Canad. Math. Bull. Vol. **40** (3), 1997 pp. 356–363

PRINCIPE DU MAXIMUM ET LEMME DE SCHWARZ A VALEURS VECTORIELLES

PIERRE MAZET

RÉSUMÉ. Nous établissons un théorème pour les fonctions holomorphes à valeurs dans une partie convexe fermée. Ce théorème précise la position des coefficients de Taylor de telles fonctions et peut être considéré comme une généralisation des inégalités de Cauchy. Nous montrons alors comment ce théorème permet de retrouver des versions connues du principe du maximum et d'obtenir de nouveaux résultats sur les applications holomorphes à valeurs vectorielles.

1. **Introduction.**

Si $f(z) = \sum a_n z^n$ est une fonction holomorphe bornée sur le disque unité à valeurs complexes, on a la relation $\sum |a_n|^2 \leq (\|f\|_\infty)^2$ qui fournit les inégalités de Cauchy $|a_n| \leq \|f\|_\infty$. En outre, si l'on a une égalité $|a_n| = \|f\|_\infty$, les autres coefficients sont nuls et f est un monôme de degré n. Le cas $n = 0$ fournit immédiatement le principe du maximum local, le cas $n = 1$ est l'une des conclusions du lemme de Schwarz.

Si maintenant f est à valeurs dans un espace vectoriel normé; grâce au théorème de Hahn-Banach les inégalités de Cauchy se généralisent sans peine en $\|a_n\| \leq \|f\|_\infty$ mais les cas d'égalités et, en particulier, leurs conséquences pour $n = 0$ ou $n = 1$ ne se généralisent pas aussi simplement. De nombreux travaux (*cf.* [D, Ha, He, Re, Ru, Vi1, Vi2, Vi3]) ont été faits pour obtenir de telles généralisations et en donner des applications. Il en ressort l'importance de l'existence de beaucoup de points extrémaux dans la boule unité fermée de l'espace normé considéré. Grâce à des raffinements des inégalités de Cauchy nous précisons ce point et obtenons de nouvelles démonstrations plus élémentaires de résultats connus ainsi que des réponses à certains problèmes ouverts.

2. **Le théorème fondamental.**

2.1. *Rappels.* Soit E un K-espace vectoriel ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), X une partie convexe de E et a un point de X. La face de X au point a est le K-sous-espace affine $F_K(a, X)$ passant par a et dirigé par

$$\overrightarrow{F_K}(a, X) = \{u \in E \mid \exists \varepsilon > 0 \quad \forall t \in K \quad |t| < \varepsilon \Rightarrow a + tu \in X\}.$$

Rappelons que, si b est dans la face de X au point a, on a l'inclusion $F_K(b, X) \subset F_K(a, X)$.

Reçu par les éditeurs le 22 février 1996.
Classification (AMS) par sujet : Première: 30C80; Seconde: 32A30, 46G20, 52A07.
Mots clés: Principe du maximum, lemme de Schwarz, points extrémaux.

Le point a est dit K-extrémal dans X lorsque la face $F_K(a,X)$ se réduit à $\{a\}$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{F_K}(a,X) = 0$). Lorsque $K = \mathbf{C}$ on a évidemment $\overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(a,X) = \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a,X) \cap i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a,X)$. En particulier les points **R**-extrémaux sont **C**-extrémaux, mais la réciproque est fausse.

Dans un espace vectoriel normé les points de la sphère unité sont fréquemment extrémaux dans la boule unité fermée. Ainsi, pour $1 < p < \infty$, tous les points de la sphère unité d'un espace L^p sont **R**-extrémaux (et donc **C**-extrémaux). Pour $p = 1$, tous les points de la sphère unité de L^1 sont **C**-extrémaux mais, par contre, les seuls points **R**-extrémaux sont, à un coefficient près, les fonctions indicatrices d'ensembles non négligeables minimaux (en particulier, il n'y en a pas pour $L^1([0,1])$, mais il y en a pour l^1). Pour $p = \infty$, les points **R**-extrémaux et **C**-extrémaux sont les mêmes, ce sont les fonctions qui sont presque partout de module 1.

