Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2006) **5**(4), 629–698 © Cambridge University Press 629
doi:10.1017/S147474800600003X Printed in the United Kingdom

SUR LES DÉFORMATIONS p-ADIQUES DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES

CHRISTOPHER SKINNER[1] ET ERIC URBAN[2]

[1]*Department of Mathematics, University of Michigan, 525 East University Avenue, Ann Arbor, MI 48109-1109, USA* (cskinner@umich.edu)

[2]*Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA* (urban@math.columbia.edu)

(Reçu le 13 May 2004 ; accepté le 8 February 2005)

Résumé Par une méthode entièrement nouvelle utilisant les déformations p-adiques de pentes positives de représentations automorphes pour $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, nous prouvons que le p-groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(k))$ associé à une forme modulaire f de poids $2k$ et ordinaire en p est infini si l'ordre d'annulation à l'entier k de la fonction L de f est impair.

Abstract By an entirely new method that makes use of p-adic deformations of automorphic representations of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, we prove that the p-adic Selmer group $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(k))$ associated to a modular form f of weight $2k$ that is ordinary at p is infinite if the order of vanishing at k of the L-function of f is odd.

Mots clés : formes modulaires p-adiques ; représentations galoisiennes ; groupes de Selmer ; fonctions L

Keywords: p-adic modular forms; Galois representations; Selmer groups; L-functions

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 11F80; 11F33; 11F67; 11F85; 11F55; 11F46

Table de matières

Introduction

Dans cet article, nous donnons une nouvelle application de la théorie des familles p-adiques de formes modulaires à la construction d'extensions de représentations galoisiennes. Le fait que des congruences entre formes modulaires fournissent de telles extensions est maintenant un phénomène bien connu. Ribet a appliqué ce principe pour la première fois en 1976 en montrant la réciproque du théorème de Herbrand [**Ri**]. La méthode a ensuite été développée par Mazur et Wiles [**MW**] et Wiles [**Wi1**] pour démontrer la conjecture principale d'Iwasawa.

Notre approche qui est basée sur ce même principe comporte deux éléments relativement nouveaux par rapport aux travaux évoqués ci-dessus. Le premier est que nous construisons des extensions de représentations galoisiennes sur un corps de caractéristique zéro et non avec des coefficients de torsion. C'est essentiellement parce qu'on travaille avec des familles p-adiques de formes modulaires au sens de Hida–Coleman. Nous partons d'une certaine forme modulaire et nous en trouvons une déformation p-adique *non ordinaire*. Cette dernière pouvant être vue comme un ensemble compatible de congruences modulo des puissances de p arbitrairement grandes. Cependant, l'utilisation de la théorie des familles p-adiques de formes modulaires ne consiste pas simplement en le passage de l'étude d'une congruence isolée à celui de familles de congruences comme c'est le cas pour les travaux de Mazur–Wiles vis à vis du théorème de Ribet. Le deuxième point est que l'existence de la forme modulaire de départ et par conséquent de la famille p-adique est controlé par l'annulation (avec un ordre impair) d'une valeur spéciale de fonction L au lieu de ce que dans l'approche originale de Ribet, c'est la divisibilité par p d'une telle valeur spéciale qui entraînait l'existence d'une congruence entre une forme cuspidale et une certaine série d'Eisenstein.

Avant d'aller plus loin dans cette introduction, nous énonçons le résultat principal de cet article. Soit $f=\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ une forme modulaire elliptique cuspidale nouvelle de poids $k=2m$ de caractère trivial et conducteur N. Sa fonction $L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ satisfait une équation fonctionnelle de la forme

$$L(f,s)=\varepsilon_f(s)L(f,k-s).$$

On pose $\varepsilon_f=\varepsilon_f(\frac{1}{2}k)=\pm 1$. On fixe p un nombre premier et on note V_f la représentation galoisienne p-adique associée à f construite par Eichler–Shimura et Deligne. Elle est de poids motivique $k-1$. Bloch et Kato ont défini un groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q},V_f(m))\subset H^1(\mathbb{Q},V_f(m))$ classifiant les extensions ayant « bonne réduction » partout. Une généralisation de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer par Bloch et Kato pour le motif associé à f peut s'écrire comme suit.

Conjecture (Bloch–Kato). *L'ordre d'annulation de $L(f,s)$ à l'entier $s = m$ est égale à la dimension du groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(m))$.*

Dans cet article, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème A. *On suppose que f est ordinaire en un nombre premier impair p (i.e. a_p est une unité p-adique). Alors si $\varepsilon_f = -1$. On a*

$$\dim H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(m)) \geqslant 1.$$

Grâce aux travaux de Wiles, Taylor–Wiles et leurs développements [**Wi2**], [**TW**] et [**BCDT**], on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire B. *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ ayant réduction ordinaire (bonne ou semi-stable) en un nombre premier impair p. Alors si $L(E,s)$ s'annule avec un ordre impair en $s = 1$, le groupe de Selmer $\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}}(E)[p^\infty]$ de E est infini.*

Remarque. Ce résultat est un théorème de Greenberg [**Gr**] pour les courbes elliptiques à multiplication complexe. C'est aussi une conséquence de la conjecture de parité prouvée par Nekovář [**Ne**] lorsque E a bonne réduction ordinaire en p.

Pour démontrer ces énoncés, nous utilisons la théorie des familles p-adiques de formes modulaires de Siegel pour construire des congruences entre des formes stables et une certaine forme dite de Saito–Kurokawa $\mathrm{SK}_p(f)$ minimalement ramifiée associée à f qui existe grâce à l'hypothèse faite sur le signe (i.e. $\varepsilon_f = -1$). La representation galoisienne associée à $\mathrm{SK}(f)$ est de semi-simplification isomorphe à $V_f \oplus \mathbb{Q}_p(-m) \oplus \mathbb{Q}_p(1-m)$. L'existence de congruences de $\mathrm{SK}(f)$ avec certaines formes stables nous permet de construire une classe d'extension dans $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}_p(-m), V_f)$. Il n'est pas automatique d'obtenir une telle extension à partir des congruences sus-évoquées, il convient de controler la ramification en p essentiellement. Nous utilisons crucialement un résultat de Kisin [**Ki**] pour ce point.

La construction de familles p-adiques de formes modulaires de Siegel occupe donc une bonne moitié de cet article. Dans cette théorie, certains opérateurs de Hecke en p joue un role fondamental. Pour le groupe GSp_4, il s'agit des opérateurs associés aux classes doubles

$$U_0 = I \operatorname{diag}(1,1,p,p) I \quad \text{et} \quad U_1 = I \operatorname{diag}(1,p,p^2,p) I.$$

Cette théorie p-adique était déjà établie par Hida [**Hi**] dans le cas ordinaire (i.e. lorsque les deux opérateurs opèrent de façon inversible (après une adéquate normalisation)). Malheureusement, bien que f soit ordinaire (ainsi que sa représentation galoisienne), $\mathrm{SK}(f)$ n'admet pas de p-stabilisation (i.e. forme invariante par l'Iwahori et propre pour les opérateurs de Hecke U_0 et U_1 pour des normalisations canoniques) qui soit ordinaire. Cela résulte du fait que la representation locale sphérique en p associé à $\mathrm{SK}(f)$ (si par exemple p ne divise pas N) n'est pas égale à toute l'induite d'un caractère non ramifié. Par contre, il existe une p-stabilisation semi-ordinaire, c'est à dire pour laquelle la valeur propre de U_0 est une unité p-adique. En fait, il s'avère que cette condition est suffisante pour adapter la théorie ordinaire. Comme l'opérateur U_0 est celui donné par la trace de l'opérateur « Frobenius » sur la cohomologie du lieu ordinaire de la variété de Siegel, il n'y a pas besoin d'utiliser la surconvergence du sous-groupe canonique. On montre alors que sur l'espace des formes semi-ordinaire, l'opérateur U_1 est compact ce qui permet d'utiliser la théorie de Riesz–Fredholm à la Serre–Coleman.

En même temps que ce travail a été réalisé Abbès et Mokrane ont montré l'existence de la surconvergence du sous-groupe canonique en toute généralité. Il est vraisemblable que l'on puisse appliquer leur théorie pour traiter le cas non-ordinaire au moins pour construire des familles à une variable de formes de Siegel en utilisant un relèvement à la caractéristique zéro d'une puissance de l'invariant de Hasse scalaire. Par contre le cas de deux variables semble plus difficile car il n'existe pas de relèvement en caractéristique zéro des invariants de Hasse vectoriels. Ash et Stevens ont développé une téchnique cohomologique pour construire des espaces de Banach p-adique interpolant la cohomologie des systèmes locaux pour $\mathrm{GL}(n)$. Leur méthode ne permet pas de construire des familles pour $\mathrm{GL}(n)$ à cause de la présence de torsion dans la cohomologie. En revanche, leur téchnique s'adapte sans difficulté aux groupes symplectiques ou unitaires pour lesquels la présence de torsion est moins problématique.

L'idée d'utiliser les formes de Saito–Kurokawa (et même les formes non tempérées en général) pour construire de telles extensions est originellement dûe à Harder dans [**H**] dans lequel il ambitionne de construire des motifs mixtes dont la realisation p-adique est du type de ce que nous construisons. Dans sa thèse [**Be**], Bellaiche a également étudié indépendament des congruences entre une forme modulaire non tempérée pour un groupe unitaire à trois variables et des formes stables par la méthode d'élévation du niveau. Même si nous ne nous sommes pas inspiré de son travail, l'exclusion de certaines extensions dans son travail se retrouve dans le notre et nous a certainement influencé. Enfin, en s'inspirant de notre méthode et du travail de cette thèse, Bellaiche et Chenevier ont redonné dans [**BC**] une démonstration d'un cas particulier de notre théoreme pour certaines formes CM de poids au moins 4.

La preuve du résultat principal de cet article a été annoncée et décrite dans [**SU**].

Notations

On note respectivement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}_\ell$ l'anneau des entiers naturels, les corps des nombres rationels, réels, complexes et ℓ-adiques pour tout nombre premier ℓ. On note $\hat{\mathbb{Z}}$ la complétion profinie de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finies et $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$. Pour tout entier N non nul, on pose également

$$\mathbb{A}_N = \prod_{\ell | N} \mathbb{Q}_\ell, \qquad \mathbb{A}_f^N = {\bigotimes_{\ell \nmid N\cdot\infty}}' \mathbb{Q}_\ell, \qquad \hat{\mathbb{Z}}_N = \prod_{\ell | N} \mathbb{Z}_\ell.$$

On note $|\cdot|_\ell$ la norme ℓ-adique normalisée par $|\ell|_\ell = \ell^{-1}$ et $|\cdot|_\mathbb{A}$ la norme adélique induite. On note parfois ν le caractère de $\mathbb{A}^\times$ défini par $\nu(a) = |a|_\mathbb{A}$.

Pour g un entier positif, on note GSp_{2g} le groupe des similitudes symplectiques de rang $2g$:

$$\mathrm{GSp}_{2g} = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g};\ {}^{\mathrm{t}}\gamma \iota_g \gamma = \nu_g(\gamma)\iota_g \right\}$$

avec

$$\iota_g = \begin{pmatrix} 0_g & 1_g \\ -1_g & 0_g \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}\,.$$

Le caractère ν_g de GSp_{2g} à valeurs dans le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ est appelé le multiplicateur de GSp_{2g}. On note $G^1 = \mathrm{Sp}_{2g} = \mathrm{Ker}(\nu_g)$ le sous-groupe dérivé de GSp_{2g}.

Pour tout $\gamma \in \mathrm{GSp}_{2g}$, on pose $\gamma^\vee = \iota_g \gamma \iota_g$; $\gamma \mapsto \gamma^\vee$ est clairement une involution.

Soient $n_1, \ldots, n_r, m$ des entiers positifs et $(x_1, \ldots, x_r, \gamma) \in \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r} \times \mathrm{GSp}_{2m}$, on pose

$$[x_1, \ldots, x_r; g] := \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r, \gamma, {}^{\mathrm{t}}x_1^{-1}\nu(\gamma), \ldots, {}^{\mathrm{t}}x_1^{-1}\nu(\gamma)) \in \mathrm{GSp}_{2g}$$

avec $g = n_1 + \cdots + n_r + m$.

On précise nos notations maintenant pour $g = 2$. On note $G = \mathrm{GSp}_4$ et $Z \subset G$ son centre. On désigne par B le sous-groupe de Borel standard de G constitué par les matrices γ telles que $c_\gamma = 0$ et a_γ soit triangulaire supérieure. On note B^+ son radical unipotent et $T(\subset B)$ le tore déployé maximal de G constitué des matrices diagonales.

Soit P le parabolique de Siegel standard et P^+ son radical unipotent. On plonge $H = \mathrm{GL}_2$ dans $P \subset G$ via $g \mapsto \mathrm{diag}(g, {}^{\mathrm{t}}g^{-1})$ et pour tout sous-groupe $X \subset G$, on pose $X_H = X \cap H$; par exemple B_H est le sous-groupe de Borel standard de $H = \mathrm{GL}_2$ et B_H^+ son radical unipotent.

Les notations introduites précédement pour g quelconque restent valable pour $G = \mathrm{GSp}_4$. Par exemple, pour tout $a, b, c \in \mathbb{G}_m$, on a $[a, b; c] := \mathrm{diag}(a, b, ca^{-1}, cb^{-1}) \in T(A)$.

Soit R^+ le système de racines positives pour la paire (B, T). On a

$$R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$$

avec α_1 la racine simple courte et α_2 la racine simple longue, i.e. $\alpha_1([a, b; c]) = ab^{-1}$ et $\alpha_2([a, b; c]) = b^2c^{-1}$. On note W le groupe de Weyl de G pour le tore T. Il est d'ordre 8 et engendré par les reflexions s_1 et s_2 associées respectivements aux racines simples α_1 et α_2.

En général, K désignera un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$. Il sera dit de niveau N un entier positif, s'il contient le sous-groupe

$$K_N = \{\gamma \in G(\hat{\mathbb{Z}}) \mid \gamma \,(\mathrm{mod}\, N) = 1_4\}.$$

Pour tout premier ℓ, on considère également le sous-groupe paramodulaire de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ défini par

$$\Delta_\ell := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_\ell);\ a_3, c_1, c_2, c_3, d_2 \in \ell.\mathbb{Z}_\ell \ \text{ et } \ b_1 \in \ell^{-1}\mathbb{Z}_\ell \right\}.$$

Tout au long du texte, p est un nombre premier fixé. On désignera souvent par K_0 un sous-groupe ouvert compact de niveau premier à p (i.e. contenu dans $G(\mathbb{A}_f^p)$). Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note I_r le sous-groupe d'Iwahori standard de $G(\mathbb{Q}_p)$ défini par

$$I_r := \{\gamma \in G(\mathbb{Z}_p) \mid \gamma \bmod p^r \in B(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})\}$$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

et son équivalent dans $H(\mathbb{Q}_p)$:

$$I_{H,r} := I_r \cap H(\mathbb{Q}_p).$$

Pour $r = 1$, on notera simplement $I = I_1$ et $I_H = I_{H,1}$.

Pour tout algèbre de Tate A sur un corps p-adique, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'affinoide défini par le spectre maximal de A. Les affinoides et les espaces rigides analytiques seront en général désigné par des lettres gothiques $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{X}$, etc. On notera $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$ l'anneau des fonctions régulière sur l'espace rigide $\mathfrak{U}$ sur lequel on prendra la norme *sup*. Lorsque $\mathfrak{U}$ est un affinoide, on notera $\mathcal{O}^\circ(\mathfrak{U})$ le réseau de $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$ constitué des fonctions de norme inférieure ou égale à 1. Pour un espace rigide quelconque $\mathfrak{X}$, on notera $\Lambda_{\mathfrak{X}}$ la limite projective des $\mathcal{O}^\circ(\mathfrak{U})$ lorsque $\mathfrak{U}$ parcourt l'ensemble des sous-domaine affinoide de $\mathfrak{X}$. Noter que c'est en général (lorsque $\mathfrak{X}$ n'est pas un affinoide) un sous-anneau strict de celui des fonctions rigides analytiques de $\mathfrak{X}$ bornée par 1.

Pour toute représentation ρ, on notera $\rho^\vee$ sa contragrédiente.

1. Formes modulaires de Siegel

1.1. Point de vue modulaire

1.1.1. Soit K un sous-groupe ouvert compact de niveau N avec $N > 3$. Sous cette hypothèse, il existe un schéma S_K, dit *schéma de Siegel*, lisse et de type fini sur $\mathbb{Z}[1/N]$, construit par Mumford [**Mu**] et dont nous rappelons ci-après le problème de module qu'il représente. Pour tout $\mathbb{Z}[1/N]$-schéma T, on considère les triplets $(A, \lambda, \phi)_{/T}$ tels que :

(i) $A_{/T}$ est un schéma abélien sur T de dimension relative 2,

(ii) λ est une polarisation principale $\lambda : A \to A^{\mathrm{t}}$,

(iii) ϕ est une K-structure de niveau ϕ, c'est à dire un isomorphisme symplectique entre

$$\phi : TA_N = \varprojlim_n A[N^n] \cong \hat{\mathbb{Z}}_N^2(1) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_N^2(1)$$

défini modulo K ; la structure symplectique de TA_N est ici donné par l'accouplement de Weil et la polarisation principale de A tandis que la matrice de celle de $\hat{\mathbb{Z}}_N^2(1) \oplus \hat{\mathbb{Z}}_N^2$ dans la base canonique est donnée par ι_2.

Deux triplets $(A, \lambda, \phi)_{/T}$ et $(A', \lambda', \phi')_{/T}$ sont dits équivalents et on note $(A, \lambda, \phi)_{/T} \sim (A', \lambda', \phi')_{/T}$ s'il existe un T-isomorphisme entre les T-schéma abéliens $f : A_{/T} \to A'_{/T}$ tel que $f^*\lambda' = \lambda$ et $f^*\phi' = \phi$. Alors S_K représente le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[1/N] - \mathrm{Sch} &\to \mathrm{Ens} \\ T &\mapsto \{(A, \lambda, \phi)_{/T}\}/\!\sim. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

1.1.2. *Description de $S_{K/\mathbb{C}}$*

Rappelons la définition du demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_2$,

$$\mathcal{H}_2 := \{z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}z = z,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Soit $G(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe de $G(\mathbb{R})$ constitué par les éléments γ tels que $\nu_G(\gamma) > 0$. Il opère sur $\mathcal{H}_2$ par la formule bien connue :

$$\gamma.z := (a_\gamma z + b_\gamma)(c_\gamma z + d_\gamma)^{-1}$$

pour tout $z \in \mathcal{H}_2$ et $\gamma \in G(\mathbb{R})^+$. Pour tout $z \in \mathcal{H}_2$ et $\gamma \in G(\mathbb{R})^+$, on rappelle également le facteur d'automorphie à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$j(\gamma, z) := c_\gamma z + d_\gamma.$$

Sur $\mathbb{C}$, la variété de Siegel admet la description suivante. Fixons un ensemble fini d'éléments $g_1, \dots, g_l \in G(\mathbb{A}_f)$, tel que

$$G(\mathbb{A}) = \bigsqcup_{i=1}^{l} G(\mathbb{Q})g_i.K.G^+(\mathbb{R})$$

et, pour tout $i = 1, \dots, l$, posons $\Gamma_{K,i} := G(\mathbb{Q})^+ \cap g_i^{-1}.K.g_i$. Alors, on a un isomorphisme canonique :

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_\infty = \bigsqcup_{i=1}^{l} \Gamma_{K,i}\backslash\mathcal{H}_2.$$

1.1.3. A la suite des travaux de Mumford sur les compactifications toroidales, Chai et Faltings ont construit des compactifications arithmétiques du schéma de Siegel [**CF**]. Dans cette section et la suivante, nous fixons $\bar{S} = \bar{S}_K$ une compactification toroidale lisse de S_K sur $\mathbb{Z}[1/N]$. Soit A une $\mathbb{Z}[1/N]$-algèbre. Pour tout schéma X sur $\bar{S}_{/A}$, on notera D_X l'image reciproque par le morphisme $X \to \bar{S}_{/A}$ du diviseur à l'infini $D = \bar{S}\backslash S$.

La construction de $\bar{S}_K$ fournit en même temps un schéma semi-abélien $\mathcal{G}$ sur $\bar{S}_K$ dont l'image inverse au dessus de S_K est la variété abélienne universelle définie par le problème de module représenté par S_K.

Soient $\pi : \mathcal{G} \to \bar{S}_K$ le morphisme structural du schéma semi-abélien $\mathcal{G}$ et $e : \bar{S}_K \to \mathcal{G}$ la section *unité* de π. On définit le faisceau des différentiel relatives :

$$\underline{\omega} := e^*\Omega_{\mathcal{G}/\bar{S}_K}.$$

C'est un faisceau cohérent localement libre de rang 2 sur $\bar{S}_K$. La compactification minimale de S est définie par

$$S^* = \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(\bar{S}, \det(\underline{\omega})^k)\biggr).$$

Le faisceau inversible $\det(\underline{\omega})$ s'étend par construction en un faisceau inversible de S^*. Ce dernier est ample (cf. [**CF**]).

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

1.1.4. *Fibrés automorphes sur la variété de Siegel*

Pour toute paire d'entiers positifs ou nuls $\underline{k} = (k_1, k_2)$ avec $k_1 \geqslant k_2$, soit $L_{\underline{k}}(R)$ l'espace des polynômes homogènes de degré $k_1 - k_2$ de deux variables (x, y) à coefficients dans un anneau unitaire R. On le munit de l'action à gauche de $H = \mathrm{GL}_2$ définie par :

$$(\rho_{\underline{k}}(h).P)(x, y) = (h.P)(x, y) := P((x, y).h) \det(h)^{k_2}$$

pour tout $h \in H$ et $P(x, y)$ homogène de degré $k_1 - k_2$. On vérifie facilement que c'est la représentation de plus haut poids $\chi_{\underline{k}}$ pour la paire (B_H, T_H) avec $P(X, Y) = X^{k_1 - k_2}$ comme base des vecteurs de plus haut poids et

$$\chi_{\underline{k}}\left(\begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) = t_1^{k_1} t_2^{k_2}.$$

On associe à cette représentation $\rho_{\underline{k}}$, le faisceau automorphe

$$\omega_{\underline{k}} := \mathrm{Sym}^{k_1 - k_2}(\underline{\omega}) \otimes \overset{k_2}{\det}(\underline{\omega}).$$

L'espace des formes automorphes de Siegel de poids $\underline{k}$ est par définition l'espace des sections globales de $\omega_{\underline{k}/\mathbb{C}}$. On a une structure rationnelle et même entière sur cet espace. Plus précisément, pour toute $\mathbb{Z}[1/N]$-algèbre R, on pose

$$M_{\underline{k}}(K, R) := H^0(\bar{S}_K, \omega_{\underline{k}} \otimes R) = H^0(S_K, \omega_{\underline{k}} \otimes R).$$

Autrement dit, par la seconde égalité connue sous le nom de principe de Koecher [**CF**, V.1.5], une forme modulaire de Siegel f est une règle fonctorielle assignant à tout quadruplet $(A_{/S}, \lambda, \psi, \omega)$ avec ω une base de $H^0(A, \Omega_{A/S})$, un vecteur $f(A_{/S}, \lambda, \psi, \omega) \in L_{\underline{k}}(\Gamma(\mathcal{O}_S))$ telle que

$$f(A_{/S}, \lambda, \psi, \omega.h^{-1}) = \rho_{\underline{k}}(h).f(A_{/S}, \lambda, \psi, \omega)$$

pour tout $h \in \mathrm{GL}_2(\Gamma(\mathcal{O}_S))$.

Soit D le diviseur à l'infini de $\bar{S}$, on pose $\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}} = \omega_{\underline{k}}(-D)$. L'espace des formes cuspidales est défini par $S_{\underline{k}}(K, R) := H^0(\bar{S}_K, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}} \otimes R)$.

1.1.5. Sur $\mathbb{C}$, on retrouve aisément la définition classique des formes modulaires de Siegel holomorphes. Pour une fonction $f : \mathcal{H}_2 \to L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ et $\gamma \in G(\mathbb{R})$ tel que $\nu(\gamma) > 0$, on pose

$$f|_{\underline{k}}\gamma(z) := \rho_{\underline{k}}(\nu(\gamma).j(\gamma, z)^{-1}).f(\gamma.z).$$

Pour tout sous-groupe de congruences Γ de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$, on note $M_{\underline{k}}(\Gamma; \mathbb{C})$ l'espace des fonctions holomorphes f à valeurs dans $L_{\underline{k}}$ vérifiant $f|_{\underline{k}}\gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. En fixant une trivialisation du *pull-back* de $\omega_{\underline{k}}$ sur $\mathcal{H}_2$, on vérifie facilement que :

$$H^0(S_K, \omega_{\underline{k}/\mathbb{C}}) = M_{\underline{k}}(K, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_{\underline{k}}(\Gamma_{K,i}, \mathbb{C}).$$

Lorsque $k_1 = k_2 = k$, il s'agit des formes modulaires de Siegel scalaires de poids k. On a un isomorphisme analogue pour l'espace des formes cuspidales.

1.1.6. *Opérateurs de Hecke*

Soit $\xi \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}) \cap M_4(\mathbb{Z})$ tel que $\nu(\xi)$ soit premier à N. Pour tout triplet $(A_{/S}, \lambda, \phi)$ comme au (1.1.1), il existe un triplet $(A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \phi_\xi)$ et une unique isogénie $\iota_\xi : A \to A_\xi$ telle que $\iota_\xi^{\mathrm{t}} \circ \lambda = \lambda_\xi \circ \iota_\xi$ et $\phi_\xi \circ \iota_\xi = \xi^\vee \circ \phi$. Soit $K' \subset K_\xi = \xi^\vee K (\xi^\vee)^{-1}$ et $\varphi_\xi : S_K \to S_{K'}$ le morphisme défini au niveau des foncteurs par $(A_{/S}, \lambda, \phi) \mapsto (A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \phi_\xi)$. On note ι_ξ l'isogénie universelle de type $\xi^\vee$ sur

$$S_K : \mathcal{A}_K \to \varphi_\xi^* \mathcal{A}_K = \mathcal{A}'_K \times_{S_{K'}} S_K.$$

Pour la description de A_ξ, le lecteur peut par exemple consulter [**CF**, VII.3]. Par ailleurs, il résulte des propriétés de fonctorialité des compactifications toroidales [**Ha**] que ces morphismes se prolongent à certaines compactifications toroidales* et aux variétés semi-abéliennes correspondantes $\varphi_\xi : \bar{S}_K \to \bar{S}_{K_\xi}$ et $\mathcal{G}_{\bar{S}_K} \to \varphi_\xi^* \mathcal{G}_{\bar{S}_{K_\xi}}$ que l'on notera encore ι_ξ. On en déduit un morphisme de faisceaux cohérents $\iota_\xi^* : \underline{\omega}_{/\bar{S}_{K'}} \to \varphi_{\xi,*} \underline{\omega}_{/\bar{S}_K}$. Pour tout quadruplet $(A, \lambda, \phi, \omega)$ avec ω une base de $H^0(A, \Omega_{A/S})$, soit $\omega_\xi \in H^0(A, \Omega_{A_\xi/S})$ telle que $\iota_\xi^* \omega_\xi = \omega$. Pour tout $f \in H^0(\bar{S}_{K_\xi}, \omega_{\underline{k}})$, $f \mid \xi$ est la forme modulaire définie par

$$(f \mid \xi)(A_{/S}, \lambda, \phi, \omega) = f(A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \phi_\xi, \omega_\xi).$$

Sur $\mathbb{C}$, on retrouve la formule classique du § 1.1.5.

On considère la correspondance des isogénies de type ξ définie par $T_\xi = T_{\xi,K} : S_{K \cap K_\xi} \to S_K \times S_K$ induit par $(\pi_{K, K\cap K_\xi}, \pi_{K, K\cap K_{\xi^\vee}} \circ \varphi_{\xi^\vee})$ où $\pi_{K,K'}$ avec $K \supset K'$ est la projection canonique $S_{K'} \to S_K$. Notons respectivement p_1 et p_2 les projections de $c_{\xi,K}$ sur les premier et deuxième facteurs de $S_K \times S_K$. La correspondance opère sur les formes modulaire de Siegel via la composition des flèches suivantes :

$$H^0(S_K, \omega_{\underline{k}}) \xrightarrow{p_1^*} H^0(S_{K\cap K_\xi}, \omega_{\underline{k}}) \xrightarrow{(\iota_{\xi^\vee}^{\mathrm{t}})^*} H^0(S_{K\cap K_\xi}, p_2^* \omega_{\underline{k}}) \xrightarrow{\mathrm{tr}(p_2^*)} H^0(S_K, \omega^k).$$

Noter que $p_2^* \omega_{\underline{k}} = \varphi_{\xi^\vee}^* \omega_{\underline{k}}$. On normalise l'action en divisant l'action précédente par $\nu(\xi)^3$. On peut décrire également l'action de T_ξ en écrivant la décomposition de la classe double $K\xi K = \coprod_i K\xi_i$. Alors pour tout $f \in H^0(\bar{S}_K, \omega_{\underline{k}})$, on a :

$$f \mid T_\xi = \nu(\xi)^{-3} \sum_i f \mid \xi_i. \tag{1.1.6.a}$$

1.1.7. *Algèbre de Hecke*

On note $\mathcal{R}_N$ l'algèbre de Hecke abstraite engendrée sur $\mathbb{Z}$ par les opérateurs T_ξ avec $\nu(\xi)$ premier à N. Pour tout nombre premier q ne divisant pas N, on pose

$$\delta_0(q) = [1, 1; q] \quad \text{et} \quad \delta_1(q) = [1, q; q^2].$$

On considère les opérateurs $T_i(q) = T_{\delta_i(q)}$ avec $i = 0, 1$ et $S_q = T_{q.1_4}$.

* La décomposition en cônes rationnels polyhédraux correspondant à la compactification $\bar{S}_{K_\xi}$ est différente mais dépend de celle correspondant à $\bar{S}_K$.

Si F est de poids $\underline{k}$, niveau N et propre pour les opérateurs de Hecke de $\mathcal{R}_N$, on note λ_F le caractère de $\mathcal{R}_N$ tel que $F \mid T = \lambda_F(T).F$ pour tout $T \in \mathcal{R}_N$. Le centre $Z(\mathbb{A}_f^N)$ de $G(\mathbb{A}_f^N)$ est engendré par $Z(\mathbb{A}_f^N) \cap K$ et les matrices $q.1_4$ avec q premier ne divisant pas N. Il existe donc un caractère de Dirichlet ω_F d'ordre fini et de conducteur divisant N tel que*

$$\lambda_F(S_q) = d^{k_1+k_2-6}\omega_F(q)$$

pour tout q premier ne divisant pas N.

1.1.8. *Polynôme de Hecke–Andrianov et fonction L*

Pour tout $q \nmid N$, on rappelle que le polynôme de Hecke–Andrianov† est donné par la formule :

$$P_q(X) := 1 - T_0(q)X + \ell(T_1(q) + (1+q^2)S_q)X^2 - q^3T_0(q)S_q.X^3 + q^6S_q^2X^4.$$

Soit F une forme de Siegel de niveau N holomorphe de poids $\underline{k}$ et propre pour les opérateurs de Hecke de $\mathcal{R}_N$. Pour tout ensemble fini S de nombres premiers contenant les diviseurs premiers de N, on pose

$$L^S(s, F, \mathrm{spin}) := \prod_{q \notin S} \lambda_F(P_q(q^{-s}))^{-1}.$$

Cette fonction L introduite par Andrianov lorsque F est de niveau 1 converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ et admet un prolongement méromorphe au plan complexe (voir [**PS3**]). Lorsque $S = S_N$ est l'ensemble des diviseurs premiers de N, on notera parfois $L^N(s, F, \mathrm{spin})$ à la place de $L^{S_N}(s, F, \mathrm{spin})$. Cette remarque s'appliquera à toutes les fonctions L qui interviendront dans cet article.

1.2. Représentations cuspidales de $\mathbf{GSp_4}(\mathbb{A})$

Le but de cette partie est d'énoncer sous une forme appropriée quelques définitions et certains résultats locaux et globaux sur les représentations de GSp_4.

1.2.1. Pour toute représentation irréductible π des points adélique d'un groupe réductif, on note $\pi = \bigotimes_v' \pi_v$ la décomposition de π en composantes locales et on pose $\pi_f = \bigotimes_{v<\infty}' \pi_v$. On note ω_π son caractère central.

Pour tout poids $\underline{k} = (k_1, k_2)$ avec $k_1 \geqslant k_2 \geqslant 3$, on note $\pi_{\underline{k}}^H$ la représentation unitaire de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ de la série discrète holomorphe de paramètre $\underline{k}$.‡ Il s'agit de la représentation de la série discrère unitaire, holomorphe dont le K-type minimal est donné par la représentation $\rho_{\underline{k}}$ restreinte à $U(2)$. On note aussi $\pi_{\underline{k}}^W$ la représentation unitaire de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ de la série discrète générique appartenant au même L-paquet que $\pi_{\underline{k}}^H$. Dans

* La puissance $k_1 + k_2 - 6$ se calcule en regardant l'action du centre de $G(\mathbb{R})$ sur la représentation automorphe engendrée par F.

† Cette terminologie *non classique* tend à rappeller que $P_q(X)$ est l'analogue du polynôme de Hecke classique et qu'il a été découvert par Andrianov.

‡ Dans le § 1.2.3, nous rappelerons le lien de $\pi_{\underline{k}}^H$ avec le poids $\underline{k}$ de la section précédente.

ce travail, on considèrera seulement des représentations cuspidales irréductibles telles que π_∞ est dans la série discrète holomorphe ou générique.

Une représentation cuspidale $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ avec π_∞ dans la série discrète de paramètre $\underline{k}$ est dite *stable** si et seulement si $\pi^H = \pi_f \otimes \pi^H_{\underline{k}}$ et $\pi^W = \pi_f \otimes \pi^W_{\underline{k}}$ sont automorphes.

