Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2008) **7**(1), 67–91 © Cambridge University Press 67
doi:10.1017/S1474748007000175 Printed in the United Kingdom

LAMINATIONS DANS LES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

BERTRAND DEROIN

Université de Paris-Sud, UMR 8628 du CNRS,
Département de Mathématiques d'Orsay,
Bâtiment 425, 91405—Orsay Cedex,
France (bertrand.deroin@math.u-psud.fr)

(Reçu le 13 février 2006 ; révisé le 15 novembre 2006 ; accepté le 21 novembre 2006)

Résumé Nous démontrons des théorèmes d'immersion holomorphe dans un espace projectif complexe pour des variétés kählériennes non compactes et des laminations par variétés complexes qui admettent un fibré en droites holomorphe strictement positif. En particulier, nous montrons que sur une lamination compacte par surfaces de Riemann, les fonctions méromorphes séparent les points si et seulement si aucun cycle feuilleté n'est homologue à 0.

Abstract We prove holomorphic immersion theorems in a finite dimensional complex projective space for kählerian non-compact manifolds and for laminations by complex manifolds that carry a line bundle of positive curvature. In particular, we prove that on a Riemann surfaces lamination of a compact space, the space of meromorphic functions separates points if and only if every foliation cycle is non homologous to 0.

Mots clés : fonctions méromorphes ; séries de fonctions holomorphes ; théorèmes de plongement ; variétés kählériennes ; feuilletages

Keywords: meromorphic functions; series of holomorphic functions; embedding theorems; Kähler manifolds; foliations

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 32A20; 32A05; 32Q40; 32Q15; 57R30

1. Introduction

Kodaira [**Ko**] a démontré que parmi les variétés complexes compactes, les variétés projectives complexes sont celles qui admettent un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne dont la courbure est strictement positive.* Dans ce travail, nous démontrons des résultats de plongement analogues dans le cas des variétés hermitiennes non compactes et des laminations par variétés complexes.

Soit (M, g) une variété complexe hermitienne. Une immersion $\pi : (M, g) \to \boldsymbol{CP}^N$ est dite *localement bilipschitzienne* si il existe un réel $r > 0$ et une constante $K \geqslant 1$ telle que la restriction de π à une boule de rayon r est un plongement K-bilipschitzien.

* La courbure d'une métrique hermitienne lisse $|\cdot|$ est la $(1,1)$-forme $\Omega = \mathrm{i}\bar{\partial}\partial \log |s|$ où s est une section holomorphe locale ne s'annulant pas.

Théorème 1.1 (Immersion d'une variété non compacte). *Soit* (M,g) *une variété hermitienne complète et* $E \to M$ *un fibré en droites holomorphe admettant une métrique hermitienne à géométrie bornée dont la courbure* Ω *vérifie des inégalités du type*

$$\frac{1}{C} g(u) \leqslant \Omega(u, \sqrt{-1}u) \leqslant C g(u)$$

pour une constante $C \geqslant 1$ *ne dépendant pas du vecteur tangent* u. *Alors il existe un entier* N *et une immersion holomorphe localement bilipschitzienne* $\pi : (M,g) \to \boldsymbol{C}P^N$.

Ce théorème apparait aussi dans le travail de Gromov [**Gr**]. Notre contribution est l'usage de sections à décroissance exponentielle, qui permettent d'assurer la convergence des séries fuchsiennes associées, ce qui n'était pas clair dans [**Gr**].

Corollaire 1.2. *Une surface riemannienne à géométrie bornée s'immerge holomorphiquement et localement bilipschitziennement dans un espace projectif complexe.*

Une lamination par variétés complexes d'un espace topologique X est un atlas complet $\mathcal{L}$ d'homéomorphismes définis sur des ouverts de X et à valeurs dans le produit de la boule unité B de $\boldsymbol{C}^n$ par un espace topologique T, en sorte que les changements de cartes préservent la fibration horizontale par boules, et soient holomorphes en restriction aux fibres.

Théorème 1.3 (Immersion d'une lamination par variétés complexes). *Soit* $\mathcal{L}$ *une lamination par variétés complexes d'un espace compact n'ayant pas de cycle évanouissant.** *Si* $\mathcal{L}$ *admet un fibré en droites holomorphe de courbure strictement positive le long des feuilles, alors il existe un entier* N *et une application continue* $\mathcal{L} \to \boldsymbol{C}P^N$ *qui immerge holomorphiquement chaque feuille. De plus ces applications séparent les points.*

Nous conjecturons qu'une lamination par variétés complexes d'un espace compact de dimension topologique *finie* et vérifiant les hypothèses du théorème 1.3 admet un *plongement* à valeurs dans un espace projectif complexe qui immerge holomorphiquement les feuilles. Ohsawa et Sibony [**O-S**] ont démontré ce fait pour des feuilletages lisses par variétés complexes de codimension 1 d'une variété compacte (voir aussi [**I-M**] pour le cas d'un feuilletage par variétés symplectiques).

Le cas des laminations par surfaces de Riemann est particulièrement intéressant parce que d'une part il existe de nombreux exemples (voir le survol de Ghys [**Gh**], voir aussi [**Der**]), et d'autre part nous trouvons des critères topologiques très simples pour qu'une lamination par surfaces de Riemann possède des fonctions continues à valeurs dans un espace projectif qui immergent holomorphiquement les feuilles.

Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X. Un *cycle feuilleté* est un opérateur $T : \Omega^{1,1}(\mathcal{L}) \to \boldsymbol{R}$ strictement positif sur les $(1,1)$-formes strictement positives et nul sur les formes exactes (voir [**Su**]); c'est donc l'analogue de la classe fondamentale dans le cas d'une variété compacte.

* Cette hypothèse est plutôt technique et est expliquée dans le § 5.

Une *multi-transversale totale* est une partie fermée $\mathcal{M}$ de X, avec une fonction $m : \mathcal{M} \to \boldsymbol{N}$ telle que, au voisinage $\mathcal{V}$ de tout point de $\mathcal{M}$ il existe une fonction holomorphe $f : \mathcal{V} \to \boldsymbol{C}$ ne s'annulant identiquement sur aucune feuille et ayant la propriété que $\mathcal{M} \cap \mathcal{V} = f^{-1}(0)$ et que sa multiplicité d'annulation $m_t(f)$ de f le long de $\mathcal{L}$ en tout point t de $\mathcal{M}$ est égale à $m(t)$. L'équivalence des deux dernières assertions du théorème suivant est bien connue pour des feuilletages de dimension ou de codimension *réelle* 1 (voir [**Sm**, **Go**]).

Théorème 1.4 (Cas d'une lamination par surfaces de Riemann). *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann sans cycle évanouissant d'un espace compact de dimension topologique finie X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{L} \to \boldsymbol{C}P^N$ à valeurs dans un espace projectif qui immergent holomorphiquement les feuilles sépare les points ;*
- *aucun cycle feuilleté n'est homologue à* 0 *;*
- *par tout point de X passe une multi-transversale totale.*

Le texte est organisé de la façon suivante. Dans les §§ 2 et 3 sont introduits les principaux outils : les sections à décroissance exponentielle et les séries fuchsiennes. Les théorèmes 1.1, 1.3 et 1.4 sont respectivement démontrés aux §§ 4, 5 et 6.

2. Sections à décroissance exponentielle

Soit M une variété complexe et $E \to M$ un fibré en droites holomorphe, muni d'une métrique hermitienne $|\cdot|$. La *courbure* de $|\cdot|$ est la $(1,1)$-forme définie par

$$\Omega := \mathrm{i}\bar{\partial}\partial \log |s|^2,$$

où s est une section holomorphe locale de E et $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Une $(1,1)$-forme strictement positive en restriction à toute droite complexe est dite strictement positive.

Il est bien connu (voir par exemple [**Dem**]) que si $|\cdot|$ est une métrique hermitienne de courbure strictement positive, alors au voisinage V_x de tout point x de M, il existe une section holomorphe $s : V_x \to E$ dont la norme $|s| = \mathrm{e}^{\varphi}$ vérifie

$$\varphi = -|z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2 + o(|z|^2),$$

dans un système de coordonnées holomorphes $z = (z_1, \ldots, z_n)$ centré en x. Soit g la métrique *kählérienne* associée à Ω par la formule

$$g(u, v) = 2\Omega(u, \sqrt{-1}v).$$

Definition 2.1. Le *rayon* $r(|\cdot|)$ d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ de E est le supremum des réels $r \geqslant 0$ tels que les propriétés (i), (ii) et (iii) suivantes soient satisfaites.

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

(i) Le rayon d'injectivité de (M, g) est uniformément minoré par r et pour tout point x de M il existe un biholomorphisme

$$z : B_g(x, r) \to U_x \tag{2.1}$$

dans un ouvert U_x de $\boldsymbol{C}^n$ envoyant x sur 0 et qui est 2-bilipschitzien, U_x étant muni de la métrique euclidienne standard de $\boldsymbol{C}^n$. En particulier, g est complète.

(ii) Pour tout point x de M il existe une section holomorphe $s : B_g(x, r) \to E$ vérifiant pour tout y de $B_g(x, r)$:

$$\mathrm{e}^{-2d_g(x,y)^2} \leqslant |s(y)| \leqslant \mathrm{e}^{-d_g(x,y)^2/2}. \tag{2.2}$$

(iii) La courbure de Ricci de g est minorée uniformément sur M.

Une métrique hermitienne $|\cdot|$ de E de courbure strictement positive est dite *à géométrie bornée* si son rayon $r(|\cdot|)$ est strictement positif.