2.2. *Enoncé du théorème fondamental.*

LEMME. *Soit E un espace de Banach, X une partie convexe fermée de E et φ une fonction continue périodique de la variable réelle prenant ses valeurs dans X. Si $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est la famille des coefficients de Fourier de φ, alors, pour $p \geq 1$ et λ complexe avec $|\lambda| \leq 1/2$, on a $c_0 + \lambda c_p + \bar{\lambda} c_{-p} \in X$.*

PREUVE. Si T est la période on a $c_0+\lambda c_p+\bar{\lambda} c_{-p} = \int_0^T \varphi(t)\big[1+\lambda e^{-2i\pi pt/T}+\bar{\lambda} e^{2i\pi pt/T}\big]\frac{dt}{T}$. Cependant $1 + \lambda e^{-2i\pi pt/T} + \bar{\lambda} e^{2i\pi pt/T}$ est réel et même positif lorsque $|\lambda| \leq 1/2$, en outre $\int_0^T (1+\lambda e^{-2i\pi pt/T}+\bar{\lambda} e^{2i\pi pt/T})\frac{dt}{T} = 1$; par suite $c_0+\lambda c_p+\bar{\lambda} c_{-p}$ apparaît comme un barycentre de valeurs de φ et appartient donc à X.

L'énoncé fondamental est alors :

THÉORÈME 2.1. *Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité Δ à valeurs dans un **C**-espace de Banach E telle que $f(\Delta)$ soit contenu dans une partie X convexe fermée. Notons $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ le développement de Taylor de f, alors :*

i) pour p entier avec $p \geq 1$ et λ complexe avec $|\lambda| \leq 1/2$ on a $f(0) + \lambda a_p \in X$

ii) pour $z \in \Delta$ et λ complexe avec $2|z|\lambda \leq 1 - |z|$ on a $f(0) + \lambda\big(f(z) - f(0)\big) \in X$.

En particulier, pour $p \geq 1$, les a_p sont dans $\overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}\big(f(0),X\big)$ et, pour $z \in \Delta$, $f(z) - f(0) \in \overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}\big(f(0),X\big)$ et donc $f(z) \in F_{\mathbf{C}}\big(f(0),X\big)$.

En outre, si X est disquée et n entier avec $n \geq 1$, alors :

iii) pour p entier avec $1 \leq p \leq n$ et λ complexe avec $|\lambda| \leq 1/2$ on a $a_n + \lambda a_{n+p} + \bar{\lambda} a_{n-p} \in X$.

iv) pour p entier avec $p \geq n+1$ et λ complexe avec $|\lambda| \leq 1/2$ on a $a_n + \lambda a_{n+p} \in X$.

En particulier, pour $1 \leq p \leq n$, on a $a_{n+p} + a_{n-p} \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X)$ et $i(a_{n+p} - a_{n-p}) \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X)$,

pour $0 \leq m \leq 2n$, $m \neq n$, on a $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X) + i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X)$,

pour $m \geq 2n+1$, on a $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(a_n,X)$ (a fortiori $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X) + i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n,X)$).

PREUVE. Fixons n et p dans **N** avec $p \geq 1$ et, si $n \neq 0$, supposons X disquée. Pour $0 < r < 1$ appliquons le lemme avec $\varphi(t) = f(re^{it})e^{-int}$ qui est 2π-périodique à valeurs dans X. Avec la convention $a_q = 0$ si $q < 0$, les coefficients de Fourier sont $c_q = a_{q+n}r^{q+n}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-042-9 Published online by Cambridge University Press

On a donc, pour $|\lambda| \leq 1/2$, $a_n r^n + \lambda a_{n+p} r^{n+p} + \overline{\lambda} a_{n-p} r^{n-p} \in X$. Comme cette appartenance est vraie pour $0 < r < 1$ et X est fermée, en passant à la limite, elle est vraie pour $r = 1$, c'est-à-dire $a_n + \lambda a_{n+p} + \overline{\lambda} a_{n-p} \in X$, ce qui établit i), iii) et iv) (puisque $a_{n-p} = 0$ pour $p > n$).