1.2.2. *Représentations locales non archimédiennes*

Soit F un corps local non archimédien et A un anneau unitaire. Dans ce paragraphe, A sera une algèbre intègre sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Pour tout groupe réductif X sur F, on note $R_A(X)$ le groupe de Grothendieck des représentations lisses admissibles définies sur A de $X(F)$. Grâce à l'hypothèse sur la caractéristique et l'intégrité de A, la théorie pour $A = \mathbb{C}$ se transporte sans difficulté à ce cadre légèrement plus général.

Rappelons quelques unes des notations de Sally–Tadić que nous utiliserons librement (cf. [**ST**]). Si ξ_1, ξ_2 et ξ_3 sont des caractères lisses de $F^\times$, on note $\xi_1 \times \xi_2$ l'image de la représentation induite lisse normalisée $\mathrm{Ind}_{B_{\mathrm{GL}_2}}^{\mathrm{GL}_2} \xi_1 \otimes \xi_2$ dans $R_A(\mathrm{GL}_2)$. Ici B_{GL_2} désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de GL_2 et $\xi_1 \otimes \xi_2$ est le caractère défini de B défini par

$$\xi_1 \otimes \xi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \right) = \xi_1(a_1)\xi_2(a_2).$$

Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ (respectivement τ) des représentations lisses admissibles de

$$\mathrm{GL}_{n_1}(F), \dots, \mathrm{GL}_{n_r}(F)$$

(respectivement de $\mathrm{GSp}_{2m}(F)$) définies sur A. On note $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r \rtimes \tau$ l'image dans $R_A(\mathrm{GSp}_{2g})$ avec $g = n_1 + \cdots + n_r + m$ de l'induction parabolique $\mathrm{Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GSp}_{2g}(F)} \sigma$ avec P le parabolique standard de GSp_{2g} de Levi isomorphe à $\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r} \times \mathrm{GSp}_{2m}$ via la flèche $(x_1, \dots, x_r, g) \mapsto [x_1, \dots, x_r; g] \in \mathrm{GSp}_{2g}$ et

$$\sigma([x_1, \dots, x_r; g]) := \sigma_1(x_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_r(x_r) \otimes \tau(g).$$

La définition s'étend par linéarité pour tout $\sigma_i \in R_A(\mathrm{GL}_{n_i})$ pour $i = 1, \dots, r$ et $\tau \in R_A(\mathrm{GSp}_{2m})$. Enfin, on notera aussi $L(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r \rtimes \tau)$ le quotient de Langlands de l'induite $\mathrm{Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GSp}_{2g}(F)} \sigma$ lorsque σ est dans la position de Langlands.

1.2.3. *Lien avec le language classique*

Soit F une forme de Siegel cuspidale de poids $\underline{k}$ et niveau K. On note $F_{\mathbb{A}}$ la forme automorphe correspondante sur $G(\mathbb{A})$ définie par

$$F_{\mathbb{A}}(\gamma g_\infty k_f) = \rho_{\underline{k}}(\nu(g_\infty)^{1/2}(c_{g_\infty}.\boldsymbol{i} + d_{g_\infty})^{-1}).F(g_\infty.\boldsymbol{i})$$

* Certains auteurs disent *stable à l'infini*. Notre terminologie n'est pas nécessairement standard.

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

avec $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in G(\mathbb{R})^+$ et $k_f \in K$. Alors $F_\mathbb{A}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $F_\mathbb{A}(\gamma g) = F_\mathbb{A}(g)$ pour tout $\gamma \in G(\mathbb{Q})$;
- $F_\mathbb{A}(gk_\infty) = \rho_{\underline{k}}(j(k_\infty, \boldsymbol{i}))^{-1} F_\mathbb{A}(g)$ pour tout $k_\infty \in K_\infty^1 = K_\infty \cap G^1(\mathbb{R})$;
- $F_\mathbb{A}(gk_f) = F_\mathbb{A}(g)$ pour tout $k_f \in K$.

Lorsque $F_\mathbb{A}$ engendre sous $G(\mathbb{A})$ une représentation cuspidale irréductible, cette dernière est notée $\pi(F)$; elle est unitaire. Réciproquement, toute représentation cuspidale dont la composante archimédienne appartient à la série discrète holomorphe est obtenue de cette manière. Pour une place q, on note $\pi_q(F)$ la représentation de $G(\mathbb{Q}_q)$ engendrée par $F_\mathbb{A}$ sous-l'action de $G(\mathbb{Q}_q)$. Lorsque K est maximal en q, $\pi_q(F)$ est la représentation sphérique associée à un caractère non ramifié χ de $T(\mathbb{Q}_q)$ et on a

$$\begin{aligned}\lambda_F(P_q(X)) = (1 - q^{-3/2}\chi([1,1;q])X)(1 - q^{-3/2}\chi([1,q;q])X) \\ \times (1 - q^{-3/2}\chi([q,1;q])X)(1 - q^{-3/2}\chi([q,q;q])X). \qquad (1.2.3.a)\end{aligned}$$

1.2.4. *Fonctions L de Langlands*

Soit π une representation cuspidale de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$. Pour toute représentation ϱ de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$, on considère pour toute place v en laquelle π est non ramifiée la fonction L locale

$$L(s, \pi_v, \varrho) := \det(1 - \rho(\xi_{\pi,v}) \cdot q_v^{-s})^{-1},$$

où $\xi_{\pi,v}$ est un représentant de la classe de conjugaison de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ associé à π_v par la correspondance de Langlands locale pour les représentations non ramifiées. Pour tout ensemble fini S contenant la place archimédienne et les places de ramification de π, on définit, suivant Langlands, la fonction L globale S-primitive associée à ϱ qui converge lorsque $\mathrm{Re}(s) \gg 0$,

$$L^S(s, \pi, \varrho) := \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v, \varrho).$$

1.2.5. Lorsque $\varrho = \mathrm{spin}$ est la representation spinoriel de GSp_4, on déduit de la formule (1.2.3.a) que l'on a la relation

$$L^{S_N}(s, \pi, \mathrm{spin}) = L^N(s - \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2 - 3), F, \mathrm{spin}).$$

Lorsque π est la representation cuspidale irréductible unitaire associée à une forme de Siegel cuspidale F de poids $\underline{k}$, niveau N et propre pour $\mathcal{R}_N$.

1.2.6. Soit st l'unique représentation irreductible de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ de degree 5. La fonction L *standard* de π est la fonction L de degré 5, $L^S(s, \pi, \mathrm{st})$. Elle vérifie la relation

$$L^S(s, \pi, \wedge^2 \circ \mathrm{spin}) = L^S(s, \omega_\pi^2) L^S(s, \pi, \mathrm{st})$$

avec

$$L^S(s, \omega_\pi^2) := \prod_{q \notin S} (1 - \omega_\pi^2(q) q^{-s})^{-1}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Les propriétés de cette fonction L ont été étudiées par Piatetski-Shapiro et Rallis [**PSR**].

1.2.7. *Représentations endoscopiques*

Une représentation cuspidale π de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ est dite endoscopique s'il existe des représentations cuspidales σ_1, σ_2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ de caractère central ω_π et un ensemble fini de nombres premiers S tels que $L^S(s,\pi,\mathrm{spin}) = L^S(s,\sigma_1)L^S(s,\sigma_2)$. En fait, les représentations locales $\sigma_{1,q}$ et $\sigma_{2,q}$ pour $q \in S$ déterminent également π_q. Cela résulte du fait que les représentation endoscopiques sont dans l'image de la correspondance théta globale pour les paires duales $\mathrm{GSp}_4 \times \mathrm{GO}(X)$ avec X un espace quadratique de rang 4.

Avant d'expliquer ce fait, nous introduisons quelques notations. Soit $\mathrm{GO}(2,2)$ le groupe des similitudes orthogonales pour un espace quadratique $(V_{2,2}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ isomorphe à la somme de deux plans hyperboliques sur un corps local ou global F. Soit $m : \mathrm{GO}(2,2) \to \mathbb{G}_m$ le morphisme multiplieur, i.e. défini par $\langle g.v, g, v'\rangle = m(g)\langle v, v'\rangle$. On note $\mathrm{GSO}(2,2)$ la composante neutre (d'indice 2) de $\mathrm{GO}(2,2)$. Rappelons que l'on a une suite exacte :

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{GSO}(2,2) \to 1$$

avec $\mathbb{G}_m$ se plongeant diagonalement dans le centre de $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ par $x \to (x, x^{-1})$. Une représentation irréductible de $\mathrm{GSO}(2,2)$ est donc caractérisée par une paire (σ_1, σ_2) avec σ_1 et σ_2 des représentations irréductibles de GL_2 de même caractère central. On note $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ la représentation correspondante.

Soit $\tau = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ une représentation de $\mathrm{GSO}(2,2)$ sur un corps local non archimédien F. Si π est invariante par $\mathrm{GO}(2,2)$ (i.e. $\sigma_1 \cong \sigma_2$, π est dite distinguée dans la terminologie de [**Ro2**]), elle s'étend en une représentation de $\mathrm{GO}(2,2)$ de deux façons différentes. D'après [**Ro1**], une seule de ces extensions admet une relèvement théta non nul à $\mathrm{GSp}_4(F)$. Lorsque τ n'est pas invariante, la representation induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GSO}(2,2)}^{\mathrm{GO}(2,2)} \tau$ est irréductible et est l'unique représentation prolongeant τ à $\mathrm{GO}(2,2)$. Son relèvement théta est alors non trivial. Dans tous les cas, on notera τ^+ l'unique représentation de $\mathrm{GO}(2,2)$ prolongeant τ et dont le relèvement théta $\theta(\tau^+)$ à GSp_4 est non nul.

Lemme 1.2.8. *Soit π une representation endoscopique de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ et σ_1, σ_2 les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ telles que $L^S(s,\pi,\mathrm{spin}) = L^S(s,\sigma_1)L^S(s,\sigma_2)$ pour un ensemble fini de premier S assez grand. Alors pour tout nombre premier q, on a $\pi_q \cong \theta((\sigma_{1,q} \otimes \sigma_{2,q})^+)$.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on suppose ici que π est de caractère central trivial.* Soit $L^S(s,\pi,\mathrm{st})$ la fonction L standard S-primitive de π dont la définition est rappelée au § 1.2.6. Par nos hypothèses, on a

$$L^S(s,\pi,\mathrm{st}) = L^S(s,\sigma_1 \times \sigma_2^\vee)\zeta^S(s)$$

avec $L^S(s,\sigma_1 \times \sigma_2^\vee)$ la fonction L de Rankin–Selberg associée à la paire $\sigma_1 \times \sigma_2^\vee$. Elle a donc un pôle simple en $s = 1$. Il résulte d'un théorème de Kudla, Rallis et Soudry

* Dans le cas général, il faut considérer des fonctions L tordues par l'inverse du caractère central de π.

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

[**KRS**] que π est l'image par la correspondance thêta d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GSO}(2,2)(\mathbb{A}) \cong (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 /\mathbb{G}_m)(\mathbb{A})$, i.e. il existe σ_1' et σ_2' des representation cuspidales de GL_2 de caractère central ω_π telle que $\pi|_{\mathrm{Sp}_4(\mathbb{A})}$ et $\theta((\sigma_1' \otimes \sigma_2')^+)|_{\mathrm{Sp}_4(\mathbb{A})}$ ont au moins un facteur commun. Il existe donc un caractère χ tel que $\pi \cong \theta((\sigma_1' \otimes \sigma_2')^+) \otimes \chi$. Posons $\tau_i = \sigma_i' \otimes \chi$ de telle sorte que $\pi \cong \theta((\tau_1 \otimes \tau_2)^+)$. On en déduit que pour S suffisament grand, on a

$$L^S(s,\pi,\mathrm{spin}) = L^S(s,\sigma_1)L^S(s,\sigma_2) = L^S(s,\tau_1)L^S(s,\tau_2).$$

On a donc

$$L^S(s,\tau_1 \times \sigma_1^\vee)L^S(s,\tau_2 \times \sigma_1^\vee) = L^S(s,\sigma_1 \times \sigma_1^\vee)L^S(s,\sigma_2 \times \sigma_1^\vee).$$

Puisque le membre de droite de cette égalité a visiblement un pole en $s = 1$, il resulte que l'une des deux fonctions L de gauche en admet un également. Par un théorème de Gelbart–Jacquet [**GJ**] et le théorème de multiplicité un fort, cela entraine que σ_1 est isomorphe à τ_1 ou à τ_2. On conclut alors aisément que $\{\sigma_1,\sigma_2\} = \{\tau_1,\tau_2\}$ et le lemme résulte alors de la compatibilité de la correspondance théta globale avec la correspondance thétal locale. □

1.2.9. Avant d'effectuer le calcul de l'image par la correspondance théta de certaines de ces représentations locales, nous rappelons quelques une des notations de la classification de Sally–Tadiċ [**ST**]. Précisons d'abord que l'on note 1_H la representation triviale d'un groupe H et par $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ la reprsentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(F)$. On désigne par ν le caractère de $F^\times$ donné par la valeur absolue sur F normalisée par $\nu(\varpi_F) = q^{-1}$. On note alors $\tau(S,\nu^{1/2})$ l'unique constituant générique ou tempéré de la représentation (de longueur deux) $1_{F^\times} \rtimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$. Elle est aussi caractérisée par le fait qu'elle est le constituant commun de $1_{F^\times} \rtimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ et $\nu^{1/2}\,\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \nu^{-1/2}$. Soient ξ_0 et μ deux caractères de $F^\times$ avec ξ_0 quadratique. Alors on note $\delta([\xi_0,\nu\xi_0],\sigma)$ l'unique représentation (essentiellement) tempérée (et en fait essentiellement de carré intégrable) intervenant comme constituant de $\nu^{1/2}\xi_0\,\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \mu$ (voir [**ST**, Lemma 3.6]).

Le lemme suivant nous sera utile au cours de la preuve du Théorème 4.2.7. Nous remercions Roberts (B. Roberts, Lettre aux auteurs, 20 janvier 2004) pour son aide dans la preuve de celui-ci.

Lemme 1.2.10. *Soit σ une representation irréductible tempérée de $\mathrm{PGL}_2(F)$ et soit $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ la représentation Steinberg de $\mathrm{GL}_2(F)$. Alors $\theta((\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \otimes \sigma)^+) = \chi \otimes \pi$ avec χ un caractère quadratique et π une représentation irréductible tempérée, générique et donnée par :*

(i) $\alpha \otimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \alpha^{-1}$ *si* $\sigma = \alpha \times \alpha^{-1}$ *avec* α *un caractère de* $F^\times$,

(ii) $\tau(S,\nu^{-1/2})$ *si* $\sigma = \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$,

(iii) $\delta([\xi_0,\xi_0\nu],\nu^{-1/2})$ *si* $\sigma = \xi_0 \otimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ *avec* ξ_0 *un caractère quadratique non trivial,*

(iv) *l'unique sous-représentation de* $\nu^{1/2}\sigma \rtimes \nu^{-1/2}$ *si* σ *est supercuspidale.*

Démonstration. Soit $\tau = (\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \otimes \sigma)^+$. Cette représentation est tempérée par nos hypothèses, donc $\theta(\tau)$ l'est également par le Théorème 4.2 de [**Ro3**]. Par le § 3 de [**GRS**], $\theta(\tau)$ est générique puisque τ l'est. Par le Lemme 4.2 de [**Ro1**], il existe une sous-représentation τ_1 de $\tau|_{\mathrm{O}(2,2)}$ telle que $\theta(\tau_1)$ est l'unique sous-représentation irréductible générique de $\theta(\tau)|_{\mathrm{Sp}_4(F)}$. Soit P le stabilisateur dans $\mathrm{O}(2,2)$ d'un plan isotrope de $V_{2,2}$. Sa décomposition de Lévi s'écrit $P = MU$ avec $M \cong \mathrm{GL}_2$. En remarquant que $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \hookrightarrow \nu^{1/2} \times \nu^{-1/2}$, on voit facilement que τ_1 est une facteur de la suite de composition de

$$\mathrm{Ind}_{P(F)}^{\mathrm{O}(2,2)(F)} \sigma' \otimes \nu^{1/2}$$

avec

- $\sigma' = \sigma$ dans les cas (i) et (iv),
- $\sigma' = \nu^{1/2} \times \nu^{-1/2}$ dans le cas (ii),
- $\sigma' = \xi_0 \nu^{1/2} \times \xi_0 \nu^{-1/2}$ dans le cas (iii).

Par le Théorème 2.5.(ii) de [**Ku**], $\theta(\tau_1)$ est donc l'unique facteur générique de $\nu^{1/2} \otimes \sigma' \rtimes 1$. Soit π le facteur de Jordan–Hölder générique de $\nu^{1/2} \otimes \sigma' \rtimes \nu^{-1/2}$. Puisque $\pi|_{\mathrm{Sp}_4}$ et $\theta(\tau_1)$ ont un facteur commun et ont le même caractère central, on a $\theta(\tau) = \pi \otimes \chi$ avec χ quadratique.

Il nous reste maintenant à déterminer π. Lorsque σ est supercuspidale, Shahidi a démontré que $\nu^{1/2} \otimes \sigma \rtimes \nu^{-1/2}$ admet une unique sous-représentation et que cette dernière est générique. D'où le cas (iv). Dans le cas (i), on a

$$\begin{aligned}\nu^{1/2} \otimes \sigma' \rtimes \nu^{-1/2} &= \nu^{1/2}\alpha \times \nu^{1/2}\alpha^{-1} \rtimes \nu^{-1/2} \\ &= \nu^{1/2}\alpha \times \nu^{-1/2}\alpha \rtimes \alpha^{-1}\nu^{-1/2} \\ &= 1_{\mathrm{GL}_2} \otimes \alpha \rtimes \alpha^{-1} + \alpha \otimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \alpha^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $\alpha^2 \neq \nu^{\pm 1}$, $\alpha \otimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \alpha^{-1}$ est générique puisque irréductible par [**ST**, Lemmes 3.3 et 3.7] et induite de générique ; le (i) est donc prouvé. Pour les points (ii) et (iii), on a $\nu^{1/2} \otimes \sigma' \rtimes \nu^{-1/2} = \xi_0 \nu \times \xi_0 \rtimes \nu^{-1/2}$. Lorsque $\xi_0 = 1$, le facteur générique de $\nu \times 1 \rtimes \nu^{-1/2}$ est celui de $\nu^{1/2} \otimes \mathrm{St}_{\mathrm{GL}(2)} \rtimes \nu^{-1/2}$, c'est donc $\tau(S, \nu^{-1/2})$; d'où le (ii). Lorsque $\xi_0 \neq 1$, d'après [**ST**, Lemme 3.6], l'unique facteur tempéré de $\xi_0 \nu \times \xi_0 \rtimes \nu^{-1/2}$ est $\delta([\xi_0, \xi_0 \nu], \nu^{-1/2})$; d'où le (iii). □

1.3. Formes de Saito–Kurokawa

Soit $\sigma = \bigotimes_v' \sigma_v$ la représentation cuspidale de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ avec σ_∞ dans la série discrète holomorphe de poids $2k - 2$ avec k un entier supérieur ou égale à 2. Soit f la forme modulaire elliptique cuspidale normalisée propre et nouvelle associée. Par la suite, on notera parfois $\sigma = \sigma(f)$ lorsque f aura été introduit avant σ. Considérons le q-développement de f : $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Alors rappelons que l'on a

$$L(s - k + \tfrac{3}{2}, \sigma) = L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

et que $L(s,\sigma)$ satisfait une équation fonctionelle du type

$$L(s,\sigma) = \varepsilon(\sigma,s)L(1-s,\sigma).$$

On a $\varepsilon(\sigma,\frac{1}{2}) = \pm 1$. Le théorème suivant est à la base de ce travail.

Théorème 1.3.1. *On suppose que $\varepsilon(\sigma,\frac{1}{2}) = -1$. Alors, il existe une representation cuspidale $\pi = \mathrm{SK}(\sigma)$ de $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{A})$ telle que pour tout $v < \infty$, on ait $\pi_v = \mathrm{SK}(\sigma_v) \cong L(\nu^{1/2} \otimes \sigma_v \rtimes \nu^{-1/2})$ et π_∞ appartienne à la série discrête holomorphe de paramètre (k,k). Soit S l'ensemble des places de ramifications de σ, en particulier, on a*

$$L^S(s,\pi,\mathrm{spin}) = \zeta^S(s-\tfrac{1}{2})\zeta^S(s+\tfrac{1}{2})L^S(\sigma,s).$$

Si σ_v est spéciale, π_v admet des vecteurs fixes par le sous-groupe paramodulaire Δ_v. N'importe quelle forme modulaire de Siegel de poids (k,k) propre pour les opérateurs de l'algèbre de Hecke $\mathcal{R}_N$ et engendrant (au sens du § 1.2.3) la représentation $\mathrm{SK}(\sigma)$ sera dite de Saito–Kurokawa.*

1.3.2. *Remarques*

Lorsque σ est non ramifiée, la forme classique de ce théorème est dûe à Maass, Kohnen et Zagier. L'étude de ce type de représentation a ensuite été développée par Piatetski-Shapiro [**PS1**, **PS2**]. La condition sur le signe permet d'obtenir des conditions de ramification minimale pour la représentation π. Ce point résulte d'une étude fine de la correspondance théta du groupe metaplectique à deux feuillets $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ vers $\mathrm{PGL}_2 \cong \mathrm{SO}_3$ et $\mathrm{PGSp}_4 \cong \mathrm{SO}_5$ qui est dûe à Walspurger [**Wa2**]. Ce théorème lui est donc essentiellement dû. A la demande du rapporteur et pour la commodité du lecteur, nous detaillons ci-dessous comment on obtient le résultat ci-dessus à partir de l'article de Walspurger [**Wa1**]. Pour une généralisation de ce théorème, on peut consulter [**S1**].

1.3.3. *Preuve du Théorème 1.3.1*

Pour expliquer comment on démontre le théorème ci-dessus à partir de ceux de Walspurger, nous introduisons maintenant quelques notations et rappelons certaines définitions.

Pour toute place v de $\mathbb{Q}$, on note $\tilde{H}_v = \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Q}_v)$ (respectivement $\tilde{H}_{\mathbb{A}} = \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$) le revêtement métaplectique à deux feuillets de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_v)$ (respectivement de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$). Rappelons que la théorie de la correspondance Théta fournit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & G_2 = \mathrm{SO}(3,2) = \mathrm{PGSp}_4 \\
\tilde{H} = \widetilde{\mathrm{SL}}_2 \arrow[ur, "\Theta_2"] \arrow[dr, shift left, "\Theta_1"] & \\
 & G_1 = \mathrm{SO}(2,1) = \mathrm{PGL}_2 \arrow[ul, shift left, "\theta_1"]
\end{tikzcd}$$

* Erratum. Dans la note [**SU**], le sous-groupe de congruence Δ_N doit être le sous-groupe paramodulaire et non le sous-groupe parahorique de Klingen comme il a été défini.

Pour un caractère additif ψ de $\mathbb{A}$ et pour $\tilde{\pi}$ une representation de $\tilde{H}_{\mathbb{A}}$, on note $\Theta_i(\tilde{\pi},\psi)$ l'image de $\tilde{\pi}$ par la correspondance Θ_i associé au caractère ψ pour $i=1$ ou 2. On utilise une notation similaire pour la correspondance Théta locale.

Pour toute représentation σ_v de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_v)$, on note $\theta_1(\sigma_v,\psi_v)$ la représentation de $\tilde{H}_v$ par la correspondance Théta inverse de $\Theta_1(-,\psi_v)$.

Pour tout $\xi\in\mathbb{Q}^\times$, soit ψ^ξ le caractère de $\mathbb{A}$ défini par $\psi^\xi(x):=\psi(x\xi)$ et χ_ξ le caractère quadratique associé à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{\xi})/\mathbb{Q}$.

On commence par examiner la correspondance entre H et G_1 dîte de Shimura–Shintani. D'après [**Wa1**, Proposition 28], pour toute representation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{H}_{\mathbb{A}}$, il existe $\xi\in\mathbb{Q}^\times$ tel que $\Theta_1(\tilde{\pi},\psi^\xi)\otimes\chi_\xi$ soit non nul. De plus cette représentation est indépendante de ξ (quand elle est non nulle) et on la note alors $S_\psi(\tilde{\pi})$.

Pour chaque représentation locale $\tilde{\pi}_v$ de $\tilde{H}_v$ et caractère additif ψ_v de $\mathbb{Q}_v$, il est possible d'associer un signe $\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v)\in\{\pm1\}$ (par exemple voir [**Wa1**, I.4.c]) valant 1 pour presque tout v lorsque $\tilde{\pi}_v$ et ψ_v proviennent d'objets globaux $\tilde{\pi}$ et ψ. De plus, dans ce cas, on a $\prod_v\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v)=1$.

Soit maintenant σ la représentation de $G_1(\mathbb{A})=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ de l'énoncé du Théorème 1.3.1. Notons Σ l'ensemble des places v telles que σ_v ne soit pas dans la série principale irréductible et Σ' l'ensemble des places $v\notin\Sigma$ telles que $\varepsilon(\sigma_v,\frac12)=-1$. Remarquons que par notre hypothèse sur σ, la place archimédienne ∞ appartient à Σ. Enfin, on considère le sous-ensemble Σ'' de Σ défini par :

$$\Sigma'':=\{v\in\Sigma\backslash\{\infty\}\mid\varepsilon(\sigma_v,\tfrac12)=-1\}\cup\begin{cases}\{\infty\} & \text{si } \varepsilon(\sigma_\infty,\frac12)=1 \quad \text{(i.e. si } k \text{ est impair),}\\ \emptyset & \text{sinon} \qquad\qquad\quad\ \text{(i.e. si } k \text{ est pair).}\end{cases}$$

Soit $\Sigma_0=\Sigma'\cup\Sigma''$. Dans tous les cas, la condition $\varepsilon(\sigma,\frac12)=-1$ assure que le nombre d'élément de Σ_0 est pair. D'après la Proposition 19 de [**Wa1**] et sa preuve, il existe donc une représentation automorphe $\tilde{\pi}$ de $\tilde{H}_{\mathbb{A}}$ telle que $S_\psi(\tilde{\pi})=\sigma$ et telle que $\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v)=-1$ si et seulement si $v\in\Sigma_0$. En particulier, on a

$$\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v)=\begin{cases}\varepsilon(\sigma_v,\frac12) & \text{si } v\neq\infty,\\ -\varepsilon(\sigma_v,\frac12) & \text{si } v=\infty.\end{cases} \tag{1.3.3.a}$$

Lemme 1.3.4. *La représentation $\tilde{\pi}_\infty$ est dans la série discrète holomorphe de poids $k-\frac12$ et $\Theta_1(\tilde{\pi}_\infty,\psi_\infty)=0$. Pour toute place finie v, on a $\Theta_1(\tilde{\pi}_v,\psi_v)=\sigma_v$.*

Démonstration. Soit $\xi\in\mathbb{Q}^\times$ tel que

$$\Theta_1(\tilde{\pi},\psi^\xi)\otimes\chi_\xi=\sigma. \tag{1.3.4.a}$$

D'après la Proposition 17 de [**Wa1**], on en déduit déjà que $\tilde{\pi}_v=\theta_1(\sigma_v,\psi_v)$ pour toute place finie v n'appartenant pas à Σ. Dans le cas général, d'après la relation (1.3.4.a), on a pour toute place v :

$$\varepsilon(\sigma_v\otimes\chi_\xi,\tfrac12)=\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v^\xi)=\chi_\xi(-1)\varepsilon(\tilde{\pi}_v,\psi_v). \tag{1.3.4.b}$$

Si maintenant $v \in \Sigma\backslash\{\infty\}$, d'après (1.3.3.$a$), on en déduit que $\varepsilon(\sigma_v \otimes \chi_\xi, \frac{1}{2}) = \chi_\xi(-1)\varepsilon(\sigma_v, \frac{1}{2})$ et d'après [**Wa1**, Théorème 2] que $(\tilde{\pi}_v =)\theta_1(\sigma_v \otimes \chi_\xi) = \theta_1(\sigma_v, \psi_v)$. D'où $\sigma_v = \Theta_1(\tilde{\pi}_v, \psi_v)$ pour toute place finie v. Pour $v = \infty$, par (1.3.3.a) et (1.3.4.b), on obtient $\varepsilon(\sigma_\infty \otimes \chi_\xi, \frac{1}{2}) = -\chi_\xi(-1)\varepsilon(\sigma_\infty, \frac{1}{2})$. Ce qui entraine d'après [**Wa1**] que $\tilde{\pi}_\infty = \theta_1'(\sigma_\infty', \psi_\infty)$ avec σ_∞' la representation irreductible de dimension $2k-4$ du groupe multiplicatif $\mathbb{H}^\times$ des quaternions de Hamilton (i.e. associée à σ_∞ par la correspondance de Jacquet–Langlands archimédienne) et θ_1' la correspondance de Shintani entre les représentations de $\mathbb{H}^\times$ vers celles de $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. On en déduit le premier point par [**Wa1**, Proposition 9]. Par ailleurs, le principe de dichotomie de la correspondance de Shimura–Shintani entraine que $\Theta_1(\tilde{\pi}_\infty, \psi_\infty) = 0$. □

1.3.5. *Fin de la preuve du Théorème 1.3.1*

Il résulte du lemme précédent que $\Theta_1(\sigma) = 0$. On est alors en mesure d'appliquer une variante de la Proposition 23 de [**Wa1**] dans laquelle l'Hypothèse (Hii) (respectivement la Conclusion (Cii)) de [**Wa1**] est remplacée par la même condition (respectivement la même conclusion) mais pour v en dehors d'un ensemble fini S.

Grâce au lemme précédent, on en déduit la conclusion du théorème en prenant $S = \{\infty\}$ une fois que l'on a remarqué que pour v finie, l'unique sous-représentation de l'induite parabolique de $\mathrm{Ind}(\sigma_v \otimes, |\cdot|^{-1/2})$ (de [**Wa1**]) s'identifie au quotient de Langlands $L(\nu^{1/2} \otimes \sigma_v \rtimes \nu^{-1/2})$. Pour les places v en lesquelles σ_v est non-ramifié, on en en déduit que

$$L(s, \mathrm{SK}(\sigma)_v, \mathrm{spin}) = (1 - q_v^{-s+1/2})^{-1}(1 - q_v^{-s-1/2})^{-1} L(s, \sigma_v).$$

Lorsque σ_v est spéciale, le fait que $L(\nu^{1/2} \otimes \sigma_v \rtimes \nu^{-1/2})$ ait des vecteurs invariants par le sous-groupe paramodulaire Δ_v est dû à Schmidt [**S1**, Corollaire 3.4.6]. Pour $v = \infty$, d'après [**Li**], on a $\Theta_2(\tilde{\pi}_\infty) = \pi_{k,k}^H$ est dans la série discrète holomorphe de paramètre (k, k). □

1.3.6. *Remarque*

La famille des représentations $\mathrm{SK}(\sigma_v) = L(\nu^{1/2} \otimes \sigma_v \rtimes \nu^{-1/2})$ est disjointe des familles (i), (ii) et (iii) de représentations du Lemme 1.2.10. On peut le voir par exemple en remarquant que $\mathrm{SK}(\sigma_v)$ n'est ni générique ni tempérée et que les représentations du Lemme 1.2.10 le sont. Ce point sera très utile dans la preuve du Théorème 4.2.7.

1.3.7. *Représentations de type CAP*

Le lecteur aura remarqué que la représentation de Saito–Kurokawa $\mathrm{SK}(\sigma)$ a un système de valeur propre de type « Eisenstein » et en particulier ne vérifie pas la conjecture de Ramanunjan. On dit qu'elle est non tempérée. En étudiant les formes de Saito–Kurokawa, Piatetski-Shapiro a dégagé une classe de représentation du même type. Selon sa terminologie, une représentation $\pi = \otimes_v' \pi_v$ est dite CAP, signifiant « cuspidal associated to parabolic » s'il existe un sous-groupe parabolique rationel $Q \subset G$ de Levi M et une représentation cuspidale $\tau = \otimes_v' \tau_v$ de $M(\mathbb{A})$ tels que pour presque toute place v, π_v soit un sous-quotient de la représentation induite $I_{P(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)}\tau_v$. Lorsque Q vaut le sous-groupe parabolique de Siegel ou le sous-groupe de Borel de G, ces représentations ont été étudiée par Piatetski-Shapiro dans [**PS1**, **PS2**]. Le cas de l'autre sous-groupe parabolique a été considéré par Soudry dans [**So**].

2. Familles p-adiques de formes modulaires

2.1. Formes modulaires de Siegel p-adiques

On fixe p un nombre premier et on reprend les notations du § 1.1 avec K un sous-groupe ouvert compact de niveau N premier à p. On rappelle dans ce paragraphe la théorie des formes modulaires p-adiques à la Katz développée par Hida dans [**Hi**].

2.1.1. *Invariant de Hasse*

Rappelons qu'il existe une forme modulaire de Siegel H de poids $(p-1, p-1)$ de niveau 1 appelée invariant de Hasse et définie comme suit. Soit $A_{/S}$ un schéma semi-abelien sur S un $\mathbb{F}_p$-schéma et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ une base du dual de $H^0(A, \Omega_{A/S})$. Soit F le Frobenius absolu défini sur A et soit $H(A, \eta) \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ tel que $F^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = H(A, \eta).(\eta_1 \wedge \eta_2)$. Par construction, on voit que $H(A, g.\eta) = \det(g)^{1-p} H(A, \eta)$ et donc que H définit une section globale de $\det(\underline{\omega})^{\otimes^{p-1}}$.

On fixe un relèvement en caractéristique zéro $E \in H^0(\bar{S}_K, \omega_{a(p-1),a(p-1)} \otimes \mathbb{Z}_p)$ de H^a pour un entier a suffisament grand et on pose $S_{/\mathbb{Z}_p} = \bar{S}_K \otimes \mathbb{Z}_p[1/E]$ ainsi que $S_m = S \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.