Lemme 2.2 (Renormalisation). *Si $E \to M$ est un fibré en droites holomorphe hermitien de courbure strictement positive et à géométrie bornée, alors les rayons des puissances de $|\cdot|$ vérifient pour tout entier $k \geqslant 0$*

$$r(|\cdot|^{\otimes k}) \geqslant \sqrt{k}\, r(|\cdot|).$$

De plus, la courbure de Ricci des métriques g_k induites par $|\cdot|^{\otimes k}$ tend uniformément vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Démonstration. Pour tout entier $k \geqslant 1$, les courbures des métriques $|\cdot|^{\otimes k}$ de $E^{\otimes k}$ sont les $(1,1)$-formes $\Omega_k = k\Omega$ et sont associées aux métriques kählériennes $g_k = kg$ sur M. En tout point x de M, les coordonnées $z_k = \sqrt{k} z$ exercent un biholomorphisme 2-bilipschitzien de $B_{g_k}(x, r\sqrt{k})$ dans l'ouvert $\sqrt{k} U_x$ de $\boldsymbol{C}^n$, et les sections $s^k : V_x \to E^k$ vérifient

$$\mathrm{e}^{-2d_{g_k}(x,y)^2} \leqslant |s^k(y)| \leqslant \mathrm{e}^{-d_{g_k}(x,y)^2/2},$$

pour tout y de $B_{g_k}(x, r\sqrt{k})$. Ainsi le rayon $r(|\cdot|^{\otimes k})$ est au moins supérieur à $\sqrt{k}\, r(|\cdot|)$. De plus la courbure de Ricci de la métrique g_k tend uniformément vers 0 lorsque k tend vers l'infini. □

Ce lemme motive l'étude des métriques hermitiennes de courbure strictement positive et à géométrie bornée ayant un grand rayon et dont la courbure de Ricci est uniformément proche de 0. Dans ces conditions, nous démontrons l'existence de sections holomorphes à décroissance exponentielle prolongeant un jet donné en un point. L'idée est de construire un prolongement holomorphe $h : M \to E$ dans $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ si $\alpha > 0$ est assez petit, où la métrique $|\cdot|_{x,\alpha}$ est définie pour tout point x de M et tout réel $\alpha > 0$ par

$$|\cdot|_{x,\alpha} := \mathrm{e}^{\alpha d_g(x,\cdot)} |\cdot|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

En vertu de la formule intégrale de Cauchy, si $|\cdot|$ est une métrique de courbure strictement positive à géométrie bornée de rayon $r(|\cdot|) = r$, nous avons les *inégalités de Garding uniformes : pour toute section holomorphe* $\tau : B_g(y,r) \to E$,

$$|J_1\tau(y)| \leqslant C(r)\sqrt{\int_{B_g(y,r)} |\tau(z)|^2 \,\mathrm{d}v_g(z)}, \tag{2.3}$$

où $J_1\tau(y)$ *est le* 1*-jet de* τ *au point* y *et* $C(r)$ *est une constante décroissante de* r. Une section holomorphe $h : M \to E$ de $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ admet alors la décroissance

$$|h(y)| \leqslant C|h|_{x,\alpha,2}\mathrm{e}^{-\alpha d(x,y)},$$

pour tout y de M, où C est une constante ne dépendant que de r. L'existence des sections à décroissance exponentielle découle donc du lemme suivant.

Lemme 2.3 (Lemme principal). *Il existe des réels* $\alpha > 0$ *et* $r_0 > 0$ *tels que si* $E \to M$ *est un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique* $|\cdot|$ *de courbure strictement positive à géométrie bornée dont le rayon vérifie* $r(|\cdot|) \geqslant r_0$ *et pour laquelle la courbure de Ricci de* g *est uniformément minorée par* $-\frac{1}{4}$, *alors tout* 1*-jet* j *de section holomorphe de* M *dans* E *en un point* x *se prolonge en une section holomorphe* $h : M \to E$ *de* $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ *de norme inférieure à* $C|j|$ *où* C *est une constante universelle.*

Démonstration. On pourra consulter [**Dem**] pour une démonstration du résultat suivant, dû à Hörmander.

Soit $E \to M$ *un fibré en droites au dessus d'une variété kählérienne complète* (M, g), *muni d'une métrique* $|\cdot|'$ *dont la courbure satisfait la positivité*

$$\Omega' - \kappa_M \geqslant \lambda\Omega,$$

κ_M *désignant la courbure de la métrique du fibré canonique* K_M *de* M *induite par* g *et* λ *une constante strictement positive. Si* u *est une* $(0,1)$*-forme à valeurs dans* E, *lisse,* $L^2_g(|\cdot|')$ *et* $\bar\partial$*-fermée* (*c'est à dire que* $\bar\partial u = 0$), *alors il existe une section* v *de* E *lisse et* $L^2_g(|\cdot|')$ *qui vérifie* $\bar\partial v = u$ *et l'estimée*

$$|v|'_2 \leqslant \frac{C}{\lambda}|u|'_2, \tag{2.4}$$

où C *est une constante universelle.*

Supposons que l'on ait une section s lisse et $L^2_g(|\cdot|')$ qui soit de surcroit *presque holomorphe*, dans le sens où $|\bar\partial s|'_2 \ll 1$. Nous pouvons inverser $u = \bar\partial s$ avec les estimées (2.4) : nous obtenons une section v lisse et $L^2_g(|\cdot|')$ telle que $\bar\partial(s - v) = 0$ et $|v|'_2 \leqslant (C/\lambda)|u|'_2$. La section $h = s - v$ est holomorphe et nous avons $|s - h|'_2 \ll 1$. Nous avons donc perturbé une section presque-holomorphe en une section holomorphe.

Lemme 2.4. *Il existe $\alpha > 0$ tel que si $|\cdot|$ est une métrique de E de courbure strictement positive à géométrie bornée de rayon $r(|\cdot|) \geqslant 1$ et pour laquelle la courbure de Ricci de g est minorée par $-\frac{1}{4}$, alors pour tout x de M l'estimée suivante est vérifiée. Si u est une $(0,1)$-forme à valeurs dans E, lisse, $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ et $\bar{\partial}$-fermée, alors il existe une section v de E lisse et $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ qui vérifie $\bar{\partial}v = u$ et*

$$|v|_{x,\alpha,2} \leqslant C|u|_{x,\alpha,2},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Considérons la fonction $\psi = d(x,\cdot)$. C'est une fonction 1-lipshitzienne. Puisque $r(E) \geqslant 1$, nous pouvons construire une fonction ϕ vérifiant $|\phi - d(x,\cdot)|_\infty \leqslant 1$ et $|\mathrm{i}\bar{\partial}\partial\phi|_\infty \leqslant C$, où C est une constante universelle. Regardons la métrique de E définie par

$$|\cdot|' = \mathrm{e}^{\alpha\phi}|\cdot|.$$

D'une part elle est uniformément équivalente à $|\cdot|_{x,\alpha}$, avec l'estimée

$$\mathrm{e}^{-\alpha}|\cdot|_{x,\alpha} \leqslant |\cdot|' \leqslant \mathrm{e}^{\alpha}|\cdot|_{x,\alpha}.$$

D'autre part elle est lisse de courbure

$$\Omega' = \Omega + \alpha\mathrm{i}\bar{\partial}\partial\phi.$$

Si $\alpha > 0$ est choisi assez petit en sorte que $\alpha C \leqslant \frac{1}{4}$, et si la courbure de Ricci de g est minorée par $-\frac{1}{4}$, alors nous avons la positivité de $|\cdot|'$:

$$\Omega' - \kappa_M \geqslant \tfrac{1}{2}\Omega.$$

Nous pouvons donc utiliser les estimées de Hörmander (2.4) sur E muni des normes $|\cdot|_{x,\alpha}$, avec la constante $\lambda = \frac{1}{2}$ et une constante C universelle. □

Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe et $|\cdot|$ une métrique de courbure strictement positive à géométrie bornée. Le lemme suivant est dû à Tian [**Ti**].

Lemme 2.5 (Sections presque-holomorphes). *Soit x un point de M et j un 1-jet de section holomorphe de M dans E en x. Il existe une section lisse $\bar{s} : M \to E$ à support compact, holomorphe sur $B_g(x, r/3)$, passant par j, telle que*

$$|\bar{s}|_{x,\alpha,2} \leqslant C|j| \quad \textit{et} \quad |\bar{\partial}\bar{s}|_{x,\alpha,2} \leqslant \frac{C|j|}{r},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Soit $s : B_g(x,r) \to E$ la section définie en (2.2), et soit P un polynôme linéaire des coordonnées z de (2.1) centrées en x tel que $j = J_1(Ps)(x)$. La section $\bar{s}$ est définie par $\bar{s} = \varphi s$, où $\varphi : B_g(x,r) \to \boldsymbol{R}$ est une fonction lisse, identiquement égale à 1

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

sur $B_g(x, r/3)$, nulle à l'extérieur de $B_g(x, 2r/3)$. De plus nous demandons que φ prenne ses valeurs entre 0 et 1 et que

$$|d\varphi|_g \leqslant C/r,$$

où C est une constante universelle. Nous pouvons par exemple construire φ en prenant une fonction ψ ayant les mêmes propriétés sur la boule euclidienne $B_{\mathrm{eucl}}(0, \frac{1}{2})$ de $\boldsymbol{C}^n$ et en considérant $\varphi(y) = \psi(z(y)/2r)$. Nous avons alors

$$|\bar{\partial}\bar{s}|_{x,\alpha,2} = |\bar{\partial}(\varphi)Ps|_{x,\alpha,2} \leqslant \frac{C}{r}|Ps|_{x,\alpha,2}.$$

Reste à majorer la norme de Ps sur la boule $B_g(x, r)$. Il existe une constante universelle C telle que pour tout y de $B_g(x, r)$

$$|P(y)| \leqslant C|j|(1 + d(x, y)).$$

Nous en déduisons donc

$$|Ps|_{x,\alpha,2} \leqslant C|j|\sqrt{\int_{B_g(x,r)} (1 + d(x, y))^2 \mathrm{e}^{\alpha d(x,y) - d(x,y)^2}\, \mathrm{d}v_g(y)}.$$

Cette dernière intégrale est majorée par l'intégrale convergente sur $\boldsymbol{C}^n$

$$2^{2n} \int_{\boldsymbol{C}^n} (1 + 2|z|)^2 \mathrm{e}^{2\alpha|z| - |z|^2/2}\, \mathrm{d}v_{\mathrm{eucl}}(z).$$

