Canad. Math. Bull. Vol. **22** (1), 1979

SUR LA STRUCTURE EXTREMALE DE LA SOMME DE DEUX CONVEXES

PAR

J. BAIR

1. **Introduction et préliminaires.** Ces dernières années, de nombreuses recherches ont été consacrées à l'étude de la structure extrémale de la somme de deux convexes; signalons, par exemple, les travaux de Bair–Fourneau–Jongmans [3], Edelstein–Fesmire [5], Husain–Tweddle [6], Jongmans [7], Klee [8] et Roy [9]. Dans cette direction, Klee [8] a obtenu ce résultat très intéressant, qui a d'ailleurs été généralisé plus tard par Jongmans [7]: dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$, tout point extrême z de la somme d'un convexe fermé A et d'un convexe compact B s'écrit de façon unique comme la somme d'un point extrême x_z de A et d'un point extrême y_z de B; de plus, tout point extrême x de A livre un point extrême y de B tel que $z=x+y$ soit un point extrême de $A+B$. Par contre, il peut exister des points extrêmes de B dont la somme avec un point extrême de A n'est jamais un point extrême de $A+B$; cette constatation conduit au problème: est-il possible de caractériser l'ensemble des y_z?

Dans cette note, nous nous proposons de répondre à cette question pour une classe assez large de convexes. A cet effet, nous introduisons et analysons les "polyèdres convexes généralisés" et les "points extrême selon un cône"; ces notions sont utilisées ultérieurement pour prouver nos théorèmes principaux qui décrivent la décomposition des points extrêmes d'une somme de deux convexes en la somme de points extrêmes de chaque terme de cette somme. Enfin, le dernier paragraphe a pour but de généraliser quelque peu les résultats antérieurs.

Sans que nous éprouvions le besoin de le mentionner à chaque occasion, signalons que tout cette note se situe dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$ de dimension finie, à l'exception du dernier paragraphe, valable dans un espace vectoriel réel de dimension quelconque. La terminologie et les notations de base sont empruntées des ouvrages mentionnés dans la bibliographie, spécialement de [2]. Pour la bonne compréhension du texte, rappelons toutefois que nous notons ${}^iA$ (resp. ${}^pA$, ${}^{cp}A$, C_A, Γ_A) l'internat (resp. le profil ou ensemble des points extrêmes, l'enveloppe convexe du profil, le cône asymptote et le sous-espace caractéristique) d'un convexe A; par ailleurs, le cône dual d'une

Reçu par les rédacteurs le 31 octobre 1977; version révisée reçue le 17 février 1978.

partie A de $\mathbb{R}^d$ désignera l'ensemble des formes linéaires f sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f(x) \geq 0$ pour tout point x de A.

2. **Polyèdres convexes généralisés.** Par définition, un *polyèdre convexe généralisé* est la somme non vide d'un compact convexe et d'un cône convexe fermé de sommet 0; ce dernier est forcément le cône asymptote du polyèdre généralisé. Ainsi, sont des polyèdres convexes généralisés les compacts convexes non vides, les cônes convexes fermés, les polyèdres convexes non vides, ainsi que les convexes fermés non vides qui possèdent un nombre fini de variétés extrêmes. Par contre, il est aisé de construire des convexes fermés non vides qui ne sont pas des polyèdres convexes généralisés: pour preuve, dans $\mathbb{R}^2$, l'enveloppe convexe de la parabole $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$. Mentionnons quelques propriétés de ces ensembles.

2.1. *La somme d'un polyèdre convexe généralisé et d'un compact convexe non vide est un polyèdre convexe généralisé; par contre, la somme de deux polyèdres convexes généralisés n'est pas forcément un polyèdre convexe généralisé.*

Preuve. La première partie de l'énoncé est triviale. Pour vérifier la seconde, il suffit de considérer deux cônes convexes fermés dont la somme n'est pas fermée.