2.1.2. *Tour d'Igusa*

Si H désigne un schéma en groupe fini et plat sur une base T, on désigne par H^{c} la composante neutre de H. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit P_n le dual de Cartier de $\mathcal{G}[p^n]^{\mathrm{c}}$ sur S. Pour toute paire d'entiers $n, m \geqslant 1$, on considère le schéma $T_{n,m}$ représentant le faisceau étale $\underline{\mathrm{Isom}}_{S_m}(P_{n/S_m}, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_{/S_m})$, i.e. pour tout S_m-schéma X, on a

$$T_{n,m}(X) = \{\psi : P_{m/X} \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_{/X}\}/\sim.$$

D'après [**CF**], on sait que $T_{n,m}$ est irréductible. De plus $\mathrm{Gal}(T_{n,m}/S_m)$ est canoniquement isomorphe à $H(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ via l'action : $g.(X, \psi) := (X, g \circ \psi)$ pour toute paire (X, ψ) telle que $\psi \in T_{n,m}(X)$ et tout $g \in H(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Une fonction régulière sur $T_{n,m}$ est une règle fonctorielle assignant à tout couple (X, ψ) comme ci-dessus un élément $f(X, \psi) \in \Gamma(\mathcal{O}_X)$ et l'action à gauche d'un élément $\gamma \in \mathrm{Gal}(T_{n,m}/S_m)$ sur $f \in H^0(T_{n,m}, \mathcal{O}_{T_{n,m}})$ est donnée par

$$(\gamma.f)(X, \psi) = f(X, \gamma^{-1} \circ \psi). \tag{2.1.2.a}$$

Soit $J \subset H(\mathbb{Z}_p)$ un sous-groupe ouvert compact contenant $1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$ (i.e. J est de niveau p^n). On pose $T_{J,m} := T_{n,m}/J_n$ avec J_n l'image de J dans $H(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Il est facile de voir que cette définition ne dépend pas du choix de n. Le plus petit entier n tel que $1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p) \subset J$ sera noté n_J. On notera K_J le sous-groupe des éléments de K dont la composante en p modulo p^{n_J} s'écrit par blocs sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, d \in J/1+p^{n_J}M_2(\mathbb{Z}_p)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $K_n := K_J$ avec $J = 1+p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$

Lemme 2.1.3. *Supposons que $n \geqslant m \geqslant 0$, alors sur $T_{n,m}$, on a un isomorphisme canonique $H(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-équivariant :*

$$\omega_{\underline{k}/T_{n,m}} \cong L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{T_{n,m}}.$$

Démonstration. Lorsque $n \geqslant m$, nous avons

$$\mathrm{Lie}\, \mathcal{G}_{/T_{n,m}} = \mathrm{Lie}\, \mathcal{G}[p^n]_{/T_{n,m}} = \mathrm{Lie}\, \mathcal{G}[p^n]^{\mathrm{c}}_{/T_{n,m}}.$$

L'isomorphisme universel $P_{n/T_{n,m}} \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2{}_{/T_{n,m}}$ induit

$$\mathrm{Lie}\, \mathcal{G}[p^n]^{\mathrm{c}}_{/T_{n,m}} = \mathrm{Lie}\, \mu^2_{p^n/T_{n,m}} = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \otimes \mathcal{O}_{T_{n,m}}.$$

En passant au $\mathcal{O}_{T_{n,m}}$ dual, on obtient donc un isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(T_{n,m}/S_m)$-équivariant :

$$\underline{\omega}_{/T_{n,m}} \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \otimes \mathcal{O}_{T_{n,m}} = \mathcal{O}^2_{T_{n,m}},$$

l'action de $\mathrm{Gal}(T_{n,m}/S_m) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \otimes \mathcal{O}_{T_{n,m}}$ étant l'action standard de GL_2 sur le premier facteur et l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(T_{n,m}/S_m)$ sur le dernier. On conclut en remarquant que $L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) := \mathrm{Sym}^{k_1-k_2}\, \mathbb{Z}_p^2 \otimes \det^{k_2}$. $\square$

2.1.4. Soient $\hat{S}$, $\hat{T}_n$ et $\hat{T}_J$ les schémas formels obtenus par limite inductive respective des $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-schemas S_m, $T_{n,m}$ et $T_{J,m}$. A tout $\hat{S}$-schéma formel $\hat{X} \to \hat{S}$, il correspond une variété abélienne formelle $\hat{A}_{\hat{X}}$ munie d'une polarisation $\lambda_{\hat{X}}$ et d'une structure de niveau $\phi_{\hat{X}}$. Le schéma $\hat{T}_n$ classifie les paires $(\hat{X}, \psi)$ avec $\hat{X}$ un $\hat{S}$-schéma formel et ψ un isomorphisme entre $P_{n,\hat{X}}$ le dual de Cartier de $\hat{A}[p^n]^{\mathrm{c}}$ et $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_{/\hat{X}}$. Pour des entiers positifs m et n, on pose

$$V_{n,m} := H^0(T_{n,m}, \mathcal{O}_{T_{n,m}}(-D_{T_{n,m}})).$$

Soit $\mathcal{V}$ la limite inductive des $V_{m,m}$ lorsque m tend vers l'infini. Un élément de $\mathcal{V}$ est donc regardé comme une fonction f sur les paires $(\hat{X}, \psi)$ où $\hat{X}$ est un schéma formel sur $\hat{S}$ et ψ est un isomorphisme de $\hat{P}_X$ avec $\mathbb{Z}^2_{p/\hat{X}}$ et prenant une valeur $f(\hat{X}, \psi) \in \Gamma(\hat{X}, O_{\hat{X}})$. L'action de $H(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ sur $V_{m,m}$ induit donc une action de $H(\mathbb{Z}_p)$ sur $\mathcal{V}$ par $(g.f)(\hat{X}, \psi) = f(\hat{X}, g^{-1} \circ \psi)$ pour tout $g \in H(\mathbb{Z}_p)$.

Corollaire 2.1.5. *Pour tout $J \subset H(\mathbb{Z}_p)$, on a un isomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{m} H^0(T_{J,m}, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}}) = H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{V}).$$

Démonstration. A la demande du rapporteur, nous précisons les flêches de transition de cette limite inductive. Pour tout m positif, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}_{T_{J,m}} \cong \mathcal{O}_{\hat{T}_J} \otimes p^{-m}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$. Si $m' > m$, le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{T_{J,m}}$ dans $\mathcal{O}_{T_{J,m'}}$ (et donc

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

le morphisme de transition de m à m' de la limite inductive ci-dessus) est celui induit par cette isomorphisme et l'inclusion naturelle $p^{-m}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow p^{-m'}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$. Passons à la preuve du corollaire. Si $n \geqslant m \geqslant n_J \geqslant 0$, on déduit du Lemme 2.1.3 un isomorphisme canonique :

$$H^0(T_{J,m}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}) = H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes V_{n,m}),$$

où l'action de $h \in H(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur $P \otimes f \in L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes V_{n,m}$ est définie par

$$(h.(P \otimes f))(X, \psi) = \rho_{\underline{k}}(h).P \otimes f(X, h^{-1}\psi).$$

On en déduit que $f \in H^0(T_{J,m}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}})$ est une fonction assignant à tout couple (X, ψ) un élément $f(X, \psi) \in L_{\underline{k}} \otimes \Gamma(\mathcal{O}_X(-D_X))$ tel que $f(X, g \circ \psi) = \rho_{\underline{k}}(g).f(X, \psi)$ pour tout $g \in J$. En passant à la limite sur m, on obtient l'isomorphisme voulu. $\square$

2.1.6. *Compactifications sur $\mathbb{Z}_p$*

Soit $J \subset H(\mathbb{Z}_p)$ un sous-groupe ouvert compact. Rappelons que l'on a défini des compactifications $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Q}_p}$ et $S^*_{K_J/\mathbb{Q}_p}$ au § 1.1.3. On note $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Z}_p}$ (respectivement $S^*_{K_J/\mathbb{Z}_p}$) la normalisation de $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Q}_p}$ (respectivement $S^*_{K_J/\mathbb{Q}_p}$) au dessus de $\bar{S}$ (respectivement S^*).

Proposition–définition 2.1.7. *Il existe une immersion ouverte de schémas $\bar{S}^\circ_{K_J/\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow \bar{S}_{K_J/\mathbb{Z}_p}$ (respectivement $S^{*,\circ}_{K_J/\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow S^*_{K_J/\mathbb{Z}_p}$) qui induit un isomorphisme sur la fibre générique et dont la réduction modulo p^m est irréductible et telle que si l'on pose $T_J = \bar{S}^\circ_{K_J}[1/E]$ alors on a $T_J \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = T_{J,m}$. Pour $J = 1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$, T_J sera noté T_n.*

Démonstration. La fibre spéciale de $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Z}_p}[1/E]$ contient plusieurs composantes irréductibles dont l'une s'identifie à $T_{J,1}$ dans cette fibre spéciale. Les autres seront appelées les composantes ramifiées car elles contiennent les composantes du bord qui sont ramifiées au dessus de $\bar{S}_{/\mathbb{F}_p}$. Par définition, $\bar{S}^\circ_{K_J/\mathbb{Z}_p}$ est le sous-schéma ouvert de $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Z}_p}$ auquel on a oté les composantes ramifiées de sa fibre spéciale. On opère une construction semblable pour $S^{*,\circ}_{K_J}$. $\square$

2.1.8. Considérons les quintuplets $(A_{/S}, \lambda, \phi, \Psi, \omega)$ tels que

- A est un S-schéma abélien ordinaire sur S un $\mathbb{Z}_p$-schéma de réduction ordinaire en p de dimension relative 2 ;
- $\lambda : A \to A^{\mathrm{t}}$ est une polarisation principale ;
- ϕ est une K-structure de niveau ;
- Ψ est un homomorphisme injectif de schémas en groupes de $\mu^g_{p^n/S} \hookrightarrow A[p^n]_{/S}$;
- ω est une base de $H^0(A, \Omega_{A/S})$.

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

Lorsque p est inversible dans $\mathcal{O}_S$, on voit grâce à la polarisation λ que la donnée de Ψ est équivalente à celle d'un isomorphisme défini (modulo K_n) : $\mu_{p^n}^g \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \cong A[p^n]$.

Une forme de Siegel $f \in H^0(T_n, \omega_{\underline{k}/\mathbb{Z}_p})$ peut être considérée comme une fonction sur les classes d'équivalence de quintuplets $(A_{/S}, \lambda, \phi, \Psi, \omega)$. De plus, on a un morphisme

$$\begin{aligned} H^0(T_n, \omega_{\underline{k}/\mathbb{Z}_p} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) &\to H^0(T_{n,m}, \omega_{\underline{k}}) \\ f &\mapsto \tilde{f}. \end{aligned}$$

Avant d'expliciter cette flèche, notons que lorsque $n \geqslant m$, un couple (X, ψ) comme au § 2.1.2 détermine une base ω_ψ de $H^0(A_{/X}, \Omega_{A/X})$ par image réciproque de la base canonique de $\mathrm{Lie}\,\mu_{p^\infty}^2$ via l'isomorphisme $\mathrm{Lie}\,\mu_{p^\infty}^2 \cong \mathrm{Lie}\,A_{/X}$. Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{Z}_p$-schéma tel que $X \cong \mathcal{X} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ et $(A_{/\mathcal{X}}, \lambda_{\mathcal{X}}, \phi_{\mathcal{X}})$ un triplet comme au § 1.1.1 sur $\mathcal{X}$ tel que $(A_{/\mathcal{X}}, \lambda_{\mathcal{X}}, \phi_{\mathcal{X}}) \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ corresponde à $X \to S_m$. On choisit également $\Psi_{\mathcal{X}}$ est un relèvement de l'isomorphisme $\psi : \mu_{p^n}^g \cong A_X[p^n]^\circ$ sur $\mathcal{X}$. Alors on a :

$$\tilde{f}(X, \psi) = f(A_{/\mathcal{X}}, \lambda_{/\mathcal{X}}, \phi_{/\mathcal{X}}, \Psi_{/\mathcal{X}}, \omega_\psi) \pmod{p^m}.$$

Lemme 2.1.9. *Pour tout sous-groupe $J \subset H(\mathbb{Z}_p)$ ouvert compact et tout entier positif m, on a :*

$$H^0(T_J, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \cong \varinjlim_m H^0(T_{J,m}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}})$$

et ce module est divisible.

Démonstration. On démontre ce résultat pour $J = 1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$ pour un entier n arbitraire. L'isomorphisme résulte du fait trivial que

$$H^0(T_n, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[p^m] = H^0(T_n, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = H^0(T_{n,m}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}).$$

Pour montrer que ce module est divisible il suffit de vérifier que pour tout $m > 0$, l'injection canonique

$$H^0(T_{n,m+1}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}) \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \hookrightarrow H^0(T_{n,m}, \omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}})$$

est surjective. Soit $\pi : T_{n,m} \to T_{n,m}^*$ avec $T_{n,m}^*$ le sous-schéma de $S^*_{K_n/\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}[1/E]$ obtenu en retirant les composantes ramifiées de la fibre spéciale. Notons que $T_{n,m}^*$ est affine puisque c'est une composante de $S^*_{K_n/\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}[1/E]$ et que ce dernier est la normalisation de $S^*[1/E]$ qui est affine. D'après le Corollaire 3.2 de [**Hi**],

$$\pi_*(\omega_{\underline{k}/T_{n,m+1}}^{\mathrm{cu}}) \otimes \mathbb{Z}/p^m = \pi_*(\omega_{\underline{k}/T_{n,m}}^{\mathrm{cu}}),$$

donc ce que nous avons à démontrer n'est autre que la surjectivité de

$$H^0(T_{n,m+1}^*, \pi_*\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}) \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \hookrightarrow H^0(T_{n,m}^*, \pi_*\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}).$$

Pour cela, il suffit de voir que $H^1(T_{n,m+1}^*, \pi_*\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}) = 0$. Mais cela résulte de ce que $T_{n,m+1}^*$ est affine. Lorsque $n = 0$, ce lemme est démontré par Hida dans [**Hi**, Corollaire 3.3]. Noter également que le Corollaire 3.2 de [**Hi**] n'est plus vrai si l'on remplace $\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}$ par $\omega_{\underline{k}}$; voir [**Hi**] pour ce point. □

Il résulte du Lemme 2.1.9 que le module $\mathcal{V}$ est divisible. On notera $\mathcal{V}^*$ son dual de Pontryagin qui est p-adiquement complet.

Corollaire 2.1.10. *Pour tout sous-groupe $J \subset H(\mathbb{Z}_p)$ ouvert compact, on a l'isomorphisme suivant de $\mathbb{Z}_p$-modules divisibles :*

$$H^0(T_J, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}/\mathbb{Z}_p} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \cong H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{V}).$$

Démonstration. C'est la combinaison du Corollaire 2.1.5 et du Lemme 2.1.9. □

2.1.11. *Projection sur le vecteur de plus haut poids*

Soit $\underline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ comme au § 1.1.4. Pour tout anneau A, on a un morphisme canonique

$$l_{\underline{k}} : L_{\underline{k}}(A) \to A$$

défini par $P(x, y) \mapsto P(1, 0)$. Soit $B_H^- \subset H$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures. Il est aisé de vérifier que

$$l_{\underline{k}}(\rho_{\underline{k}}(b).P) = \chi_{\underline{k}}(b) l_{\underline{k}}(P)$$

pour tout $b \in B_H^-(\mathbb{Z}_p)$ avec

$$\chi_{\underline{k}}\left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ * & t_2 \end{pmatrix}\right) = t_1^{k_1} t_2^{k_2}.$$

Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre p-adique A, on a un plongement canonique

$$\phi_{\underline{k}} : L_{\underline{k}}(A) \hookrightarrow \mathrm{Cont}(U_H^-(\mathbb{Z}_p)\backslash H(\mathbb{Z}_p), A)$$

défini par $P \mapsto (\phi_P : h \mapsto l_{\underline{k}}(\rho_{\underline{k}}(h).P))$. Ici, Cont désigne l'espace des fonctions continues avec A muni de la topologie p-adique et U_H^- est le radical unipotent de B_H^-.

Soit

$$W_{n,m} = V_{n,m}^{U_H^-(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \varinjlim_m W_{m,m}.$$

Considérons les triplets (X, fil, ξ) où X est un schéma sur S_m, « fil » est une filtration sur $P_{n/X}$ et ξ est un isomorphisme $\mathrm{Gr}(\mathrm{fil}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$. On peut voir un élément $f \in \mathcal{W}$ comme une règle assignant à tout triplet (X, fil, ξ) un élément $f(X, \mathrm{fil}, \xi) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. De plus, $\mathcal{W}$ est muni naturellement d'une action de $T_H(\mathbb{Z}_p)$ par

$$(t.f)(X, \mathrm{fil}, \xi) = f(X, \mathrm{fil}, t^{-1} \circ \xi).$$

Soit $f \in H^0(T_{n,m}, \omega_{\underline{k}})$. C'est une fonction sur les paires (X, ψ). Si on compose f avec $l_{\underline{k}}$, on obtient un élément de $V_{n,m}$ invariant par $B_H^-(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. C'est donc une fonction assignant à tout triplet (X, fil, ξ) un élément $f(X, \mathrm{fil}, \xi) \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ et qui vérifie $f(X, \mathrm{fil}, t \circ \xi) = \chi_{\underline{k}}(t).f(X, \mathrm{fil}, \xi)$ pour tout $t \in T_H(\mathbb{Z}_p)$. Pour tout $n \geqslant m \geqslant 0$, on obtient

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

donc un plongement $H^0(T_{n,m},\omega_{\underline{k}}) \hookrightarrow W_{n,m}[\chi_{\underline{k}}]$. Pour tout entier n, on a donc une inclusion canonique :

$$H^0(\hat{T}_{I_{H,n}},\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) := \varinjlim_m H^0(T_{I_{H,n},m},\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}) \hookrightarrow \mathcal{W}[\chi_{\underline{k}}]$$

avec $I_{H,n} \subset H(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe Iwahori standard de profondeur n. Il résulte des travaux de Hida [**Hi**], que l'injection de $H^0(T_{I_H},\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dans $\mathcal{W}$ devient un isomorphisme lorsqu'on se restreint à la partie ordinaire.

2.1.12. *Variante*

Un polynôme $P\in L_{\underline{k}}(A)$ peut être considéré comme un polyôme à une variable en spécialisant l'une des deux variables homogènes en la valeur 1. Si l'on regarde P comme une section globale d'un faisceau cohérent sur la droite projective, cela revient à restreindre ce polynôme à la droite affine. A P, on associe donc la fonction f_P sur $\mathbb{Z}_p$ définie par :

$$f_P(z)=P(1,z).$$

On vérifie sans peine que pour tout

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in I_H,$$

on a

$$f_{\gamma.P}(z)=\det(\gamma)^{k_2}(a+cz)^{k_1-k_2}f_P\left(\frac{b+dz}{a+cz}\right).$$

Soit $\Delta_{H,r}$ le monoïde des matrices

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_p)$$

telles que $a\in\mathbb{Z}_p^\times$ et $c\in p^r\mathbb{Z}_p$. Pour $r=1$, on écrit juste Δ_H. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans lui-même. On écrit $\mathcal{C}=\mathcal{C}_{\underline{k}}$ avec un indice $\underline{k}$ pour spécifier qu'il est muni de l'action à droite de Δ_H définie par

$$(\gamma.f)(z) := (\det(\gamma).|\det(\gamma)|_p)^{k_2}(a+cz)^{k_1-k_2}f\left(\frac{b+dz}{a+cz}\right).$$

Le facteur $|\det(\gamma)|_p^{k_2}$ supprime la puissance de p introduite par $\det(\gamma)^{k_2}$ lorsque $\gamma\notin I_H$.

L'inclusion canonique $L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p)\otimes\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{C}_{\underline{k}}\otimes\mathcal{V}$ induit l'injection :

$$H^0(\hat{T}_J,\omega_{\underline{k}}^{\mathrm{cu}}\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\hookrightarrow H^0(J,\mathcal{C}_{\underline{k}}).$$

Ce morphisme devient un isomorphisme sur la partie ordinaire. Au lieu de plonger $L_{\underline{k}}$ dans $\mathcal{C}_{\underline{k}}$, on le plongera dans l'espace des fonctions localement analytiques sur un disque centré en zéro. Cela nous permettra d'étendre la théorie de Hida au cas semi-ordinaire. Ce sera l'objet de la § 2.3.3. Avant de procéder à cette construction, nous explicitons l'action des correspondances de Hecke en p sur les espaces que nous avons définis.

2.2. Opérateurs de Hecke en p

2.2.1. *p-isogénies*

Soit A un schéma abélien ordinaire de dimension relative 2 sur une $\mathbb{Z}_p$-algébre locale artinienne R. On a pour tout entier $n > 0$, une suite exacte

$$0 \to A[p^n]^{\mathrm{c}} \to A[p^n] \to A[p^n]^{\text{ét}} \to 0$$

en notant H^{c} la composante neutre d'un schéma en groupe H fini et plat et $H^{\text{ét}}$ le quotient étale correspondant. Via la polarisation principale, on a un isomorphisme entre $A[p^n]^{\text{ét}}$ et le dual de Cartier de $A[p^n]^{\mathrm{c}}$. Ce dernier est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$ sur une extension étale convenable de R. La donnée d'un tel isomorphisme permet de classifier les isogénies.

Soit $a \in M_2(\mathbb{Z})$ tel que $\det(a)$ soit une puissance de p et soit ν une puissance de p telle que ${}^{\mathrm{t}}a^{-1}.\nu \in M_2(\mathbb{Z})$. Soit $i : (A, \lambda) \to (A', \lambda')$ une isogénie entre variétés abéliennes ordinaires principalement polarisées sur R. On dit que cette isogénie est de type (a, ν) si

- $i^*\lambda' = \nu.\lambda$,
- il existe des bases de $A[p^n]^{\text{ét}}$ et $A'[p^n]^{\text{ét}}$ sur une extension étale de R telles que la matrice de $i : A[p^n]^{\text{ét}} \to A'[p^n]^{\text{ét}}$ soit donnée par a.

Pour un tel couple (a, ν) posons $\xi_{a,\nu} = \mathrm{diag}(a, \nu{}^{\mathrm{t}}a^{-1})$. On suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite pour $\xi = \xi_{a,\nu}$

$$\xi^{-1}P^+(\mathbb{Z}_p)\xi \subset P^+(\mathbb{Z}_p). \tag{2.2.1.a}$$

Soit $J \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ un sous-groupe ouvert compact contenant $1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p)$ et tel que $aJa^{-1} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on va définir un morphisme fonctoriel de $T_{J,m}$ dans $T_{aJa^{-1},m}$ de la façon suivante. Soit $(X, \psi \bmod J) \in T_{J,m}(R)$ et (A, λ) la variété abélienne correspondante. D'après [**Ka**, Théorème 2.1.4], il existe un couple $(X_{a,\nu}, \psi_a \mod aJa^{-1})$ et une isogénie (unique à isomorphisme près)

$$i_{(a,\nu)} : (A_X, \lambda_X) \to (A_{X_{a,\nu}}, \lambda_{X_{a,\nu}})$$

de type (a, ν) telle que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A_X[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi'"] & A_{X_{a,\nu}}[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[d, "\psi'_a"] \\ (\mu_{p^n})^2 \arrow[r, "\nu{}^{\mathrm{t}}a^{-1}"] & (\mu_{p^n})^2 \end{tikzcd}$$

Ici ψ' est l'isomorphisme $A[p^n]^{\mathrm{c}} \cong (\mu_{p^n})^2$ déduit canoniquement de $\psi : P_{n/X} \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{/X}$ et ψ'_a est défini similairement par rapport à ψ_a.

2.2.2. Sachant que $i^*\lambda' = \nu.\lambda$, on a également un diagramme commutatif sur les parties étales :

$$\begin{array}{ccc} A_X[p^n]^{\text{ét}} & \xrightarrow{i} & A_{X_{a,\nu}}[p^n]^{\text{ét}} \\ \downarrow{\scriptstyle\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_a} \\ (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_{/X} & \xrightarrow{a} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2_{/X} \end{array}$$

Il faut prendre garde cependant à ce que l'action induite par les isogénies sont différentes sur $A_X[p^n]^{\text{ét}}$ et sur $P_{n/X}$. Ici ϕ est obtenu à partir de ψ et de la dualité entre $A[p^n]^{\text{ét}}$ et $A[p^n]^{\text{c}}$ via la polarisation λ. La flèche ϕ_a se définit pareillement.

2.2.3. On définit le morphisme de $T_{J,m}(R)$ dans $T_{aJa^{-1},m}(R)$ par

$$(X, \psi \bmod J) \mapsto (X_{a,\nu}, \psi_a \bmod aJa^{-1}).$$

Le morphisme $\varphi_{a,\nu} : T_{J,m} \to T_{aJa^{-1},m}$ ainsi défini est fini de degré

$$[P^+(\mathbb{Z}) : \xi_{a,\nu}^{-1} P^+(\mathbb{Z})\xi_{a,\nu}] = (\nu \det(a)^{-1})^3.$$

Si on pose $V_{J,m} = H^0(T_{J,m}, \mathcal{O}_{T_{J,m}})$, on a un morphisme trace $V_{J,m} \to V_{aJa^{-1},m}$. En passant à la limite sur J puis sur m. On obtient un endomorphisme de $\varprojlim_m \varinjlim_J V_{J,m}$ que l'on peut diviser par le degré $(\nu \det(a)^{-1})^3$. On peut vérifier en calculant son effet sur le q-développement que ce morphisme reste entier (voir [**Hi**] pour ce point). Après réduction modulo p^m et limite inductive sur m, on obtient alors un endomorphisme

$$t_{a,\nu} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}.$$

Ces assertions se vérifient aisément grâce à la description via Serre–Tate de l'espace des déformations d'un point (ordinaire) de la tour d'Igusa. Notons que si $x \in H(\mathbb{Z}_p)$, on vérifie aisément que

$$t_{a,\nu} \circ x = t_{ax,\nu} \quad \text{et} \quad x \circ t_{a,\nu} = t_{xa,\nu}. \tag{2.2.3.a}$$

Un cas particulier inportant est celui où $a = 1$ et $\nu = p$. Les isogénies de types $(1, p)$ sont celles dont le noyau est la composante neutre $A[p]^{\text{c}}$, c'est à dire l'isogénie relevant Frobenius. L'opérateur de Hecke $U_0 = t_{1_2,p}$ que l'obtient est alors l'opérateur de Hecke dont l'effet sur le q-développement est donné par : $a(f \mid U_0, S) = a(f, pS)$ pour toute matrice symétrique S positive semi-entière.

2.2.4. *Correspondances*

Soit Δ le semi-groupe constitué des éléments $\xi \in B(\mathbb{Q}_p) \cap M_4(\mathbb{Z}_p)$ tels que $\xi^{-1}B^+(\mathbb{Z}_p)\xi \subset B^+(\mathbb{Z}_p)$. Pour $\xi \in \Delta$, on considère $Z_{\xi,J}$ le schéma représentant le foncteur associant à tout schéma S sur $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble

$$S \mapsto \{((A_{1/R} \xrightarrow{i} A_{2/R}), \lambda_1, \lambda_2, \phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2)\}/\simeq$$

avec pour $j = 1, 2$, $(A_{j/S}, \lambda_j, \phi_j, \Psi_j)$ un quintuplet comme au § 2.1.8 et i une isogénie de (A_1, λ_1) dans (A_2, λ_2) de type $(a_\xi, \nu(\xi))$ telle que $\Psi_2 \circ i = \xi^\vee \circ \Psi_1$. Ici Ψ_j est considéré comme un isomorphisme de $A_j[p^\infty]_{/R}$ avec $(\mu_{p^\infty})^2 \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^2$ modulo K_J.

Pour $J = I_{H,r}$, en considérant le morphisme de foncteurs

$$(A_{1/S} \xrightarrow{i} A_{2/S}) \mapsto (A_{1/S}, A_{2/S}),$$

on obtient donc une correspondance de Hecke $Z_{\xi,r} = Z_{\xi,I_{H,r}} \to T_{I_{H,r}} \times T_{I_{H,r}}$. On note respectivement pr_1 et pr_2 les projections sur la première et la seconde composante. Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$(A_{1/R} \xrightarrow{i} A_{2/R}, \lambda_1, \lambda_2, \phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2) \mapsto (A_1, \lambda_1, \phi_1, \Psi_1)$$

définit un isomorphisme de $Z_{\xi,r}$ sur $\bar{S}^\circ_{K\cap I_r \cap \xi I_r \xi^{-1}}[1/E]$.

Etant donné un couple (a, ν) comme au paragraphe précédent, on considère également la correspondance $Z_{a,\nu,J}$ classifiant les isogénies de type (a, ν) de $T_{J,m} \times T_{J,m}$. On peut en donner une description fonctorielle comme ci-dessus mais il est plus rapide de la définir comme l'image du morphisme de $T_{a^{-1}Ja\cap J,m}$ à valeurs dans $T_{J,m} \times T_{J,m}$ défini par $X \mapsto (X, \varphi_{a,\nu}(X))$ pour tout $X \in T_{a^{-1}Ja\cap J,m}(S)$ et $Z/p^m\mathbb{Z}$-schéma artinien S.

Proposition 2.2.5. *Soit ξ satisfaisant la condition (2.2.1.a) et soit ci-dessous la décomposition en classes à gauche de $K_J \xi K_J$:*

$$K_J \xi K_J = \bigsqcup_i \bigsqcup_{u \in P^+(\mathbb{Z})/\xi^{-1}_{a_i,\nu} P^+(\mathbb{Z}_p) \xi_{a_i,\nu}} K_J \xi_{a_i,\nu} t$$

avec $\nu = \nu(\xi)$ et $JaJ = \bigsqcup_i J.a_i$. Alors la réduction modulo p^m de $Z_{\xi,J}$ est la réunion topologiquement disjointe

$$Z_{\xi,J} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = \bigsqcup_i Z_{a_i,\nu,J}.$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est semblable à celle de Chai–Faltings [**CF**, p. 263]. □

2.2.6. Pour tout poids $\underline{k}$, on peut donc définir des faisceaux automorphes $\omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}}$ sur $Z_{\xi,r}$ et $\bar{S}^\circ_{K\cap I_r}$ tels que

$$\mathrm{pr}_1^* \, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}/Z_{\xi,r}} = \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}/\bar{S}^\circ_{K\cap I_r}}.$$

De plus, comme au § 1.1.6, on a un morphisme naturel

$$\omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}/Z_{\xi,r}} \to \mathrm{pr}_2^* \, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}/\bar{S}^\circ_{K\cap I_r}},$$

i.e. via le pull-back par l'isogénie duale de l'isogénie universelle ι_ξ de type ξ au dessus de $Z_{\xi,r}$. La correspondance $Z_{\xi,r}$ opère sur l'espace des formes modulaires p-adiques ou classiques $[Z_{\xi,r}] = \mathrm{tr}(\mathrm{pr}_2^*) \circ (\iota_\xi^{\mathrm{t}})^* \circ \mathrm{pr}_1^*$ et on définit l'opérateur U_ξ par

$$U_\xi(f) = \mathrm{tr}(\mathrm{pr}_2^*) \circ (\iota_\xi^{\mathrm{t}})^* \circ \mathrm{pr}_1^*(f).$$

Lemme 2.2.7. *Soient m un entier positif, $\xi = \mathrm{diag}(a, \nu\,{}^{\mathrm{t}}a^{-1})$ et J un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ tels que $aJa^{-1} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)$ soit contenu dans J et aJa^{-1}. Alors, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
H^0(T_{J,m}, \omega_{\underline{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "(i_\xi^{\mathrm{t}})^*"] & H^0(T_{J,m}, L_{\underline{k}} \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}}) \arrow[d, "\rho_{\underline{k}}(a)\otimes \mathrm{id}"] \\
H^0(T_{J,m}, \varphi_{a,\nu}^* \omega_{\underline{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{tr}(\varphi_{a,\nu})"] & H^0(T_{J,m}, L_{\underline{k}} \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}}) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes t_{a,\nu}"] \\
H^0(T_{aJa^{-1},m}, \omega_{\underline{k}}) \arrow[r] & H^0(T_{aJa^{-1},m}, L_{\underline{k}} \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}})
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il s'agit d'expliciter le morphisme $(\iota_\xi^{\mathrm{t}})^*$ en tenant compte de la trivialisation de ω sur $T_{J,m}$. Par définition de l'isogénie de type $\xi = \xi_{a,\nu}$, on a en posant $X = T_{J,m}$ et $X_{a,\nu} = T_{aJa^{-1},m}$:

$$\begin{tikzcd}
A_X[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi'"] & \varphi_{a,\nu}^* A_{X_{a,\nu}}[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[d, "\psi'_a"] \\
(\mu_{p^n})^2 \arrow[r, "\nu\,{}^{\mathrm{t}}a^{-1}"] & (\mu_{p^n})^2
\end{tikzcd}$$

L'isogénie duale satisfait le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varphi_{a,\nu}^* A_{X_{a,\nu}}[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[r, "i^{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "\psi'_a"] & A_X[p^n]^{\mathrm{c}} \arrow[d, "\psi'"] \\
(\mu_{p^n})^2 \arrow[r, "{}^{\mathrm{t}}a"] & (\mu_{p^n})^2
\end{tikzcd}$$

Ce qui induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\omega_{/T_{J,m}} \arrow[r, "(i^{\mathrm{t}})^*"] \arrow[d] & \varphi_{a,\nu}^*(\omega_{/T_{aJa^{-1},m}}) \arrow[d] \\
P_{n/T_{J,m}} \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}} \arrow[r] \arrow[d, "\psi'^*"] & \varphi_{a,\nu}^*(P_{n/T_{aJa^{-1},m}}) \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}} \arrow[d, "\psi'^*_a"] \\
(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}} \arrow[r, "a"] & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \otimes \mathcal{O}_{T_{J,m}}
\end{tikzcd}$$

Le diagramme commutatif du lemme s'en déduit aisément. □

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

2.2.8. *Action sur les formes p-adiques*

Dans l'expression de l'action de $Z_{\xi,r} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ sur $T_{I_{H,r},m}$, l'opérateur $\mathrm{tr}(\mathrm{pr}_2^*)$ se factorise par $\rho_{\underline{k}}(a) \otimes t_{a,\nu}$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(T_{I_{H,r}\cap a^{-1}I_{H,r}a,m}, \omega_{\underline{k}}) \arrow[r, "t_{a,\nu}"] \arrow[d] & H^0(T_{I_{H,r}\cap aI_{H,r}a^{-1}}, \varphi_{a,\nu}^*\omega_{\underline{k}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(T_{I_{H,r}}, \omega_{\underline{k}}) \arrow[d] \\
H^0(I_{H,r} \cap a^{-1}I_{H,r}a, L_{\underline{k}} \otimes V_{\infty,m}) \arrow[r, "\rho_{\underline{k}}\otimes t_{a,\nu}"] & H^0(I_{H,r} \cap aI_{H,r}a^{-1}, L_{\underline{k}} \otimes V_{\infty,m}) \arrow[r] & H^0(I_{H,r}, L_{\underline{k}} \otimes V_{\infty,m})
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales de droites sont données par le morphisme de co-restriction de $I_{H,r}\cap aI_{H,r}a^{-1}$ à $I_{H,r}$. Décomposons $I_{H.r}$ en classes à droite $I_{H.r} = \bigsqcup_u u.(I_{H.r}\cap aI_{H.r}a^{-1})$. On a :

$$\begin{aligned}
U_\xi(f) &= (\nu\det(a)^{-1})^3 \sum_u (\rho_{\underline{k}}(u) \otimes u) \circ (\rho_{\underline{k}}(a) \otimes t_{a,\nu})(f) \\
&= (\nu\det(a)^{-1})^3 \sum_u (\rho_{\underline{k}}(ua) \otimes t_{ua,\nu})(f) \\
&= (\nu\det(a)^{-1})^3 \sum_b (\rho_{\underline{k}}(b) \otimes t_{b,\nu})(f)
\end{aligned}$$

si $\bigsqcup_b I_{H,r}b$ est la décomposition en classe à droite de $I_{H,r}aI_{H,r}$.