Si $1 \leq p \leq n$, en appliquant le point iii) pour λ réel on obtient $a_{n+p} + a_{n-p} \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$ et pour λ imaginaire pur on obtient $i(a_{n+p} - a_{n-p}) \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$ et donc $a_{n+p} - a_{n-p} \in i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$. Par combinaison linéaire on en tire que a_{n+p} et a_{n-p} appartiennent à $\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X) + i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$, d'où $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X) + i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$ pour $0 \leq m \leq n-1$ et pour $n+1 \leq m \leq 2n$.

Si $p \geq n+1$; le point iv) signifie $a_{n+p} \in \overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(a_n, X)$ d'où $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(a_n, X)$ pour $m \geq 2n+1$.

Pour établir le point ii) remarquons que, pour $z \in \Delta$, $z \neq 0$ et $2|z|\lambda \leq 1 - |z|$, le point i) assure, pour $p \geq 1$, $a_0 + \frac{\lambda a_p z^p}{|z|^{p-1} - |z|^p} \in X$. Si l'on prend le barycentre de ces points affectés des coefficients $|z|^{p-1} - |z|^p$ (qui sont positifs et de somme 1), on obtient $f(0) + \lambda\big(f(z) - f(0)\big) \in X$. L'appartenance pour $z = 0$ est évidente.

REMARQUE. Lorsque X est la boule unité fermée de E, le résultat ii) de ce théorème a été prouvé et utilisé par L. A. Harris dans [Ha].

3. **Applications.**

3.1. *Principe du maximum.* Pour une fonction holomorphe f à valeurs vectorielles il est facile, à l'aide du théorème de Hahn-Banach, de généraliser le principe du maximum à valeurs scalaires. On prouve en particulier que, si $\|f(x)\|$ atteint un maximum en un point, alors $\|f(x)\|$ est constante sur la composante connexe de ce point. Cependant, la version forte de ce principe qui assure que, sous ces conditions, $f(x)$ est constante sur cette composante connexe, n'est valable que sous certaines hypothèses géométriques. Nous allons montrer comment le théorème fondamental permet de retrouver les résultats prouvés à ce sujet par E. Thorp et R. Whitley dans [TW] puis par E. Vesentini dans [Ve1].

THÉORÈME 3.1. *Soient V une variété analytique connexe, f une application holomorphe de V dans un espace de Banach E dont l'image est contenue dans une partie X convexe et fermée. Alors la face $F_{\mathbf{C}}\big(f(a), X\big)$ est indépendante du point a dans V.*

PREUVE. Lorsque $V = \Delta$ le théorème 2.1 assure $f(b) \in F_{\mathbf{C}}\big(f(a), X\big)$ si $a = 0$. En utilisant les automorphismes de Δ on voit que cela reste vrai pour tout couple de points a et b dans Δ. Il s'ensuit $F_{\mathbf{C}}\big(f(b), X\big) \subset F_{\mathbf{C}}\big(f(a), X\big)$ et, par symétrie, $F_{\mathbf{C}}\big(f(b), X\big) = F_{\mathbf{C}}\big(f(a), X\big)$.

Plus généralement, avec V quelconque, le cas précédent assure que cette égalité est vraie dès que a et b sont dans l'image holomorphe d'un disque Δ. La connexité de V prouve alors que cette égalité est toujours vraie.

On en déduit immédiatement les corollaires suivants.

COROLLAIRE 3.2. *Sous les hypothèses du théorème précédent* $f(\Delta)$ *est contenu soit dans l'intérieur de* X*, soit dans la frontière de* X.

En effet, si l'intérieur de X n'est pas vide, les points de cet intérieur sont caractérisés par $\overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(x, X) = E$.

