \frac{T}{2F^3 F_1} (y'(F^2)_{y'y'} + x'(F^2)_{x'y'}), \tag{15a}$$

$$\rho^2 = \frac{T}{2F^3 F_1} (-y'(F^2)_{x'y'} - x'(F^2)_{x'x'}). \tag{15b}$$

Mais $(F^2)_{y'}$ et $(F^2)_{x'}$ sont homogènes et de degré un par rapport à x' et y' et ainsi (15a) et (15b) nous donnent d'après (12):

$$\rho^1 = \frac{F}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{1}{\sqrt{F^3 F_1}}$$

$$\rho^2 = -\frac{F}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\sqrt{F^3 F_1}}$$

et à cause de (3), (4a), (4b), nous obtenons:

$$\rho^i = \frac{F}{r} \epsilon^{ik} l_k = -\frac{F}{r} h^i, \tag{16a}$$

[2]Cf. [3], pp. 91-92. Pour $R_0{}^j{}_{ik}$ cf. [4], pp. 36-37.

d'où

$$\rho_i = -\frac{F}{r}h_i. \tag{16b}$$

Si l'on prend comme paramètre la longueur s mesurée sur la courbe

$$x^i = x^i(s),$$

alors

$$F(x, y, x', y') = 1,$$

et la longueur de ρ^i sera

$$L(\rho^i) = \sqrt{\rho^i\rho_i} = 1/r. \tag{17}$$

La longueur du vecteur ρ^i nous donne toujours la courbure extrémale. Pour un paramètre quelconque t, on a

$$L(\rho^i) = \frac{F}{r} = -A_2. \tag{18}$$

Si nous exprimons h_i et h^i de (16a) et de (16b) et si nous substituons ces valeurs à (14), nous obtenons la formule:

$$\Re = \frac{r^2}{2F^2} R_0{}^j{}_{ik}\,(l^i\rho_j\rho^k - l^k\rho_j\rho^i). \tag{19}$$

3. Scalaire principal. Le scalaire principal d'un espace finslérien est [1, p. 204]:

$$\Im = \tfrac{1}{2}A_{ijk}h^ih^jh^k = \tfrac{1}{4}\frac{1}{F^{\frac{1}{2}}F_1{}^{3/2}}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial F_1}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right) \tag{20}$$

où A_{ijk} est le tenseur de torsion de l'espace. Selon (16a), nous tirons de (20)

$$\Im = -\frac{r^3}{2F^3}A_{ijk}\rho^i\rho^j\rho^k. \tag{21}$$

On a encore la formule [3, p. 89]:

$$A_{ijk} = 2\Im h_ih_jh_k \tag{22}$$

d'où nous obtenons, par l'équation (16b):

$$A_{ijk} = -2\Im\frac{r^3}{F^3}\rho_i\rho_j\rho_k. \tag{23}$$

III. Scalaire de courbure et scalaire principal dans un espace finslérien a n dimensions

Les formules (17), (19) et (21) nous donnent une généralisation de la courbure extrémale, du scalaire de courbure et du scalaire principal à n dimensions, si $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, car les vecteurs l^i, ρ^i, $R_0{}^j{}_{ik}$, A_{ijk} sont définis à n dimensions. (Cf. les équations (1) (6); h^i n'était défini qu'à deux dimensions.)

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-028-1 Published online by Cambridge University Press

Le vecteur

$$\sigma^i = \frac{\rho^i}{L(\rho^i)}, \quad \sigma_i = \frac{\rho_i}{L(\rho^i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{24}$$

où $L(\rho^i)$ est la longueur du vecteur ρ^i donné par (6), est un vecteur unitaire, et ainsi on peut exprimer le scalaire de courbure et le scalaire principal (d'après (18) et (24)) des équations (19) et (21) sous la forme:

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R_0{}^j{}_{ik}\, (l^i\sigma_j\sigma^k - l^k\sigma_j\sigma^i) \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \tag{25}$$

$$\mathfrak{J} = -\tfrac{1}{2} A_{ijk}\, \sigma^i\sigma^j\sigma^k \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, n). \tag{26}$$

Les formules (25) et (26) définissent naturellement pour $n = 2$ les mêmes invariants que Berwald a définis [1 et 3].

Les espaces de Riemann sont caractérisés dans le cas de n dimensions aussi par

$$\mathfrak{J} = 0, \tag{27}$$

quand encore (23) existe dans l'espace ($n > 2$); parce que, d'après (23), il résulte de (27)

$$A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x'^k} = 0, \tag{28}$$

donc

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{29}$$

et ce résultat est caractéristique pour les espaces de Riemann. Réciproquement, si l'on a

$$A_{ijk} = 0, \tag{30}$$

il résulte de (21) que (27) et (30) sont équivalents.

Dans un espace de Minkowski—dont la fonction fondamentale a la forme

$$F = F(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$$

on a

$$R_0{}^j{}_{ik} = 0 \tag{31}$$

donc, d'après l'équation (25),

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{32}$$

Réciproquement, (32) entraîne en deux dimensions, par l'identité

$$R_0{}^j{}_{ik} = \mathfrak{R}(l_i\sigma^j\sigma_k - l_k\sigma^j\sigma_i)$$

l'équation (31); (31) et (32) sont donc aussi équivalents; cf. l'équation (25) et l'identité: $\sigma^r l_r = \sigma_r l^r = 0$.

REFERENCES

[1] L. Berwald, *Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume,* Crelles Journal, vol. 156 (1927) 191-222.

[2] ——— *Über Finslersche und Cartansche Geometrie* I. Mathematica, vol. 17 (1941) 34-58.

[3] ——— *On Finsler and Cartan Geometries* III. *Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals.* Annals of Mathematics, vol. 42 (1941) 84-112.

[4] E. Cartan, *Les espaces de Finsler.* Actualités scientifiques et industriellles, vol. 79 (Paris, 1934).

[5] A. Duschek und W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie* II. Leipzig und Berlin (1930).

Szeged, Hongrie