□

Soit $|\cdot|$ une métrique de E de courbure strictement positive et à géométrie bornée pour laquelle la courbure de Ricci de g est minorée par $-\frac{1}{4}$, et dont le rayon $r(|\cdot|)$ est supérieur à 1. Soit x un point de M et j un 1-jet en x de section holomorphe de M dans E. Appliquons le lemme de perturbation 2.4 à la section $\bar{s}$ construite au lemme 2.5. Nous obtenons une section holomorphe $H : M \to E$ de $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha})$ vérifiant

$$|H - \bar{s}|_{x,\alpha,2} \leqslant \frac{C|j|}{r}.$$

La section $H - \bar{s}$ est holomorphe sur la boule $B_g(x, r/3)$, donc les inégalités de Garding (2.3) donnent

$$|J_1 H - j| \leqslant \frac{C|j|}{r}$$

pour une constante universelle C. Nous choisissons r en sorte que $C/r = \frac{1}{2}$, où C est la constante apparaissant dans l'inégalité précédente. Puisque d'après le lemme de Tian nous avons $|\bar{s}|_{x,\alpha,2} \leqslant C|j|$, nous en déduisons l'estimée :

$$|H|_{x,\alpha,2} \leqslant C|j|,$$

pour une constante universelle C. Définissons $h_1 = H(j) = H$ et par récurrence $h_{q+1} = H(j - J_1(h_1 + \cdots + h_q))$ pour $q \geqslant 2$. Pour tout $q \geqslant 1$,

$$|J_1(h_1 + \cdots + h_q) - j| \leqslant (\tfrac{1}{2})^q|j|, \qquad |h_{q+1}|_{x,\alpha,2} \leqslant C(\tfrac{1}{2})^q|j|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

La série $\sum_q h_q$ converge donc vers une section holomorphe $h : M \to E$ de $L^2_g(|\cdot|_{x,\alpha,2})$ passant par j et telle que

$$|h|_{x,\alpha,2} \leqslant C|j|,$$

où C est une constante universelle. Le lemme 2.3 est démontré. □

3. Séries fuchsiennes

Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique $|\cdot|$ de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Soit g la métrique kählérienne associée à la forme de courbure de $|\cdot|$. Nous supposons que :

(i) la courbure de Ricci de g est uniformément minorée par $-\frac{1}{4}$;

(ii) le rayon $r(|\cdot|)$ de $|\cdot|$ est supérieur au réel r_0.

Dans ces conditions, tout 1-jet j de section holomorphe de M dans E en un point x se prolonge en une section holomorphe de $L^2(|\cdot|_{x,\alpha})$ de norme inférieure à $C|j|$, où $C > 0$ est une constante universelle (voir lemme 2.3). Soit $m(j) : M \to E$ celle de norme minimale.

Definition 3.1. Soit δ un réel strictement positif. Une partie $T \subset M$ est *δ-séparée* si deux points distincts de T sont séparés d'une distance supérieure à δ. Soit $T \subset M$ une partie δ-séparée et $j = \{j_t\}_{t \in T}$ une famille de 1-jets de sections holomorphes de M dans E définis sur T. La série

$$\sigma(j) := \sum_{t \in T} m(j_t)$$

est la *série fuchsienne* associée à j.

Lemme 3.2 (Convergence des séries fuchsiennes). *Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si la courbure de Ricci de g est uniformément minorée par $-c_0$ alors les séries fuchsiennes $\sigma(j)$ convergent uniformément sur tout compact de M vers une section holomorphe de E vérifiant*

$$|\sigma(j)|_{\infty,M} \leqslant C(\delta)|j|_{\infty,T},$$

pour toute partie δ-séparée T et toute famille bornée j de 1-jets définis sur T. De plus, nous avons

$$|J_1\sigma(j) - j|_{\infty,T} \leqslant D(\delta)|j|_{\infty,T},$$

*où D tend vers 0 lorsque δ tend vers l'infini.** *En particulier, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $\delta \geqslant \delta_0$, toute famille bornée $\{j_t\}_{t \in T}$ de 1-jets de sections holomorphes sur T se prolonge en une section holomorphe bornée $\sigma : M \to E$ vérifiant*

$$|\sigma|_\infty \leqslant C|j|_{\infty,T},$$

où C est une constante universelle.

* $|\cdot|_{\infty,A}$ est la norme uniforme en restriction à la partie A.

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Remarquons que, pour tout point y de M :

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T}\mathrm{e}^{-\alpha d(t,y)} &\leqslant C(\delta)\sum_{t\in T}\int_{B_g(t,\delta/2)}\mathrm{e}^{-\alpha d(z,y)}\,\mathrm{d}v_g(z)\\ &\leqslant E(\delta)\int_M \mathrm{e}^{-\alpha d(z,y)}\,\mathrm{d}v_g(z),\end{aligned}$$

où $E(\delta)=\mathrm{e}^{\alpha\delta}/\nu(\delta/2)$ et $\nu(\delta)=\inf_{x\in M}\mathrm{vol}(B_g(x,\delta))$. Il existe une constante universelle C et une constante $c_0>0$ telle que si la courbure de Ricci de g est uniformément minorée par $-c_0$, alors pour tout $r\geqslant 1$

$$\mathrm{vol}(B_g(x,r))\leqslant C\mathrm{e}^{\alpha r/2}.$$

Ceci permet de majorer les intégrales

$$\int_M \mathrm{e}^{-\alpha d(z,y)}\,\mathrm{d}v_g(z)$$

par une constante universelle. Nous obtenons donc la première partie du lemme. Supposons maintenant que $\delta\geqslant 2$. En vertu de l'inégalité de Garding (2.3) nous avons pour tout y de T,

$$|J_1\sigma(y)-j_y|\leqslant\sum_{t\in T,\,t\neq y}|J_1h(j_t)(y)|\leqslant C|j|_\infty\sum_{t\in T,\,t\neq y}\mathrm{e}^{-\alpha d(t,y)}.$$

Nous en déduisons donc

$$|J_1\sigma(y)-j_y|\leqslant C|j|_\infty\frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\nu(1)}\int_{M-B_g(y,\delta-1)}\mathrm{e}^{-\alpha d(z,y)}\,\mathrm{d}v_g(z).$$

La deuxième partie du lemme découle du fait que les fonctions

$$f_\delta: y\in M\mapsto\int_{M-B_g(y,\delta-1)}\mathrm{e}^{-\alpha d(z,y)}\,\mathrm{d}v_g(z)$$

convergent uniformément vers 0 lorsque δ tend vers l'infini.

Définissons $\sigma_1=\sigma(j)$, et par récurrence $\sigma_{q+1}=\sigma(j-J_1(\sigma_1+\cdots+\sigma_q))$ pour tout entier q supérieur à 1. Nous avons, pour tout q, les inégalités

$$|j-J_1(\sigma_1+\cdots+\sigma_q)|_{\infty,T}\leqslant|j|_\infty(\tfrac12)^q,\qquad|\sigma_q|_{\infty,M}\leqslant C(\delta_0)|j|_\infty(\tfrac12)^{q-1}.$$

La série $\sum_q\sigma_q$ converge uniformément sur M vers une section holomorphe $\sigma: M\to E$ bornée par $C|j|_\infty$ et prolongeant la famille de jets j. La constante C est universelle car nous pouvons choisir C décroissante de δ. □

4. Immersion holomorphe de variétés hermitiennes dans un espace projectif

Nous démontrons le théorème 1.1. Quitte à considérer des puissances assez grandes de E, nous pouvons supposer que $r(E)\geqslant r_0$ et que la courbure de Ricci de g est minorée par $-c_0$ (voir lemme 2.2). Nous construisons une immersion de la forme $\pi=[\sigma_0:\cdots:\sigma_N]: M\to\boldsymbol{CP}^N$, où les sections σ_i sont des sections holomorphes bornées de E.

Lemme 4.1. *Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie δ_0-séparée T de M, il existe une application méromorphe $\pi_T : M \to \boldsymbol{C}P^n$ de la forme $\pi_T = [\sigma_0 : \cdots : \sigma_n]$ où les σ_l sont des sections holomorphes de E bornées par une constante universelle, qui est bien définie sur le ε-voisinage T_ε de T, et sur lequel $\pi_T^* \Omega_{\mathrm{FS}} \geqslant C\Omega$, où $C > 0$ est une constante universelle.*

Démonstration. En chaque point t de T, définissons les 1-jets $j_0(t), \dots, j_n(t)$ de section holomorphe de T_tM dans E par

$$j_0(t) = J_1(s), \quad j_1(t) = J_1(z_1 s), \quad \dots, \quad j_n(t) = J_1(z_n s),$$

dans les coordonnées z centrées en t de (2.1). Ces jets sont bornés par 1 et d'après le lemme 3.2, il existe des prolongements holomorphes $\sigma_0, \dots, \sigma_n : M \to E$ dont la norme est majorée par une constante C ne dépendant que de δ_0.