2.2.9. En caractéristique 0, l'action de U_ξ du § 1.1.6 est normalisée de telle sorte que $U_\xi(f) = \nu(\xi)^3 f \mid U_\xi$. Elle peut s'écrire de la façon suivante. Considérons la décomposition de la classe double

$$U_\xi = B^+(\mathbb{Z}_p)\xi B^+(\mathbb{Z}_p) = \bigsqcup_t B^+(\mathbb{Z}_p)\xi_t.$$

Soit $(A_{/S}, \lambda, \phi, \Psi)$ un quadruplet avec S un $\mathbb{Z}_p$-schéma. Supposons que pour tout $\xi \in \Delta$, il existe un quadruplet $(A_{\xi/S}, \lambda_\xi, \phi_\xi, \psi_\xi)$ et une unique isogénie $\iota_\xi : A \to A_\xi$ de type ξ tels que $\lambda_\xi \circ i_\xi = i_\xi^{\mathrm{t}} \circ \lambda$ et $\phi_\xi \circ i_\xi = \xi \circ \phi$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A[p^\infty] \arrow[r, "i_\xi"] \arrow[d, "\psi"] & A_\xi[p^\infty] \arrow[d, "\psi_\xi"] \\
(\mu_{p^\infty})^2 \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^2 \arrow[r, "\xi"] & (\mu_{p^\infty})^2 \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^2
\end{tikzcd}$$

En considérant le diagramme ci-dessus sur la composante connexe des schémas en groupes, on voit que $i_\xi^*(\omega_{\psi_\xi}) = \omega_\psi a_\xi$. Par conséquent, si $f \in H^0(\bar{S}^\circ_{K\cap I_n}, \omega_{\underline{k}/\mathbb{Z}_p})$, on a

$$\begin{aligned}
(f \mid \xi)(A, \lambda, \phi, \omega_\psi) &= f(A_\xi, \lambda_\xi, \phi_\xi, (\omega_\psi)_\xi) \\
&= f(A_\xi, \lambda_\xi, \phi_\xi, (\omega_{\psi_\xi} a_\xi^{-1})) \\
&= \rho_{\underline{k}}(a_\xi)^{-1}.f(A_\xi, \lambda_\xi, \phi_\xi, \psi_\xi).
\end{aligned} \qquad (2.2.9.a)$$

Une forme $f \in H^0(\bar{S}^{\circ}_{K\cap I_n}, \omega_{\underline{k}})$ peut être regardée comme une règle fonctorielle assignant à tout quadruplet $(A_{/S}, \lambda, \phi, \psi)$ un élément $f(A_{/S}, \lambda, \phi, \psi) \in L_{\underline{k}}(\Gamma(\mathcal{O}_S))$. D'après la définition de l'action des correspondances de Hecke du § 1.1.6, on a :

$$(f \mid U_\xi)(A_{/S}, \lambda, \phi, \psi) = \nu(\xi)^{-1} \sum_t \rho_{\underline{k}}(a_{\xi_t}^{-1}).f(A_{\xi_t/S}, \lambda_{\xi_t}, \phi_{\xi_t}, \psi_{\xi_t}).$$

De sorte que le morphisme

$$H^0(\bar{S}^{\circ}_{K\cap I_n}, \omega_{\underline{k}/\mathbb{Z}_p}) \hookrightarrow H^0(\hat{T}_{I_{H,n}}, \omega_{\underline{k}})$$

commute à l'action de U_ξ pour tout $\xi \in \Delta$.

2.2.10. *Normalisation*

Au § 2.1.12, on a normalisé l'action de $\gamma \in \Delta_H$ sur $\mathcal{C}_{\underline{k}}$ et à fortiori sur $L_{\underline{k}}$ par le facteur $|\det(\gamma)|^{k_2}$. On note $\gamma.m$ cette action. On va normaliser l'action de U_ξ en tenant compte de cette nouvelle action pour optimiser l'intégralité de ces opérateurs. On pose

$$U_\xi.f = \det(a)^{3-k_2} f \mid U_\xi = \nu(\xi)^{-3}\det(a)^{3-k_2} U_\xi(f).$$

En voyant f comme une fonction continue de $z \in \mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathcal{V}$, on a donc la formule suivante :

$$(U_\xi.f)(z) = \sum_\gamma (a_\gamma + c_\gamma.z)^{k_1-k_2}.t_{\gamma,\nu}.f\left(\frac{b_\gamma + d_\gamma.z}{a_\gamma + c_\gamma.z}\right)$$

avec $I_{H,r} a I_{H,r} = \bigsqcup_\gamma I_{H,r}\gamma$ et les

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix}$$

de même déterminant que a dans cette décomposition. Dans la suite, on s'intéressera principalement aux opérateurs $U_i = U_{\xi_i}$ avec $\xi_0 = \mathrm{diag}(1, 1, p, p)$ et $\xi_1 = \mathrm{diag}(1, p, p^2, p)$. Comme on l'a précisé plus haut, on a $U_0 = t_{1_2,p}$. On considère en particulier l'idempotent $e_0 := \lim_{n\to\infty} t_0^{n!}$ et l'opérateur U_1 :

$$(U_1.f)(z) = \sum_{t=0}^{p-1} t_{a_t,p^2}(f(pz+t))$$

avec $a_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ pour tout $t \in \{0, \ldots, p-1\}$.

2.2.11. *Formes p-adiques semi-ordinaires*

Le module $\mathcal{V}_{\mathrm{ord}} = e_0.\mathcal{V}$ est le module des formes semi-ordinaires de $\mathcal{V}$, c'est à dire, le sous-module de $\mathcal{V}$ sur lequel l'opérateur U_0 opère de façon inversible.

2.3. Formes de Siegel p-adiques analytiques

2.3.1. *Rappels et notations*

Pour un espace de Banach M sur un corps p-adique L, on note M^{D} son dual topologique, i.e. $M^{\mathrm{D}} = \mathrm{Hom}_L(M, L)$. Ici Hom désigne les homomorphismes continus. Si M et N sont deux espaces de Banach, on note $M \hat{\otimes} N$ leur produit tensoriel topologique. On étudiera dans cette section la théorie spectrale de certains opérateurs complètement continus (voir [**Se**]).

Pour toute espace rigide analytique $\mathfrak{U}$ défini sur $\mathbb{Q}_p$, on note $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$ l'anneau des fonctions rigides analytiques sur $\mathfrak{U}$ définies sur $\mathbb{Q}_p$, c'est à dire les sections globales du faisceau structural de $\mathfrak{U}$. On note aussi $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}) \subset \mathcal{O}(\mathfrak{U})$ le sous-anneau des fonctions de norme *sup* inférieure ou égale à 1 sur $\mathfrak{U}$.

2.3.2. *Voisinages analytiques de $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p^\times$*

Soit r un entier positif. Soit B_r (respectivement $B_r^\times$) l'affinoide rigide analytique défini sur $\mathbb{Q}_p$ tel que

$$B_r(\mathbb{C}_p) := \{x \in \mathbb{C}_p \mid \exists \zeta \in \mathbb{Z}_p \mid |x - \zeta| \leqslant p^{-r}\}$$
$$(\text{respectivement } B_r^\times(\mathbb{C}_p) := \{x \in \mathbb{C}_p \mid \exists \zeta \in \mathbb{Z}_p^\times \mid |x - \zeta| \leqslant p^{-r}\}).$$

Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Delta_{H,r}$. La transformation $z \mapsto \gamma.z$ envoie $B_{r-\mathrm{val}_p(d)}$ dans B_r. On en déduit une action de $\Delta_{H,r}$ sur $\mathcal{O}(B_r)$ par la formule

$$(\gamma.f)(z) = (|\det(\gamma)|_p.\det(\gamma))^{k_2}(a + cz)^{k_1 - k_2} f\left(\frac{b + dz}{a + cz}\right)$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(B_r)$. On peut en fait remarquer, l'action de γ envoit $\mathcal{O}(B_r)$ dans $\mathcal{O}(B_{r-\mathrm{val}_p(d)}) \subset \mathcal{O}(B_r)$.

2.3.3. *Formes p-adiques r-analytiques*

Soit L un corps de nombres p-adiques et O_L son anneau d'entiers. Pour tout sous-groupe ouvert compact $J \subset I_{H,r}$, on pose

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^r(J; O_L) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, \mathcal{O}^0(B_r) \hat{\otimes} \mathcal{V})^*, O_L).$$

Il est aisé de vérifier que ce module est complet pour la topologie p-adique et que l'on peut munir

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^r(J; L) := \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^r(J; O_L) \otimes_{O_L} L$$

d'une structure canonique d'espace de Banach sur L dont le réseau des éléments de norme inférieure à 1 est exactement $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^r(J; O_L)$. On définit l'espace des formes modulaires p-adiques localement analytiques de poids $\underline{k}$ comme l'espace de Frechet

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^\dagger(J, L) := \varinjlim_r \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\underline{k}}^r(J, L).$$

Proposition 2.3.4. *Pour tout sous-groupe $J \subset I_{H,r}$, on a une injection canonique :*

$$H^0(T_J, \omega_{\underline{k}/\mathbb{Q}_p}) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k}}(J, \mathbb{Q}_p).$$

Démonstration. $L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \subset \mathcal{O}^0(B_r)$, induit une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \hat{\otimes} \mathcal{V})^*, \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k}}(J, \mathbb{Z}_p).$$

D'après la Proposition 2.1.10, on a un isomorphisme canonique

$$H^0(T_J, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \cong H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{V}).$$

Par ailleurs, on a

$$H^0(T_J, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(T_J, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^*, \mathbb{Z}_p).$$

On conclut aisément. □

2.3.5. *Action de U_0*

L'action de t_0 sur $\mathcal{V}$ induit canoniquement une action sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k}}(J; L)$. On pose $\mathcal{V}_{\mathrm{ord}} := e_0.\mathcal{V}$ et

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J; \mathbb{Z}_p) = e_0.\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k}}(J; \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, \mathcal{O}^0(B_r) \hat{\otimes} \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*, \mathbb{Z}_p).$$

Les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}$ seront appelés *formes p-adiques r-analytiques semi-ordinaires*. Plus généralement, une forme p-adique ou classique vérifiant $e_0.f = f$ sera dite *semi-ordinaire*.

2.3.6. *Action de U_1*

On définit une action de U_1 sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ en s'inspirant de la formule du § 2.2.10. Soit $m_t : B_{r-1} \to B_r$ défini par $m_t(z) = pz + t$. On note m_t^* l'opérateur qu'il induit de $\mathcal{O}^0(B_r)$ dans $\mathcal{O}^0(B_{r-1})$. Pour tout $f \in \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}$, on pose

$$U^r.f = \sum_{t=0}^{p-1} (m_t^* \otimes t_{a_t,p^2})(f).$$

Par dualité, U^r induit un opérateur de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{r-1}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ que l'on note encore U^r et on définit $U_1 := i_r \circ U^r$ où i_r est l'inclusion de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{r-1}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ induit par l'injection canonique de $\mathcal{O}^0(B_{r-1})$ dans $\mathcal{O}^0(B_r)$. Par construction, on voit d'après le § 2.2.10, que l'injection de la Proposition 2.3.4 commute à l'action de U_1.

Proposition 2.3.7. *Pour tout entier naturel r, l'action de U_1 sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ est complètement continue.*

Démonstration. Dire que U_1 est complètement continu, revient à dire que l'image de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,\mathbb{Z}_p)$ par U_1 modulo p^m est finie pour tout entier naturel m suffisament grand. Par $\mathbb{Z}_p$-dualité et dualité de Pontrjagin, cette finitude est équivalente à celle de l'image par U_1 de $H^0(J,\mathcal{O}^0(B_r)\otimes e_0.V_{\infty,m})$ avec $V_{\infty,m} := \varinjlim_n V_{n,m}$. Cette dernière image est contenue dans $H^0(J,\mathcal{O}^0(B_r)\cap \mathbb{Q}_p[z]_m \otimes e_0.V_{\infty,m})$ où $\mathbb{Q}_p[z]_m$ désigne l'espace des polynômes en z de degré au plus m. On voit aisément que si $J\supset 1+p^m M_2(\mathbb{Z}_p)$, on peut plonger ce module dans un nombre fini de copies de $e_0.V_{m,m}$ qui est de rang fini sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. D'où le résultat. □

2.3.8. *Pentes*

Par la théorie de Fredholm, puisque U_1 est complètement continu sur $\mathcal{S}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L)$, on peut définir la série entière

$$P_{\underline{k}}(T) := \det(1-U_1T; e.\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,\mathbb{Q}_p)) \in \mathbb{Q}_p\{\{T\}\}.$$

Cette dernière ne dépend pas de $r>0$. En effet, pour tout entier r, notons U_1^r l'opérateur agissant sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,\mathbb{Q}_p)$. D'après la définition de U_1, on a $U_1^r = i_r\circ U^r$. En fait, on peut également montrer facilement que $U_1^r = U^{r+1}\circ i_{r+1}$. D'après la Proposition A.2.3 de [**Co**], la série de Fredholm de $U^{r+1}\circ i_{r+1} = U_1^r$ et de $i_{r+1}\circ U^{r+1} = U_1^{r+1}$ sont donc égales.

Supposons que l'on ait une factorisation $P_{\underline{k}}(T) = Q(T)S(T)$ où Q est un polynôme tel que $Q(0) = 1$ et Q et S sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\}$. On pose $Q^*(T) := T^{\deg(Q)}Q(1/T)$. D'après Serre [**Se**], on a une décomposition (de Fredholm–Riesz) en somme directe de sous-espace fermés stables par l'action de U_1 :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L) = N^r_{\underline{k},Q}\oplus R^r_{\underline{k},Q}$$

telle que

- $\det(1-U_1.T; N^r_{\underline{k},Q}(J,\mathbb{Q}_p)) = Q^*(T)$,
- $Q^*(U_1)$ est inversible sur $R^r_{\underline{k},Q}$.

2.3.9. On a une factorisation $P_{\underline{k}}(T) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-a_iT)^{m_i}$ avec $a_i\in\bar{\mathbb{Q}}_p$ et $m_i\in\mathbb{Z}_{>0}$. Pour tout rationel $\alpha\geqslant 0$, on pose

$$Q^\alpha_{\underline{k}}(T) := \prod_{\substack{a_i\\ \mathrm{val}_p(a_i)=\alpha}} (1-a_iT)^{m_i}$$

et $S^\alpha_{\underline{k}}(T) = P_{\underline{k}}(T)/Q^\alpha_{\underline{k}}(T)$. Alors $Q^\alpha_{\underline{k}}(T)$ et $S^\alpha_{\underline{k}}(T)$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\}$. On pose

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{r,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L) = N^r_{\underline{k},Q^\alpha_{\underline{k}}}\subset \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}^{\dagger,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L) = \varinjlim_r \boldsymbol{\mathcal{S}}^{r,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L).$$

L'opérateur U_1 admet la pente α sur ces sous-espaces, i.e. les valeurs propres généralisée de U_1 sont de valuation α. Plus généralement, on écrira M^α pour désigner le sous-espace

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

d'un espace de Banach M muni d'une action complètement continu de U_1 sur lequel U_1 agit avec la pente α.

Lemme 2.3.10. *Pour tout entier naturel r, tout sous-groupe ouvert $J \subset I_H$, tout poids $\underline{k} := (k_1, k_2)$ et tout rationel positif α tels que $\alpha < k_1 - k_2 + 1$, on a*

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\dagger,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L) = \boldsymbol{\mathcal{S}}^{r,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \,\hat{\otimes}\, \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*, L)^{\alpha}.$$

Démonstration. Soit s un entier naturel supérieur à r. Puisque

$$\det(1 - T.U_1 \mid \boldsymbol{\mathcal{S}}^{s}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J))$$

ne dépend pas de s, on a $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{s,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L) = \boldsymbol{\mathcal{S}}^{s-1,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$. En effet, soit $f \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^{s,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$ propre pour U_1 de valeur propre λ. Donc $f = \lambda^{-1}U_1.f = i_{s-1}(\lambda^{-1}U_1^s.f)$ provient d'un élément $\lambda^{-1}U_1^s.f$ de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{s-1,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L)$. On vérifie aisément que cet argument se généralise à tous les noyaux $\mathrm{Ker}(U_1^s - \lambda.\mathrm{Id})^n$. La première égalité en résulte. Soit maintenant Q le conoyau de l'injection canonique de $L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p)$ dans $\mathcal{O}^0(B_0)$. On a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, L_{\underline{k}}(\mathbb{Z}_p) \,\hat{\otimes}\, \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*, \mathbb{Z}_p)^{\alpha} &\to \boldsymbol{\mathcal{S}}^{0}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, \mathbb{Z}_p)^{\alpha} \\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, Q \,\hat{\otimes}\, \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*, \mathbb{Z}_p)^{\alpha}. \end{aligned}$$

L'isomorphisme du lemme resulte du fait que la norme de l'opérateur U_1 sur

$$H^0(J, Q \,\hat{\otimes}\, \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*$$

est inférieure ou égale à p^{-m} avec $m = k_1 - k_2 + 1$. En effet, en considérant la base $z^m, z^{m+1}, \ldots$ de Q. On voit aisément que les valeurs propres de l'opérateur induit par m_t sur Q sont simples et valent $p^m, p^{m+1}, \ldots$. Donc m_t induit un opérateur m_t^* de norme p^{-m} sur Q. Comme t_{a_t,p^2} respecte l'intégralité, U_1 est donc de norme inférieur à p^{-m} sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^0(J, Q \,\hat{\otimes}\, \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})^*, L)$. Le troisième terme de la suite exacte ci-dessus qui est la partie de pente α du L-dual ce module est donc triviale, ce qui termine la démonstration. $\square$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.3.11. *Pour tout entier $A > 0$, il existe un entier B tel que si $0 \leqslant \alpha < k_1 - k_2 + 1 \leqslant A$ et $k_2 > B$, le morphisme canonique suivant est un isomorphisme*

$$e_0.S_{\underline{k}}(K_J, L)^{\alpha} \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}^{\dagger,\alpha}_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J, L).$$

Démonstration. Ce morphisme est évidement injectif. Rappelons que $T_J = \bar{S}^{\circ}_{K_J}[1/E]$. C'est un sous-schéma ouvert de $\bar{S}_{K_J/\mathbb{Z}_p}$ Fixons A comme dans l'énoncé. D'après le lemme précédent, le théorème résultera de ce que le morphisme suivant est surjectif pour tout $i \leqslant p - 2$ si b est suffisament grand :

$$e_0.H^0(\bar{S}_{K_J}, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}} \otimes \det(\underline{\omega})^{i+b(p-1)} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to e_0.H^0(T_J, \omega^{\mathrm{cu}}_{\underline{k}} \otimes \det(\underline{\omega})^{i+b(p-1)} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Cela résulte d'un argument dû à Hida [**Hi**, Proposition 3.6], sous-l'hypothèse que la dimension de $e_0.S_{\underline{k}+(i+b(p-1))(1,1)}(K_J, \mathbb{C})$ est bornée indépendament de $b \geqslant 0$. Or la vérification de cette dernière hypothèse résulte du Théorème 3.2 de [**TU**] dans le cas où $F = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{Q}$ est le parabolique de Siegel. $\square$

2.4. Familles

Le but de cette section est de mettre en famille la construction de la section précédente et de construire la variété de Hecke semi-ordinaire.

2.4.1. *Espaces de poids*

Pour tout tore S sur $\mathbb{Z}_p$, on note $\mathfrak{X}_S$ l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ tel que $\mathfrak{X}_S(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(S(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C}_p^\times)$ et $\mathfrak{X}_S^\circ$ la composante connexe du caractère trivial. Pour tout entier $g \geqslant 1$, on pose $\mathfrak{X}_g = \mathfrak{X}_{\mathbb{G}_m^g}$. Si R est une extension finie d'une algèbre d'Iwasawa $\Lambda_n := \mathbb{Z}_p[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, on note $\mathfrak{X}_R$ l'espace rigide analytique tel que $\mathfrak{X}_R(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(R, \mathbb{C}_p)$. Noter que $\mathfrak{X}_{\mathbb{G}_m^n} \cong \mathfrak{X}_{\Lambda_n} \times (\mu_{p-1}^n)^*$ et en particulier que $\mathfrak{X}_n^\circ \cong \mathfrak{X}_{\Lambda_n}$. Pour tout poids $\underline{w} \in \mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$, on note P_w le noyau du morphisme d'évaluation en $\underline{w}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_2)$ dans $\mathbb{C}_p$.

Pour tout $t \in S(\mathbb{Z}_p)$ et toute sous-variété analytique $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{X}_S^\circ$, on note $\langle t\rangle_{\mathfrak{V}}$ la fonction analytique sur $\mathfrak{V}$ telle que $\langle t\rangle(\chi) = \chi(t)$ pour tout $\chi \in \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p) \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(S(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C}_p^\times)$. Pour $\mathfrak{V} = (\mathbb{G}_m^n)^\circ$, on voit aisément que $\langle t\rangle_{\mathfrak{V}} \in \Lambda_n$ on le note alors $\langle t\rangle_{\Lambda_n}$. Si R une extension finie de Λ_n, on note aussi $\langle t\rangle_R$ son image dans R.

2.4.2. *Poids ou caractères arithmétiques*

Pour tout $\underline{k} = (k_1, k_2)$, $\chi_{\underline{k}} \in \mathfrak{X}_{T_H}(\mathbb{C}_p) = \mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$ est appelé un poids ou caractère algébrique. Un poids ou caractère arithmétique est le produit d'un caractère d'ordre fini de $T_H(\mathbb{Z}_p)$ et d'un caractère algébrique. Un tel poids w est donc donné par sa partie algébrique $\underline{k}$ et sa partie finie $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Si p^r est un multiple commun des conducteurs de ε_1 et ε_2, on peut construire le faisceau automorphe correspondant $\omega_{\underline{w}}$ sur la variété $T_{I_{H,r}}$ comme la $\underline{\varepsilon}$ partie de l'image directe de $\omega_{\underline{k}}$ sur le revêtement canonique de $T_{I_{H,r}}$ de groupe $T_H(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$. Tous les résultats des parties précédentes s'étendent sans difficultés au cas où on remplace un poids algébrique $\underline{k}$ par un poids arithmétique $\underline{w} = (\underline{k}, \underline{\varepsilon})$.

2.4.3. *Voisinage analytique de T_H*

Pour tout entier r, on pose $\mathcal{T}_{H,r}$ l'affinoide rigide analytique tel que

$$\mathcal{T}_{H,r}(\mathbb{C}_p) = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2) \in T_H(\mathbb{C}_p) \text{ tel que } t_1, t_2 \in B_r^\times(\mathbb{C}_p)\}.$$

On a un isomorphisme canonique $\mathcal{T}_{H,r} \cong (B_r^\times)^2$. Pour tout $\underline{w} \in \mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$, on note alors $\underline{w} = (w_1, w_2)$ où w_1 (respectivement w_2) désigne la restriction de $\underline{w}$ à la première composante de T_H (respectivement la seconde). Le lemme suivant est laissé au lecteur.

Lemme 2.4.4. *Soit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}_2$ un affinoide de $\mathfrak{X}_2$. Alors, il existe un entier $r_{\mathfrak{U}} > 0$ tel que pour tout caractère arithmétique $\chi \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}_p)$, χ se prolonge en un caractère analytique de $\mathcal{T}_{H,r}$ pour tout $r \geqslant r_{\mathfrak{U}}$. De plus, pour tout $r > r_{\mathfrak{U}}$, $(\chi, t) \mapsto \chi(t)$ définit une fonction analytique sur $\mathfrak{U} \times \mathcal{T}_{H,r}$.*

2.4.5. Pour tout ouvert affinoide connexe $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}_2$ et un entier $r \geqslant r_{\mathfrak{U}}$, on en déduit qu'il y a une action analytique de $\mathcal{T}_{H,r}$ sur $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$ par

$$(t.\phi)(\underline{w}) := \underline{w}(t)\phi(w).$$

Pour tout $\gamma \in \Delta_H$, on considère le cocycle à valeur dans $\mathcal{T}_{H,r}$

$$t(\gamma, z) := \mathrm{diag}((a+cz), |\det(\gamma)|_p \det(\gamma)(a+cz)^{-1}).$$

Cela permet de définir une action $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-linéaire de $\gamma \in \Delta_{H,r}$ sur

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})$$

par

$$(\gamma.l)(f)(z) := l(t(\gamma,z).f)\left(\frac{b+dz}{a+cz}\right)$$

pour tout $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}(B_r)^0 \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})$ et $f \in \mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$ en identifiant canoniquement $t(\gamma, z)$ comme une fonction analytique sur $\mathfrak{U}$ par $\underline{w} \mapsto \underline{w}(t(\gamma, z))$. Soit $J \subset I_{H,r}$, on pose

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})}(H^0(J, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}))^*, \mathcal{O}(\mathfrak{U})).$$

C'est clairement un module sur $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$.

Lemme 2.4.6. *Pour tout $r > r_{\mathfrak{U}}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module de Banach orthonormalisable. Pour tout corps p-adique L et tout poids arithmétique $\underline{w} \in \mathfrak{U}(L)$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J) \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U}),\underline{w}} L \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{w},\mathrm{ord}}(J, L).$$

Démonstration. Il est aisé de voir que

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})}(H^0(J, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}))^*, \mathcal{O}^0(\mathfrak{U}))$$

est $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$-module complet pour la topologie p-adique. $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J)$ est donc un $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module de Banach pour la norme pour laquelle $\boldsymbol{\mathcal{S}}^0$ est le réseau des éléments de norme inférieure à 1. Soit $\underline{w}_0 \in \mathfrak{U}(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\mathfrak{U}$ soit contenu dans une boule fermée de rayon strictement inférieur à 1 de centre $\underline{w}_0$. On a alors

$$\begin{aligned} &H^0(J, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}))[p] \\ &\qquad = H^0(J, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes e_0.V_{1,1})) \\ &\qquad = H^0(J, \mathcal{O}^0_{\underline{w}_0}(B_r) \otimes e_0.V_{1,1}) \otimes (\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boldsymbol{\mathcal{S}}^0 \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est libre sur $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J)$ est un $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module de Banach orthonormalisable.

Pour démontrer l'isomorphisme, notons t une variable locale de $\mathfrak{U}$ en $\underline{w}$ que l'on peut supposer telle que $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})/t.\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}) = O_L$. On voit donc que $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J) \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U}),\underline{w}} L$ est isomorphe à

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{O_L}((H^0(J, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})))^* \otimes \mathcal{O}^0(\mathfrak{U})/t.\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), K) \\ &\qquad \cong \mathrm{Hom}_{O_L}((H^0(J, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}))[t])^*, L) \\ &\qquad \cong \mathrm{Hom}_{O_L}((H^0(J, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})/t.\mathcal{O}^0(\mathfrak{U}), \mathcal{O}^0(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}})))^*, L) \\ &\qquad \cong \mathrm{Hom}_{O_L}((H^0(J, \mathcal{O}^0_{\underline{w}}(B_r) \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{ord}}))^*, L) \\ &\qquad = \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{w},\mathrm{ord}}(J, L). \end{aligned}$$

Noter que l'on a écrit $\mathcal{O}^0_{\underline{w}}(B_r)$ pour souligner que l'action de J sur $\mathcal{O}^0(B_r)$ dépend de $\underline{w}$. $\square$

2.4.7. *Série de Fredholm*

De même que pour $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\underline{k},\mathrm{ord}}(J,L)$, on dispose pour tout affinoide $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}_2$ d'une action complètement continue et $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-linéaire de l'opérateur U_1 sur $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}$ telle que l'isomorphisme du lemme précédent commute à U_1. Nous laissons aux soins du lecteur la vérification de ce point. Puisque ce $\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J)$ est un $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module de Banach orthonormalisable, on peut définir la série de Fredholm associée à U_1 :

$$P_{\mathfrak{U}}(T) := \det(1 - T.U_1; e.\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}) \in \mathcal{O}^0(\mathfrak{U})\{\{T\}\}.$$

Cette série de Fredholm ne dépend pas de r par un argument semblable à celui de la § 2.3.8. Si $\mathfrak{U}$ est un sous-affinoide de $\mathfrak{V}$, l'homomorphisme de restriction de $\mathfrak{V}$ à $\mathfrak{U}$ induit un isomorphisme qui généralise celui du Lemme 2.4.6 :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{V},\mathrm{ord}}(J) \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{V})} \mathcal{O}(\mathfrak{U}) \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J).$$

Ce dernier commute à U_1 et par conséquent on voit que $P_{\mathfrak{V}}(T)$ s'envoit sur $P_{\mathfrak{U}}(T)$. On obtient donc une série entière

$$P_{\mathfrak{X}_2}(T) := \varprojlim_{\mathfrak{U}} P_{\mathfrak{U}}(T) \in \Lambda_{\mathfrak{X}_2}\{\{T\}\}.$$

Elle ne dépend que du niveau auxiliaire $K \subset G(\mathbb{A}_f)$. Nous la noterons parfois $P_{\mathfrak{X}_2}(\underline{w}, T)$ pour souligner que c'est une fonction rigide sur $\mathfrak{X}_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathrm{rig}}$.

2.4.8. *Variété de Hecke semi-ordinaire*

La méthode pour construire la variété de Hecke à partir de la série de Fredholm et des espaces de familles de formes modulaires est assez formelle. Elle est dûe a Coleman et Mazur [**CM**] dans le cas des formes modulaires elliptiques et elle a été généralisée par Chenevier au case des groupes unitaires compacts à l'infini [**Ch**].

On fixe K et on considère la variété spectrale correspondante. Il s'agit de la sous-variété analytique $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X}_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathrm{rig}}$ déterminée par l'équation $P_{\mathfrak{X}_2}(\underline{w}, T) = 0$. $\mathfrak{Z}$ est une surface et on considère le morphisme de projection $p_1 : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}_2$. Rappelons que l'on peut construire un recouvrement admissible de $\mathfrak{Z}$ de la façon suivante. On a une bijection entre l'ensemble des paires admissibles $(\mathfrak{U}, Q)$ où $\mathfrak{U}$ est un affinoide de $\mathfrak{X}_2$ et $Q(T) \in \mathcal{O}(\mathfrak{U})[T]$ est un polynôme tel qu'il existe une factorisation $P_{\mathfrak{U}}(T) = Q(T)S(T)$ avec Q et S premiers entre eux dans $\mathcal{O}(\mathfrak{U})\{\{T\}\}$ et l'ensembe des sous-domaines affinoides $\mathfrak{W}$ de $\mathfrak{Z}$ tels que $p_1 : \mathfrak{W} \to \mathfrak{X}_2$ est fini d'image $\mathfrak{U}$ et tels que $\mathfrak{W}$ est une réunion de composantes connexes de $p_1^{-1}(\mathfrak{U})$. De plus, $(\mathfrak{U}, Q)$ correspond à $\mathfrak{W}$ si et seulement si $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{U},Q} = \mathrm{Sp}(\mathcal{O}(\mathfrak{U})/(Q^*(T)))$ avec $Q^*(T) := T^{\deg(Q)}Q(1/T)$. De plus la famille $\{\mathfrak{W}_{\mathfrak{U},Q}; (\mathfrak{U}, Q) \text{ admissible}\}$ forme un recouvrement admissible de $\mathfrak{Z}$.

Fixons une paire admissible $(\mathfrak{U}, Q)$ et soit $P_{\mathfrak{U}}(T) = Q(T)S(T)$ la factorisation correspondante. D'après [**Co**], on a une factorisation Hecke équivariante de l'espace des familles de formes semi-ordinaires paramétrisées par $\mathfrak{U}$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}} = N_{\mathfrak{U},Q} \oplus R_{\mathfrak{U},Q}$$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

pour tout $r \geqslant r(\mathfrak{U})$ telle que

(i) $\det(1 - T.U_1; N_{\mathfrak{U},Q}) = Q^*(T)$,

(ii) $Q^*(U_1)$ est inversible sur $R_{\mathfrak{U},Q}$.