2.2. *Si un polyèdre convexe généralisé C s'écrit sous la forme $C = A + B$, avec A et B convexes et B borné, A est un polyèdre convexe généralisé.*

Preuve. On sait déjà que les cônes asymptotes de A et C coïncident et que A est fermé [1; prop. 1]. En conséquence, il est bien connu que A peut s'écrire sous la forme $A = (A \cap S) + \Gamma_A$, où S désigne un sous-espace supplémentaire de Γ_A; par ailleurs, $A \cap S$, convexe fermé dépourvu de droites, est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes à distance finie ou non, ce qui peut être exprimé par l'égalité $A \cap S = {}^{cp}(A \cap S) + C_{A \cap S}$; au total, A est la somme du cône $C_{A \cap S} + \Gamma_A$ et du convexe ${}^{cp}(A \cap S)$. or, vu que

$$C \cap S = (A \cap S) + [(B + \Gamma_A) \cap S] = (A \cap S) + \overline{[(B + \Gamma_A) \cap S]},$$

${}^{p}(A \cap S) = \{x_z \in {}^{p}(A \cap S) : z \in {}^{p}(C \cap S)\}$ en vertu du théorème de Klee rappelé dans l'introduction; par ailleurs, ${}^{p}(C \cap S)$ est borné puisque C est un polyèdre convexe généralisé, d'où ${}^{p}(A \cap S)$ est borné et A peut s'écrire comme la somme du cône convexe fermé C_A de sommet 0 et du compact $\overline{{}^{cp}(A \cap S)}$.

2.3. *Soient A un polyèdre convexe généralisé et f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^d$. Le minimum de f sur A existe si et seulement si f appartient au cône dual du cône asymptote C_A de A.*

Preuve. C'est évident.

Remarque. L'exemple simple de l'enveloppe convexe d'une parabole du

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-001-7 Published online by Cambridge University Press

plan montre l'utilité de l'hypothèse selon laquelle A est un polyèdre convexe généralisé.

2.4. *Toute face* (resp. *facette*) *d'un polyèdre convexe généralisé est un polyèdre convexe généralisé.*

Preuve. Il suffit d'invoquer la définition d'un polyèdre convexe généralisé et le théorème selon lequel toute face (resp. facette) d'une somme de deux convexes X, Y est la somme de faces (resp. facettes) de X, Y [7; 1.1, p. 295].

3. **Points extrêmes selon un cône.** Pour aborder des problèmes d'optimisation à objectifs multiples, Yu [10] vient d'introduire la notion de *points* C*-extrêmes*: si A est un ensemble quelconque et C un cône pointé de sommet 0, $\mathrm{Ext}[A \mid C]$ désigne l'ensemble des points x de A tels qu'il n'existe aucun point y de $A\backslash\{x\}$ pour lequel $x \in y + C$; en d'autres termes, c'est l'ensemble des points x tels que $(x - C) \cap A = \{x\}$.

Cette notion joue un rôle capital dans notre étude; donnons quelques énoncés qui seront exploités ultérieurement et dont les preuves aisées sont laissées au soit du lecteur.

3.1. *Quels que soient l'ensemble non vide A, le cône pointé C de sommet* 0, *le point x et le réel α positif,*

$$\mathrm{Ext}[A \mid C] = \mathrm{Ext}[A + x \mid C] - x = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Ext}[\alpha A \mid C].$$

3.2. *Pour une partie quelconque A et deux cônes pointés arbitraires C et C' de sommet* 0,

$$\mathrm{Ext}[A \mid C] \cap \mathrm{Ext}[A \mid C'] = \mathrm{Ext}[A \mid C \cup C']$$

et

$$\mathrm{Ext}[A \mid C] \cup \mathrm{Ext}[A \mid C'] \subset \mathrm{Ext}[A \mid C \cap C'].$$

3.3. *Pour deux parties quelconques A et B et un Cône pointé arbitraire C de sommet* 0,

$$(A \cap \mathrm{Ext}[B \mid C]) \cup (B \cap \mathrm{Ext}[A \mid C]) = (\mathrm{Ext}[A \mid C] \cup \mathrm{Ext}[B \mid C]) \cap (A \cap B) \subset \mathrm{Ext}[A \cap B \mid C];$$

en particulier, si C_1 désigne un cône pointé de sommet 0,

$$C_1 \cap \mathrm{Ext}[A \mid C] \subset \mathrm{Ext}[A \cap C_1 \mid C] \subset \mathrm{Ext}[A \cap C_1 \mid C \cap C_1].$$

3.4. *Soient A un ensemble quelconque, C un cône convexe pointé de sommet* 0, *V un sous-espace vectoriel contenu dans C et S un sous-espace supplémentaire de V. Si π désigne la projection canonique sur S selon V,*

$$\pi(\mathrm{Ext}[A \mid C]) \subset \mathrm{Ext}[\pi(A) \mid \pi(C)].$$

Remarque. Il est facile de construire des exemples montrant que les inclusions des trois derniers énoncés ne sont pas des égalités.