Le quotient σ_0/s est une fonction holomorphe à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ définie sur la boule $B_g(t, r)$ et bornée par $C \exp(2r_0^2)$. Le lemme de Schwarz montre que $|\sigma_0| \geqslant \frac{1}{2}$ sur la réunion des boules $B_g(t, \varepsilon_1)$ centrées en un point t de T et de rayon $\varepsilon_1 > 0$ ne dépendant que de r_0 et de δ_0. De plus, la fonction

$$f = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \dots, \frac{\sigma_n}{\sigma_0} \right)$$

définit une application holomorphe $B_g(t, r) \to \boldsymbol{C}^n$ bornée par une constante ne dépendant que de C, δ_0 et r_0 et dont la différentielle en 0 dans les coordonnées z est l'identité. Une autre version du lemme de Schwarz montre que $\|\mathrm{d}f_x\| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout point x de $B_g(t, \varepsilon_2)$, où ε_2 est un réel ne dépendant que de r_0 et de δ_0. Le lemme est démontré avec $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. □

Lemme 4.2. *Soient $0 < \varepsilon < \delta_0$ deux réels. Il existe un nombre fini $T_1, \dots, T_k$ de parties δ_0-séparées de M dont la réunion est ϵ-dense.*

Démonstration. Une partie ε-séparée et maximale pour l'inclusion est ε-dense. Prenons en une T. Choisissons une sous-partie T_1 de T qui est δ_0-séparée et maximale pour l'inclusion, puis une partie $T_2 \subset T - T_1$ δ_0-séparée et maximale pour l'inclusion etc. Ce procédé s'arrête au bout d'un certain temps, c'est à dire qu'il existe l tel que $T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_l$. En effet, supposons qu'il existe un point t de T qui ne soit dans aucun des T_m, pour $m = 1, \dots, l$. Par maximalité, il existe un point t_m de T_m dans $B_g(t, \delta_0)$ pour tout $m = 1, \dots, l$. Ces points sont deux à deux distincts puisque les parties T_m sont disjointes. Il y a donc $l + 1$ points de T dans $B_g(t, \delta_0)$, et les $l + 1$ boules de rayon $\varepsilon/2$ centrées en ces points sont deux à deux disjointes dans $B_g(t, \delta_0)$: $l + 1$ est inférieur à une constante ne dépendant que de la courbure de Ricci de g. □

Pour chacunes de ces parties T_m, considérons les sections holomorphes $\sigma_{m,0}, \dots, \sigma_{m,n}$ de E construites au lemme 4.1 et l'application

$$\pi = [\sigma_{m,j}]_{1 \leqslant m \leqslant l,\, 0 \leqslant j \leqslant n} : M \to \boldsymbol{C}P^N,$$

où $N = (n+1)l - 1$. Composée avec les projections $p_m : \boldsymbol{C}P^N \to \boldsymbol{C}P^n$ on retrouve les applications méromorphes $p_m \circ \pi = \pi_{T_m}$. On a donc l'inégalité $\pi^* \Omega_{\mathrm{FS}} \geqslant C\Omega$ pour une constante strictement positive C. De plus en chaque point x de M, l'une au moins des sections $\sigma_{m,j}$ est de norme supérieure à $\frac{1}{2}$ et toutes sont uniformément bornées par une constante universelle. Comme les $\sigma_{m,j}$ sont bornées, et qu'en tout point au moins l'une d'entre elle est de norme supérieure à $\frac{1}{2}$, π est lipschitzienne. Le théorème 1.1 est démontré. □

Exemple 4.3. D'après le théorème d'Ahlfors–Bers [**A-B**], une surface riemannienne est conformément plate. Puisque toute $(1,1)$-forme sur une surface de Riemann non compacte est la forme de courbure d'un fibré en droites holomorphe hermitien, toute surface riemannienne de géométrie bornée s'immerge de façon bilipschitzienne dans un espace projectif complexe.

La famille des variétés hermitiennes de géométrie bornée qui s'immergent de manière bilipschitzienne dans un espace projectif complexe est stable par produit et par éclatement le long d'une partie séparée ou d'une sous-variété à géométrie bornée.

Exemple 4.4. Soit GA le groupe affine complexe des matrices 2×2 triangulaires supérieures de déterminant 1. Cette variété complexe est un ouvert de Zariski de $\boldsymbol{C}P^2$. Pourtant, muni d'une métrique hermitienne G invariante à droite, GA ne s'immerge pas de façon bilipschitzienne dans un espace projectif complexe, ni d'ailleurs dans aucune variété kählérienne compacte.

En effet, supposons qu'il existe une telle immersion $\pi : \mathrm{GA} \to M$, où (M, g) est une variété kählérienne compacte. Faisons agir sur GA le groupe à un paramètre

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \boldsymbol{C},$$

par multiplication à gauche, les orbites décrivant un feuilletage $\mathcal{F}$ de GA. Nous allons construire un courant strictement positif fermé T sur M, en utilisant une idée de Ahlfors [**Ah**]. Considérons les courants sur M définis pour tout $r > 0$ et pour toute $(1,1)$-forme lisse ω sur M par

$$T_r(\omega) = \frac{1}{\mathrm{Aire}_{(\pi\circ f)^* g}(D_r)} \int_{D_r} (\pi \circ f)^* \omega,$$

où D_r est un disque euclidien de $\boldsymbol{C}$ de rayon r, l'aire étant mesurée avec la métrique $(\pi \circ f)^* g$. De cette famille de courants strictement positifs de norme 1 sur M on peut extraire une suite $\{T_{r_i}\}$ ($r_i \to_{i\to\infty} \infty$) qui converge vers un courant T positif de norme 1 (i.e. $T(\omega) = 1$ où ω est la forme de Kähler). Comme l'immersion π est localement bilipschitzienne la longueur du bord ∂D_r est négligeable devant l'aire de D_r pour la métrique $(\pi \circ f)^* g$ lorsque r tend vers l'infini, ce qui montre que T est un courant fermé.

Nous allons montrer que T est homologue à 0 dans M, c'est à dire que pour toute $(1,1)$-forme fermée ω, $T(\omega) = 0$. Ce sera une contradiction puisque la forme de Kähler est fermée. Les transformations $\phi_s : \mathrm{GA} \to \mathrm{GA}$ obtenues par multiplication à gauche par les matrices

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{s} \end{pmatrix}$$

préservent $\mathcal{F}$ en contractant la restriction de G aux feuilles par e^{-2s}. Nous avons donc pour tout $s > 0$:

$$|\phi_s^* \Omega_{|\mathcal{F}}|_{\pi^* g,\infty} \leqslant \mathrm{e}^{-2s} |\Omega_{|\mathcal{F}}|_{\pi^* g,\infty}, \tag{4.1}$$

où $\Omega = \pi^*\omega$. Puisque $\phi_t^*\Omega$ est fermée pour tout t, les relations de Cartan s'écrivent $\mathcal{L}_X \phi_t^* \Omega = d(i_X \phi_t^* \Omega)$, où X est le champ de vecteurs qui génère le groupe à un paramètre $\{\phi_t\}_t$. On a donc

$$\phi_t^*\Omega - \Omega = \mathrm{d}\eta, \quad \eta = \int_0^t i_X \phi_s^* \Omega \,\mathrm{d}s.$$

Le point important est le fait que la forme η est bornée, ce qui permet de déduire que

$$\lim_i \frac{1}{\mathrm{Aire}(\pi(D_{r_i}))} \int_{\partial D_{r_i}} \eta = 0, \qquad \lim_i \frac{1}{\mathrm{Aire}_{(\pi \circ f)^* g}(D_r)} \int_{D_r} \phi_s^* \Omega = T(\omega).$$

D'après (4.1) nous avons donc

$$|T(\omega)| \leqslant C\mathrm{e}^{-2s},$$

où C est une constante ne dépendant pas de s. Cela étant vrai pour tout s, c'est que $T(\omega) = 0$.

La méthode employée montre aussi que la variété de Hopf $\boldsymbol{C}^2 - \{0\}$ muni de la métrique $|\mathrm{d}z|/|z|$ invariante par les homothéties ne peut pas s'immerger localement bilipshitziennement et holomorphiquement dans une variété kählérienne. Elle peut s'adapter à bien d'autres espaces homogènes. Cependant nous ne savons pas si le groupe de Heisenberg complexe muni d'une métrique invariante à droite s'immerge holomorphiquement et de manière bilipshitzienne dans un espace projectif complexe.

5. Immersion d'une lamination par variétés complexes

Une *lamination par variétés complexes* d'un espace topologique X est un atlas $\mathcal{L}$ d'homéomorphismes $\varphi : U \to B \times T$ à valeurs dans le produit d'une boule B de $\boldsymbol{C}^n$ par un espace topologique T, appelé *espace transverse*, tels que les changements de cartes soient de la forme $(z,t) \mapsto (z'(z,t), t'(t))$, où z' dépend holomorphiquement de z. Les feuilles de $\mathcal{L}$ localement définies par $B \times t$ sont des variétés complexes et forment une réunion disjointe de X.

Sur une lamination par variétés complexes $\mathcal{L}$, soit $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions *continues* $f : U \to \boldsymbol{C}$ définies sur un ouvert U de X, qui sont holomorphes le long des feuilles de $\mathcal{L}$. Considérons aussi le faisceau $C^\infty(\mathcal{L})$ des fonctions $\varphi : U \to \boldsymbol{R}$ définies sur un ouvert U de X qui sont lisses le long des feuilles, et telles que les dérivées à tout ordre par rapport aux coordonnées z soient aussi continues. Comme les changements de coordonnées sont holomorphes, cette notion ne dépend pas du système de coordonnées choisies. Comme dans le cas des variétés, il est possible de construire des partitions de l'unité associées à un recouvrement localement fini par des ouverts de X avec des fonctions de $C^\infty(\mathcal{L})$. Ceci permet de construire des métriques lisses sur un fibré en droites holomorphe au dessus de $\mathcal{L}$.

Un *bout de transversale* est une partie fermée τ de X pour laquelle il existe une famille de boîtes $B \times T$ recouvrant X telles que $\tau \cap (B \times T) \subset \{0\} \times T$. Localement, un bout de transversale se plonge dans l'espace transverse T. On peut donc définir son bord pour la topologie transverse. Considérons un bout de transversale τ, et la réunion disjointe X_τ des revêtements universels $\tilde{F}_t$ des feuilles passant par un point t de τ. Cet ensemble est muni d'une topologie définie de la façon suivante : un ouvert est l'ensemble des classes d'homotopies de lacets qui peuvent être représentées par un chemin contenu dans un ouvert donné de X. L'espace topologique X_τ est appelé le *tube* de τ.