COROLLAIRE 3.3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si, pour* z *dans* V*,* $f(z)$ *est* **C**-*extrémal dans* X *alors* f *est constante.*

Ces deux corollaires constituent la Proposition 1.3 de l'article [Ve1] de E. Vesentini.

COROLLAIRE 3.4 (PRINCIPE DU MAXIMUM FORT). *Soit* f *holomorphe de* V *variété analytique connexe dans un espace de Banach* E*. On suppose que les points de la sphère unité de* E *sont* **C**-*extrémaux dans la boule unité fermée. Alors, si* $\|f(x)\|$ *atteint un maximum local,* f *est constante.*

Ce corollaire est le résultat fondamental de E. Thorp et R. Whitley dans [TW].

3.2. *Applications tangentes à une isométrie.* Soient E et F des espaces de Banach de boule unité respective B_E et B_F. Considérons une application f holomorphe sur B_E à valeurs dans B_F. Lorsque E et F sont de dimension 1, les inégalités de Cauchy assurent $|f'(0)| \leq 1$ et l'égalité ne peut se produire que si f est un monôme du premier degré, en particulier, cela exige $f(0) = 0$. Dans le cas général, à l'aide du théorème de Hahn-Banach, on montre aisément $\|f'(0)\| \leq 1$; on peut donc se demander si, lorsque $f'(0)$ est une injection isométrique, on peut conclure que f est linéaire ou, au moins, que $f(0) = 0$.

Ce problème a été étudié par J. P. Vigué dans [Vi3]. Il montre que la réponse est négative en général mais positive lorsque la sphère unité de F a suffisamment de points **R**-extémaux dans $\overline{B_F}$. Les questions naturelles sont alors :

1. Peut-on remplacer l'extrémalité réelle par l'extrémalité complexe?
2. Peut-on se contenter du caractère **R**-extrémal de quelques points de la sphère, en particulier de ceux qui sont dans l'image de f'?

Voici un exemple qui répond négativement à la première question.

EXEMPLE 3.5. Prenons $E = \mathbf{C}$ et $F = \mathbf{C}^2$ muni de la norme de l^1. L'application f définie par $f(z) = \left(\left(\frac{1+z}{2}\right)^2, \left(\frac{1-z}{2}\right)^2\right)$ est clairement holomorphe, on vérifie aisément qu'elle envoie le disque unité de **C** dans la boule unité de F et l'on a $f'(0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ qui est bien de norme 1. Cependant $f(0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ n'est pas nul et f n'est pas linéaire alors que tous les points de la sphère unité de F sont **C**-extrémaux dans la boule unité fermée.

Toutefois le théorème fondamental apporte, dans certains cas, des réponses positives à ces problèmes. En effet une reformulation immédiate de ce théorème donne :

THÉORÈME 3.6. *Avec les données et hypothèses présentées au début de cette section, supposons* $E = \mathbf{C}$ *et* $B_E = \Delta$.

Si $\|f'(0)\| = 1$*, alors :*

i) Si $f'(0)$ *est* **R**-*extrémal dans* $\overline{B_F}$*,* f *est un monôme de degré* 1*,* $f(z) = zf'(0)$.

ii) Si $f'(0)$ *est* **C**-*extrémal dans* $\overline{B_F}$*,* f *est un polynôme de degré au plus* 2.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-042-9 Published online by Cambridge University Press

Plus généralement, pour tout entier n, $n \geq 1$, on a $\|f^{(n)}(0)\| \leq n!$ et, si l'on a l'égalité, alors :

iii) Si $f^{(n)}(0)/n!$ est $\mathbf{R}$-extrémal dans $\overline{B_F}$, f est un monôme de degré n, $f(z) = z^n f^{(n)}(0)/n!$.

iv) Si $f^{(n)}(0)/n!$ est C-extrémal dans $\overline{B_F}$, f est un polynôme de degré au plus $2n$.

A partir de restrictions aux droites vectorielles, cet énoncé se généralise au cas où E est de dimension quelconque sous la forme suivante.