Soit $N^0_{\mathfrak{U},Q} \subset N_{\mathfrak{U},Q}$ le $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$-module des éléments de norme inférieure ou égale à 1. On considère $\boldsymbol{h}^\circ_{\mathfrak{U},Q}$ l'algèbre de Hecke opérant sur $N^\circ_{\mathfrak{U},Q}$ (i.e. la sous $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})}(N^0_{\mathfrak{U},Q})$ engendrée par l'image de $\mathcal{R}_{N,p} := \mathcal{R}_{Np}[U_0, U_1]$). C'est une algèbre projective de rang fini sur $\mathcal{O}^0(\mathfrak{U})$. On pose aussi $\boldsymbol{h}_{\mathfrak{U},Q} = \boldsymbol{h}^0_{\mathfrak{U},Q} \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{U})$. On considère $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q} := \mathrm{Sp}(\boldsymbol{h}_{\mathfrak{U},Q})$. Il est de dimension 2 et sa projection sur $\mathfrak{U}$ est finie. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{U} & \mathfrak{W}_{\mathfrak{U},Q} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.4.9. *Soit $(\mathfrak{U}, Q)$ une paire admissible comme ci-dessus et soit $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ un sous-domaine affinoïde induisant une paire admissible $(\mathfrak{U}', Q')$ avec Q' l'image de Q par l'homomorphisme de restriction de $\mathcal{O}(\mathfrak{U})[T]$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{U}')[T]$, alors on a*

$$N^r_{\mathfrak{U},Q} \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})} \mathcal{O}(\mathfrak{U}') \cong N^r_{\mathfrak{U}',Q',\mathrm{ord}}$$

avec $r \geqslant r_{\mathfrak{U}}$. De plus, le morphisme canonique surjectif suivant est de noyau nilpotent

$$\boldsymbol{h}_{\mathfrak{U},Q} \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})} \mathcal{O}(\mathfrak{U}') \twoheadrightarrow \boldsymbol{h}_{\mathfrak{U}',Q'}.$$

Démonstration. La preuve du premier point résulte essentiellement dans notre contexte des mêmes arguments que [**CM**, 7.2]. Il est bien connu que le deuxieme point en découle aisément. □

Par ce lemme, on vérifie sans difficulté que les affinoides $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}$ se recollent et forment le recouvrement admissible d'un espace rigide réduit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_K$ muni de projections sur $\mathfrak{X}_2$ et sur $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_K$. Par construction, on a le théorème suivant.

Théorème 2.4.10. *Les points de $\mathfrak{H}_K(\mathbb{C}_p)$ sont en bijection avec les systèmes de valeurs propres à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{R}_{N,p}$ opérant sur les formes p-adiques de Siegel semi-ordinaires. Chacun composante irréductible de $\mathfrak{H}_K$ est de dimension 2. Tout sous-domaine affinoide purement de dimension 2 de $\mathfrak{H}_K$ contient un ensemble Zariski dense de points classiques (i.e. associés à des formes modulaires de Siegel classiques semi-ordinaires de pente finie par rapport U_1 et de niveau $K \cap I_r$).*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{H}(\mathbb{C}_p)$ et $\underline{w}$ sa projection sur $\mathfrak{X}_2$. Il existe un couple $(\mathfrak{U}, Q)$ admissible tel que $x \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}$ et $\underline{w} \in \mathfrak{U}(\mathbb{C}_p)$. Notons $Q_{\underline{w}}$ l'image de $Q \in \mathcal{O}(\mathfrak{U})[T]$ dans $\mathbb{C}_p[T]$ obtenu par l'évaluation au point $\underline{w}$. Pour tout $r \geqslant r(\mathfrak{U})$, on a

$$N_{\mathfrak{U},Q}(I_{H,r}) \otimes_{\underline{w}} \mathbb{C}_p \cong N_{\{\underline{w}\},Q_{\underline{w}}}(I_{H,r}).$$

Le morphisme surjectif suivant a donc un noyau nilpotent

$$\boldsymbol{h}_{\mathfrak{U},Q} \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U}),\underline{w}} \mathbb{C}_p \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{h}_{\{\underline{w}\},Q_{\underline{w}}}.$$

Les points de $\mathfrak{H}(\mathbb{C}_p)$ qui se projètent sur $\underline{w}$ sont donc en bijection avec les homomorphismes de l'algèbre de Hecke $\boldsymbol{h}_{\{\underline{w}\},\mathrm{fin}}$ opérant sur $\mathcal{S}_{\underline{w},\mathrm{fin}}$; l'indice « fin » signifiant le sous-espace de $\mathcal{S}_{\underline{w}}$ sur le quel U_1 opère avec une pente finie.

Fixons $\mathfrak{V}$ un sous-domaine affinoide de dimension 2 de $\mathfrak{H}$. Soit α un rationel positif ou nul et $x \in \mathfrak{H}(\mathbb{C}_p)$ dont la projection dans $\mathfrak{Z}$ est égale à $(\underline{w}, \lambda_1)$ avec $|\lambda_1| = p^{-\alpha}$ et $\underline{w}$ localement algébrique de poids (k_1, k_2) avec $\alpha < k_1 - k_2 + 1$ et $k_2 \gg 0$. Par le théorème 2.3.11 le point x correspond à un caractère de l'algèbre de Hecke opérant sur les formes classiques de poids $\underline{k}$. Les $\mathbb{C}_p$-points de $\mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ dont la projection sur $\mathfrak{U}$ satisfont les conditions $\alpha < k_1 - k_2 + 1$ et $k_2 \gg 0$ sont donc associés à des formes de Siegel semi-ordinaires classiques. Comme ces conditions forment un ensemble Zariski dense dans l'espace des poids $\mathfrak{U}$ de la projection de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{X}_2$, le théorème en résulte. □

2.4.11. *Notations*

Pour toute paire admissible $(\mathfrak{U}, Q)$, on a un homomorphisme canonique d'algèbre $\mathcal{R}_{N,p} \to \boldsymbol{h}^0_{\mathfrak{U},Q}$. En passant à la limite projective sur toute les paires admissibles, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{R}_{N,p}$ dans $\Lambda_{\mathfrak{H}}$ (voir le début de l'article pour la notation $\Lambda_{\mathfrak{H}}$) que l'on note $\lambda_{\mathfrak{H}}$. Pour tout sous-espace rigide $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$, on note $\lambda_{\mathfrak{U}}$ le morphisme $\lambda_{\mathfrak{H}}$ composé avec le morphisme de restriction $\Lambda_{\mathfrak{H}} \to \Lambda_{\mathfrak{U}}$.

2.4.12. *Terminologie*

Un point $x \in \mathfrak{H}(\mathbb{C}_p)$ sera dit respectivement algébrique, régulier ou arithmétique si sa projection sur l'espace des poids $\mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$ est un poids respectivement algébrique, régulier ou arithmétique.

Lemme 2.4.13. *Soit $\mathfrak{U}$ un sous-domaine affinoide de $\mathfrak{X}_2$ et une décomposition $P_{\mathfrak{U}} = Q(T)S(T)$ admissible. Alors il existe un voisinage affinoide strict $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{U}$ et une décomposition $P_{\mathfrak{U}'} = Q'(T)S'(T)$ qui s'envoit sur la décomposition $P_{\mathfrak{U}} = Q(T)S(T)$ via l'homomorphisme de restriction de $\mathfrak{U}$ à $\mathfrak{U}'$. De plus $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}_{\mathfrak{U}',Q'}$ et $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}',Q'}$ sont respectivement des voisinages affinoides strict de $\mathfrak{W}_{\mathfrak{U},Q}$ et $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}$ et $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U}',Q'} \to \mathfrak{U}'$ a le même degré que $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q'} \to \mathfrak{U}$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition A5.9 de Coleman [**Co**]. □

Pour tout rationel $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathfrak{Z}^\alpha = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{X}_2 \times \{x;\ |x| = p^{-\alpha}\}$ et $\mathfrak{H}^\alpha = \mathfrak{H} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}^\alpha$. Le théorème suivant est un corollaire des résultats précédents. C'est le théorème énoncé dans [**SU**] que nous énonçons dans un language plus classique.

Théorème 2.4.14. *Soit F une forme modulaire de Siegel semi-ordinaire de poids $\underline{k}_0$ pour $K \cap I_n$ et de pente finie α pour l'action de U_1. Alors il existe $\mathfrak{V}$ un voisinage génériquement étale de $\underline{k} \in \mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$, un homomorphisme $\lambda_{\mathfrak{V}} : \boldsymbol{h}^\alpha_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(K \cap I_n) \to \mathcal{O}(\mathfrak{V})$*

et un ensemble Zariski dense $\Sigma \subset \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ de points arithmétiques tels que pour tout $x \in \Sigma$, il existe une forme modulaire de Siegel classique F_x de niveau $K \cap I_n$ et poids $\underline{k}_x = (k_{1,x}, k_{2,x})$ telle que si l'on note $\lambda_x = x \circ \lambda_{\mathfrak{U}}$ pour tout $x \in \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$, on ait :

$$F_x \mid T_\xi = \lambda_x(T_\xi).F_x \quad \textit{pour tout } \xi \textit{ tel que } (\nu(\xi), Np) = 1,$$
$$F_x \mid U_0 = \lambda_x(U_0).F_x \quad \textit{et} \quad F_x \mid U_1 = p^{k_{2,x}-3}\lambda_x(U_1).F_x$$

et il existe $x_0 \in \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ au dessus de $\underline{k}_0$ tel que $\lambda_{x_0} = \lambda_F$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}$ l'affinoide réduit à $\{\underline{k}_0\}$ et considéront la décomposition $P_{\underline{k}_0}(T) = Q^\alpha_{\underline{k}_0}(T)S^\alpha_{\underline{k}_0}(T)$. On applique le Lemme 2.4.13. On obtient donc un voisinage affinoide strict $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{U} = \{\underline{k}_0\}$, une décomposition $P_{\mathfrak{U}'} = Q'S'$ et un voisinage stricte $\mathfrak{W}_{\mathfrak{U},Q}$ de $\{(\underline{k}_0, \lambda_F(U_1)^{-1})\} \subset \mathfrak{Z}$ que l'on peut supposer contenu dans $\mathfrak{Z}^\alpha$. Il est facile de vérifier, compte tenu du Théorème 2.4.10, que $\mathfrak{V} := \mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}$ satisfait les conclusions du théorème. □

Lemme 2.4.15. *L'algèbre $\Lambda_{\mathfrak{H}}$ est profinie.*

Démonstration. Pour tout affinoide $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{H}$. Soit

$$\Lambda_{\mathfrak{W}} := \varprojlim_{\mathfrak{W}' \subset \mathfrak{W}} \mathcal{O}^0(\mathfrak{W}')$$

où $\mathfrak{W}'$ parcourant les sous-domaines affinoides stricts de $\mathfrak{W}$ et les morphismes de transitions étant les morphismes de restrictions. On peut vérifier facilement que $\Lambda_{\mathfrak{W}}$ est finie sur une algèbre de séries formelles à deux variables. Elle est donc profinie. Par ailleurs, on voit facilement que

$$\Lambda_{\mathfrak{H}} = \varprojlim_{\mathfrak{W}} \mathcal{O}^0(\mathfrak{W}) = \varprojlim_{\mathfrak{W}} \Lambda_{\mathfrak{W}}.$$

$\Lambda_{\mathfrak{H}}$ est une limite projective d'algèbre profinie. Elle est donc profinie. □

2.4.16. *p-stabilisation*

Soit F une forme modulaire de Siegel de poids $\underline{k}$ et de caractère central ω_F, de niveau K maximal en p et propre pour les opérateurs de Hecke de $\mathcal{R}_N$. Notons $\pi_p(F)$ la représentation locale de $G(\mathbb{Q}_p)$ correspondante. On appelle p-stabilisation de F, une forme modulaire de Siegel G telle que $G_{\mathbb{A}} \in \pi(F)^I$ (invariante à droite par le sous-groupe d'Iwahori $I \subset G(\mathbb{Z}_p)$) qui soit une forme propre pour les opérateurs U_0 et U_1. Si tel est le cas, il est aisé de vérifier que les valeurs propres respectives de U_0 et U_1 peuvent s'ecrire sous la forme γ_0 et $p^{-1}\gamma_0\gamma_1$ avec γ_0 et γ_1 des racines de $\lambda_F(Q_p(X))$ telles que $\gamma_0\gamma_1 \neq p^{k_1+k_2-3}\omega_F(p)$. On dira que la p-stabilisation est associée à la paire (γ_0, γ_1).

Lemme 2.4.17. *Soit F une forme modulaire de Siegel de poids $\underline{k}$ pour $K \cap I$, propre pour les opérateurs de Hecke U_0 et U_1 de valeurs propres γ_0 et $p^{-1}\gamma_0\gamma_1$. Si les valeurs γ_1/γ_0, $\gamma_0\gamma_1 p^{3-k_1-k_2}\omega_F^{-1}(p)$, $\gamma_1^2 p^{3-k_1-k_2}\omega_F^{-1}(p)$ et $\gamma_0^2 p^{3-k_1-k_2}\omega_F^{-1}(p)$ sont toutes différentes de p et de p^{-1}, F est la p-stabilisation d'une forme de niveau premier à p.*

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit π_p la représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par F. C'est un constituent de $\alpha_1 \times \alpha_2 \rtimes \beta$ avec α_1, α_2 et β des caractères non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^\times$. Quitte à permuter convenablement ces caractères on peut supposer que $\gamma_0 = p^{-3/2}\beta(p)$, $\gamma_1 = p^{-3/2}\alpha_1(p)\beta(p)$ et $\gamma_1^{-1}p^{k_1+k_2-3}\omega_F(p) = p^{-3/2}\alpha_2(p)\beta(p)$. On a donc

$$\alpha_1(p) = \gamma_1/\gamma_0, \quad \alpha_2(p) = (\gamma_0\gamma_1)^{-1}p^{k_1+k_2-3}\omega_F(p),$$
$$\alpha_1\alpha_2^{-1}(p) = \gamma_1^2 p^{3-k_1-k_2}\omega_F^{-1}(p) \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2(p) = \gamma_0^{-2}p^{k_1+k_2-3}\omega_F(p).$$

Ces quatre valeurs sont différentes de $p^{\pm 1}$ par hypothèse. Par le Lemme 3.2 de [**ST**], $\alpha_1 \times \alpha_2 \rtimes \beta$ est donc irréductible et π_p est non ramifiée. Cela entraine clairement que F est la p-stabilisation d'une forme de niveau premier à p. □

2.4.18. *Familles de représentations cuspidales*

L'action de l'algèbre de Hecke $R_{N,p}$ ne donne aucune information locale en les premiers divisant N sur les formes de Siegel qui interviennent dans les familles. Le but de cette section est de remédier à cet inconvénient. Rappelons que les constructions des sections précédentes dépendent d'un sous-groupe ouvert compact K de niveau N premier à p. Soit $\mathbb{A}_N := \prod_{q|N} \mathbb{Q}_q$ et soit $K_N \subset G(\mathbb{A}_N)$ la composante de K supportée aux places divisant N. Nous fixons $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}_2$, $r \geqslant r_{\mathfrak{U}}$ et $J \subset I_{H,r}$ un ouvert compact. Nous allons désigner par $\mathcal{S}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(K_N)$ le $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module que nous avons noté $\mathcal{S}_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(J)$ dans les section précédentes. On pose

$$\tilde{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}} := \varinjlim_{V \subset G(\mathbb{A}_N)} \mathcal{S}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(V).$$

Ce module est clairement muni d'une action de $G(\mathbb{A}_N)$. Noter qu'il n'est pas admissible. Soit $(\mathfrak{U}, Q)$ une paire admissible pour la série de Fredholm de niveau K_N. On note $N_{\mathfrak{U},Q}(K_N)$ le facteur direct de $\mathcal{S}_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}(K_N)$ correspondant. On considère $\tilde{N}_{\mathfrak{U},Q}$ le sous $\mathcal{O}(\mathfrak{U})[G(\mathbb{A}_N)]$-module de $\tilde{\mathcal{S}}^r_{\mathfrak{U},\mathrm{ord}}$ engendrée par $N_{\mathfrak{U},Q}(K_N)$. Comme ce dernier est de type fini sur $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$, on voit par construction que $\tilde{N}_{\mathfrak{U},Q}$ est une représentation lisse admissible de $\mathcal{O}(\mathfrak{U})[G(\mathbb{A}_N)]$ et que $(\tilde{N}_{\mathfrak{U},Q})^{K_N} = N_{\mathfrak{U},Q}(K_N)$.

Soit $\mathfrak{V}$ un sous-domaine affinoide irréductible de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}(K_N)$ le sous-domaine affinoide de la variété de Hecke semi-ordinaire correspondant à la paire admissible $(\mathfrak{U}, Q)$ et $\lambda_{\mathfrak{V}}$ le caractère de $\mathcal{R}_{N,p}$ correspondant. On pose $\tilde{N}_{\mathfrak{V}}$ le sous-module de $\tilde{N}_{\mathfrak{U},Q} \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})} \mathcal{O}(\mathfrak{V})$ sur lequel $\mathcal{R}_{N,p}$ opère via $\lambda_{\mathfrak{V}}$. C'est une représentation lisse admissible et donc de longueur finie de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})[G(\mathbb{A}_N)]$. On note $\varPi_N(\mathfrak{V})$ l'ensemble (fini) des sous-quotients irréductibles (pour l'action de $G(\mathbb{A}_N)$) de $\tilde{N}_{\mathfrak{V}} \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V})$ avec $\bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V})$ une clôture algébrique de $\mathcal{F}(\mathfrak{V})$ le corps des fractions de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$. Soit $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$ la clotûre intégrale de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ dans $\bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V})$. L'actions de $G(\mathbb{A}_N)$ étant définie sur le $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$-module $\tilde{N}_{\mathfrak{V}}$, on peut voir que les représentations $\pi \in \varPi_N(\mathfrak{V})$ sont des représentations $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$-entières. C'est à dire qu'elles contiennent des $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$-réseaux au sens du paragraphe I.9 de [**Vi**]. On rappelle qu'une représentation de longueur finie de $G(\mathbb{A}_N)$ est dite π_N-isotypique si tous ses facteurs de composition sont isomorphes à π_N. Alors $\tilde{N}_{\mathfrak{V}} \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V})$ se décompose en la somme de ses composantes isotypiques $\tilde{N}_{\bar{\mathfrak{V}}}(\pi)$ pour π variant dans $\varPi_N(\mathfrak{V})$. On a le théorème suivant.

Théorème 2.4.19. *Soit $\mathfrak{V}_0$ un affinoide irréductible de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}(K_N)$ et $\pi_0 \in \varPi_N(\mathfrak{V}_0)$. Alors il existe une composante irréductible $\mathfrak{V}$ contenant $\mathfrak{V}_0$ et une représentation $\pi \in \varPi_N(\mathfrak{V})$ muni d'un $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$-réseau L_π de V_π tel que $L_\pi \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V}_0)$ ait un unique quotient irréductible et que ce dernier soit isomorphe à π_0.*

Démonstration. Soit v_0 un élément de $\tilde{N}_{\mathfrak{V}_0}(\pi_0)$ engendrant un réseau d'une sous-représentation irréductible. Cette dernière est isomorphe à π_0. Soit $\mathfrak{Y}$ la réunion des composantes irréductibles de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{U},Q}$ contenant $\mathfrak{V}_0$. Alors $\mathfrak{Y}$ est connexe et le module $\tilde{N}_{\mathfrak{Y}} := \tilde{N}_{\mathfrak{U},Q} \otimes_{R_{N,P}} \mathcal{O}(\mathfrak{Y})$ est un facteur direct de $\tilde{N}_{\mathfrak{U},Q}$. On a donc

$$\tilde{N}_{\mathfrak{Y}} \otimes_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})} \mathcal{O}(\mathfrak{V}_0) \cong \tilde{N}_{\mathfrak{V}_0}.$$

On choisit alors un élément $v_1 \in \tilde{N}_{\mathfrak{Y}} \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{U})$ se projetant sur v_0. Pour chaque composante irréductible $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{Y}$, soit $e_{\mathfrak{V}} \in \mathcal{O}(\mathfrak{Y}) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{U})$ l'idempotent correspondant à la projection sur la $\mathfrak{V}$-composante. Puisque la somme des $e_{\mathfrak{V}}$ vaut 1, il existe au moins un $\mathfrak{V}$ tel que l'image de $v = e_{\mathfrak{V}}.v_1$ dans $N_{\mathfrak{V}_0}(\pi_0)$ soit un multiple non nul de v_0. On considère alors le $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$-réseau $L_{\mathfrak{V}}(v)$ de $\tilde{N}_{\mathfrak{V}} \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V})$ engendré par cet élément. Enfin, il existe $\pi \in \varPi_N(\mathfrak{V})$ tel que la projection $L_\pi(v)$ de $L_{\mathfrak{V}}(v)$ sur la composante isotypique de $N_{\mathfrak{V}}(\pi)$ soit non nulle. Celle-ci est un $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{V})$-réseau d'une représentation irréductible puisqu'elle est isotypique et monogène. Par construction de $L_\pi(v)$, on sait que $L_\pi(v) \otimes \bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V}_0)$ se projète canoniquement sur la représentation engendrée par un multiple non nul de v_0 qui est isomorphe à π_0. D'où le théorème. $\square$

3. Représentations galoisiennes

3.1. Représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Siegel

On rassemble dans cette section les résultats connus sur les représentations galoisiennes associées aux formes de Siegel. On démontre également un résultat d'irreductibilité qui sera essentiel pour la démonstration du Théorème A de l'introduction.

3.1.1. *Rappels et conventions*

On rappelle ici quelques définitions et résultats classiques sur les représentations galoisiennes. Le lecteur pourra consulter [**FP**] pour plus de précision. On pose $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On note ε le caractère cyclotomique de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{Z}_p^\times$ et ω le caractère de Teichmüller. Pour tout nombre premier q, on fixe $D_q \subset G_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe de décomposition en q et un Frobenius géométrique Frob_q (i.e. tel que $\varepsilon(\mathrm{Frob}_q) = q^{-1}$). On note $I_q \subset D_q \cong G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)$ le sous-groupe d'inertie de D_q.

Soit p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Par un théorème de Grothendieck, on sait que toute représentation p-adique ρ de $G_{\mathbb{Q}_q}$ dans $\mathrm{GL}_n(L)$ avec $q \neq p$ est potentiellement semistable. C'est à dire qu il existe un élément nilpotent N dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{n/L}$ telle que $\rho(g) = \exp(t_p(g)N)$ pour tout g dans un sous-groupe d'indice fini de I_q et où t_p est l'homomorphisme de I_q dans $\mathbb{Z}_p$ défini par $(q^{1/p^m})^g = \zeta_{p^m}^{t_p(g)}.q^{1/p^m}$ pour tout entier $m \geqslant 1$, $\{\zeta_{p^m};\ m \geqslant 1\}$ étant un système compatible de racines de l'unité suivant les puissances de p. Lorsque $q = p$, les représentations locales se décrivent avec des anneaux de Fontaine. Soient B_{cris}, B_{st} et B_{dR} les anneaux de périodes p-adiques de Fontaine [**Fo**]. Ils sont tous munis d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. De plus, B_{st} et B_{cris} sont munis d'une action du Frobenius que l'on note Φ et qui commute à celle de $G_{\mathbb{Q}_p}$. De surcroit, il existe un opérateur de monodromie N sur B_{st} tel que $\Phi \circ N = p.N \circ \Phi$. L'anneau B_{dR} possède une filtration séparée et exhaustive $(\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}})_i$. Pour toute représentation ρ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur un espace vectoriel V sur un corps de nombres p-adiques K, on note

$$D_x(V) = H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_x)$$

avec $x = \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{dR}$. Ce sont des espaces vectoriels sur K de dimension finie et on note $(D^i_{\mathrm{dR}}(V))_i$ la filtration de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ déduite de celle de B_{dR} (i.e. $D^i_{\mathrm{dR}}(V) = H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}})$). On dit que (ρ, V) est cristalline (respectivement semi-stable, de Rham) si le morphisme canonique $B_x \otimes D_x(V) \mapsto B_x \otimes V$ est un isomorphisme pour $x = \mathrm{cris}$ (respectivement $x = \mathrm{st}$, $x = \mathrm{dR}$). Rappelons enfin que i est un poids de Hodge–Tate de V si et seulement $\mathrm{D}^i_{\mathrm{dR}}(V) \neq \mathrm{D}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(V)$. Par exemple, $\mathbb{Q}_p(m)$ est de poids de Hodge–Tate $-m$ conformément à la convention *géométrique* que nous avons adoptée.

3.1.2. Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ une représentation cuspidale cohomologique de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ de caractère central ω_π et de poids $\underline{k}$ (i.e. $\pi_\infty \cong \pi^H_{\underline{k}}$ ou $\pi_\infty \cong \pi^W_{\underline{k}}$). Par « cohomologique », il est entendu ici que π_f intervient dans (la limite inductive sur K de) la cohomologie de de Rham de la variété de Siegel $S_{K/\mathbb{C}}$ pour un certain système de coefficients. Une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit vérifié est que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant 3$.

Soient N le plus petit entier tel que $\pi^{K_N} \neq 0$ et S l'ensemble des nombres premiers de ramification de π (i.e. divisant N). On désigne par λ_π le caractère de l'algèbre de Hecke abstraite $\mathcal{R}_N$ associé à l'action de cette dernière sur π^{K_N} et on note E_π le corps de nombres engendré par l'image de λ_π. On a le théorème suivant.

Théorème 3.1.3. *Pour tout idéal premier $\wp$ de E_π au dessus d'un nombre premier p, il existe une extension finie K de la complétion $E_{\pi,\wp}$ de E_π en $\wp$ et une représentation galoisienne semi-simple $\rho_{\pi,\wp} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_4(K)$ continue, non ramifiée hors de $S_p = S \cup \{p\}$ et telle que pour tout $\ell \notin S_p$, on ait*

$$\det(X.\,\mathrm{Id} - \rho_{\pi,\wp}(\mathrm{Frob}_\ell)) = P_{\pi,\ell}(X) = \lambda_\pi(P_\ell(X)),$$

où $P_\ell(X)$ est le polynôme de Hecke–Andrianov introduit au § 1.1.8. Soit $\omega_{\pi,p}$ le caractère galoisien p-adique associé à ω_π, alors $\rho_{\pi,\wp}$ satisfait la relation :

$$\rho^\vee_{\pi,\wp} \cong \rho_{\pi,\wp} \otimes \omega^{-1}_{\pi,p}. \tag{3.1.3.a}$$

Démonstration. Ce théorème est dû essentiellement à Laumon [**La**] et Weissauer [**We**] (voir également le paragraphe 3 de [**U1**]). Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème de Deligne sur l'existence des représentations galoisiennes associées aux formes cuspidales elliptiques propres lorsque π est de type CAP ou de type endoscopique. Lorsque l'on ne se trouve pas dans l'un de ces cas, Laumon [**La**] et Weissauer construisent une représentations galoisiennes dans la cohomologie étale de la variété de Siegel. En utilisant, une classification de Taylor on peut alors isoler un morceau de dimension 4 qui vérifie les conclusions du théorème ci-dessus pour ℓ en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. Voir [**We**] dans le cas général et la section 3 de [**U1**] lorsque π est non ramifiée en p et que $P_{\pi,p}$ admet quatre pentes distinctes.* Un argument pour obtenir une information sur tous les premiers $\ell \notin S_p$ est donné dans [**U1**]. La dernière partie de l'énoncé provient du fait que les valeurs propres de Frob_ℓ sont de la formes $\{\alpha_\ell, \omega_\pi(\ell)\alpha^{-1}, \beta_\ell, \omega_\pi(\ell)\beta^{-1}\}$. Voir également [**U1**] ou [**We**]. □

Les propriétés locales en p sont décrites dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.4. *On conserve les notations et hypothèses précédentes. On a les propriétés suivante sur la représentation p-adique $r_{\pi,p}$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ obtenue par restriction de $\rho_{\pi,\wp}$ à $D_p \cong G_{\mathbb{Q}_p}$.*

(i) *La représentation $r_{\pi,p}$ est de Hodge–Tate de poids d'égale multiplicité contenus dans l'ensemble $\{0, k_2-2, k_1-1, k_1+k_2-3\}$. Plus précisément, $\{0, k_1+k_2-3\}$ (respectivement $\{k_2-2, k_1-1\}$) sont des poids de Hodge–Tate pour $\rho_{\pi,\wp}$ si l'on sait que $\pi^H = \pi_f \otimes \pi^H_{\underline{k}}$ (respectivement $\pi^W = \pi_f \otimes \pi^W_{\underline{k}}$) est automorphe.*

(ii) *Si π est non ramifiée en p, $r_{\pi,p}$ est cristalline. De plus, le polynôme caractéristique du Frobenius Φ opérant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(r_{\pi,p})$ vaut $P_{\pi,p}(X)$.*

Démonstration. La remarque concernant les représentations CAP et endoscopiques du théorème précédent s'applique également ici. Dans ces cas, les résultats énoncés ci-dessus résultent des théorèmes de comparaisons de Faltings entre les réalisations étale et cristalline ou de de Rham des motifs construit par Scholl et pour le point (ii) du théorème de Katz–Messing appliqué à ces motifs. Dans les autres cas. Le point (i) résulte de Chai–Faltings [**CF**, Théorème VI.6.2] et des calculs explicites de Taylor [**T2**]. La première partie de (ii) résulte également de [**CF**, Théorème VI.6.2]. La seconde partie de (ii) est prouvée par Urban dans [**U2**]. □

3.1.5. *Remarque*

Lorsque π n'est pas endoscopique, π est stable si et seulement si tous les poids de Hodge–Tate apparaissent dans la π_f-partie de la cohomologie étale de la variété de Siegel.

3.1.6. On dispose de très peu de résultats sur les propriétés locales en $q \neq p$ et $q \in S$. Les seuls connus étant ceux établis par Genestier–Tilouine [**GT**]. Par leurs résultats, on sait déjà que l'opérateur de monodromie en q est d'ordre 2 si π_q admet des invariants par un sous-groupe parahorique de type Klingen. C'est malheureusement insuffisant pour démontrer la conjecture ci-dessous qui est inspirée par les tables de Schmidt [**S1**].

Conjecture 3.1.7. *Soit π telle que π_q admette exactement une droite fixe par le sous-groupe paramodulaire Δ_q. Alors, l'opérateur de monodromie correspondant est de rang un.*

* Ceci est génériquement satisfait lorsque π varie dans une famille semi-ordinaire.

3.2. Irréductibilité

Un ingrédient essentiel à la démonstration du Théorème A de l'introduction est l'irréductibilité de $\rho_{\pi,\wp}$ lorsque π n'est pas endoscopique ou de type CAP. Des résultats partiels dans cette direction on été démontré dans [**U1**] et [**Ra**]. Rappelons qu'une représentation ρ de degré deux de $G_{\mathbb{Q}}$ est dite impaire si l'image $\rho(c)$ d'une conjugaison complexe c est de déterminant -1. Nous allons prouver le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit π comme ci-dessus et p un nombre premier tel que $k_1 + k_2 - 3 < \frac{1}{2}(p+1)$. Supposons que $\rho_{\pi,\wp}$ est réductible et que ses sous-quotients irreductible de dimension 2 soient impairs. Alors π est CAP ou endoscopique.*

3.2.2. *Remarques*

(i) La représentation $\rho_{\pi,\wp}$ est impaire (i.e. $\omega_{\pi,p}(c) = -1$). En particulier, $\rho_{\pi,\wp}(c)$ admet la valeur propre -1 avec une multiplicité deux. De cette observation, il résulte aisément que lorsque $\rho_{\pi,\wp}$ est somme de deux représentations irréductibles de dimension 2, si l'une d'elle est impaire, l'autre le sera également.

(ii) Ce résultat est conjecturé sans aucune hypothèse sur p. Nous démontrons d'ailleurs une autre version de ce théorème où l'hypothèse $k_1+k_2-3 < \frac{1}{2}(p+1)$ est remplacée par une hypothèse de semi-ordinarité en p.

3.2.3. Nous dirons qu'une représentation ℓ-adique σ de $G_{\mathbb{Q}}$ est de poids motivique w si pour presque tout nombre premier q, σ est non ramifiée en q et les valeurs propres de $\sigma(\mathrm{Frob}_q)$ sont algébriques et de norme $q^{w/2}$ pour tout plongement complexe de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. La démonstration du Théorème 3.2.1 repose sur le théorème suivant qui est un corollaire de l'élégant Théorème 4.1 de Ramakrishnan [**Ra**].

Théorème 3.2.4 (Ramakrishnan). *Soient σ et σ' deux representations galoisiennes p-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$ irréductibles impaires de dimension 2 et de même poids w. On suppose en outre que chacune d'entre elles est cristalline de poids de Hodge–Tate distincts dans un intervalle de longueur plus petit que $\frac{1}{2}(p+1)$ et non ramifiées en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. Alors il existe un ensemble fini de nombres premiers S tel que :*

$$\begin{gathered}\mathrm{ord}_{s=1} L^S(\sigma^\vee \otimes \sigma', s) = -\dim(\sigma^\vee \otimes \sigma')^{G_{\mathbb{Q}}}, \\ L^S(\sigma, 1 + \tfrac{1}{2}w) \neq 0.\end{gathered}$$

3.2.5. *Remarques*

Rappelons que Taylor a démontré dans [**T2**, **T4**] le prolongement méromorphe de $L^S(\sigma, s)$ en prouvant la modularité de la restriction de σ à un corps totalement réel F suffisament grand (et malheureusement pas forcément résoluble sur $\mathbb{Q}$). En s'inspirant de la méthode de Taylor, Ramakrisnan a démontré la modularité simultanée des représentations σ et σ' restreintes à une même extension totalement réelle. Il en a déduit l'existence d'un prolongement méromorphe au plan complexe de $L^S(\sigma^\vee \otimes \sigma', s)$ et le théorème ci-dessus à l'aide d'un élégant argument invoquant le théorème de Brauer (voir [**Ra**]).