Un *cycle évanouissant* de $\mathcal{L}$ est un lacet γ contenu dans une feuille et non homotope à un point dans sa feuille, mais qui est limite de lacets γ_n contenus dans des feuilles voisines et qui, eux, sont homotopes à un point dans leur feuille. Il est bien connu que l'espace X_τ est Hausdorff si et seulement si les feuilles passant par τ ne supportent pas de *cycle évanouissant*. Lorsque X_τ est Hausdorff, il hérite de la structure d'une lamination par variétés complexes, induite par la projection naturelle $r : X_\tau \to X$ qui est un homéomorphisme local. La projection $X_\tau \to X$ est alors un biholomorphisme local de lamination par variétés complexes. L'avantage des tubes est le fait que pour tout domaine contenu dans l'une de leur feuille la représentation d'holonomie est triviale.

Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact X, $E \to \mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ lisse dont la courbure en restriction à chaque feuille est strictement positive. Notons g la métrique kählérienne lisse le long des feuilles induites par la courbure de $|\cdot|$. Ces métriques sont automatiquement à géométrie bornée parce que l'espace total est compact. Plus précisément il existe des réels $r > 0$ et $c > 0$ tels que $r(|\cdot|_{|F}) \geqslant r$ et la courbure de Ricci de g_F est minorée par c pour toute feuille F. Nous supposons que $r \geqslant r_0$ et $c \leqslant c_0$, où le réel r_0 a été défini au lemme 2.3 et le réel c_0 au lemme 3.2. Ce n'est pas une grande restriction quitte à considérer des puissances assez grandes de E.

Soit $j = \{j_x\}_{x\in X}$ une famille *bornée* de 1-jets de sections holomorphes de E, dont le support est un bout de transversale $\mathcal{T}$ induisant sur chaque feuille une partie δ_0-séparée. Sur le revêtement universel $r_F : \tilde{F} \to F$ d'une feuille F de $\mathcal{L}$, la série fuchsienne $\sigma(r_F^* j_F)$ converge et est invariante par le groupe du revêtement. Elle définit donc une section holomorphe de E en restriction à F. La collection de toutes ses sections est une section bornée $\tilde{\sigma}(j) : X \to E$ holomorphe sur chaque feuille. C'est la *série fuchsienne* associée à la famille j.

Lemme 5.1. *Supposons que $\mathcal{L}$ n'ait pas de cycle évanouissant et que la famille j soit continue et s'annule sur le bord de $\mathcal{T}$. Alors $\tilde{\sigma}(j)$ est continue.*

Démonstration. Soit x un point de X où l'on veut démontrer la continuité de $\tilde{\sigma}(j)$. Considérons un bout de transversale τ passant par x et le tube $r : X_\tau \to X$: c'est une lamination par variétés complexes puisque $\mathcal{L}$ n'a pas de cycle évanouissant. Soit $s : U \to r^*E$ une section holomorphe trivialisante définie dans un voisinage U de x. Écrivons $\tilde{\sigma}(j) = fs$.

Soit $R \gg 1$ et $D \subset \tilde{F}_x \subset X_\tau$ un domaine contenant la boule $B(x, R)$. Puisque la représentation d'holonomie $\pi_1(D, x) \to \mathrm{Homeo}(\tau, x)$ est triviale, il existe une voisinage de D dans X_τ difféomorphe (en tant que lamination) au produit $D \times \tau'$, où τ' est un voisinage de x dans τ. On peut de plus supposer, quitte à rétrécir τ', que le fibré $r^*E_{|D\times\tau'}$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

est difféomorphe au fibré $r^* E_{|D} \times \tau'$. Les propriétés de continuité des séries fuchsiennes étudiées à l'appendice 7 (précisément le lemme 7.2), montre qu'il existe un voisinage $x \in V \subset U$ de x tel que

$$\liminf_{t \to t_0} |f(\cdot\,, t) - f(\cdot\,, t_0)| \leqslant C \frac{|j|_\infty}{\sqrt{R}}.$$

Comme d'un autre coté les inégalités de Garding montrent que f est uniformément continue le long des feuilles, cela prouve que f est continue, et à fortiori $\tilde{\sigma}(j)$. $\square$

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème 1.3. Nous construisons une application

$$\pi : X \to \boldsymbol{C}P^N$$

qui immerge holomorphiquement les feuilles de $\mathcal{L}$, et qui sépare deux points distincts donnés x_1 et x_2 de X. L'application π est de la forme $[\sigma_0, \dots, \sigma_N]$, où les σ_l sont des sections d'une puissance assez grande $E^{\otimes k}$ de E données par le lemme suivant.

Lemme 5.2. *Soit $\mathcal{T} \subset X$ un bout de transversale. Lorsque $k \geqslant k_1(\mathcal{T})$ est assez grand, alors toute famille j continue de 1-jets de sections holomorphes de $E^{\otimes k}$ définie le long de $\mathcal{T}$ se prolonge en une section holomorphe continue $\sigma : X \to E^{\otimes k}$ telle que*

$$|\sigma|_\infty \leqslant C |j|_{\infty, \mathcal{T}},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Quitte à considérer des puissances assez grandes de E, nous pouvons supposer que les rayons des feuilles sont supérieur à r_0, que la courbure de Ricci de la métrique kählérienne induite par la courbure de la métrique $|\cdot|^{\otimes k}$ est minorée par $-c_0$, et que le bout de transversale $\mathcal{T}$ intersecte les feuilles sur des parties $2\delta_0$-séparées. Considérons alors un bout de transversale $\mathcal{T}'$ qui contient $\mathcal{T}$ dans son intérieur, et tel que toute feuille l'intersecte sur une partie δ_0-séparée.

Commençons par étendre la famille de jets j à une famille continues j' de 1-jets définie sur $\mathcal{T}'$ telle que : d'une part j' s'annule sur le bord de $\mathcal{T}'$, et d'autre part $|j'|_{\infty, \mathcal{T}'} \leqslant |j|_{\infty, \mathcal{T}}$. D'après le lemme 3.2, nous avons

$$|J_1 \tilde{\sigma}(j') - j|_{\infty, \mathcal{T}} \leqslant D(\delta_0) |j|_{\infty, \mathcal{T}},$$

et d'après le lemme 5.1, $\tilde{\sigma}(j)$ est une section continue holomorphe le long des feuilles. Ceci constitue le début d'un procédé d'approximations successives nous donnant le résultat. $\square$

Achevons la démonstration du théorème 1.3. Soient x_1 et x_2 deux points distincts de X. D'après la proposition 5.2, lorsque k est assez grand, il existe une section holomorphe σ de $E^{\otimes k}$ telle que $\sigma(x_1) = 0$ et $\sigma(x_2) \neq 0$. Par ailleurs, lorsque k est assez grand, en tout point y de X il existe des sections holomorphes $\sigma_0^y, \dots, \sigma_n^y$ telles que $|\sigma_0^y(y)| = 1$ et $f = (\sigma_1^y/\sigma_0^y, \dots, \sigma_n^y/\sigma_0^y) = z + O(|z|^2)$, où z est une coordonnée centrée en y. Il existe

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

donc un voisinage autour de y où σ_0^y ne s'annule pas et $\mathrm{d}f$ est injective. Un nombre fini de ses voisinages recouvrent X par compacité. L'application

$$[\sigma : \sigma_0^{y_1} : \cdots : \sigma_n^{y_1} : \cdots : \sigma_0^{y_r} : \cdots : \sigma_n^{y_r}]$$

est une immersion holomorphe et sépare les points x_1 et x_2.

6. Laminations par surfaces de Riemann

Dans cette partie nous démontrons le théorème 1.4.

Commençons par l'équivalence des deux premières assertions. La classe d'homologie d'un cycle feuilleté T sur une lamination par surfaces de Riemann $\mathcal{L}$ d'un espace compact X peut être pensée comme la collection des classes d'homologie des images de T par tous les plongements lisses de X dans une variété lisse (voir appendice 8). Si $\pi : X \to \boldsymbol{CP}^N$ est une application continue qui immerge holomorphiquement ses feuilles, alors pour tout cycle feuilleté T sur $\mathcal{L}$, on a $[\pi_* T] \cdot [\Omega] = T(\Omega) > 0$, où Ω est la forme de Fubini–Study qui est strictement positive sur les directions complexes. Donc aucun cycle feuilleté sur $\mathcal{L}$ n'est homologue à 0.

Réciproquement, pour construire une application $\pi : X \to \boldsymbol{CP}^N$ qui immerge holomorphiquement les feuilles, il suffit de construire un fibré en droites holomorphe positif sur $\mathcal{L}$, et d'appliquer le théorème 1.3. Supposons qu'aucun cycle feuilleté ne soit homologue à 0. Le théorème 8.1 nous fournit un plongement lisse

$$\pi : X \to M$$

à valeurs dans une variété lisse compacte à bord, et une 2-forme ω lisse sur M strictement positive sur l'image de $\mathcal{L}$. La classe de cohomologie dans $H^2(M, \boldsymbol{R})$ est approximable par des classes de cohomologie rationnelles $[\omega_k] \in H^2(M, \boldsymbol{Q})$. On peut supposer que lorsque k tend vers l'infini,

$$|\omega - \omega_k|_\infty \to 0,$$

quitte à choisir ω_k dans sa classe en sorte que $\omega - \omega_k$ soit harmonique par rapport à une métrique riemannienne fixée sur M. Pour des entiers k suffisament grand, les formes ω_k sont strictement positives sur $\mathcal{L}$. Un multiple entier d'une d'entre elle est une 2-forme fermée $(\sqrt{-1}/2\pi)\Omega$, entière et strictement positive sur $\mathcal{L}$. Il est alors très classique de construire un fibré en cercles lisse $\boldsymbol{S}^1 \to F \to M$ avec une connexion ∇ dont la courbure est la forme Ω. Considérons le fibré en *droites complexes* lisse $\boldsymbol{C} \to E \to M$, avec une métrique hermitienne $|\cdot|$ lisse dont les sphères unités sont les fibres du fibré en cercles F. Les sections de E s'écrivent localement fs, où f est une fonction lisse à valeurs complexes et s une section lisse de F. Si le fibré en cercles F a une connexion ∇, elle s'étend à une connexion sur E, en posant $\nabla(fs) = \mathrm{d}f \cdot s + f\nabla s$. Une section locale $s : U \subset X \to \pi^* E$ sera décrétée holomorphe si ∇s est une $(1,0)$-forme le long des feuilles à valeurs dans $\pi^* E$. Pour voir que cette structure définit une structure de fibré en droites holomorphes sur $\pi^* E$, il suffit de démontrer l'existence locale de sections holomorphes. Pour cela, prenons

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

une section locale $s : U \subset X \to F$ de F, c'est à dire une section de E de norme 1. Nous cherchons une fonction $f : U \to \boldsymbol{C}^*$ telle que $\nabla(fs)$ soit une $(0,1)$-forme. Écrivons

$$\nabla s = As,$$

pour une 1-forme lisse A définie sur U. On demande donc que la forme

$$\mathrm{d} \log f + A$$

soit de type $(1,0)$. Considérons la partie $(0,1)$ de la forme A, que l'on note A_a. Nous cherchons f en sorte que

$$\bar{\partial} \log f + A_a = 0. \tag{6.1}$$

Nous avons donc à inverser le $\bar{\partial}$ avec un paramètre. Ceci est bien connu : c'est le lemme de $\bar{\partial}$ dû à Poincaré (voir [**G-H**, p. 5]). Nous avons donc démontré l'équivalence des deux premières assertions.