4. **Résultats principaux.** 4.1. *Soient A un convexe fermé et B un convexe compact. Si a et b sont deux points de A et B respectivement tels que $a+b \in {}^p(A+B)$, alors $b \in \operatorname{Ext}[B \mid C_A]$.*

Preuve. Supposons que le point b n'appartienne pas à $\operatorname{Ext}[B \mid C_A]$: il existe un point b' de $B\backslash\{b\}$ tel que $b \in b'+C_A$; dans ces conditions, on peut trouver un point u dans $C_A\backslash\{0\}$ tel que $a+b=a+b'+u$. Mais comme $A+B$ est fermé et que $[0:u)\subset C_{A+B}$ [3; 1.7], la demi-droite $a+b'+[0:u)$ est incluse dans $A+b$ et insère donc $a+b$ dans $A+B$, ce qui est absurde.

4.2. *Soient A un polyèdre convexe généralisé sans droites et B un compact convexe non vide. A la décomposition unique $z=x_z+y_z$ de tout point extrême z de $C=A+B$ en une somme de points (extrêmes) x_z, y_z de A, B, et au fait que tout point extrême de A peut jouer le rôle de x_z pour un z convenable, s'adjoint une propriété relative au choix de y_z:*

$$\{y_z \in {}^pB : z \in {}^p(A+B)\} = {}^p(A+B)\} = {}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A].$$

Preuve. Il suffit de démontrer que l'appartenance d'un point b à l'intersection de ${}^pB$ et $\operatorname{Ext}[B \mid C_A]$ entraîne l'existence d'un point a dans ${}^pA$ tel que $a+b \in {}^p(A+B)$.

Nous allons procéder par récurrence sur la dimension d de l'espace considéré.

Le résultat est évident si cette dimension vaut 1. Supposonsle vrai dans tout espace de dimension inférieure à k et travaillons dans l'espace $\mathbb{R}^k (1<k\le d)$.

Nous pouvons laisser de côté le cas bien connu où A est compact, c'est-à-dire où $C_A=\{0\}$.

Dans ces conditions, l'égalité $B\cap(b-C_A)=\{b\}$ et le fait que le cône C_A n'est pas un sous-espace donnent $B\cap {}^i(b-C_A)=\emptyset$. B peut donc être séparé de $b-C_A$ par un hyperplan [4]; en d'autres termes, on peut trouver une forme linéaire f non nulle sur $\mathbb{R}^k$ et un réel β tel que

$$b-C_A\subset\{x\in\mathbb{R}^k : f(x)\le\beta\} \quad \text{et} \quad B\subset\{x\in\mathbb{R}^k : f(x)\ge\beta\}.$$

Le point b appartient évidemment à la face $F_B=B\cap \bar{f}^1(\beta)$ de B. Désignons par H le noyau $\bar{f}^1(0)$ de f et considérons le minimum α de f sur A, ce minimum existant en vertu de l'énoncé 2.3. Si C_A ne rencontre H qu'en l'origine, la face $F_A=A\cap\bar{f}^1(\alpha)$ de A est compacte: il existe un point a extrême de F_A, donc de A, tel que $c=a+b$ appartienne à ${}^p(F_A+F_B)$; c est alors un point extrême de la face $C\cap\bar{f}^1(\alpha+\beta)$ de $C=A+B$, donc un point extrême de C. Au contraire, si l'intersection de C_A et de H contient au moins une demi-droite, choisissons arbitrairement un point a^* de $F_A=A\cap\bar{f}^1(\alpha)$ et considérons les ensembles $B'=(B-b)\cap H=F_B-b$, $A'=(A-a^*)\cap H=$

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-001-7 Published online by Cambridge University Press

$F_A - a^*$, $C' = A' + B'$. Il est clair que $C' + a^* + b = F_A + F_B = C \cap \bar{f}^1(\alpha + \beta)$. On se trouve donc, dans le sous-espace H de dimension $k-1$, en présence d'un polyèdre convexe généralisé A' (2.4), sans droites mais non borné, et d'un convexe compact non vide B' tels que $0 \in \operatorname{Ext}[B' \mid C_{A'}] \cap {}^pB'$ (3.1 et 3.3). En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un point extrême a' de A' tel que $0 + a' = a'$ soit un point extrême de C'. Dans ces conditions, $a = a' + a^*$ est un point extrême de A; de plus, $b + a = 0 + a' + b + a^*$ est un point extrême de $C \cap \bar{f}^1(\alpha + \beta)$, donc de C.