3.2.6. *Preuve du Théorème 3.2.1*

Supposons que $\rho_{\pi,\wp}$ soit réductible. Nous allons montrer que π est CAP ou endoscopique. Le fait que $\rho_{\pi,\wp}$ satisfasse (3.1.3.a) nous permet de diviser l'étude de sa réductibilité suivant les possibilités ci-après.

Cas A. Si $\rho_{\pi,\wp}$ contient un facteur de dimension 1, on voit facilement que l'on est dans l'un des cas suivants.

(i) $\rho_{\pi,\wp} \cong \xi_1 \oplus \xi_1' \oplus \xi_2 \oplus \xi_2'$ avec ξ_i et ξ_i' des caractères tels que $\xi_i\xi_i' = \omega_{\pi,p}$.

(ii) $\rho_{\pi,\wp} \cong \xi_1 \oplus \xi_1' \oplus \sigma$ avec ξ_1, ξ_1' deux caractères et σ une représentation irréductible de dimension 2 impaire tels que $\det(\sigma) = \xi_1\xi_1' = \omega_{\pi,p}$.

(iii) $\rho_{\pi,\wp} \cong \tau \oplus \xi$ avec τ un facteur irréductible de dimension 3 vérifiant $\tau^\vee \otimes \omega_{\pi,p} \cong \tau$ et ξ un caractère de carré égal à $\omega_{\pi,p}$.

On commence par traiter les cas (i) et (ii). On choisit un caractère χ intervenant dans la décomposition de $\rho_{\pi,\wp}$ de poids motivique maximal parmi les consituants de $\rho_{\pi,\wp}$. C'est possible même dans le cas (ii) par la condition $\det(\sigma) = \xi_1\xi_1' = \omega$. En utilisant le Théorème 3.2.4 lorsqu'on se trouve dans le cas (ii), on voit aisément que $L^S(s, \pi \otimes \chi^{-1}, \mathrm{spin})$ admet un pôle en $s = 1$. On en déduit que π est une représentation CAP d'après les travaux de Piatetski-Shapiro [**PS2**, Théorème 2.2].

Considérons maintenant le cas (iii). Les conditions $\xi^2 = \omega_{\pi,p}$ et $\tau^\vee \otimes \omega_{\pi,p} \cong \tau$ entrainent que les poids de Hodge–Tate de $\rho_{\pi,\wp}$ sont de la forme $\{p, q, 2q-p\}$ avec q apparaissant avec la multiplicité au moins deux. Or ceci est incompatible avec le point (i) du Théorème 3.1.4. Ce cas n'apparait donc jamais.

Cas B. On suppose maintenant que $\rho_{\pi,\wp}$ est somme de deux representations irréductibles σ et σ' de dimension 2, impaires, cristallines. Par nos hypothèses, leurs poids de Hodge–Tate sont respectivement dans un intervalle de longueur strictement inférieure à $\frac{1}{2}(p+1)$. D'après (3.1.3.a), deux possibilités peuvent alors se présenter.

(iv) $\sigma' \cong \sigma^\vee \otimes \omega_\pi$.

(v) $\det(\sigma) = \det(\sigma')$.

Supposons d'abord que nous sommes dans le cas (iv). On a alors pour tout caractère de Hecke χ sur $\mathbb{Q}$ et S un ensemble fini suffisament grand de nombres premiers :

$$L^S(s, \pi, \chi, \mathrm{st}) = L^S(\mathrm{ad}^0(\sigma) \otimes \chi, s) L^S(s, \xi\chi) L^S(s, \chi\xi^{-1})$$

avec $\xi = \det(\sigma)\omega_\pi^{-1}$. D'autre part, par le Théorème 3.2.4 appliqué à $\sigma' = \sigma \otimes \mu^{-1}$, on voit facilement que $L^S(\mathrm{ad}^0(\sigma) \otimes \mu^{-1}, s)$ ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ si μ est un caractère de Hecke tel que $|\mu(x)| = |x|_{\mathbb{A}}^z$ avec $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$. Avec un bon choix de χ, on voit donc que $L^S(s, \pi \otimes \chi, \mathrm{st})$ admet un pole. Les propriétés de $L(s, \pi, \chi, \mathrm{st})$ et plus précisément la position des pôles éventuels de cette fonction L (voir Théorème 2.4 de [**So**] qui est essentiellement dû à Piatetski-Shapiro) permettent de conclure comme dans la preuve

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

p. 105 du Théorème 4.1 de Soudry [**So**] que χ est quadratic et que le pole est en $s = 2$. Par la réciproque du Théorème 4.1 de [**So**], on en déduit que π est CAP associé au sous-groupe parabolique de Klingen.

Dans la deuxième situation (le cas (v)), c'est à dire lorsque $\det(\sigma) = \det(\sigma')$, on a $L^S(\sigma^\vee \otimes \sigma', 1) \neq 0$ par le Théorème 3.2.4. Par conséquent, puisque

$$L^S(s, \pi, \mathrm{st}) = \zeta^S(s) L^S(\sigma^\vee \otimes \sigma', s),$$

$L^S(s, \pi, \mathrm{st})$ admet un pole en $s = 1$ et π est donc endoscopique par le théorème de Kudla, Rallis et Soudry [**KRS**]. □

Pour l'application que nous avons en vue, nous avons en fait besoin d'un théorème plus général. En effet, nous voudrions appliquer un tel résultat pour un membre arbitraire d'une famille p-adique semi-ordinaire. Pour une telle représentation, l'hypothése $k_1 + k_2 - 3 < \frac{1}{2}(p+1)$ n'est donc plus satisfaite. Le Lemme 3.2.8 va nous permettre cependant de se ramener au cas du Théorème 3.2.1.

Lemme 3.2.7. *Soient E et F des corps de nombres. Soit ℓ un nombre premier totalement décomposé dans E. Soit ρ_ℓ (respectivement σ_ℓ) une représentation galoisienne ℓ-adique de $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ semi-simples de dimension n (respectivement de dimension m) et de Hodge–Tate en toutes les places finies de F au dessus de ℓ. On suppose qu'elles sont non ramifiées en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers disons S et que les polynômes caractéristiques des Frobenii en dehors de S sont à coefficients dans le corps de nombre E et tels que la condition suivante est satisfaite.*

(PC) *Pour tout $q \notin S$, $\det(X.\mathrm{Id} - \sigma_\ell(\mathrm{Frob}_q))$ divise $\det(X.\mathrm{Id} - \rho_\ell(\mathrm{Frob}_q))$ dans $E[X]$.*

Alors, il existe un morphisme algébrique ϕ de la composante neutre $\mathbb{G}^0$ de l'adherence de Zariski $\mathbb{G} \subset \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_\ell}$ de $\rho_\ell(G_F)$ dans la composante neutre $\mathbb{K}^0$ de l'adherence de Zariski $\mathbb{K} \subset \mathrm{GL}_{m/\mathbb{Q}_\ell}$ de $\sigma_\ell(G_F)$ et une extension finie F'/F tels que $\sigma_\ell(g) = \phi \circ \rho_\ell(g)$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$.

Si de plus $T_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $T_{K/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ désignent des tores maximaux respectifs de $\mathbb{G}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\mathbb{K}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ tels que $\phi(T_G) \subset T_K$ alors pour tout poids ξ pour $T_{K/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ de la représentation canonique ρ_K de $\mathbb{K}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ dans $\mathrm{GL}_{m/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$, le caractère $\xi \circ \phi$ est un poids pour $T_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ de la représentation canonique ρ_G de $\mathbb{G}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ dans $\mathrm{GL}_{n/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. De plus, la multiplicité de $\xi \circ \phi$ dans ρ_G est au moins égale à celle de ξ dans ρ_K.

Démonstration. On introduit la représentation $\tau_\ell = \sigma_\ell \oplus \rho_\ell$ a valeurs dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell) \subset \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Q}_\ell)$. Soient $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$, $G \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ et $X \subset \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Q}_\ell)$ les images respectives de σ_ℓ, ρ_ℓ et τ_ℓ. Par le Théorème 2 de [**Bo**, Chapitre III, § 8], K, G et X sont des groupes de Lie (compacts) ℓ-adiques. Soient $\mathbb{K}_{/\mathbb{Q}_\ell} \subset \mathrm{GL}_{m/\mathbb{Q}_\ell}$, $\mathbb{G}_{/\mathbb{Q}_\ell} \subset \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_\ell}$ et $\mathbb{X}_{/\mathbb{Q}_\ell} \subset \mathrm{GL}_{m+n/\mathbb{Q}_\ell}$ les adhérences de Zariski respectives de K, G et X dont on note $\mathbb{G}^0$. $\mathbb{K}^0$ et $\mathbb{X}^0$ les composantes neutres. Les groups algébriques $\mathbb{K}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{X}$ sont réductifs puisque σ_ℓ et ρ_ℓ sont semi-simples et on note respectivement ρ_K et ρ_G les représentations algébriques de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{G}$ dans GL_m et GL_n induites respectivement par σ_ℓ et ρ_ℓ. Grâce à un théorème de Serre (voir [**Se2**, § 2] ou [**Hé**, Théorème 5]), on sait de plus que les algèbres de Lie de K, G et X s'identifie canoniquement aux algèbres de Lie de $\mathbb{K}^0$, $\mathbb{G}^0$

et $\mathbb{X}^0$. Passons à la démonstration du lemme. Remarquons d'abord que par la condition (PC) et le théorème de densité de Tchebotarev, on a la divisibilité :

$$\text{pour tout } g \in G_F,\ \det(X.\operatorname{Id}-\sigma_\ell(g)) \text{ divise } \det(X.\operatorname{Id}-\rho_\ell(g)) \text{ dans } \mathbb{Q}_\ell[X]. \qquad (3.2.7.a)$$

Nous allons maintenant montrer l'inclusion suivante :

$$\operatorname{Ker}(\rho_\ell) \subset \operatorname{Ker}(\sigma_\ell). \qquad (3.2.7.b)$$

En effet, par la divisibilité (3.2.7.a), le polynôme caractéristique d'un élément quelconque de $J := \sigma_\ell(\operatorname{Ker}\rho_\ell) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ vaut $(X-1)^m$. L'adherence de Zariski $\mathbb{J}$ de J est donc un sous-groupe unipotent de $\mathbb{K}$. Or J est normal dans K. Par conséquent $\mathbb{J}$ est normal dans $\mathbb{K}$ et unipotent ; il est donc trivial puisque $\mathbb{K}$ est réductif. D'où notre assertion. L'inclusion (3.2.7.b) induit donc un morphisme ϕ^{an} de G dans K tel que $\phi^{\mathrm{an}} \circ \rho_\ell = \sigma_\ell$. Ce dernier est continu puisque ρ_ℓ induit un homéomorphisme de $G_F/\operatorname{Ker}\rho_\ell$ sur G. Par le Théorème 1 de [**Bo**, Chapitre III, § 8], ϕ^{an} est donc un morphisme analytique (surjectif) de groupes de Lie ℓ-adiques. On en déduit immédiatement que la projection de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ induit un isomorphisme de groupes de Lie ℓ-adiques de X sur G (le morphisme reciproque étant donné par $g \mapsto (\phi(g), g)$). Par conséquent, le morphisme de $\pi_2 : \mathbb{X}^0 \subset \mathbb{K}^0 \times \mathbb{G}^0$ sur $\mathbb{G}^0$ induit par la seconde projection de $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_\ell}$ sur $\mathrm{GL}_{n/\mathbb{Q}_\ell}$ induit un isomorphisme sur les algèbres de Lie, c'est donc une isogénie. Montrons que π_2 est en fait injectif. Notons que $\operatorname{Ker}\pi_2$ est fini. Soit $(k,1) \in \operatorname{Ker}\pi_2 \subset \mathbb{K}^0 \times \mathbb{G}^0$. D'après la condition (3.2.7.a), on sait que le polynôme caractéristique de $\rho_K(k)$ divise celui de $\rho_G(1) = \mathrm{id}$, comme k est d'ordre fini cela entraine que $\rho_K(k) = 1$ (i.e. $k = 1$).

On en déduit que $\mathbb{X}^0$ s'identifie à $\mathbb{G}^0$ (via π_2) et qu'il se projète sur $\mathbb{K}^0$ via la première projection. Via l'identification de $\mathbb{X}^0$ avec $\mathbb{G}^0$, on obtient donc un morphisme que nous appelerons ϕ de $\mathbb{G}^0$ sur $\mathbb{K}^0$. Par ailleurs, il est clair que ϕ^{an} coincide avec ϕ sur un voisinage de l'élément neutre de G, c'est à dire sur un sous-groupe d'indice fini $G' = \rho_\ell(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'))$ de G avec F'/F une extension finie. On a donc démontré la première partie du lemme.

Soient maintenant $\xi_1, \ldots, \xi_m$ les poids (comptés avec leur multiplicité) de ρ_K pour T_K comme dans l'énoncé de la seconde partie du lemme. Par (3.2.7.a), pour tout $g \in G' \cap T_G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, le polynôme $\prod_i (X - \xi_i(g))$ divise le polynome caractéristique de $\rho_G(g)$. Cette condition étant algébrique et $G' \cap T_G(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ étant Zariski dense dans T_G, on en déduit la dernière partie du lemme. □

Lemme 3.2.8. *On reprend les notations et hypothèses du lemme précédent avec $m = 2$ et $n = 4$ et on suppose en outre que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) *Les racines des polynômes caractéristiques* $\det(X.\operatorname{Id}-\rho_\ell(\mathrm{Frob}_q))$ *sont de la formes* $\{a, \omega_\ell(q)a^{-1}, b, \omega_\ell(q)b^{-1}\}$ *pour tout $q \notin S$ et $\omega_\ell = \det(\sigma_\ell)$.*

(ii) *Les représentations ρ_ℓ et σ_ℓ restreintes à un sous-groupe de décomposition de G_F en une places au dessus de ℓ est de Hodge–Tate et les poids de Hodge–Tate de ρ_ℓ en cette place ne sont pas de la forme $\{3n+m, 2n+m, n+m, m\}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Alors ρ_ℓ est réductible et peut se décomposer sous la forme

$$\rho_\ell \cong \sigma_\ell \oplus \sigma'_\ell$$

avec σ'_ℓ une représentation ℓ-adique de dimension 2.

Démonstration. On reprend les notations du Lemme 3.2.7 et de sa preuve. Soit $\mathbb{G}' := \mathbb{G}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ et $\mathbb{K}' := \mathbb{K}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. Soit $\xi_0 := \det \circ \rho_K$. D'après l'hypothèse (i), les poids de $\rho_{K/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ sont de la forme $\{\xi_1, \xi_0\xi_1^{-1}\}$ et ceux de $\rho_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ sont de la forme $\{\xi_1, \xi_0\xi_1^{-1}, \xi_2, \xi_0\xi_2^{-1}\}$ (en identifiant les poids de $\rho_{K/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ avec leur image par ϕ dans l'ensemble des poids de $\rho_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$). Par conséquent, le rang de $\mathbb{G}'$ est inférieur ou égal à 3 et on peut utiliser la classification de Taylor pp. 298, 299 de [**T2**]. Soit R la restriction de $\rho_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ à $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}}$; on est donc dans l'un des cas suivants.

(1) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = 1 : R = 1$.

(2) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}_2$:

  (a) $R = \mathrm{St} \oplus \mathrm{St}$, or

  (b) $R = \mathrm{St} \oplus \mathrm{Sym}^0(\mathrm{St})^2$, or

  (c) $R = \mathrm{Sym}^3(\mathrm{St})$.

(3) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = \mathrm{PSL}_2 : R = \mathrm{Sym}^2(\mathrm{St}) \oplus \mathrm{Sym}^0(\mathrm{St})$.

(4) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 : R = \mathrm{St}_1 \oplus \mathrm{St}_2$.

(5) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 /\{\pm 1\} : R = \mathrm{St}_1 \otimes \mathrm{St}_2$.

(6) $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}} = \mathrm{Sp}_4 : R = \mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_4}$.

Dans le tableau ci-dessus, St désigne la représentation standard de SL_2. St_1 (respectivement St_2) est la représentation standard du premier facteur (respectivement du second de SL_2) de $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 /\{\pm 1\}$. Enfin $\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_4}$ est la représentation standard de Sp_4.

Par l'irréductibilité de $\rho_K : \mathbb{K}' \to \mathrm{GL}_{2/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$, on a $\mathbb{K}^{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}_2$ ou alors $\mathbb{K}'$ est le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan $\mathbb{K}^0_{/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$ de GL_2.

Dans le premier cas, on voit que les seules possibilités de la liste ci-dessus sont (2a), (2b) et (4). Dans le second cas, $\mathbb{G}'^{\mathrm{der}}$ est contenu dans le noyau de $\rho_{K/\bar{\mathbb{Q}}_\ell}$. On voit aisément que l'on se trouve dans l'un des cas (1), (2b) ou (3). A nouveau, une analyse au cas par cas permet de conclure que $\rho_{G/\bar{\mathbb{Q}}_\ell} = \rho_{K\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \oplus \rho'$ avec ρ' une représentation algébrique de dimension 2 de $\mathbb{G}'$.

Il résulte de cette discussion que pour une extension finie galoisienne convenable F', la représentation $\rho_\ell|_{G_{F'}}$ contient un facteur direct isomorphe à $\sigma_\ell|_{G_{F'}}$. Par réciprocité de Frobenius, cela entraine aisément que ρ_ℓ est réductible avec un facteur direct isormorphe à $\sigma_\ell \otimes \eta$ avec η un caractère quadratique. On peut écarter la possibilité $\eta \neq 1$ en utilisant une dernière fois la condition (PC). $\square$

Théorème 3.2.9. *Soit π une représentation cuspidale cohomologique de* $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$. *Soit p un nombre premier impair tel que $\rho_{\pi,\wp}$ soit réductible somme de deux représentations $\sigma_{1,p}$ et $\sigma_{2,p}$ de dimension 2 avec $\sigma_{1,p}$ impaire, ordinaire, p-distinguée (i.e. les caractères intervenant dans $\sigma_{1,p}|_{D_p}$ sont résiduellement distincts) et irréductible. Alors π est CAP ou endoscopique.*

Démonstration. On va se ramener à la situation du Théorème 3.2.1. D'après nos hypothèses et un théorème de Taylor [**T3**] si $\sigma_{1,p}$ est résiduellement irréductible ou de Skinner–Wiles [**SW**] sinon, il existe un corps totalement réel F galoisien sur $\mathbb{Q}$ et une forme modulaire de Hilbert g de conducteur C_g pour F telle que $\sigma_{1,p}|_{G_F}$ est isomorphe à la représentation galoisienne p-adique associée à g. Soit (k_1, k_2) le poids de π et soit ℓ un nombre premier supérieur à $2(k_1 + k_2 - 2)$ et totalement décomposé dans l'extension E de $\mathbb{Q}$ engendrée par les valeurs propres de Hecke pour π et g. On va démontrer que $\rho_{\pi,\ell}$ est réductible. Pour être en mesure d'utiliser le Lemme 3.2.8, on suppose d'abord que $k_1 - 1 \neq 2k_2 - 4$. Si on note $\sigma_{g,\ell}$ la représentation ℓ-adique associée à g, on voit donc que $\rho_\ell = \rho_{\pi,\ell}|_{G_F}$ et $\sigma_\ell = \sigma_{g,\ell}|_{G_F}$ satisfont les hypothèses du Lemme 3.2.8. On en déduit que $\sigma_{g,\ell}|_{G_F}$ est un facteur direct de $\rho_{\pi,\ell}|_{G_F}$. Pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ et toute place $\mathfrak{q}$ de F ne divisant pas $p\ell C_g$, les polynômes de Hecke de g en $\mathfrak{q}$ et en $\mathfrak{q}^\tau$ sont identiques puisqu'ils sont égaux respectivement aux polynômes caractéristiques de $\sigma_{1,p}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})$ et de $\sigma_{1,p}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^\tau)$ qui sont eux mêmes identiques puisque $\sigma_{1,p}$ est définie sur $\mathbb{Q}$. On en déduit à l'aide d'un argument dû à Taylor et Dieulefait (voir § 5.3.3 de [**T5**]) que la représentation $\sigma_{g,\ell}$ descend à $\mathbb{Q}$ et donc que $\rho_{\pi,\ell}$ est réductible. On peut alors conclure grâce au Théorème 3.2.1.

Nous supposons maintenant que la condition $k_1 - 1 \neq 2k_2 - 4$ n'est plus satisfaite et que $\rho_{\pi,\ell}$ n'est pas réductible. D'après la preuve du Lemme 3.2.8 cela entraine que $\rho_{\pi,\ell}$ est isomorphe au cube symetrique $\mathrm{Sym}^3(\sigma'_\ell) \otimes \omega_{\pi,\ell}^{-1}$ avec σ'_ℓ une représentation irréductible de degré deux. Si tel était le cas, par le théorème de Taylor ou Skinner–Wiles, σ'_ℓ serait associée à une forme de Hilbert cuspidale g' sur un corps totalement réel F'. Ici ℓ est plus grand que la longueur de l'intervalle des poids de Hodge–Tate et peut être choisi de telle sorte que tous les poids soient distincts modulo $l - 1$ assurant ainsi à σ'_ℓ la condition d'être ℓ-distinguée. Notons également que σ'_ℓ est nécessairement impaire pour que $\rho_{\pi,\ell}$ le soit. On en déduit aisément que $\rho_{\pi,\wp}|_{G_{F'}} \cong \mathrm{Sym}^3(\rho_{g',p}) \otimes \omega_{\pi,p}^{-1}$ et que $\rho_{\pi,\wp}$ est irréductible car les conditions de réductibilité de $\mathrm{Sym}^3(\rho_{g',p}) \otimes \omega_{\pi,p}^{-1}$ et $\mathrm{Sym}^3(\rho_{g',\ell}) \otimes \omega_{\pi,\ell}^{-1}$ sont identiques car elles ne dépendent que de g' (i.e la condition sur g' étant d'être de type CM). On obtient donc une contradiction. Ce qui achève la preuve du théorème. □

3.3. Familles de représentations galoisiennes

Le but de cette section est d'étudier les familles p-adiques de représentations galoisiennes associées aux familles semi-ordinaires, l'ingrédient de départ étant la théorie des pseudo-représentations (voir [**T1**]) que l'on utilise pour interpoler p-adiquement les représentations galoisiennes associées aux points classiques d'une famille p-adique. On reprendra les notations du § 2.4. On fixe un nombre premier p et K un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ de niveau N premier à p. On note $\mathfrak{H}$ la variété de Hecke semi-ordinaire en p. Rappelons que l'opérateur $T_0(q)$ apparaissant dans l'énoncé ci-dessous est introduit au § 1.1.7.

Proposition 3.3.1. *Il existe une pseudo-représentation continue $t_{\mathfrak{H}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans l'algèbre $\Lambda_{\mathfrak{H}}$ non ramifiée en dehors de Np et telle que $t_{\mathfrak{H}}(\mathrm{Frob}_q) = \lambda_{\mathfrak{H}}(T_0(q))$ pour tout q premier à Np.*

Démonstration. Cela résulte par un argument assez formel et maintenant bien connu (voir [**Ch**, Proposition 7.1] par exemple) de la théorie des pseudo-représentations, de la densité des points classiques dans $\mathfrak{H}$, de l'existence des représentations galoisiennes associées aux représentations cuspidales de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ et de la compacité de $\Lambda_{\mathfrak{H}}$. Ce dernier point résulte de ce que cette algèbre est profinie par le Lemme 2.4.15. □

Pour tout espace rigide réduit $\mathfrak{W}$, on note $\mathcal{F}(\mathfrak{W})$ l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}(\mathfrak{W})$.

Corollaire 3.3.2. *Pour tout sous domaine affinoide $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{H}$, il existe un revêtement fini génériquement étale $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$, et une représentation continue $\rho_{\mathfrak{U}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathrm{GL}_4(\mathcal{F}(\mathfrak{V}))$ non ramifiée hors de Np telle que pour tout $q \nmid Np$, on ait*

$$\det(1 - X.\rho_{\mathfrak{U}}(\mathrm{Frob}_q)) = \lambda_{\mathfrak{U}}(P_q(X)).$$

L'image de $\rho_{\mathfrak{U}}$ est contenu dans un $\mathcal{O}(\mathfrak{U})^\circ$-module de $M_4(\mathcal{F}(\mathfrak{V}))$ de type fini. En particulier, $\rho_{\mathfrak{U}}$ laisse stable des $\mathcal{O}(\mathfrak{U})^\circ$-réseau de $\mathcal{F}(\mathfrak{V})^4$. La spécialisation en un point classique $x \in \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ de l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur un tel réseau quand elle est définie (c'est à dire pour un ensemble Zarisiki dense) est de semi-simplification isomorphe à la représentation galoisienne $\rho_{F_x,p}$ associée à la forme classique F_x.

Démonstration. On donne seulement les grandes lignes de la preuve qui est standard. En composant $t_{\mathfrak{H}}$ avec le morphisme de restriction $\Lambda_{\mathfrak{H}} \to \mathcal{O}(\mathfrak{U})^\circ$ on obtient une pseudo-représentation $t_{\mathfrak{U}}$ associée au sous-domaine affinoide $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{H}$. On applique la Théorème 1 de [**T1**], afin d'obtenir une représentation galoisienne semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ de degré 4 sur une extension algébrique $\mathcal{F}(\mathfrak{V})$ de $\mathcal{F}(\mathfrak{U})$. D'après l'argument de [**T1**, Lemme 6], l'image de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $M_4(\bar{\mathcal{F}}(\mathfrak{V}))$ est de type fini sur $\mathcal{O}(\mathfrak{U})^\circ$. En particulier, il existe des $\mathcal{O}(\mathfrak{V})^\circ$-réseaux stables sous l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ dans l'espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathcal{F}(\mathfrak{V})$. Le dernier point est une conséquence directe de la construction. □

3.3.3. *Familles analytiques de représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$*

Soit $\mathfrak{U}$ un affinoide défini sur $\mathbb{Q}_p$ et M un module projectif de rang fini sur $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$ muni d'une action $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-linéaire continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$ lorsqu'on munit $\mathrm{End}_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})}(M)$ de la topologie de la norme *sup*. Pour $x \in \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, on pose $M_x = M \otimes_x \bar{\mathbb{Q}}_p$. C'est une représentation p-adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$, on peut donc voir M comme une famille analytique de représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

D'après un théorème de Sen, il existe un opérateur $\varphi_M \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}(\mathfrak{U})}(M)$ tel que l'action d'un sous-groupe d'indice fini de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ est donné par $s \mapsto \exp(\log(\chi_p(s))\varphi_M)$. Lorsque $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$ est réduit à une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, dire que φ_M est semi-simple avec des valeurs propres entières (i.e appartenant à $\mathbb{Z}$) revient à dire que la représentation est de Hodge–Tate. De plus ces valeurs propres sont ce qu'on appelle les poids de Hodge–Tate de la représentation. Cela justifie la définition suivante. On dit que M est une famille analytique de représentations de Hodge–Tate au sens de Sen ou de Hodge–Tate–Sen si les conditions suivantes sont satisfaites :

- φ_M est semi-simple avec des valeurs propres dans $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$,
- il existe un ensemble Zariski-dense Σ tel que pour tout $x \in \Sigma$, M_x est de Hodge–Tate.

Lemme 3.3.4. *Soit M une famille analytique de représentation de Hodge–Tate–Sen sur $\mathfrak{U}$. On suppose qu'il existe un ensemble Zariski dense $\Sigma \subset \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ tel que pour tout $x \in \Sigma$, M_x est de Hodge–Tate de poids positifs ou nuls et que M_x contienne un sous-espace N_x de dimension d_0 sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$ fixe point par point sous l'action de I_p et tel que M_x/N_x soit de poids de Hodge–Tate strictement positifs. Alors il existe un facteur direct $N \subset M$ de rang d_0 fixe point par point sous l'action de I_p.*

Démonstration. C'est un cas particulier de [**TU**, Lemme 7.2] □

Le lemme suivant dû à Kisin sera essentiel pour controler la ramification en p de certaines extensions que nous construirons dans le dernier paragraphe de cet article.

Lemme 3.3.5. *On suppose que $\mathfrak{U}$ une courbe affinoide et M un $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-module projectif de rang 2 muni d'un action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On suppose qu'il existe une fonction rigide analytique $\lambda \in \mathcal{O}(\mathfrak{U})$ et un ensemble Zariski dense $\Sigma \subset \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ tels que pour tout $x \in \Sigma$, $M_x = M \otimes_x \bar{\mathbb{Q}}_p$ est cristalline de poids de Hodge–Tate $\{k_x, 0\}$ avec $k_x \geqslant 1$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(M_x)^{\Phi=\lambda(x)} \neq 0$. Alors pour tout $x_0 \in \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ tel que M_{x_0} soit de Hodge–Tate de poids $\{k_0, 0\}$ avec $k_0 \geqslant 1$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(M_{x_0})^{\Phi=\lambda(x_0)} \neq 0$.*

Démonstration. Voir [**Ki**, Corollaire 5.15]. □

Proposition 3.3.6. *On conserve les notations et hypothèses du Corollaire 3.3.2. On suppose que $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. On suppose en outre que $\mathfrak{U}$ est purement de dimension 2 et qu'il contient un point algébrique.*

(i) *La restriction de $\rho_{\mathfrak{V}}$ à $G_{\mathbb{Q}_p}$ agit de façon non ramifiée sur une droite de $\mathcal{F}(\mathfrak{V})^4$ et avec la valeur propre de Frobenius égale à $\lambda_{\mathfrak{U}}(U_0)$.*

(ii) *Pour tout $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-réseau L de rang 4 stable par $G_{\mathbb{Q}}$, il existe un ensemble Zariski dense $\Sigma \subset \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ de points arithmétiques tels que pour tout $x \in \Sigma$, la semi-simplification L_x^{ss} de $L_x = L \otimes_x \bar{\mathbb{Q}}_p$ est isomorphe à $\rho_{F_x,p}$ avec F_x la forme modulaire de Siegel classique F_x de niveau $K \cap I_n$ et poids $\underline{k}_x = (k_{1,x}, k_{2,x})$ associée à $\lambda_x = x \circ \lambda_{\mathfrak{U}}$.*

(iii) *Il existe un ensemble Zariski dense Σ de points algébriques tels que pour tout $x \in \Sigma$, la restriction de L_x^{ss} est cristalline. Ses poids de Hodge–Tate sont contenus dans $\{0, k_{2,x} - 2, k_{1,x} - 1, k_{1,x} + k_{2,x} - 3\}$ et les valeurs propres de Φ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(L_x^{\mathrm{ss}})$ sont*

$$\{\gamma_0(x), \gamma_1(x)p^{k_{2,x}-2}, \gamma_1(x)^{-1}p^{k_{1,x}-1}, \gamma_0(x)^{-1}p^{k_{1,x}+k_{2,x}-3}\},$$

$\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{U})$ étant définie par $\gamma_0 = \lambda_{\mathfrak{U}}(U_0)$ et $\gamma_1 = \lambda_{\mathfrak{U}}(U_1)\lambda_{\mathfrak{U}}(U_0)^{-1}$. En particulier, les pentes du polygones de Newton sont $\{0, k_{2,x} - 2 + \alpha, k_{1,x} - 1 - \alpha, k_{1,x} + k_{2,x} - 3\}$.

Démonstration. Soit L un $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$-réseau stable de la représentation $\rho_{\mathfrak{U}}$. On peut le supposer projectif (de rang 4) quitte à restreindre $\mathfrak{U}$. Par ailleurs, comme $\mathfrak{U}$ est purement de dimension 2 et contient un point algébrique, il contient un ensemble Zariski dense de points algébriques et donc de points classiques Σ d'après le Théorème 2.4.10. Le point (ii) est alors une conséquence directe de la propriété de $\lambda_{\mathfrak{U}}$ du Théorème 2.4.14 et des définitions de $\rho_{\mathfrak{U}}$ et $\rho_{F_x,p}$. Pour montrer le point (iii), d'après le Lemme 2.4.17, il suffit de remplacer Σ par son sous-ensemble des points se projetant sur des poids algébriques dominants suffisament réguliers. Pour tout $x \in \Sigma$, par le Lemme 2.4.17, F_x est donc la p-stabilisation d'une forme de Siegel G_x de niveau premier à p. La représentation $\rho_{G_x,p} = \rho_{F_x,p}$ est donc cristalline en p et le polynôme caractéristique de Φ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\rho_{F_x,p})$ vaut $\lambda_{G_x}(P_p(X))$. Enfin, le point (i) résulte du point (iii) et du Lemme 3.3.4. $\square$

La preuve du corollaire suivant est immédiate (voir par exemple la Proposition 3.2 de [**U1**]).

Corollaire 3.3.7. *On garde les hypothèses de la proposition précédente. La représentation $\rho_{\mathfrak{V}}$ admet deux ou quatre poids de Hodge–Tate–Sen. Elle en admet deux (respectivement quatre) si et seulement si pour au moins un point arithmétique $x \in \mathfrak{U}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ (et en fait pour tous), la spécialisation arithmétique $\rho_{\mathfrak{V},x}$ admet deux (respectivement quatre) poids de Hodge–Tate.*

3.3.8. *Rappels sur les familles de Hida–Coleman et leur représentations galoisiennes*

Nous supposerons que le lecteur est familié de cette théorie. Le but de ce paragraphe est de préciser les notations et conventions que nous utilisons. Nous renvoyons le lecteur aux articles de Hida, Coleman et Mazur pour de plus amples détails.