THÉORÈME 3.7. *Avec les données et hypothèses présentées au début de cette section on a :*

i) S'il existe u de norme 1 dans E tel que $f'(0) \cdot u$ soit $\mathbf{R}$-extrémal dans $\overline{B_F}$ alors $f(0) = 0$.

ii) Si, pour tout u de norme 1 dans E, $f'(0) \cdot u$ est $\mathbf{C}$-extrémal dans $\overline{B_F}$ alors f est un polynôme de degré au plus 2.

iii) Si les deux hypothèses précédentes sont simultanément vérifiées alors f est une application linéaire, $f(u) = f'(0) \cdot u$.

Plus généralement, pour tout entier n, $n \geq 1$, on a :

iv) S'il existe u de norme 1 dans E tel que $f^{(n)}(0) \cdot u/n!$ soit $\mathbf{R}$-extrémal dans $\overline{B_F}$ alors $f(0) = 0$.

v) Si, pour tout u de norme 1 dans E, $f^{(n)}(0) \cdot u/n!$ est $\mathbf{C}$-extrémal dans $\overline{B_F}$ alors f est un polynôme de degré au plus $2n$.

vi) Si les deux hypothèses précédentes sont simultanément vérifiées alors f est un polynôme de degré au plus $2n - 1$ et de terme constant nul.

vii) Si, pour tout u de norme 1 dans E, $f^{(n)}(0) \cdot u/n!$ est $\mathbf{R}$-extrémal dans $\overline{B_F}$ alors f est un polynôme homogène de degré n, $f(u) = f^{(n)}(0) \cdot u/n!$.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème fondamental à l'application $z \longmapsto f(zu)$. On a alors $a_p = f^{(p)}(0) \cdot u/p!$.

La relation $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X) + i\overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$ pour $m \neq n$ du théorème fondamental donne alors $f(0) = a_0 = 0$ sous les hypothèses de i), iii), iv) et vi) ; elle donne aussi, pour tout u de norme 1 et $m \neq n$, $f^{(m)}(0) \cdot u = m! a_m = 0$ sous les hypothèses de vii). Dans ce dernier cas les termes du développement de Taylor de f en 0 sont nuls en degré différent de n et f se réduit donc à son terme de degré n.

La relation $a_m \in \overrightarrow{F_{\mathbf{C}}}(a_n, X)$ pour $m \geq 2n + 1$ du théorème fondamental donne encore, pour tout u de norme 1, $f^{(m)}(0) \cdot u = m! a_m = 0$ sous les hypothèses de ii) et v). Par suite les termes du développement de Taylor de f en 0 sont nuls en degré strictement supérieur à $2n$, f est bien un polynôme de degré au plus $2n$.

Enfin la relation $a_0 + a_{2n} \in \overrightarrow{F_{\mathbf{R}}}(a_n, X)$ jointe à $a_0 = 0$ fournit $f^{(2n)}(0) \cdot u = (2n)! a_{2n} = 0$ sous les hypothèses de iii) et vi). Il s'ensuit que le terme degré $2n$ de f est nul. Sous chacune de ces hypothèses f est donc un polynôme de degré au plus $2n - 1$ à terme constant nul. Sous l'hypothèse iii), on a $n = 1$ et donc f est linéaire.

3.3. *Points fixes d'applications holomorphes.* Les énoncés suivants ont été prouvés par E. Vesentini ([Ve1, Ve2, Ve3]) à l'aide de la considération des géodésiques complexes ; nous les déduisons ici du théorème fondamental.