Nous démontrons à présent l'équivalence de la première et de la troisième assertion du théorème 1.4.

Si une lamination par surfaces de Riemann possède une application continue à valeurs dans un espace projectif complexe qui immerge holomorphiquement les feuilles, l'image réciproque d'un hyperplan est une multi-transversale totale, pourvu que l'image d'aucune feuille ne soit contenue dans l'hyperplan. Sur une telle lamination, il existe donc des multi-transversales totales passant par tout point.

Exemple 6.1. Une lamination par surfaces de Riemann est dite *hyperbolique* si toutes ses feuilles sont revêtues par le disque unité. Nous démontrons qu'elle admet une multi-transversale totale passant par tout point. Soit g la métrique complète de courbure -1 sur le fibré tangent de chaque feuille. D'après le théorème de Candel [**Ca**] et de Verjovsky [**Ve**], g est lisse sur l'espace total de la lamination. Ainsi, le fibré cotangent est muni d'une métrique lisse de courbure strictement positive. Pour pouvoir lui appliquer le théorème 1.3, il suffit de démontrer qu'une lamination par surfaces hyperboliques $\mathcal{L}$ d'un espace compact n'a pas de cycle évanouissant. Si $\mathcal{L}$ en avait un, il existerait un lacet $\gamma_\infty : \boldsymbol{S}^1 \to X$ contenu dans une feuille L et non homotope à un point dans L, qui est limite uniforme de lacets $\gamma_n : \boldsymbol{S}^1 \to X$ contenus dans des feuilles voisines L_n dans lesquelles ils sont homotopes à un point. Nous pouvons supposer que γ_∞ est une géodésique fermée. D'autre part, en approximant par des applications lisses l'application $\gamma : \boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{N} \cup \{\infty\} \to X$ dans la topologie C^0, nous pouvons aussi supposer que les courbes γ_n sont de classe C^3 et que la convergence $\gamma_n \to \gamma$ a lieu dans la topologie C^3. Puisque les courbes γ_n sont homotopes à un point dans leur feuille, elles se relèvent en des courbes fermées de même longueur dans le revêtement universel de L_n, isométrique au disque hyperbolique. Ceci n'est pas possible car leur courbure tend uniformément vers 0.

Une multi-transversale totale $\mathcal{M}$ peut être pensée comme un diviseur, et on peut lui associer un fibré en droites holomorphe $E \to \mathcal{L}$, dont le faisceau des sections est le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ des fonctions de $\mathcal{O}$ qui s'annulent avec multiplicité m. Nous prétendons que ce fibré peut être muni d'une métrique hermitienne dont la courbure est positive partout et non nulle dans un voisinage de $\mathcal{M}$. En effet, recouvrons $\mathcal{M}$ par un nombre fini de boîtes feuilletées $U_i \simeq \boldsymbol{D} \times T_i$ sur lesquelles $\mathcal{M}$ est défini par $f_i = 0$. Nous allons construire une fonction lisse $\psi : X - \mathcal{M} \to \boldsymbol{R}$, sous-harmonique le long des feuilles, et telle que dans chaque U_i, la fonction $\psi - \log|f_i|$ s'étende en une fonction lisse qui est strictement sous-harmonique en chaque point de $\mathcal{M}$. Si σ est une section holomorphe de E qui s'annule exactement sur $\mathcal{M}$ avec multiplicité m, alors la métrique hermitienne $\|\cdot\|$ de E définie par $\|\sigma\| = \exp\psi$ conviendra. Pour C assez petit, les fonctions $\inf(C, \log|f_i|)$ sur U_i sont sous-harmoniques et peuvent être régularisées en des fonctions de la forme $\log|f_i| + \varphi_i$, où les φ_i sont des fonctions lisses sous-harmoniques sur U_i, strictement au voisinage de $\mathcal{M}$, et qui valent C sur un voisinage de $\partial\boldsymbol{D} \times T_i$. Choisissons une partition de l'unité ρ_i sur $\mathcal{M}$ associée au recouvrement par les U_i : ce sont des fonctions sur U_i ne dépendant que de la coordonnée transverse. La fonction ψ définie par C sur l'extérieur de l'union des U_i et par $\sum_j \rho_j(\log|f_j| + \varphi_j)$ sur la réunion des U_i a la propriété requise.

Si une lamination par surfaces de Riemann possède des multi-transversales passant par tout point, alors elle admet un fibré en droites holomorphe hermitien dont la courbure est strictement positive en restriction aux feuilles. En effet, on peut recouvrir X par des ouverts V_j pour lesquels il existe un fibré en droites hermitien $E_j \to \mathcal{L}$ dont la courbure est strictement positive sur V_j et positive ou nulle ailleurs. Un nombre fini des V_j recouvrent X. Le produit de ces E_j est un fibré en droites hermitien dont la courbure est strictement positive partout. La première assertion du théorème 1.4 est alors une conséquence du théorème 1.3.

Exemple 6.2. Une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact qui n'a pas de cycle évanouissant et qui est transversalement un ensemble totalement discontinu a des multi-transversales totales passant par tout point. Elle admet donc des applications continues à valeurs dans un espace projectif complexe qui immergent holomorphiquement les feuilles.

7. Appendice : continuité des séries fuchsiennes

Dans cette partie nous établissons des propriétés de continuité des sections minimisantes, et de leurs séries fuchsiennes associées. Elles reposent essentiellement sur un résultat dû à Gromov [**Gr**], affirmant que, sous les conditions du lemme 2.3, si j est un 1-jet en un point x, la norme L^2 de la section minimisante $m(j)$ à l'extérieur de la boule $B(x,R)$ est majorée par $C(|j|/\sqrt{R})$.

Soient $p_i : E_i \to M_i$, $i = 1, 2$ deux fibrés en droites holomorphes, et $|\cdot|_i$ des métriques hermitiennes lisses sur E_i de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Nous supposons que pour $i = 1, 2$, le rayon $r(|\cdot|_i)$ est supérieur à r_0 et que la courbure de Ricci de la métrique kählérienne g_i que $|\cdot|_i$ induit sur M_i est minorée par $-\frac{1}{4}$. Sous ces conditions, tout 1-jet $j : T_t M_i \to E_i$ de section holomorphe de E_i se prolonge en une section holomorphe de $L^2(|\cdot|_{i,t})$, où $|\cdot|_{i,t} = \exp(\alpha d(\cdot, t))|\cdot|_i$ (voir lemme 2.3). Rappelons que $m(j)$ désigne celle de norme minimale.

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $R \gg 1$ deux réels. Supposons qu'il existe des domaines $B(x_i, R) \subset D_i \subset M_i$ et un isomorphisme de fibré en droites complexes $\phi : p_1^{-1}(D_1) \to p_2^{-1}(D_2)$ tel que $\phi(x_1) = x_2$ et

(i) ϕ est $(1+\varepsilon)$-bilipschitzien,

(ii) $\exp(-\varepsilon)|\cdot| \leqslant \phi_*|\cdot| \leqslant \exp(\varepsilon)|\cdot|$,

(iii) pour tout 1-jet ω_1 (respectivement ω_2) de section holomorphe de E_1 (respectivement E_2), $|\bar\partial\phi_*\omega_1| \leqslant \varepsilon|\omega_1|$ (respectivement $|\bar\partial\phi^*\omega_2| \leqslant \varepsilon|\omega_2|$).

Lemme 7.1 (Continuité des sections minimisantes). *Soient t_1 un point de $B(x_1, R/8)$ et $t_2 = \phi(t_1)$. Supposons que ϕ soit holomorphe sur un voisinage de t_1. Soit j_1 un 1-jet de section holomorphe de E_1 en t_1 et $j_2 = \phi_* j_1$. Alors*

$$|\phi m(j_1)(x_1) - m(j_2)(x_2)| \leqslant C\exp(-\alpha d(x_1, t_1)) f(R, \varepsilon)|j_1|,$$

où $f(\varepsilon, R)$ est une fonction qui tend vers $1/\sqrt{R}$ lorsque ε tend vers 0, et C est une constante universelle.

Démonstration. Observons que puisque $\varepsilon < 1$, ϕ est 2-bilipschitzien. Nous avons donc les inclusions :

$$B(t_2, R/2) \subset B(x_2, 3R/4) \subset B(x_2, R).$$

Considérons une fonction lisse $\psi : M_2 \to [0,1]$ qui vaut 1 sur $B(t_2, R/2)$, 0 à l'extérieur de $B(x_2, R)$, et telle que

$$|d\psi| \leqslant C/R,$$

la constante C ne dépendant que de r_0. Nous voulons perturber la section

$$\psi\phi_* m(j_1) : M_2 \to E_2$$

en une section holomorphe $h_2 : M_2 \to E_2$ dans la norme $|\cdot|_{t_2,2}$.*

Les propriétés suivantes portant sur les métriques $|\cdot|_{i,t_i}$ découlent directement des propriétés (ii) et (iii) : il existe une fonction $\eta(R, \varepsilon)$ qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et telle que

(ii′) $\exp(-\eta)|\cdot|_{t_2} \leqslant \phi_*|\cdot|_{t_1} \leqslant \exp(\eta)|\cdot|t_2$,

(iii′) pour tout 1-jet ω_1 (respectivement ω_2) de section holomorphe de E_1 (respectivement E_2), $|\bar\partial\phi_*\omega_1|_{t_2} \leqslant \eta|\omega_1|_{t_1}$ (respectivement $|\bar\partial\phi^*\omega_2|_{t_1} \leqslant \eta|\omega_2|_{t_2}$).