Soit N un entier positif premier à p. Rappelons qu'on peut définir des opérateurs de Hecke $U_p = \Gamma_1(Np)\,\mathrm{diag}(1,p)\Gamma_1(Np)$ et $T(q) = \Gamma_1(Np)\,\mathrm{diag}(1,q)\Gamma_1(Np)$ pour tout q premier à Np et avec $\Gamma_1(Np)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices unipotentes supérieures modulo Np. Notons $\mathcal{B}_{N,p}$ l'algèbre de Hecke abstraite engendrée sur $\mathbb{Z}$ par ces opérateurs.

Coleman et Mazur ont construit dans [**CM**] une courbe $\mathfrak{C}_N$ au dessus de $\mathfrak{X}_1$ paramétrisant les formes modulaires propres surconvergentes de pentes finies et de niveau N. A vrai dire, leur construction est écrite seulement pour $N = 1$. Mais elle se généralise à n'importe quel niveau *mutatis mutandis* si on remplace « formes modulaires propres surconvergentes de pentes finies » par systèmes de valeurs propres de Hecke pour $\mathcal{B}_{N,p}$ agissant sur l'espace des formes surconvergentes de pentes finies. En d'autres termes, $\mathfrak{C}_N$ est une courbe muni d'un morphisme localement fini $\boldsymbol{w} : \mathfrak{C}_N \to \mathfrak{X}_1$ munis d'un système de fonctions analytique $a(n)$ pour n premier à N tels que pour tout point $x \in \mathfrak{C}_N(\mathbb{C}_p)$ il existe un entier r et une forme modulaire surconvergente g de niveau Np^r et poids $\boldsymbol{w}(x)$ tels que $U_p.g = a(p)(x) \cdot g$ et $T(q).g = a(q)(x) \cdot g$ pour tout nombre premier q

ne divisant pas Np. Pour une telle forme, on notera aussi $a(p,g)$ la valeur propre de l'opérateur d'Atkin U_p. Il existe également pour tout $x \in \mathfrak{E}_N$, un caractère de Dirichlet χ_x de niveau Np défini par $\chi_x(q) = [a(q)^2(x) - a(q^2)(x)]\boldsymbol{w}(x)(q)^{-1}$ pour tout nombre premier q premier à Np. Il est aisé de vérifier que $x \mapsto \chi_x$ est un morphisme localement constant.

Pour tout affinoide $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{E}_N$, on dit $\mathfrak{U}$ est une famille de Hida–Coleman de formes modulaires surconvergentes de pente α et nebentypus χ si respectivement $x \mapsto \mathrm{val}_p(a(p)(x))$ et $x \mapsto \chi_x$ sont des fonctions constantes valant respectivement α et χ sur $\mathfrak{U}(\mathbb{C}_p)$. A une telle forme, on peut associer une forme $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-adique *primitive** surconvergente. Elle admet un développement de Fourier :

$$G = G_{\mathfrak{U}} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,G)q^n$$

tel que $a(1,G) = 1$ et $a(q,G)$ la valeur propre de $T(q)$ pour tout premier $q \neq p$ et $a(p,G)$ la valeur propre de U_p. A une telle famille, on peut associer une famille de représentations galoisiennes ρ_G à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{F}(\mathfrak{U}))$ qui sont non ramifiées hors de Np et telles que pour tout ℓ ne divisant pas Np, on ait :

$$\det(1 - X\rho_G(\mathrm{Frob}_\ell)) = X^2 - a(\ell,G)X + \ell^{-1}\chi(\ell)\boldsymbol{w}(\ell).$$

Pour tout entier k, notons $[k]$ le caractère (ou poids) de $\mathbb{G}_m$ défini par $[k](x) = x^k$. Alors pour tout point algébrique x tel que $\boldsymbol{w}(x) = [k]$ avec k un entier supérieur à 2, strictement plus grand que $\alpha + 1$ et tel que $\chi|_{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} = \omega^k$, la spécialisation de ρ_G au point x est cristalline en p et le polynome caractéristique du Frobenius Φ agissant sur le module filtré correspondant vaut $X^2 - a(p)(x)X + \chi\omega^{-k}(p)p^{k-1}$ et en particulier les pentes de celui-ci sont 0 et α.

3.3.9. *Familles endoscopiques*

Soit α un nombre rationel positif ou nul et $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{H}^\alpha$ un sous-domaine affinoide de la courbe de Hecke semi-ordinaire. Nous dirons que $\mathfrak{V}$ est globalement endoscopique s'il existe un ensemble $\Sigma \subset \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ Zariski dense de points algébriques † tel que pour tout $x \in \Sigma$, le caractère de l'algèbre de Hecke correspondant $\lambda_x : \mathcal{R}_{Np} \to \mathbb{C}_p$ est associé à une représentation endoscopique π_x. On a le théorème suivant.

Théorème 3.3.10. *Soit $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{H}^\alpha$ une famille globalement endoscopique de formes semi-ordinaires comme ci-dessus telle que la représentation galoisienne $\rho_{\mathfrak{V}}$ possède quatre poids de Hodge–Tate–Sen. On suppose en outre qu'il existe un caractère de Dirichlet $\chi_{\mathfrak{V}}$‡ tel que ω_{π_x} soit associé à $\chi_{\mathfrak{V}}$ pour tout x appartenant à l'ensemble Σ introduit au § 3.3.9.*

Alors il existe des familles de Hida–Coleman $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ de nebentypus $\chi_{\mathfrak{V}}$ de la courbe de Hecke de Coleman–Mazur et un morphisme $j = (j_1, j_2)$ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites.

* C'est à dire que la spécialisation en un point algébrique de poids $k > \mathrm{Sup}\{2, \alpha + 1\}$ de ce développement de Fourier est celui d'une forme primitive au sens classique.

† On pourrait remplacer « algébrique » par « arithmétique ».

‡ $\chi_{\mathfrak{V}}$ désigne alors le caractère de Dirichlet vérifiant $\lambda_{\mathfrak{V}}(S_\ell) = w_1w_2(\ell^2)\ell^{-6}\chi_{\mathfrak{V}}(\ell)$.

(i) *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{V} \arrow[r, "{j=(j_1,j_2)}"] \arrow[d] & \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_2 \arrow[r, "{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)}"] & \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1 \end{tikzcd}$$

avec $\boldsymbol{w}_1(\kappa_1,\kappa_2)=\kappa_1\kappa_2\cdot[-2]$ *et* $\boldsymbol{w}_2(\kappa_1,\kappa_2)=\kappa_1\kappa_2^{-1}\cdot[2]$ *pour tout* $(\kappa_1,\kappa_2)\in\mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$ *où pour tout entier* n, $[n]$ *désigne le caractère* $x\mapsto x^n$.

(ii) *Pour tout* $x\in\mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ *et tout nombre premier* ℓ *ne divisant pas* Np, *on a*

$$\begin{aligned}\lambda_x(Q_\ell(X)) = (X^2 - a(\ell)(j_1(x))X + \ell^{-1}\boldsymbol{w}_1(x)(\ell)\chi_{\mathfrak{V}}(\ell))\\ \times (X^2-\kappa_2(x)(\ell)\ell^{-2}a(\ell)(j_2(x))X+\ell^{-5}\kappa_2^2\boldsymbol{w}_2(x)(\ell)\chi_{\mathfrak{V}}(\ell))\end{aligned}$$

et

$$\lambda_x(U_0)=a(p)(j_1(x)) \quad \textit{et} \quad \lambda_x(U_1)=a(p)(j_2(x))\cdot a(p)(j_1(x)).$$

(iii) $\mathfrak{U}_1$ *est ordinaire (i.e. de pente* 0*) et* $\mathfrak{U}_2$ *est de pente* α.

(iv) *Soit* ρ_i *pour* $i=1$ *et* 2, *la représentation galoisienne associée à la famille de Hida–Coleman* $\mathfrak{U}_i$. *Alors*

$$\mathrm{tr}(\rho_{\mathfrak{V}}) = j^*(\mathrm{tr}(\rho_1)+\mathrm{tr}(\rho_2)\cdot\varepsilon^{-2}\kappa_2\circ\varepsilon).$$

Démonstration. Soit $\Sigma\subset\mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ un ensemble de points algébriques endoscopiques. Pour tout $x\in\Sigma$, soit π_x la représentation automorphe endoscopique associée à λ_x de poids $(k_{1,x},k_{2,x})$. Par nos hypothèses et un argument élémentaire sur les poids de Hodge–Tate, pour chaque $x\in\Sigma$, il existe des formes modulaires $f_{1,x}$ et $f_{2,x}$ de poids $l_{1,x}=k_{1,x}+k_{2,x}-2$ et $l_{2,x}=k_{1,x}-k_{2,x}+2$ telles que

$$\mathrm{tr}(\rho_{\wp,\pi_x}) = \mathrm{tr}(\rho_{f_{1,x}}) + \varepsilon^{k_{2,x}-2}\,\mathrm{tr}(\rho_{f_{2,x}}) \qquad (3.3.10.a)$$

où ε désigne le caractère cyclotomique et où on note ρ_f la représentation galoisienne p-adique associée à une forme elliptique propre f par Deligne. Comme x est algébrique, π_x est non ramifiée en p et $\rho_{\wp,\pi_x}$ est cristalline. On en déduit que les représentations $\rho_{f_{i,x}}$ sont cristallines et donc que les formes $f_{i,x}$ peuvent être choisies de niveau premier à p. En particulier, en comparant les valeurs propres de Frobenius agissant sur les modules filtrés des représentations p-adiques $\rho_{f_{i,x}}$ et $\rho_{\wp,x}$, on voit que l'on peut remplacer $f_{1,x}$ (respectivement $f_{2,x}$) par une forme p-stabilisée $g_{1,x}$ de pente 0 (respectivement $g_{2,x}$ de pente α). De plus, on a

$$\lambda_x(U_0)=a(p,g_{1,x}) \quad \text{et} \quad \lambda_{U_1,x}=a(p,g_{2,x}\cdot a(p,g_{1,x})). \qquad (3.3.10.b)$$

Par ailleurs, en examinant les représentations locales en des premiers ℓ divisant N, le conducteur de la famille $\mathfrak{V}$, il apparait clairement que les niveaux modérés des formes $g_{1,x}$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

et $g_{2,x}$ sont bornés indépendement de $x \in \Sigma$ (i.e. par le conducteur (modéré) d'Artin de la représentation $\rho_{\mathfrak{V}}$ et donc par une puissance de N). Soit $\mathfrak{Y}_1 \subset \mathfrak{X}_1$ un affinoide contenant tous les poids $[l_{1,x}]$ et soir M une puissance de N bornant le niveau modéré des formes $g_{1,x}$. Puisqu'il existe un nombre fini de composantes irréductibles de pente 0 dans $\mathfrak{E}_M \times_{\mathfrak{X}_1} \mathfrak{Y}_1$ (voir [**CM**]), on en déduit qu'il existe $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{E}_M \times_{\mathfrak{X}_1} \mathfrak{Y}_1$ tel que pour un sous-ensemble Σ' de Σ, les formes $(g_{1,x})_{x\in\Sigma'}$ correspondent à des points de $\mathfrak{U}_1$. On peut faire de même pour les formes $g_{2,x}$ et obtenir $\mathfrak{Y}_2 \subset \mathfrak{X}_1$ et une famille de Hida–Coleman $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{E}_M \times_{\mathfrak{X}_1} \mathfrak{Y}_2$ de pente α contenant tous les points correspondant aux formes $g_{2,x}$ pour x dans un sous-ensemble $\Sigma'' \subset \Sigma'$ Zariski dense. On déduit de (3.3.10.a) et (3.3.10.b), que la relation du (ii) est vrai pour x dans un ensemble Zariski dense Σ'' de points de $\mathfrak{V}$.

Considérons le morphisme $(\kappa_1,\kappa_2) \mapsto (\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) := (\kappa_1\kappa_2\cdot[-2], \kappa_1\kappa_2^{-1}\cdot[2])$. On considère le morphisme λ_j de

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{Y}_2} := (\mathcal{B}_{M,p} \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{Y}_1)) \otimes (\mathcal{B}_{M,p} \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{Y}_2))$$

dans $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ défini par

$$\begin{aligned}\lambda_j(Q_\ell(X)) = (X^2 - T(\ell)X + \ell^{-1}\boldsymbol{w}_1(\ell)\chi_{\mathfrak{V}}(\ell))\\ \otimes (X^2 - \kappa_2(\ell)\ell^{-2}T(\ell)X + \ell^{-5}\kappa_2^2\boldsymbol{w}_2(\ell)\chi_{\mathfrak{V}}(\ell)).\end{aligned} \tag{3.3.10.c}$$

Soit J le noyau du morphisme canonique de $\mathcal{A}_{\mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{Y}_2}$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{U}_1)\otimes\mathcal{O}(\mathfrak{U}_2)$. Pout $T \in J$, $\lambda_{\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2}(T) \equiv 0$ modulo l'idéal maximal définissant x pour tout $x \in \Sigma''$ d'après le paragraphe précédent. On en déduit que $\lambda_j(T) = 0$ et que λ_j définit un morphisme d'espace affinoide de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$. Les points (i), (ii), (iii) et (iv) découlent immédiatemment de notre construction. □

3.3.11. *Irréductibilité générique*

Avant dénoncer le résultat réciproque de la proposition précédente, nous introduisons une définition. Un poids (k_1,k_2) sera dit très régulier si $k_1 - 3 > k_2 > 0$. Un point $x \in \mathfrak{H}(\mathbb{C}_p)$ sera dit algébrique très régulier si sa projection sur $\mathfrak{X}_2(\mathbb{C}_p)$ est un poids algébrique très régulier. On a alors le théorème d'irréductibilité suivant.

Théorème 3.3.12. *Supposons p impair. Soit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ un sous-domaine affinoide purement de dimension* deux contenant un point algébrique de poids (k_1,k_2) tel que $p-1$ ne divise pas k_1+k_2-3. Supposons que la représentation galoisienne $\rho_{\mathfrak{U}}$ soit la somme de deux représentations de dimension 2 de même déterminant dont l'une est irréductible et contient le poids de Hodge–Tate 0. Alors la famille $\mathfrak{U}$ est globalement endoscopique.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 3.3.6, du Corollaire 3.3.2 et du Théorème 3.2.9. Puisque $\mathfrak{U}$ est de dimension 2, il contient des points classiques de poids très réguliers. Cela permet d'écarter la possibilité d'avoir une famille globalement CAP. En effet une représentation π de poids très régulier n'est pas CAP

* On peut remplacer cette hypothèse par la suivante : « $\mathfrak{U}$ contient un ensemble Zariski dense de points classiques et un point classique de poids très régulier ».

(voir par exemple la Proposition 3.3 de [**U1**]). Soit Σ l'ensemble des points classiques très régulier de la famille $\mathfrak{U}$. Il est Zariski dense et par notre hypothèse, la remarque ci-dessus et le Théorème 3.2.9, les points de Σ sont endoscopiques. Noter que les hypothèses du Théorème 3.2.9 sont remplies pour n'importe quel point de Σ. En effet, la condition que $p-1$ ne divise pas k_1+k_2-3 entraine que la sous-representation de dimension 2 contenant le poids de Hodge–Tate 0 est ordinaire et p-distinguée et l'hypothèse sur l'égalité des determinants assure que les deux représentations de dimension 2 sont impaires. □

4. Groupes de Selmer

4.1. Énoncé des résultats

Rappelons qu'un groupe de Selmer est un sous-groupe d'un groupe de cohomologie galoisienne défini par des conditions locales. Avant d'énoncer les résultats principaux de cette section, nous commençons par rappeler la description de Bloch–Kato des groupes de Selmer. Dans le paragraphe qui suit, nous appliquerons la construction des familles p-adiques semi-ordinaires aux formes de Saito–Kurokawa convenablement p-stabilisées.

4.1.1. *Généralités*

Soit K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle ℓ. On note G_K son groupe de Galois absolu et $I_K \subset G_K$ le sous-groupe d'inertie de G_K. Pour toute représentation V de G_K, on note $H^\bullet(K,V) := H^\bullet(G_K,V)$.

Soient V et V' des représentations sur un corps p-adique L de G_K telles que l'on ait une suite exacte

$$0 \to V \to V' \to L \to 0.$$

L'image de $1 \in L$ par le morphisme de connexion $L = H^0(K,L) \to H^1(K,V)$ définit une classe $c_{V'}$ dans $H^1(G_K,V)$. Si $l \neq p$, on note $H^1_f(K,V)$ le noyau du morphisme de restriction de $H^1(K,V)$ dans $H^1(I_K,V)$. Si V est non ramifiée, $c_{V'} \in H^1_f(K,V)$ si et seulement si V' est non ramifiée. On pose également $H^1_e(K,V) = 0$ et $H^1_g(K,V) = H^1(K,V)$. Si $\ell = p$ et que V est cristalline, alors $c_{V'}$ a une image triviale dans $H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, V \otimes B_{\mathrm{cris}})$ (respectivement dans $H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, V \otimes B_{\mathrm{dR}})$) si et seulement si V' est cristalline (respectivement de de Rham). Suivant Bloch–Kato, pour toute représentation V, on note donc $H^1_f(\mathbb{Q}_p,V)$ (respectivement $H^1_e(\mathbb{Q}_p,V)$, $H^1_g(\mathbb{Q}_p,V)$) le noyau du morphisme de $H^1(G_{\mathbb{Q}_p},V)$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V \otimes B_{\mathrm{cris}})$ (respectivement $H^1(\mathbb{Q}_p, V \otimes B_{\mathrm{cris}}^{\Phi=1})$, $H^1(\mathbb{Q}_p, V \otimes B_{\mathrm{dR}})$).

4.1.2. Soit f une forme modulaire de poids $2m \geqslant 2$ et de niveau Np et caractère trivial. Soit L une extension de $\mathbb{Q}_p$ contenant les coefficients de Fourier de f et soit (ρ_f, V_f) la représentation galoisienne p-adique associèe à f sur le L-vectoriel V_f. Rappelons qu'elle est non ramifiée en dehors des premiers divisant Np et que le polynôme caractéristique de tout Frobenius géométrique Frob_q est donné par le polynôme de Hecke en q :

$$X^2 - a(q,f)X + q^{2m-1}.$$

On note α_q et β_q les racines de ce dernier. On suppose que $N = N_0 p^i$ avec i valant 0 ou 1 et que f est ordinaire en p, c'est à dire :

$$|a(p,f)|_p = 1. \tag{Ord p}$$

Remarquons que si $p \mid N$, la condition sur le nebentypus impose que la représentation locale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de la representation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ engendrée par f est de type spéciale et dans ce cas, on a $a_p = \alpha_p = \pm 1$.

La représentation galoisienne restreinte au sous-groupe D_p est donc ordinaire :

$$\rho_f|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon^{1-2m} \end{pmatrix}$$

et l'action de Frob_p sur la droite non ramifiée est la multiplication par α_p. Si $p \mid N$ la représentation est ordinaire non cristalline.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on considère dans ce qui suit le groupe de Selmer défini par Bloch–Kato :

$$H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(n)) := \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}, V_f(n)) \to \bigoplus_\ell \frac{H^1(\mathbb{Q}_\ell, V_f(n))}{H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, V_f(n))}\right).$$

Le lemme suivant montre que lorsque $n \leqslant m$, seule la condition locale en p est pertinente.

Lemme 4.1.3. *Soit m' un entier naturel. Pour tout nombre premier ℓ, on a*

$$H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, V_f(m')) = H^1_g(\mathbb{Q}_\ell, V_f(m')) \quad (\textit{respectivement } H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, V_f(m')) = H^1_e(\mathbb{Q}_\ell, V_f(m')))$$

si $m' \leqslant m$ (respectivement si $m' \geqslant m$).

Démonstration. Soit $V = V_f(m')$. Comme $V^*(1) = V_f(2m - m')$, le résultat pour $m' \leqslant m$ résulte de celui de $m' \geqslant m$ par dualité de Tate locale. On traite donc seulement le cas $m' \geqslant m$. Posons

$$P(V,X) := \begin{cases} \det(1 - X.\mathrm{Frob}_\ell \mid V^{I_\ell}) & \text{si } \ell \neq p, \\ \det(1 - X.\varPhi \mid \mathrm{D_{cris}}(V)) & \text{si } \ell = p. \end{cases}$$

Si $\ell = p$, on a $P(V,X) = (1 - \alpha_p p^{-m'} X)(1 - \beta_p p^{-m'} X)$ si N premier à p et $P(V,X) = 1 - a_p p^{-m'} X$ si f de poids 2 et $i = 1$ (de type Steinberg en p). Comme α_p et β_p sont de normes $p^{m-1/2}$, on voit dans tous les cas que $P(V,1) \neq 0$. Donc $\mathrm{D_{cris}}(V_f(m'))^{\varPhi=1} = 0$ et d'après le Corollaire 3.8.4 de [**BK**], on en déduit que

$$H^1_e(\mathbb{Q}_p, V_f(m')) = H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_f(m')).$$

Si $\ell \neq p$, $P(V,X) = (1 - \alpha_\ell \ell^{-m'} X)(1 - \beta_\ell \ell^{-m'} X)$ si ℓ premier à N. D'après la compatibilité de ρ_f avec la correspondance de Langlands locale démontrée par Carayol, on a $P(V,X) = 1$ si la representation locale associée à f en ℓ est une série principale ramifiée ou supercuspidale. Si f est de type Steinberg en ℓ, on a $a_\ell = \varepsilon \ell^{m-1}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $P(V,X) = 1 - \varepsilon \ell^{m-m'-1}$. Dans chaque cas, on voit encore que $P(V,1) \neq 0$, ce qui entraine que $H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, V) = 0$ par le Théorème 4.1 (i) de [**BK**]. $\square$

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 4.1.4. *Soit f comme ci-dessus de poids $2m \geqslant 2$ et niveau N et soit p un nombre premier impair satisfaisant* $(\mathrm{Ord}\, p)$. *Alors si $\varepsilon_f = -1$, on a*

$$\dim H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(m)) \geqslant 1.$$

4.1.5. *Remarques*

(i) Le cas $p = 2$ est exclus à cause des Théorèmes 3.2.9 et 3.3.12 dans lesquels on n'est assuré de la modularité de certaines représentations galoisiennes de dimension deux par des arguments à la Taylor–Wiles ou Skinner–Wiles seulement lorsque p est différent de 2. Tout le reste des arguments conduisant à la preuve du Théorème 4.1.4 ne nécessite pas que p soit impair.

(ii) L'Hypothèse $(\mathrm{Ord}\, p)$ est nécessaire pour que l'on soit en mesure d'appliquer le théorème d'existence des familles semi-ordinaires. On pourrait certainement s'en passer en utilisant la méthode de Stevens de constructions de familles p-adiques.

(iii) La condition sur le signe est incontournable car elle assure l'existence d'une forme de Saito–Kurokawa holomorphe. Cette hypothèse se retrouve également dans la thèse de Bellaiche sur l'existence de certaines formes non tempérées pour un groupe unitaire defini à trois variables [**Be**]. Harder semble avoir été le premier à avoir remarqué l'importance de cette condition sur le signe pour ce type de questions.

4.1.6. *Cas d'une courbe elliptique*

A titre d'exemple, on peut considérer le cas d'une courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$ ayant réduction (bonne ou semi-stable) ordinaire en un nombre premier p impair. Dans ce cas, le groupe de Selmer $\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}}(E)_p$ en p a une interprétation plus concrète dans la mesure où il s'insère dans la suite exacte bien connue suivante :

$$0 \to E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}}(E)_p \to Ш(E)_p \to 0.$$

Corollaire 4.1.7. *Si $L(E, s)$ s'annule avec un ordre impair en $s = 1$, alors $\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}}(E)_p$ est infini.*

Démonstration. Cela résulte du Théorème 4.1.4 et de la modularité de E par [**BCDT**]. □

4.1.8. *Remarques*

Lorsque l'ordre d'annulation est 1, rappelons que Gross et Zagier ont démontré que le rang de $E(\mathbb{Q})$ est 1 et donc notre résultat est une conséquence de leur théorème. Ce corollaire résulte aussi de la conjecture de parité démontrée par Nekovár [**Ne**].

4.2. Déformation des formes Saito–Kurokawa

Les propositions suivantes constituent le point de départ de la construction d'extensions qui conduit au théorème principal de ce travail.

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

4.2.1. On reprend les hypothèses et notations du § 1.3. Soit σ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ associée à une forme modulaire f de poids $2k-2$ et conducteur N. On suppose que $\varepsilon_f = \varepsilon_\sigma(\frac{1}{2}) = -1$. On choisit $K_0 \subset \mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f^p)$ tel que $\pi = \mathrm{SK}(\sigma)$ admet des vecteurs invariant par K_0 et tel que $(K_0)_\ell = \Delta_\ell$ pour tout ℓ divisant exactement N (i.e. ℓ divise N mais ne divise pas N/ℓ).

Proposition 4.2.2. *Soit p un nombre premier ne divisant pas N. Soit α l'une des racines du polynôme de Hecke $X^2 - a(p,f)X + p^{2k-3}$ de f en p. Alors il existe une forme de modulaire de Siegel holomorphe $\mathrm{SK}_\alpha(f)$ de poids (k,k) et niveau $K_0.I$ tel que $L^{Np}(\mathrm{SK}_\alpha(f), s) = \zeta^{Np}(s-k+1)\zeta^{Np}(s-k+2)L^{Np}(f,s)$ et*

$$\begin{aligned} \mathrm{SK}_\alpha(f) \mid U_{0,p} &= \alpha\, \mathrm{SK}_p(f), \\ \mathrm{SK}_\alpha(f) \mid U_{1,p} &= \alpha p^{k-2}\, \mathrm{SK}_\alpha(f), \end{aligned}$$

et dont la forme adélique correspondante engendre sous l'action de $G(\mathbb{A})$ la représentation $\mathrm{SK}(\sigma)$.

Démonstration. Soit $\pi = \mathrm{SK}(\sigma)$ et π_p la représentation locale sphérique en p. C'est le quotient de Langlands $L(\nu^{1/2}\chi \times \nu^{1/2}\chi^{-1} \rtimes \nu^{-1/2})$ avec χ le caractère non ramifié unitaire de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\chi(p) = \alpha p^{3/2-k}$. Soit 1_{GL_2} la représentation triviale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Par les Lemmes 3.3 et 3.7 de [**ST**], on a donc $\pi_p = (\chi \circ \det \otimes 1_{\mathrm{GL}_2}) \rtimes \chi^{-1}$. Soit I le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$. On a

$$G(\mathbb{Q}_p) = \bigsqcup_{w \in W^P} P(\mathbb{Q}_p) w I \quad \text{avec } W^P = \{\mathrm{id}, s_2, s_2 s_1, s_2 s_1 s_2\}$$

(voir le début de l'article pour la définition de s_1 et s_2). Pour $w \in W^P$, soit $f_w \in ((\chi \circ \det \otimes 1_{\mathrm{GL}_2}) \rtimes \chi^{-1})^I$ tel $f_w(w) = 1$ et $f_w(w') = 0$ pour $w \neq w'$. Ces quatre éléments forment une base B dans laquelle on ordonne les f_w selon l'ordre croissant pour la longueur de $w \in W^P$. Soit $t = [a, b; c] \in T(\mathbb{Q}_p) \backslash T(\mathbb{Z}_p)$ tel que $0 \geqslant 2v_p(a) \geqslant 2v_p(b) \geqslant v_p(c)$. Un simple calcul montre que la matrice de l'action de l'opérateur de Hecke $u_t = I.t.I$ sur $((\chi \circ \det \otimes 1_{\mathrm{GL}_2}) \rtimes \chi^{-1})^I$ est triangulaire inférieure dans la base B et les valeurs propres ordonnées dans l'ordre croissant pour la longueur de $w \in W^P$ données par

$$\begin{aligned} a_w &= (\chi \otimes \chi \otimes \chi^{-1})\rho_P(wtw^{-1}) \prod_{\theta \in R^+ \cap w^{-1}(R^+)} |\theta(t)|_p^{-1} \\ &= (\chi \otimes \chi \otimes \chi^{-1})(wtw^{-1}) |\alpha_1^{w^{-1}}(t)|_p^{-1/2}.|\rho(t)|_p^{-1} \end{aligned}$$

avec les notations précisées au début de l'article. Lorsque t est régulier, ces valeur propres sont distinctes et puisque les opérateurs u_t commutent, ils sont simultanément diagonalisables. Pour $w = \mathrm{id}$, il existe donc un vecteur propre pour les u_t avec t ayant comme valeurs propres $\chi(p)p^{3/2}$ et $\chi(p)p^{5/2}$ respectivement pour $t = [1,1;p]^{-1}$ et $t = [1,p;p^2]^{-1}$. Soit $F_{\mathbb{A}}$ la forme automorphe correspondante de π^{IK^p}. On obtient les valeurs propres correspondantes pour les opérateurs agissant sur les formes classiques en multipliant par $|\nu_G(t)|_p^{k-3}$. On obtient donc respectivement α et $\alpha.p^{k-2}$. $\square$

Si f est ordinaire en p, on notera $\mathrm{SK}_p(f)$ la forme $\mathrm{SK}_\alpha(f)$ avec α la racine du polynôme de Hecke de valuation p-adique nulle.

4.2.3. *Familles de Hida*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de Hida primitive normalisée de niveau modéré N_0 et de q-développement $\mathcal{F}=\sum_n a(n,\mathcal{F})q^n \in \boldsymbol{I}[\![q]\!]$ avec $\boldsymbol{I}$ une extension finie normale de $\Lambda_1 \cong \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$. On suppose que $\mathcal{F}$ est de nebentypus $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ de niveau p i.e. $\varepsilon_{\mathcal{F}}=\omega^{2a}$ avec a un entier et ω désignant le caractère de Teichmüller.

Elle vérifie la propriété que pour tout idéal $P\subset \boldsymbol{I}$ tel que $P\cap\Lambda_1=(1+T-u^k)$ (avec $k\geqslant 2$) la réduction de $\mathcal{F}$ modulo P est le q-développement d'une forme propre f_k de poids k, niveau N_0p et nebentypus ω^{2a-k}. De plus f_k est nouvelle en N_0 et normalisée (i.e. $a(1,f_k)=1$).

Soit $\mathcal{K}_{\boldsymbol{I}}$ le corps des fractions de $\boldsymbol{I}$. Notons $\rho_{\boldsymbol{I}}$ la représentation galoisienne à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{K}_{\boldsymbol{I}})$ associée à la famille $\mathcal{F}$; on notera $V_{\boldsymbol{I}}$ le $\mathcal{K}_{\boldsymbol{I}}$ vectoriel muni de l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ correspondante. Cette représentation est non ramifiée hors de Np et pour tout $q\nmid N_0p$, on a* :

$$\det(X.\mathrm{Id}-\rho_{\boldsymbol{I}}(\mathrm{Frob}_q)) = X^2-a(q,\mathcal{F})X+\omega^{2a}(q)\langle q\rangle_{\boldsymbol{I}}q^{-1}.$$

De plus, cette représentation est ordinaire en p. C'est à dire que l'on a :

$$\rho_{\boldsymbol{I}}|_{I_p}\sim\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & \omega^{2a}\varepsilon\langle\varepsilon\rangle_{\boldsymbol{I}}^{-1}\end{pmatrix}.$$

Pour tout premier q divisant N_0 le niveau modéré de $\mathcal{F}$, on pose $\sigma_q(\mathcal{F})$ la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_q)$ asssociée à la restriction de $\rho_{\boldsymbol{I}}$ à un sous-groupe de décomposition en q.

On a trois possibilités.

(i) (Spéciale.) $q\|N_0$ et $\sigma_q(\mathcal{F})=\xi\otimes\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ avec ξ le caractère quadratique non ramifié tel que $\xi(q)=a(q,\mathcal{F})q^{-1}\langle q\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$.

(ii) (Série principale ramifiée.) $v_q(N_0)>1$ et $\rho_{\boldsymbol{I}}|_{D_q}$ est réductible isomorphe à

$$\xi\varepsilon^{-1/2}\langle\varepsilon\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}\oplus\xi^{-1}\varepsilon^{-1/2}\langle\varepsilon\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$$

avec ξ un caractère d'ordre fini. On a $\sigma_q(\mathcal{F})=(\xi\times\xi^{-1})\otimes\langle\nu\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$.

(iii) (Supercuspidale.) $v_q(N_0)>1$ et $\rho_{\boldsymbol{I}}|_{D_q}\cong\rho_0\otimes\langle\varepsilon\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$ avec ρ_0 irréductible d'image finie. Alors $\sigma_q(\mathcal{F})=\sigma(\rho_0)\otimes\langle\nu\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$ avec $\sigma(\rho_0)$ la représentation cuspidale associée à ρ_0 par la correspondance de Langlands locale.

Dans chaque cas, on peut écrire $\sigma_q(\mathcal{F})=\sigma_q^u(\mathcal{F})\otimes\langle|\det|_q\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$ avec $\sigma_q^u(\mathcal{F})$ une représentation lisse unitaire irréductible. On voit également sans difficultés que la spécialisation en poids k de $\sigma_q(\mathcal{F})$ s'identifie à la représentation locale en q de $\sigma(f_k)$.

* Voir § 2.4.1 pour la notation $\langle\cdot\rangle_{\boldsymbol{I}}$

4.2.4. *Familles de formes de Saito–Kurokawa*

Etant donnée une famille de Hida comme ci-dessus, on peut vérifier aisément que le signe ε_{f_k} pour f_k une forme de poids $2k-2$ intervenant dans la famille avec $k \equiv a \bmod p-1$ est constant. On le note $\varepsilon_{\boldsymbol{I}}$. Sous l'hypothèse que $\varepsilon_{\boldsymbol{I}} = -1$, on peut construire une famille p-adique de formes de Saito–Kurokawa. On fixe K_0 un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\mathrm{SK}_p(f_k)$ soit de niveau $K_0.I$ pour tout k.