PROPOSITION 3.8. *Soient E un espace de Banach de boule unité B_E et f une application holomorphe de E dans E telle que $f(0) = 0$. Soit u un point* **C***-extrémal de* $\overline{B_E}$ *; si $f(\lambda u) = \lambda u$ pour un λ non nul de Δ ou si $f'(0) \cdot u = u$ alors, pour tout z de Δ, on a $f(zu) = zu$ et donc $f'(0) \cdot u = u$.*

PREUVE. L'application $z \longmapsto f(zu)$ est holomorphe sur Δ, à valeurs dans B_E. Comme elle s'annule en 0 on peut écrire $f(zu) = zg(z)$ avec g holomorphe. Pour $0 < r < 1$ et $|z| = r$ on a $\|g(z)\| < 1/r$; le principe du maximum assure alors que c'est encore valable pour $|z| \leq r$ et, faisant tendre r vers 1, on obtient $\|g(z)\| \leq 1$. L'hypothèse assure que $g(\lambda)$ ou $g(0)$ vaut u qui est **C**-extrémal dans $\overline{B_E}$; le corollaire 3.3 assure que $g(z)$ est constamment égal à u et donc $\forall z \in \Delta \quad f(zu) = zu$.

THÉORÈME 3.9. *Sous les hypothèses de la proposition précédente notons* $\operatorname{Fix} f$ *l'ensemble des points fixes de f et F le noyau de* $f'(0) - \mathrm{Id}$. *Supposons que tous les vecteurs de norme 1 de F soient* **C***-extrémaux dans* $\overline{B_E}$*, on a alors :*

i) $F \cap B_E \subset \operatorname{Fix} f$.

ii) Si F est réflexif ou si tous les vecteurs de norme 1 de E sont **C***-extrémaux dans* $\overline{B_E}$ *alors* $F \cap B_E = \operatorname{Fix} f$.

PREUVE. Le point i) est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Si l'on suppose E réflexif on sait (*cf.* [MV1, MV2]) que $\operatorname{Fix} f$ est une sous-variété connexe de B_E dont l'espace tangent en 0 est F. Il s'ensuit que $F \cap B_E$ est une sous-variété d'intérieur non vide de $\operatorname{Fix} f$, ce qui implique l'égalité par connexité et prouve ii) dans ce cas.

Supposons maintenant que tous les vecteurs de norme 1 de E sont **C**-extrémaux dans $\overline{B_E}$. Alors, pour v non nul dans $\operatorname{Fix} f$, on peut appliquer la proposition précédente avec $u = v/\|v\|$ et $\lambda = \|v\|$. On a alors $u \in F$ et par suite $v \in F$. L'appartenance étant évidente pour $v = 0$, il vient $\operatorname{Fix} f \subset F \cap B_E$ et l'égalité découle de i).

Dans le théorème précédent les hypothèses introduites dans ii) sont effectivement utiles comme le montre l'exemple suivant.

Prenons pour E l'espace c_0 et définissons f par $f(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \big(x_0, x_0(2x_0 - 1)/3, x_1, x_2, \ldots\big)$. On a $f'(0) \cdot (u_0, u_1, u_2, \ldots) = (u_0, -u_0/3, u_1, u_2, \ldots)$ et donc $F = 0$. Les hypothèses du théorème sont donc vérifiées. Cependant $\operatorname{Fix} f$ n'est pas réduit à 0 puisqu'il contient $x = (1/2, 0, 0, 0, \ldots)$.

4. **Remarques.**

4.1. Avec les notations et hypothèses du théorème 3.1, cet énoncé assure que, pour a et b dans V il existe ε tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C} \quad \|\lambda\| < \varepsilon \Rightarrow f(a) + \lambda\big(f(b) - f(a)\big) \in X$. Il est en fait possible d'expliciter un tel ε en terme de distance de Carathéodory et de donner ainsi une nouvelle preuve du théorème.

Plus précisément, pour a et b dans V, notons $c_V(a,b)$ le sup des $|\varphi(b)|$ pour φ holomorphe de V dans Δ tel que $\varphi(a) = 0$. Alors c_V est une semi-distance sur V ($c(a,b)$ peut s'annuler pour $a \neq b$) qui est l'une des variantes de la distance de Carathéodory. Ses propriétés fondamentales sont le fait que les fonctions holomorphes sont contractantes pour cette distance et que l'on a toujours $c_V(a,b) < 1$ si V est connexe. On a alors

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.1, pour λ complexe avec $|\lambda| \leq \frac{1-c_V(a,b)}{2c_V(a,b)}$, on a $f(a) + \lambda\big(f(b) - f(a)\big) \in X$.*

PREUVE. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit, avec λ vérifiant les hypothèses du théorème, de prouver $\operatorname{Re}\alpha\Big(f(a)+\lambda\big(f(b)-f(a)\big)\Big) < 1$ pour α forme linéaire telle que $\operatorname{Re}\alpha < 1$ sur X.