* Pour tout U dans $\mathcal{U}$, toute partie $B \subset M_i$, tout point z de M, et toute section $\tau : B \to E$, notons

$$|\tau|_{z,B,2} = \sqrt{\int_B |\tau(y)|_z^2 \, \mathrm{d}v_g(y)} \quad \text{et} \quad |\tau|_{z,2} = |\tau|_{z,M,2}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

Nous construisons une section holomorphe $h_2 : M_2 \to E_2$ telle que

$$|h_2 - \psi\phi m(j_1)|_{t_2,2} \leqslant C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)|j_1|. \tag{7.1}$$

D'après le lemme 2.3, il suffit de démontrer que

$$|\bar\partial(\psi\phi m(j_1))|_{t_2,2} \leqslant C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)|j_1|. \tag{7.2}$$

On a

$$|\bar\partial(\psi\phi m(j_1))|_{t_2,2} \leqslant |(\bar\partial\psi)\phi m(j_1)|_{t_2,2} + |\psi(\bar\partial\phi)m(j_1)|_{t_2,2}.$$

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} |(\bar\partial\psi)\phi m(j_1)|^2_{t_2,2} &\leqslant \left(\frac{C}{R}\right)^2 |\phi m(j_1)|^2_{t_2,B(x_2,R)} \\ &= \left(\frac{C}{R}\right)^2 \int_{B(x_2,R)} |\phi m(j_1)|^2_{t_2}\, \mathrm{d}v_{g_2} \\ &\leqslant \left(\frac{C}{R}\right)^2 |m(j_1)|^2_{t_1,2} \\ &\leqslant \left(\frac{C}{R}\right)^2 |j_1|^2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Pour le second terme, d'après (iii)$'$, nous avons

$$|\psi\bar\partial\phi m(j_1)|^2_{t_2,2} \leqslant |\bar\partial\phi m(j_1)|_{2_1,2} \leqslant \int_{B(x_2,R)} |\bar\partial\phi m(j_1)|^2_{t_2}\, \mathrm{d}v_{g_2} \leqslant C\eta^2 |J_1 m(j_1)|^2_{t_1},$$

où $J_1 m(j_1)$ désigne le premier jet de $m(j_1)$. En intégrant les inégalités de Garding, on en déduit

$$|\psi\bar\partial\phi m(j_1)|_{t_2,2} \leqslant C\eta|j_1|,$$

ce qui, en combinant avec (7.3) donne bien (7.2).

L'inégalité de Garding donne, puisque $h_2 - \psi\phi m(j_1)$ est holomorphe sur $B(t_2, \frac{1}{2})$:

$$|J_1 h_2(t_2) - j_2| \leqslant C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)|j_1|.$$

Quitte à ajouter à h_2 la section $m(j_2 - J_1 h_2)$, nous pouvons supposer que l'on a en plus $J_1 h_2 = j_2$. Comme $m(j_2)$ est la section holomorphe de $L^2(|\cdot|_{t_2})$ passant par j_2 de norme minimale, elle est orthogonale à l'espace des sections dont le premier jet en t_2 s'annule. Nous avons donc

$$|h_2|^2_{t_2,2} = |m(j_2)|^2_{t_2,2} + |h_2 - m(j_2)|^2_{t_2,2} \geqslant |m(j_2)|^2_{t_2,2}.$$

En vertu de (7.1), on trouve

$$|\psi\phi m(j_1)|_{t_2,2} \geqslant \left(1 - C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)\right)|m(j_2)|_{t_2,2}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

Or

$$|\psi\phi m(j_1)|_{t_2,2} \leqslant |\phi m(j_1)|_{t_2,D_2,2} \leqslant (1+\varepsilon)^{n+3/2}|m(j_1)|_{t_1,D_1,2},$$

d'où les inégalités

$$(1+\varepsilon)^{n+3/2}|m(j_1)|_{t_1,2} \geqslant |\psi\phi m(j_1)|_{t_2,2} \geqslant \left(1 - C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)\right)|m(j_2)|_{t_2,2}. \tag{7.4}$$

Les hypothèses du lemme étant symétriques, les inégalités (7.4) sont donc valables pour $m(j_2)$ aussi. Nous obtenons alors

$$(1+\varepsilon)^{n+3/2}|m(j_2)|_{t_2,2} \geqslant \left(1 - C\left(\eta + \frac{1}{R}\right)\right)|m(j_1)|_{t_1,2}.$$

En réutilisant (7.1) et (7.4) nous trouvons une fonction $\eta'(R,\varepsilon)$ qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et telle que

$$\left(1 + C\left(\eta' + \frac{1}{R}\right)\right)|m(j_2)|_{t_2,2} \geqslant |h_2|_{t_2,2} \geqslant \left(1 - C\left(\eta' + \frac{1}{R}\right)\right)|m(j_2)|_{t_2,2}.$$

Finalement,

$$|h_2 - m(j_2)|_{t_2,2} = \sqrt{|h_2|^2_{t_2,2} - |m(j_2)|^2_{t_2,2}} \leqslant C\sqrt{\eta' + \frac{1}{R}}\,|j_2|$$

et de nouveau à cause de (7.1), on obtient

$$\begin{aligned}|\phi m(j_1) - m(j_2)|_{t_2,B(t_2,R/2),2} &\leqslant |\psi\phi m(j_1) - m(j_2)|_{t_2,2}\\ &\leqslant C\sqrt{\eta' + \frac{1}{R}}\,|j_2|.\end{aligned}$$

Le lemme 7.1 découle alors de l'inégalité de Garding, en choisissant la fonction

$$f(R,\varepsilon) = C\left(\eta'(R,\varepsilon) + \frac{1}{R}\right)^{1/2}.$$

□

Nous nous intéressons à présent à la continuité des séries fuchsiennes. Pour assurer leur convergence, nous supposons que la courbure de Ricci des métriques g_i est minorée par le réel $-c_0$ donné par le lemme 3.2. Rappelons que le réel $\delta_0 \gg 1$ a été défini au lemme 3.2.

Lemme 7.2 (Continuité des séries fuchsiennes). *Soient T_i des parties δ_0-séparées de M_i, et $j_i = \{j_i(t)\}_{t\in M_i}$ des familles bornées de 1-jets de section holomorphe de E_i dont le support est contenu dans T_i. Supposons que ϕ soit holomorphe sur un voisinage de $T_1 \cap D_1$ et que $\phi(T_1 \cap D_1) = T_2 \cap D_2$. Alors*

$$|\phi\sigma(j_1)(x_1) - \sigma(j_2)(x_2)| \leqslant C(f(R,\varepsilon)\max(|j_1|_\infty, |j_2|_\infty) + |j_2 - \phi_* j_1|_{\infty,D_2}),$$

où $f(R,\varepsilon)$ est une fonction qui tend vers $1/\sqrt{R}$ lorsque ε tend vers 0 et C est une constante universelle.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\phi(\sigma(j_1)(x_1)) - \sigma(j_2)(x_2) \\ &= \sum_{t\in T_1\cap B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2) \\ &\quad + \sum_{t\in M_1-B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - \sum_{t\in M_2-\phi(B(x_1,R/8))} m(j_2(t))(x_2).\end{aligned}$$

Nous allons majorer la norme de chacun des termes de droite de cette égalité.

Nous avons pour tout $t\in T_1\cap B(x_1,R/8)$,

$$\begin{aligned}&|\phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2)| \\ &\qquad \leqslant |\phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(\phi_* j_1(t))(x_2)| + |m(\phi_* j_1(t) - j_2(\phi(t)))(x_2)|.\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant le lemme 7.1,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{t\in T_1\cap B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2)\right| \\ &\qquad \leqslant f(R,\varepsilon)|j_1|_\infty \sum_{t\in T_1\cap B(x_1,R/8)} \mathrm{e}^{-\alpha d(x_1,t)} + C|\phi_* j_1 - j_2|_{\infty,D_1} \sum_{t\in T_2\cap D_2} \mathrm{e}^{-\alpha d(x_2,t)}.\end{aligned}$$

Comme T_1 et T_2 sont des parties δ_0-séparées, les techniques du lemme 3.2 montrent que les deux sommes apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité précédente sont majorées par une constante ne dépendant que de r_0, α, δ_0 et c_0. Nous obtenons donc l'inégalité voulue

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{t\in T_1\cap B(x_1,R/8)} \phi(m(j(t))(x_1)) - m(j(\phi(t)))(x_2)\right| \\ &\qquad\qquad \leqslant C(f(R,\varepsilon)\max(|j_1|_\infty,|j_2|_\infty) + |\phi_* j_1 - j_2|_{\infty,D_1}).\end{aligned}$$

Puisque les sections minimisantes sont à décroissance exponentielle pour la norme $|\cdot|$, nous avons

$$\left|\sum_{t\in T_1-B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1))\right| \leqslant C|j_1|_\infty \sum_{t\in T_1-B(x_1,R/8)} \mathrm{e}^{-\alpha d(x_1,t)}.$$

Les techniques du lemme 3.2 montrent que

$$\sum_{t\in T_1-B(x_1,R/8)} \mathrm{e}^{-\alpha d(x_1,t)} \leqslant C\int_{R/8-\delta_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha r/2}\,\mathrm{d}r \leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha/(16/R)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{R}},$$

https://doi.org/10.1017/S1474748007000175 Published online by Cambridge University Press

la constante ne dépendant que de r_0, α, c_0, et δ_0. Nous obtenons donc

$$\left|\sum_{t\in T_1-B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1))\right| \leqslant \frac{C|j_1|_\infty}{\sqrt{R}}.$$