Soit $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}$ l'espace rigide analytique tel que $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\boldsymbol{I}, \mathbb{C}_p)$. On a un morphisme canonique d'espace rigide $\pi_{\boldsymbol{I}} : \mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}} \to \mathfrak{X}_1^{2a}$ induit par l'extension $\Lambda_1 \hookrightarrow \boldsymbol{I}$ avec $\mathfrak{X}_1^{2a}$ la composante connexe de $\mathfrak{X}_1$ contenant le caractère ω^{2a}. On note aussi

$$\mathfrak{X}_2^{a+1,a+1} \cong \mathfrak{X}_1^{a+1} \times \mathfrak{X}_1^{a+1}$$

la composante connexe contenant $(\omega^{a+1}, \omega^{a+1})$.

Proposition 4.2.5. *On garde les hypothèses et notations précédentes. Il existe une immersion fermée $\lambda^*_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ de $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}$ dans $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}^1$ d'image notée $\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}} \arrow[r, "\lambda^*_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}"] \arrow[d, "\pi_{\boldsymbol{I}}"'] & \mathfrak{H}^1 \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_1^{2a} \arrow[r, "\Delta^{1/2}"] & \mathfrak{X}_2 \end{tikzcd}$$

où $\Delta^{1/2}$ est le plongement $\mathfrak{X}_1^{2a} \hookrightarrow \mathfrak{X}_2^{a+1,a+1} \subset \mathfrak{X}_2$ défini par $\Delta^{1/2}(2k-2) = (k,k)$. Le morphisme de $\lambda_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{H}^1) \to \boldsymbol{I} = \mathcal{O}(\mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}})$ est défini par :

$$\lambda_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}(Q_q(X)) = (X - \langle q\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2})(X - \langle q\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2} q^{-1})(X^2 - a(q,\mathcal{F})X + q\langle q\rangle_{\boldsymbol{I}}\omega^a(q))$$

pour $q \neq p$, $\lambda_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}(U_0) = a_p(\mathcal{F})$ et $\lambda_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}(U_1) = p.a_p(\mathcal{F})$. De plus la représentation $\mathrm{SK}_N(\mathcal{F})$ définie par

$$\mathrm{SK}_N(\mathcal{F}) := \bigotimes_{q|N_0} \mathrm{SK}(\sigma_q^u(\mathcal{F})) \otimes \langle |\nu_G|_q\rangle_{\boldsymbol{I}}^{1/2}$$

appartient à $\Pi_N(\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}})$.

Démonstration. Soit k un entier congru à $2a$ modulo $p-1$. En posant $k_n := k + (p-1)p^n$, on peut trouver $P_{k_n} \in \mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}$ tels que $f_n = \mathcal{F} \bmod P_{k_n}$ forment une famille de formes modulaires ordinaires de poids $2k_n - 2$, niveau $N_0 p$, conducteur N_0 et nebentypus trivial. Le morphisme $\Delta^{1/2}$ est induit sur les $\mathbb{C}_p$-points par le morphisme qui associe à $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ le caractère de $T_H(\mathbb{Z}_p)$ défini par $\mathrm{diag}(t_1,t_2) \mapsto \psi(t_1t_2)^{1/2}(t_1t_2)^{1/2}$. Soit I le noyau du morphisme de l'algèbre de Hecke abstraite $\mathcal{R}_{N,p} = \mathcal{R}_{Np}[U_0,U_1]$ dans $\Lambda_{\mathfrak{H}^1}$. Soit λ le morphisme de $\mathcal{R}_{N,p}$ dans $\boldsymbol{I}$ défini par la relation

$$\lambda(Q_q(X)) = (X - \langle q\rangle^{1/2})(X - \langle q\rangle^{1/2}q^{-1})(X^2 - a(q,\mathcal{F})X + \langle q\rangle q)$$

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

pour q premier à Np et $\lambda(U_0) = a(p, \mathcal{F})$ et $\lambda(U_1) = p.a(p, \mathcal{F})$. On doit démontrer que $\lambda(I) = 0$. Soit T une relation dans I. Par l'existence de $\mathrm{SK}_p(f_{k_n})$ de la Proposition 4.2.2, on sait que $\lambda(T) \equiv 0 \bmod P_{k_n}$. Comme ceci est vrai pour tout n et que les P_{k_n} sont denses dans $\mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}$, on en déduit que $\lambda(I) = 0$. Rappelons que l'action de U_1 sur les formes p-adiques est normalisée différemment que dans la Proposition 4.2.2. C'est à dire que l'on a ici

$$U_1 . \mathrm{SK}_p(f_{k_n}) = p^{2-k} \cdot \mathrm{SK}_p(f_{k_n})|_{(k,k)} U_1 = p \cdot a(p, f_{k_n}) \cdot \mathrm{SK}_p(f_{k_n}).$$

Montrons maintenant le dernier point de la proposition. Par le Théorème 2.4.19 et la Proposition 4.2.2, il existe, pour chaque entier n, une représentation irréductible $\pi(n) \in \mathit{\Pi}_N(\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}})$ ayant une spécialisation en P_{k_n} se surjectant sur $\mathrm{SK}(\sigma(f_{k_n})_N)$. Comme ce dernier ensemble est fini, il existe un ensemble infini S d'entiers n tel que la representation $\pi = \pi(n)$ est indépendant de $n \in S$ et tel que $\pi \bmod P_{k_n}$ est irréductible donc isomorphe à $\mathrm{SK}(\sigma(f_{k_n})_N)$ pour tout $n \in S$. Le caractère de π est donc congru au caractère de $\mathrm{SK}_N(\mathcal{F})$ modulo P_{k_n} pour tout $n \in S$. Ils sont donc égaux puisque S est infini et on a $\pi \cong \mathrm{SK}_N(\mathcal{F})$. $\square$

4.2.6. D'après le Théorème 2.4.19, il existe une composante irréductible $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{H}^1$ contenant $\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ et une représentation locale $\pi_N \in \mathit{\Pi}_N(\mathcal{Z})$ contenant un réseau L de l'espace de π_N tel que l'on ait un morphisme surjectif

$$L \otimes_{\lambda_{\mathrm{SK},\boldsymbol{I}}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{I}} \twoheadrightarrow \mathrm{SK}_N(\mathcal{F}) = \mathrm{SK}_N(\sigma^u(\mathcal{F})) \otimes \langle \nu \rangle_{\boldsymbol{I}}. \tag{4.2.6.a}$$

Théorème 4.2.7. *La famille $\mathcal{Z}$ n'est pas globalement de type endoscopique. De plus, tout point classique de $x \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}_p)$ correspond à un paquet de représentation(s) cuspidale(s) stable(s) de $G(\mathbb{A})$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} \subset \mathcal{Z}$ un sous-domaine affinoide de dimension deux contenant des points algébriques et s'intersectant non trivialement avec la composante de Saito–Kurokawa $\mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$.

Par le point (i) du Théorème 3.1.4 et la Proposition 3.3.6, il suffit donc de démontrer que la famille de représentations galoisiennes $\rho_{\mathfrak{U}}$ pour tout affinoide $\mathfrak{U} \subset \mathcal{C}$ contenant le point algébrique x_1 admet quatre poids de Hodge–Tate–Sen. Soit x_0 de poids (l, l) un point algébrique de l'intersection de $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$. La représentation spécialisée en x_0 admet les quatre poids de Hodge–Tate $\{0, l-2, l-1, 2l-3\}$. En particulier, la stabilité des points classiques de la composante $\mathcal{Z}$ résulte de leur non endoscopie et de la Remarque 3.1.5.

Il nous reste à prouver que $\mathcal{Z}$ n'est pas globalement endoscopique. On démontre ce résultat par contradiction. Supposons donc que $\mathcal{Z}$ soit endoscopique. Il en sera de même de $\mathfrak{V}$ et puisque $\rho_{\mathfrak{U}}$ admet quatre poids de Hodge–Tate–Sen, on est donc en mesure d'appliquer le Théorème 3.3.10. Par conséquent, il existe deux familles de Hida–Coleman $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ de pentes respectives 0 et 1 et un morphisme j de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ satisfaisant les propriétés du Théorème 3.3.10. Notons G et G' les formes $\mathcal{O}(\mathfrak{U})$-adique et $\mathcal{O}(\mathfrak{U}')$-adique correspondantes.

Soient $\sigma_q^u(G)$ et $\sigma_q^u(G')$ les représentations locales en $q \mid N_0$ associées aux familles G et G' comme dans le § 4.2.3. On va montrer que pour tout $q \mid N_0$, $\sigma_q^u(G')$ n'est pas spéciale. En effet, si tel était le cas, d'après les Lemmes 1.2.8 et 1.2.10, la composante locale π_q de chaque representation semi-locale $\pi_N \in \Pi_N(\mathfrak{V})$, devrait être d'un des types (i), (ii) ou (iii) du Lemme 1.2.10. Pour obtenir cette assertion « en famille », on applique un raisonnement semblable à celui de la fin de la preuve de la Proposition 4.2.5. Cependant, par la condition (4.2.6.a) sur $\mathcal{Z}$, il existe un $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$-réseau dans π_N dont la spécialisation en x_0 est une représentation $\pi_N(x_0)$ qui se surjecte sur $\mathrm{SK}(\sigma_N(f))$ pour f une forme modulaire ordinaire de poids $2k_0-2$ intervenant dans la famille $\mathcal{F}$. En particulier, $\mathrm{SK}(\sigma_q(f))$ est un quotient de la spécialisation $\pi_q(x_0)$ d'un $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$-réseau stable de π_q en x_0. Or celle-ci doit être du type (i), (ii) et (iii) du Lemme 1.2.10 et donc ne possède pas de quotient isomorphe à $\mathrm{SK}(\sigma_q(f))$. On obtient donc une contradiction.

Par conséquent $\sigma_q^u(G')$ n'est pas spéciale et la représentation galoisienne locale $\rho_{G'}|_{D_q}$ a une monodromie triviale.

Soit (y_0, y_0') l'image de x_0 par le morphisme $j : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$. Alors, y_0 est un point classique ordinaire de poids $2l-2$. Si g_0 est la forme elliptique ordinaire correspondante, x_0 n'est autre que le point corespondant à la forme de Saito–Kurokawa semi-ordinaire $\mathrm{SK}_p(g_0)$. Le point $y_0' \in \mathfrak{U}'(\mathbb{C}_p)$ est de poids 2 et la spécialisation de $\rho_{G'}$ en y_0' donne une représentation dont la semi-simplication est isomorphe à $\mathbf{1} \oplus \varepsilon^{-1}$. Puisque $\rho_{G'}$ est absolument irréductible (par exemple en considérant une spécialisation en un point classique de $\mathfrak{U}'$ de poids plus grand que 2 car la pente de G vaut 1), il existe un $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$-réseau stable $\mathcal{L}$ dont la spécialisation, en y_0' fournit une extension W non scindée de ε^{-1} par $\mathbf{1}$ définissant une classe c dans $H^1(\mathbb{Q}, \bar{\mathbb{Q}}_p(1))$. Cette classe est non ramifiée en hors de N_0 et également en les premiers divisant N_0 puisque la monodromie de $\rho_{G'}$ est triviale en tous les premiers q divisant N_0. En fait, l'extension définissant cette classe qui est ordinaire donc semi-stable doit également être cristalline. Cela résulte du Lemme 3.3.5 dû à Kisin en prenant $\lambda = a(p, G) \in \mathcal{O}(\mathfrak{U})$ qui montre que $D_{\mathrm{cris}}(W)^{\Phi=p} \neq 0$ puisque

$$a(p, G)(y_0') = p.a(p, g_0)/a(p, g_0) = p$$

(d'après la propriété (ii) du Théorème 3.3.10 et le fait que x_0 corresponde à $\mathrm{SK}_p(g_0)$). Or ceci est impossible car la théorie de Kummer nous dit que $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$.

Il est donc impossible que $\mathfrak{V}$ soit une famille globalement endoscopique et le théorème est démontré. □

4.3. Preuve du Théorème 4.1.4

4.3.1. Soit $k = m+1 \geqslant 2$. On garde les notations de la section précédente avec $\mathcal{F} \in \boldsymbol{I}[\![q]\!]$ la famille de Hida se spécialisant en f pour le point $x_0 \in \mathfrak{X}_{\boldsymbol{I}}(\mathbb{C}_p)$ avec $\pi_{\boldsymbol{I}}(x_0) \in \mathfrak{X}_1(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ défini par $t \to t^{2k-2}$.

Soit $\mathcal{Z} \supset \mathcal{N}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ une composante irréductible de $\mathfrak{H}^1$ contenant la composante de Saito–Kurokawa associée à $\mathcal{F}$ et vérifiant les conclusions du Théorème 4.2.7. On note $t_{\mathcal{Z}}$ la pseudo représentation associée à $\mathcal{Z}$.

https://doi.org/10.1017/S147474800600003X Published online by Cambridge University Press

4.3.2. *Construction d'un réseau*

Soit $\mathfrak{V}$ un ouvert affinoide de $\mathcal{Z}$ contenant le point x_0. Par les Théorèmes 4.2.7 et 3.3.12, la représentation galoisienne $\rho_{\mathfrak{V}}$ est absolument irréductible. Soit P_0 l'idéal de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ correspondant au point x_0 et soit A le localisé complété de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ en l'idéal P_0. On note encore P_0 l'idéal maximal de A et L le corps résiduel qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit $J \subset A$ l'ideal engendré par l'ideal de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ des fonctions s'annulant sur $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}}$ et on pose $B = A/J \supset \boldsymbol{I}$. Quitte à restreindre $\mathfrak{V}$, on peut supposer que J est principal (par exemple si $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Y}_{\boldsymbol{I},\mathrm{SK}} \hookrightarrow \mathfrak{V}$ est une immersion fermée régulière).

En composant $t_{\mathfrak{V}}$ avec l'inclusion $\mathcal{O}(\mathfrak{V}) \hookrightarrow A$, on obtient une pseudo-représentation t_A et une représentation irréductible ρ_A à valeurs dans $\mathrm{GL}_4(F_A)$ avec F_A le corps des fractions de A (quitte à étendre les scalaire de $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$). De plus,

$$\begin{aligned} t_A \bmod J &= \mathrm{tr}(\rho_{\boldsymbol{I}}) + \omega^a\langle\varepsilon\rangle^{-1/2} + \omega\varepsilon\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}, \\ t_A \bmod P_0 &= \mathrm{tr}(\rho_f) + \varepsilon^{1-k} + \varepsilon^{2-k}. \end{aligned}$$

C'est une somme de trois traces de représentations non isomorphes deux à deux. On peut donc trouver un élément $r_0 \in A[G_{\mathbb{Q}}]$ tel que les quantités $\alpha_0 = \varepsilon^{1-k}(r_0)$ et $\beta_0 = \varepsilon^{2-k}(r_0)$ et les valeurs propres γ_0, δ_0 de $\rho_f(r_0)$ sont deux à deux distinctes. Par le lemme de Hensel, le polynôme caractéristique de $\rho_A(r_0)$ admet des racines α, β, γ, δ dans A et respectivement congrues à α_0, β_0, γ_0, δ_0 modulo J ; elles sont deux à deux distinctes également. On choisit un vecteur $\boldsymbol{v}_\delta$ de l'espace de la représentation ρ_A tel que $\rho_A(r_0).\boldsymbol{v}_\delta = \delta.\boldsymbol{v}_\delta$ et on considère $\mathcal{L}_A$ le A-module de type fini engendré par $\rho_A(r).\boldsymbol{v}_\delta$ lorsque r parcourt $A[G_{\mathbb{Q}}]$. Par irreductibilité de ρ_A, $\mathcal{L}_A$ est un A-réseau (i.e. on a $\mathcal{L}_A \otimes F_A = F_A^4$). On a une décomposition

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A(\alpha) \oplus \mathcal{L}_A(\beta) \oplus \mathcal{L}_A(\gamma) \oplus \mathcal{L}_A(\delta) \qquad (4.3.2.a)$$

où $\mathcal{L}_A(\alpha)$ (respectivement $\mathcal{L}_A(\beta), \dots$) est le module de $\mathcal{L}_A$ sur lequel r_0 agit par multiplication par α (respectivement $\beta, \dots$). Pour montrer que cette décomposition est bien en somme directe on utilise le même argument que dans la preuve du Théorème 1 de [**U1**] (l'hypothèse sur les anneaux dans [**U1**] d'être de valuation discrète est superflue pour ce point). Avant de poursuivre, remarquons que le réseau $\mathcal{L}_A$ n'est pas *a priori* libre sur A. On doit donc localiser la construction. Soit A_J la localisation de A en l'idéal premier J. On pose $\mathcal{L}_B$ l'image de $\mathcal{L}_A \otimes B$ dans $\mathcal{L}_A \otimes A_J/J$ et $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_B \otimes B/P_0.B$. Ils sont respectivement libres de rang quatre sur B et sur L. Cela se voit en remarquant que A_J/J s'identifie à $\mathcal{K}_B$ le corps des fractions de B et que A_J et B sont de valuation discrète. On considère les décompositions pour $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_0$ analogues à (4.3.2.a) :

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B(\alpha) \oplus \mathcal{L}_B(\beta) \oplus \mathcal{L}_B(\gamma) \oplus \mathcal{L}_B(\delta) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\alpha) \oplus \mathcal{L}_0(\beta) \oplus \mathcal{L}_0(\gamma) \oplus \mathcal{L}_0(\delta).$$

De plus, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{L}_B(\alpha) \otimes_B L \cong \mathcal{L}_0(\alpha), \mathcal{L}_B(\beta) \otimes_B L \cong \mathcal{L}_0(\beta), \dots. \qquad (4.3.2.b)$$

On a naturellement une action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_B$ et de semi-simplifications respectives

$$(\mathcal{L}_B \otimes_B \mathcal{K}_B)^{\mathrm{ss}} \cong \mathcal{K}_B(\omega^a\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}) \oplus \mathcal{K}_B(\omega^a\varepsilon\langle\varepsilon\rangle^{1/2}) \oplus V_{\boldsymbol{I}} \otimes \mathcal{K}_B$$

et

$$(\mathcal{L}_0)^{\mathrm{ss}} \cong L(\varepsilon^{1-k}) \oplus L(\varepsilon^{2-k}) \oplus V_f.$$

L'image du vecteur v_δ dans respectivement $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_B$ est propre de valeur propre l'image de δ dans respectivement B et $L = A/P_0$ pour l'action de r_0. On en déduit qu'une sous-représentation irréductible de $\mathcal{L}_B$ (respectivement de $\mathcal{L}_0$) est necessairement de rang 1 sur B (respectivement sur L) de caractère $\omega^a\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}$ ou $\omega^a\varepsilon\langle\varepsilon\rangle^{1/2}$ (respectivement de caractère ε^{1-k} ou ε^{2-k}). De plus le quotient $\mathcal{E}_B$ de $\mathcal{L}_B$ par cette sous-representation est nécessairement une extension non triviale (pour l'action de $G_{\mathbb{Q}}$) du type :

$$0 \to B(\omega^a\varepsilon^s\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}) \to \mathcal{E}_B \to V_{\boldsymbol{I}} \otimes B \to 0$$

avec $s = 0$ ou 1 et sa réduction modulo P_0 donne une extension non triviale $\mathcal{E}_0$ de la forme suivante

$$0 \to L(\varepsilon^r) \to \mathcal{E}_0 \to V_f \to 0 \tag{4.3.2.c}$$

avec $r = 2-k$ ou $1-k$. On voit en effet que la flèche surjective de cette suite exacte induit un isomorphisme de $\mathcal{L}_0(\gamma) \oplus \mathcal{L}_0(\delta)$ sur V_f. On conclut en se rappelant que l'image de v_δ dans $\mathcal{L}_0$ engendre le module $\mathcal{L}_0$ sous l'action de $L[G_{\mathbb{Q}}]$. Le même argument s'applique pour $\mathcal{L}_B$.

L'extension $\mathcal{E}_0$ détermine une classe $c_{\mathcal{E}_0}$ non triviale dans

$$H^1(\mathbb{Q}, V_f^\vee(r)) = H^1(\mathbb{Q}, V_f(2k-3+r)).$$

Pour terminer la démonstration, il nous reste à voir que cette classe appartient au groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(2k-3+r))$ et que $r = 2-k$.

4.3.3. *$c_{\mathcal{E}_0}$ appartient au groupe de Selmer*

D'après le Lemme 4.1.3, comme $2k-3-r \leqslant k-1 = m$, il suffit de vérifier la condition locale en p. Soit D_A la droite de $\mathcal{L}_A \otimes F_A$ sur laquelle le sous-groupe d'inertie en p agit trivialement par la Proposition 3.3.6. Soit D_B l'image de $D_A \cap \mathcal{L}_A$ dans $\mathcal{L}_B$. Son image dans $V_{\boldsymbol{I}} \otimes B$ est non triviale puisque, par la forme de la semi-simplification de $\mathcal{L}_B$, le noyau de $\mathcal{L}_B \twoheadrightarrow V_{\boldsymbol{I}} \otimes B$ ne contient aucune droite non ramifiée. Par conséquent la projecton de D_B dans $\mathcal{E}_0$ est une L-droite D_0 non ramifiée de $\mathcal{E}_0$ qui se projete non trivialement sur V_f. Comme V_f est ordinaire de poids de Hodge–Tate 0 et $2k-3$ cela entraine que l'extension $\mathcal{E}$ est ordinaire en p au sens de Fontaine–Perrin–Riou [**PR**], du moins lorsque $k \neq 2$ ou bien $k = 2$ et $r = -1$. Lorsque $k = 2$ et $r = 0$, comme la projection de D_B sur V_f est non nulle, on voit que D_0 n'est pas égale à la sous representation triviale de $\mathcal{E}_0$ et par conséquent, $\dim_L(\mathcal{E}_0^{I_p}) = 2$ et $\mathcal{E}_0$ est ordinaire en p. Puisque toute représentation ordinaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est également semi-stable, on en déduit que

$$c_{\mathcal{E}_0} \in H^1_g(\mathbb{Q}_p, V_f(2k-3-r)) = H^1_f(\mathbb{Q}_p, V_f(2k-3-r)).$$

4.3.4. *On a* $r = 2 - k$

En effet si $r = 1-k$, on obtient que $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(k-2)) \neq 0$. D'après un profond théorème de Kato, ce groupe de Selmer est nul : voir le Théorème 14.2 de [**K**]. Donc $r = 2 - k$.

Comme l'argument précédent utilise un résultat difficile, nous donnons une autre preuve lorsque le niveau N est sans facteur carré mais qui a l'inconvénient d'être conjecturale au moment où nous rédigeons ce travail. Elle repose en effet sur une propriété locale des représentations galoisiennes énoncée dans la Conjecture 3.1.7.

S'il n'existe pas de quotient de $\mathcal{L}_0$ avec une extension du type (4.3.2.c) avec $r = 2 - k$, cela signifie que $L(\varepsilon^{2-k})$ est la seule sous-représentation irréductible de $\mathcal{L}_0$ et qu'il existe une sous-représentation de $\mathcal{L}_0$ qui soit une extension de $L(\varepsilon^{1-k})$ par $L(\varepsilon^{2-k})$. Après une torsion à la Tate, on obtient une extension de Kummer non scindée

$$0 \to L \to \mathcal{K} \to L(\varepsilon^{-1}) \to 0. \tag{4.3.4.a}$$

On va aboutir à une contradiction, comme dans la fin de la preuve du Théorème 4.2.7. D'après la Conjecture 3.1.7, il est facile de voir que cette extension est non ramifiée aux premiers q divisant le niveau. On va montrer que cette extension qui est d'emblée ordinaire est en fait cristalline. On obtiendra donc une contradiction puisque par la théorie de Kummer, on sait que $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$. Pour montrer que cette extension est cristalline, il nous faut voir que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{K})^{\Phi=p} \neq 0$. Cela va à nouveau résulter du Lemme 3.3.5. Pour nous mettre dans la situation de ce lemme, revenons à la représentation $\rho_{\mathfrak{V}}$. On sait par la Proposition 3.3.6 et que $\mathfrak{V}$ est génériquement stable (par le Théorème 4.2.7) et sa preuve que $\rho_{\mathfrak{V}}$ admet un sous-quotient de dimension 2 que l'on note ϱ vérifiant la propriété suivante. Pour tout point algebrique $x \in \mathfrak{V}(\mathbb{C}_p)$ suffisament régulier, remarquons au passage que l'on peut toujours choisir la courbe affinoide $\mathfrak{V}$ de telle sorte qu'elle contienne un ensemble infini de tels points, la spécialisation ϱ_x de ϱ en x est cristalline de poids de Hodge–Tate $(k_{1,x} - 1, k_{2,x} - 2)$ et tel que les valeurs propres de Φ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\varrho_x)$ sont $\gamma_1(x)p^{k_{2,x}-2}, \gamma_1(x)^{-1}p^{k_{1,x}-1}$ avec $\gamma_1 = \lambda_{\mathfrak{U}}(U_1)\lambda_{\mathfrak{U}}(U_0)^{-1}$. En faisant une torsion (à la Tate) par $g \mapsto \langle\varepsilon(g)\rangle_{\mathfrak{X}_1}\varepsilon^{-2}(g)$ en plongeant $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_1)$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{V})$ par $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_1) \to \mathcal{O}(\mathfrak{X}_2) \to \mathcal{O}(\mathfrak{V})$ où la première flèche est déterminée par la seconde projection de $\mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$, on obtient une famille ϱ'_x qui se spécialise en $\mathcal{K}$ lorsque $x = x_0$ et telle que ϱ'_x est cristalline de poids de Hodge–Tate $(k_{1,x} - k_{2,x}, 0)$ et tel que les valeurs propres de Φ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\varrho'_x)$ sont $\gamma_1(x), \gamma_1(x)^{-1}p^{k_{1,x}-k_{2,x}+1}$. Comme $\gamma_1(x_0) = p$, on obtient le résultat désiré grâce au Lemme 3.3.5.

4.3.5. *Remarque finale*

Il résulte de la preuve ci-dessus que les extensions construites pour chaque forme dans la famille de Hida provient de l'extension $\mathcal{E}_B$. On obtient donc en fait un élément dans le groupe de Selmer $\boldsymbol{I}$-adique $H^1_f(\mathbb{Q}, \rho_{\boldsymbol{I}} \otimes \omega^{-a}\langle\chi_p\rangle^{-1/2})$.

Remerciements. Nous remercions A. Abbès, P. Colmez, M. Harris, D. Ramakrishnan et B. Roberts pour d'utiles correspondances ou conversations. Nous sommes également reconnaissant envers le rapporteur pour les améliorations qu'il nous a fait apporter et sa lecture attentive d'une version antérieure du manuscrit.

Les travaux de C.S. ont été partiellement financé par la NSF et une bourse de la fondation David et Lucile Packard. Les principaux résultats de ce travail ont été obtenus alors que E.U. était membre du laboratoire UMR 7539 du CNRS.

Références

[Be] J. Bellaiche, Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orsay (Janvier, 2002).

[BC] J. Bellaiche et G. Chenevier, Conjectures de Bloch–Kato et formes non-tempérée pour $U(3)$, preprint.

[BK] S. Bloch et K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift*, Volume I, pp. 333–400, Progress in Mathematics, Volume 86 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990).

[Bo] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie* (Hermann, Paris, 1972).

[BCDT] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises, *J. Am. Math. Soc.* **14**(4) (2001), 843–939.

[CF] C. Chai et G. Faltings, *Degeneration of Abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), Volume 22 (Springer, 1990).

[Ch] G. Chenevier, Familles p-adiques de formes automorphes pour GL_n, *J. Reine Angew. Math.* **570** (2004), 143–217.

[Co] R. Coleman, P-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417–479.

[CM] R. Coleman and B. Mazur, The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, pp. 1–113, London Mathematical Society Lecture Notes, Volume 254 (Cambridge University Press, 1998).

[Fo] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), 113–184.

[FP] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, in *Motives*, Part 1, pp. 599–706, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 55 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1994).

[GJ] S. Gelbart et H. Jacquet, A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3), *Annls Scient. Éc. Norm. Sup.* **11**(4) (1978), 471–542.

[GT] A. Genestier et J. Tilouine, Système de Taylor–Wiles pour GSp_4, preprint (2004).

[GRS] D. Ginzburg, S. Rallis et D. Soudry, Periods, poles of L-functions and symplectic-orthogonal theta lifts, *J. Reine Angew. Math.* **487** (1997), 85–114.

[Gr] R. Greenberg, On the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, *Invent. Math.* **72**(2) (1983), 241–265.

[H] G. Harder, *Eisensteinkohomologie und die Konstruktion gemischter Motive*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1562 (Springer, 1993).

[Ha] M. Harris, Functorial properties of toroidal compactifications of locally symmetric varieties, *Proc. Lond. Math. Soc.* **59**(1) (1989), 1–22.

[Hé] G. Hénniart, Représentations l-adiques abéliennes, dans *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980–1981*, pp. 107–126, Progress in Mathematics, Volume 22 (Birkhäuser, Boston, MA, 1982).

[Hi] H. Hida, Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL-type, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 1–76.

[K] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, III, *Astérisque* **295** (2004), 117–290.

[Ka] N. Katz, *Serre–Tate local moduli*, Séminaire d'Orsay sur les Surfaces Algébriques, Lecture Notes in Mathematics, Volume 868 (Springer, 1978).

[Ki] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine–Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), 373–454.

[Ku] S. S. Kudla, On the local theta-correspondence, *Invent. Math.* **83**(2) (1986), 229–255.

[KRS] S. S. Kudla, S. Rallis et D. Soudry, On the degree 5 L-function for Sp(2), *Invent. Math.* **107** (1992), 483–541.

[La] G. Laumon, Fonctions zéta des variétés de Siegel de dimension trois, *Astérisque* **302** (2005), 1–66.

[Li] J.-S. Li, Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology, *Duke Math. J.* **61**(3) (1990), 913–937.

[MW] B. Mazur and A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, *Invent. Math.* **76**(2) (1984), 179–330.

[Mu] D. Mumford, *Geometric invariant theory* (Springer, 1965).

[Ne] J. Nekovář, On the parity of ranks of Selmer groups, II, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **332**(2) (2001), 99–104.

[PR] B. Perrin-Riou, Représentations p-adiques ordinaires, *Astérisque* **223** (1994), 185–220.

[PS1] I. I. Piatetski-Shapiro, On the Saito–Kurokawa lifting, *Invent. Math.* **71** (1983), 309–338.

[PS2] I. I. Piatetski-Shapiro, Some example of automorphic forms on Sp_4, *Duke Math. J.* **50** (1983), 55–106.

[PS3] I. I. Piatetski-Shapiro, L-functions for GSp_4, Olga Taussky-Todd: in memoriam, *Pac. J. Math.* **181**(3) (1997), 259–275.

[PSR] I. I. Piatetski-Shapiro et S. Rallis, A new way to get Euler products, *J. Reine Angew. Math.* **392** (1988), 110–124.

[Ra] D. Ramakrishnan, Irreducibility of ℓ-adic representations associated to regular cusp forms on $GL(4)/\mathbb{Q}$, preprint (2003).

[Ri] K. Ribet, A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$, *Invent. Math.* **34**(3) (1976), 151–162.

[Ro1] B. Roberts, The theta correspondence for similitudes, *Israel J. Math.* **94** (1996), 285–317.

[Ro3] B. Roberts, Tempered representations and the theta correspondence, *Can. J. Math.* **50**(5) (1998), 1105–1118.

[Ro2] B. Roberts, The non-Archimedean theta correspondence for GSp(2) and GO(4), *Trans. Am. Math. Soc.* **351**(2) (1999), 781–811.

[ST] P. J. Sally Jr et M. Tadić, Induced representations and classifications for $\mathrm{GSp}(2, F)$ and $\mathrm{Sp}(2, F)$, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **52** (1993), 75–133.

[S1] R. Schmidt, The Saito–Kurokawa lifting and functoriality. *Am. J. Math.* **127**(1) (2005), 209–240.

[Se] J.-P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, *Publ. Math. IHES* **12** (1962), 69–85.

[Se2] J.-P. Serre, *Œuvres, Volume III, 1972–1984* (Springer, 1986).

[SU] C. M. Skinner et E. Urban, Sur les déformations p-adiques des formes de Saito–Kurokawa, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **335**(7) (2002), 581–586.

[SW] C. M. Skinner et A. J. Wiles, Residually reducible representations and modular forms, *Publ. Math. IHES* **89** (1999), 5–126.

[So] D. Soudry, The CAP representations of $GSP_4(\mathbb{A})$, *J. Reine Angew. Math.* **383** (1988), 87–108.

[T1] R. Taylor, Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight, *Duke Math. J.* **63** (1991), 281–332.

[T2] R. Taylor, On the l-adic cohomology of Siegel threefolds, *Invent. Math.* **114**(2) (1993), 289–310.
[T3] R. Taylor, Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 125–143.
[T4] R. Taylor, On the meromorphic continuation of degree two L-functions, preprint (2001).
[T5] R. Taylor, Galois representations, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **13**(1) (2004), 73–119.
[TW] R. Taylor et A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Ann. Math. (2)* **141**(3) (1995), 553–572.
[TU] J. Tilouine et E. Urban, Several variables p-adic families of Siegel–Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations, *Annls Scient. Éc. Norm. Sup.* **32** (1999), 499–574.
[U1] E. Urban, Selmer groups and the Eisenstein–Klingen ideal, *Duke Math. J.* **105** (2001), 485–525.
[U2] E. Urban, Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, *Astérisque* **302** (2005), 151–176.
[Vi] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, Volume 137 (Birkhäuser, Boston, MA, 1996).
[Wa1] J.-L. Waldspurger, Correspondance de Shimura, *J. Math. Pures Appl.* **59**(1) (1980), 1–132.
[Wa2] J.-L. Waldspurger, Correspondances de Shimura et quaternions, *Forum Math.* **3** (1991), 219–307.
[We] R. Weissauer, Four dimensional Galois representations, *Astérisque* **302** (2005), 67–150
[Wi1] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, *Ann. Math. (2)* **131**(3) (1990), 493–540.
[Wi2] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. Math. (2)* **141**(3) (1995), 443–551.