Notons alors P le demi-plan formé par les complexes z tels que $\operatorname{Re}(z) < 1$. En posant $\varphi = \alpha \circ f$ on voit que tout revient à prouver, pour φ holomorphe de V dans P, $\operatorname{Re}\big[\varphi(a) + \lambda\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)\big] < 1$. En posant $u = \varphi(a)$ et $v = \varphi(b)$, il s'agit de prouver $\operatorname{Re}\big(u + \lambda(v-u)\big) < 1$ sachant que l'on a u et v dans P avec $c_P(u,v) \leq c = c_V(a,b)$ (d'après les propriétés de la distance de Carathéodory) et $|\lambda| \leq \frac{1-c}{2c}$. On vérifie aisément $c_P(u,v) = \left|\frac{u-v}{u+\bar{v}-2}\right|$; on a donc $c \geq c_P(u,v) \geq \frac{|u-v|}{(u+\bar{u}-2)+|\bar{v}-u|}$, et $|\lambda| \leq \frac{1-c}{2c} \leq \frac{|u+\bar{u}-2|}{2|u-v|}$. Cela prouve bien $\operatorname{Re}\big(u+\lambda(v-u)\big) \leq \operatorname{Re}(u) + \frac{u+\bar{u}-2}{2|u-v|}|v-u| = 2\operatorname{Re}(u) - 1 < 1$.

4.2. Les énoncés précédents ont considéré des applications à valeurs dans des espaces de Banach, en fait il est facile de les généraliser, après quelques aménagements, au cas d'applications à valeurs dans un espace localement convexe séparé et séquentiellement complet.

RÉFÉRENCES

[D] S. Dineen, *The Schwarz Lemma*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[Ha] L. A. Harris, *Schwarz lemma in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. **62**(1969), 1014–1017.

[He] M. Hervé, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même*, J. Math. Pures Appl. (9)**42**(1963), 117–147.

[MV1] P. Mazet et J.-P. Vigué, *Points fixes d'une application holomorphe d'un domaine borné dans lui-même*, Acta Math. **166**(1991), 1–26.

[MV2] ______, *Convexité de la distance de Carathéodory et points fixes d'applications holomorphes*, Bull. Sci. Math. (2)**116**(1992), 285–305.

[Re] A. Renaud, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule de dimension infinie dans une autre*, Bull. Sci. Math. (2)**97**(1973), 129–159.

[Ru] W. Rudin, *Function theory on the unit ball of C^n*, Springer-Verlag, NewYork, 1980.

[TW] E. Thorp and R. Whitley, *The strong maximum modulus theorem for analytic function into Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **18**(1967), 640–646.

[Ve1] E. Vesentini, *Complex geodesics*, Compositio Math. **44**(1981), 375–394.

[Ve2] ______, *Complex geodesics and holomorphic mappings*, Sympos. Math. **26**(1982), 211–230.

[Ve3] ______, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*. In: Spectral theory, Banach Center Publications, Warsaw, **8**(1982), 493–512.

[Vi1] J.-P. Vigué, *Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes*, Indiana Univ. Math. J. **40**(1991), 293–304.

[Vi2] ______, *Le lemme de Schwarz et la caractérisation des automorphismes analytiques*, Colloque d'analyse complexe et géométrie, Astérisque, **217**(1993), 241–249.

[Vi3] ______, *Un lemme de Schwarz pour les boules unités ouvertes*, Canad. Math. Bull., à paraître.

C.N.R.S. U.M.R. 9994
Institut de Mathematiques
Université P. et M. Curie
Case Courrier 247
4 Place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
France
e-mail: mazet@mathp6.jussieu.fr