4.3. *Si C est un polyèdre convexe généralisé sans droites, tel que $C = A + B$ avec A et B convexes et B compact, ${}^c({}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A])$ est le sommand minimum de C associé à A.*

Preuve. Il est clair que $A + {}^c({}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A]) \subset C$. Pour démontrer l'inclusion réciproque, considérons un point arbitraire z de C. En vertu d'une généralisation classique du théorème de Krein-Milman, nous pouvons écrire z sous la forme $\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^q \beta_j v_j$ avec $u_i \in {}^pC$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\beta_j \geq 0$ et $v_j \in C_C$ pour $j = 1, 2, \ldots, q$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$; or, chaque u_i se décompose en $u_i = a_i + b_i$ avec $a_i \in {}^pA$ et $b_i \in {}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A]$ (4.1), d'où $z = \sum_{i=1}^p \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^q \beta_j v_j + \sum_{i=1}^p \alpha_i b_i$ appartient à ${}^{cp}A + C_C + {}^c({}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A])$, c'est-à-dire à $A + {}^c({}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A])$.

Enfin, le Théorème 4.2 garantit l'inclusion de l'ensemble ${}^c({}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A])$ dans tout sommand de C associé à A.

4.4. *Si A est un polyèdre convexe généralisé, B un convexe compact et b un point de ${}^pB \cap \operatorname{Ext}[B \mid C_A]$, il existe une variété extrême V de A telle que $b + V$ soit une variété extrême de $A + B$.*

Preuve. Nous pouvons supposer désormais, vu 4.2, que le sous-espace caractéristique Γ_A de A est distinct de $\{0\}$. Désignons par S un sous-espace supplémentaire de Γ_A, par A', B', et b' les images respectives de A, B et b par la projection canonique π sur S selon Γ_A. Dans le sous-espace S, A' est visiblement un polyèdre convexe généralisé sans droites, B' un convexe compact non vide et b' un point de $\operatorname{Ext}[B' \mid C_{A'}]$ (3.4). De plus, b' est un point extrême de B': sinon il existe deux points x' et y' de B' tels que $b' \in]x' : y'[$; quels que scient les points x et y pris respectivement dans $\pi^{-1}(x') \cap B$ et $\pi^{-1}(y') \cap B$, il faut que le segment $]x : y[$ rencontre $\pi^{-1}(b') = b + \Gamma_A$ au seul point b, sinon b n'appartiendrait pas à $\operatorname{Ext}[B \mid C_A]$; comme le segment $[x : y]$ est inclus dans B, b n'est pas un point extrême de B, ce qui est absurde.

En vertu du Théorème 4.2, il existe un point extrême a' de A' tel que $a' + b'$ soit un point extrême de $A' + B'$; $V = a' + \Gamma_A$ est une variété extrême de A telle que $V + b = a' + b' + \Gamma_A$ soit une variété extrême de $A + B$.

5. **Quelques extensions dans un espace vectoriel quelconque.** Nous allons à présent nous placer dans un espace vectoriel E de dimension quelconque. La

notion de point extrême selon un cône s'y définit de la même façon que dans un espace de dimension finie tandis qu'un polyèdre convexe généralisé de codimension finie est la somme directe d'un polyèdre convexe généralisé de dimension finie et d'un sous-espace vectoriel de codimension finie; un ensemble A est cerné quand, pour toute forme linéaire f sur E, $f(A)$ est majoré, donc borné, dans $\mathbb{R}$ [3,7]; signalons à ce propos que tout ensemble cerné est borné pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et, de ce fait, est de dimension finie. Enfin, les autres notions utilisées proviennent de [2].

5.1. *Soient A un ensemble convexe algébriquement fermé, B un ensemble convexe algébriquement fermé et cerné, a et b deux points de A et B respectivement tels que $a+b \in {}^p(A+B)$. Le point b appartient à* $\text{Ext}[B \mid C_A]$.

Preuve. Le raisonnement à utiliser est le même qu'en 4.1.

5.2. *Soient A un polyèdre convexe généralisé de dimension finie et sans droites, B un ensemble convexe algébriquement fermé et algébriquement borné, b un point de ${}^pB \cap \text{Ext}[B \mid C_A]$. Il existe un point extrême a de A tel que $a+b$ est un point extrême de $A+B$.*

Preuve. Considérons le sous-espace vectoriel S engendré par $A \cup \{b\}$ et désignons par B' l'intersection de B et de S. On peut appliquer le Résultat 4.2 dans le sous-espace S de dimension finie puisque, visiblement, b appartient à ${}^pB' \cap \text{Ext}[B' \mid C_A]$: il existe donc un point extrême a de A tel que $a+b$ soit un point extrême de $A+B'$. Pour conclure que $a+b$ est aussi un point extrême de $A+B$, il suffit de remarquer que toute décomposition du type $a+b=a'+b'$, avec $a' \in A$ et $b' \in B$, entraîne $b' \in S$, donc $b' \in B'$, et dès lors $a=a'$ et $b=b'$ [3; 2.1].

5.3. *Soient A un polyèdre convexe généralisé de codimension finie, B un convexe algébriquement fermé et cerné, et b un point de ${}^pB \cap \text{Ext}[B \mid C_A]$. Il existe une variété extrême V de A telle que $b+V$ soit une variété extrême de $A+B$.*

Preuve. La démarche du paragraphe 4.4 peut être reprise en remarquant que le sous-espace vectoriel S sur lequel on projette est de dimension finie.

6. **Remarques finales.** 6.1. Désormais, les points extrêmes d'une somme de deux convexes sont parfaitement déterminés lorsqu'un des deux sommands envisagés est un polyèdre convexe généralisé, l'autre étant borné; nous avons dû supposer que le premier sommand est un polyèdre convexe généralisé pour pouvoir utiliser le résultat 2.3; il est néanmoins probable que cette restriction puisse parfois être levée.

6.2. Si, dans les Théorèmes 4.2 et 4.4, nous avons réussi à caractériser complètement l'ensemble des points de B qui permettent d'obtenir les variétés extrêmes de $A+B$, nous ne possédons à l'heure actuelle aucun renseignement susceptible de décrire l'ensemble des points extrêmes y de B pour lesquels il existe une demidroite (resp. demi-variété) extrême D de A telle que $y+D$ soit une demi-droite (resp. demi-variété) extrême de $A+B$: tout au plus pouvons-nous constater que cet ensemble ne coïncide pas avec ${}^{p}B \cap \mathrm{Ext}[B \mid C_A]$, ainsi qu'en témoignent de nombreux exemples.

Bibliographie

1. J. Bair, *Une étude des sommands d'un polyèdre convexe*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **45,** 1976, pp. 307–311.
2. J. Bair, and R. Fourneau, *Etude géométrique des espaces vectoriels—une introduction*, Lecture Notes in Math., vol. **489,** Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg-New York, 1975.
3. J. Bair, R. Fourneau and F. Jongmans, *Vers la domestication de l'extrémisme*, Bull Soc. Roy. Sc. Liège, **49,** 1977, pp. 126–132.
4. J. Bair and F. Jongmans, *Séparation franche dans un espace vectoriel*, Bull. Soc Roy. Sc. Liège, **39,** 1970, pp. 474–477.
5. Edelstein and Fesmire, *On the extremal structure and closure of sums of convex sets*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **22,** 1975, pp. 590–599.
6. Husain and Tweddle, *On the extreme points of the sum of two compact convex sets*, Math. Ann., **188,** 1970, pp. 113–122.
7. F. Jongmans, *Réflexions sur l'art de sauver la face*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **45,** 1976, pp. 294–306.
8. V. Klee, *Some characterizations of convex polyhedra*, Acta Math. **102,** 1959, pp. 79–107.
9. A. Roy, *Facial structure of the sum of two compact convex sets*, Math. Ann., **197,** 1972, pp. 189–196.
10. P. L. Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optim. Th. and Appl., **14,** 1974, pp. 319–377.

Universite de Liège
Institut de Mathematique
15, Avenue des Tilleuls
4000 Liege, Belgique

https://doi.org/10.4153/CMB-1979-001-7 Published online by Cambridge University Press