Pour le troisième terme, le même raisonnement donne

$$\left|\sum_{t\in M_2-\phi(B(x_1,\varepsilon/8))} m(j_2(t))(x_2)\right| \leqslant \frac{C|j_2|_\infty}{\sqrt{R}},$$

puisque

$$M_2 - \phi(B(x_1, R/8)) \subset M_2 - B(x_2, R/16).$$

□

8. Appendice : théorie de Sullivan

Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X et T un cycle feuilleté. Ce dernier possède une classe d'homologie définie de la manière suivante. Observons d'abord que si $\pi : X \to M$ est une application lisse à valeurs dans une variété M lisse et à bord, le courant $\pi_* T$ est un courant fermé de dimension 2 sur M et sa classe d'homologie $C(T,\pi) := [\pi_* T] \in H_2(M, \boldsymbol{R})$ est bien définie. Les propriétés de continuité de la cohomologie de Cech (voir [**Sp**]), et le fait que l'on puisse approcher dans la topologie C^0 une application continue $\pi : X \to M$ par des applications lisses montrent qu'il existe une unique classe d'homologie $[T]$ dans le deuxième groupe d'homologie de Cech de X, appelée la classe d'homologie de T, telle que $C(T,\pi) = \pi_*[T]$ pour toute fonction lisse $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété lisse.

Théorème 8.1. *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'une espace compact X de dimension topologique finie. Si aucun cycle feuilleté n'est homologue à* 0, *il existe un plongement lisse $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété lisse, et une* 2*-forme lisse sur M, fermée telle que $\pi^*\omega$ est strictement positive.*

Démonstration. Nous adaptons la théorie de Sullivan [**Su**, p. 231] pour certains plongements $\pi : X \to \boldsymbol{R}^N$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante : pour tout point x de X, il existe une coordonnée lisse (z,t) centrée en x et une projection lisse $p : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R}^q$ ($q = 2 \times$ dimension topologique transverse $+ 1$) telle que

$$p \circ \pi = (z, \tau(t)),$$

où τ est un plongement d'une transversale locale en x dans $\boldsymbol{R}^q$. Il n'est pas difficile de montrer que de tels plongements existent. L'avantage de ces plongements est le lemme suivant.

Lemme 8.2. *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X et $\pi : X \to \boldsymbol{R}^N$ un plongement lisse vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Un courant fermé T agissant sur les* 2*-formes lisses à support compact de $\boldsymbol{R}^N$ et qui est positif sur l'image de X est l'image par π d'un cycle feuilleté de $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Nous commençons par démontrer que pour toute forme lisse ω sur $\mathcal{L}$, il existe une suite de formes lisses ω_n sur M telles que $\pi^*\omega_n$ tend vers ω dans la topologiqe C^1. Prenons un recouvrement fini de X par des boîtes $B_i \times T_i$ pour lesquelles il existe des coordonnées (z_i, t_i) et des projections lisses $p_i : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R}^q$ telles que $p_i \circ \pi = (z_i, t_i)$. En utilisant une partition de l'unité (provenant de fonctions lisses sur M), nous pouvons supposer que le support de ω est dans l'une des boîtes $B_i \times T_i$. Pour simplifier les notations nous noterons $B_i \times T_i = B \times T$ et $(z_i, t_i) = (z, t)$. Ecrivons alors

$$\omega = \sum \omega_I \, \mathrm{d}z_I,$$

où les ω_I sont des fonctions lisses sur $\mathcal{L}$ (lisses en z dont les dérivées partielles par rapport aux variables z sont continues en z et t). Soit K l'image de T par τ. Nous considérons une famille de mesures de probabilité définies sur K telles que, pour toute fonction continue $f : K \to \boldsymbol{R}$, la fonction $\tilde{f} : \boldsymbol{R}^q \to \boldsymbol{R}$ définie par

$$\tilde{f}(y) = \int_K f(t) \, \mathrm{d}\nu_y(t)$$

soit un prolongement continu de f à $\boldsymbol{R}^q$. Une telle famille de mesures existe, car il suffit de prolonger continument à $\boldsymbol{R}^q$ l'application $y \in K \mapsto \delta_y \in \mathrm{Prob}(K)$, en utilisant des approximations simpliciales (pour une démonstration, on pourra consulter [**St**]). Ici $\mathrm{Prob}(K)$ désigne l'espace des mesures de probabilités sur K et δ_y est la mesure de Dirac en y. Nous posons alors

$$\tilde{\omega}_I(z, y) = \int_K \omega_I(z, t) \, \mathrm{d}\nu_y(t),$$

pour tout $(z, y) \in B \times \boldsymbol{R}^q$. Ce sont des prolongements des ω_I à $B \times \boldsymbol{R}^q$, lisses en z et dont les dérivées partielles par rapport à z sont continues. Il ne reste plus qu'à les lisser à l'aide d'un noyau régularisant $K_\epsilon(y, y')$ défini pour $y, y' \in \boldsymbol{R}^q$ et $\epsilon > 0$, en posant

$$\tilde{\omega}_I^\epsilon(z, y) = \int_{\boldsymbol{R}^q} K_\epsilon(y, y') \tilde{\omega}_I(z, y') \, \mathrm{d}_{\mathrm{eucl}}(y').$$

Il est immédiat de voir que les $\tilde{\omega}_I^\epsilon$ sont des fonctions lisses, dont le support est défini dans un voisinage aussi petit que l'on veut de $B \times K$. Les formes $\tilde{\omega}^\epsilon = \sum \tilde{\omega}_I^\epsilon dz_I$ vérifient alors $|\omega - (p \circ \pi)^* \tilde{\omega}^\epsilon|_{C^1} \to 0$.

Par positivité, on a une inégalité du type

$$|T(\omega)| \leqslant D |\omega|_{\mathcal{L}, \infty}, \tag{8.1}$$

pour toute forme lisse ω de $\boldsymbol{R}^N$, et pour une constante D ne dépendant pas de ω. Définissons un courant $\tilde{T}$ sur $\mathcal{L}$ en posant

$$\tilde{T}(\omega) = \lim_n T(\omega_n)$$

pour n'importe quelle suite de formes lisses ω_n sur M telles que $\pi^*\omega_n$ tende vers ω dans la topologie C^0. Ceci est bien défini à cause de l'inégalité (8.1) et du lemme 8.1. Démontrons alors que $\tilde{T}$ est fermé. Pour cela, prenons une forme exacte $\omega = \mathrm{d}\eta$ sur $\mathcal{L}$ et une suite η_n de formes lisses sur M telles que $\pi^*\eta_n$ tende vers η dans la topologie C^1 donnée par le lemme 8.1. La suite ω est alors la limite uniforme des formes $\pi^*\mathrm{d}\eta_n$. Nous avons donc

$$\tilde{T}(\mathrm{d}\eta) = \lim_n T(\mathrm{d}\eta_n) = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Achevons maintenant la démonstration du théorème 8.1. Prenons un plongement lisse de X dans $\boldsymbol{R}^N$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Un cycle feuilleté de $\mathcal{L}$ étant non homologue à 0 dans $\mathcal{L}$, les propriétés de continuité de la cohomologie de Cech montrent qu'il existe un voisinage de l'image de X dans $\boldsymbol{R}^N$ dans lequel il est toujours non homologue à 0. Ceci reste vrai pour des cycles feuilletés proche dans la topologie faible. Or l'ensemble des cycles feuilletés normalisés pour la topologie faible est compact. Il existe donc un voisinage de l'image de X dans lequel aucun cycle feuilleté de $\mathcal{L}$ n'est homologue à 0. Quitte à restreindre convenablement ce voisinage on peut supposer que c'est une variété compacte à bord lisse. Notons la M, et $\pi : X \to M$ le plongement de X dans M. La démonstration est alors identique à celle de Sullivan [**Su**, p. 231]. □

Remerciements. Ce travail est une partie de ma thèse de doctorat réalisée à l'École Normale Supérieure de Lyon. Je remercie chaleureusement Étienne Ghys qui a dirigé mes recherches. Je remercie également le rapporteur, qui a apporté de précieux conseils pour la rédaction de ce texte.

Ce travail a été partiellement supporté par le Fond Scientifique National Suisse.

Références

[Ah] L. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungflächen, *Acta Math.* **65** (1935), 157–194.

[A-B] L. Ahlfors et L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. Math.* **72** (1960), 385–404.

[Ca] A. Candel, Uniformization of surface laminations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **26** (1993), 489–516.

[Dem] J. P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, disponible sur www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html.

[Der] B. Deroin, Non rigidity of hyperbolic Riemann surfaces laminations, *Proc. Am. Math. Soc.* **135** (2007), 873–881.

[Gh] É. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann, in *Dynamiques et Géométrie Complexe, Lyon, 1997*, Panoramas & Synthèses, Vol. 8 (Société Mathématique de France, Paris, 1999).

[Go] S. E. Goodman, Closed leaves in foliations of codimension one, *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), 383–388.

[G-H] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry* (Wiley, 1978).

[Gr] M. Gromov, Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps, I, *Math. Phys. Analysis Geom.* **2** (1999), 323–415.

[I-M] A. Ibort et D. Martînez Torres, Approximately holomorphic geometry and estimated transversality on 2-calibrated manifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **338**(9) (2004), 709–712.

[Ko] K. Kodaira, On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties), *Ann. Math.* **60** (1954), 28–48.

[O-S] T. Ohsawa et N. Sibony, Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding, *Nagoya Math. J.* **158** (2000), 87–93.

[Sm] S. Schwartzman, Asymptotic cycles, *Ann. Math.* **66** (1957), 270–284.

[Sp] E. Spanier, *Algebraic topology* (Springer, 1981).

[St] E. Stein, *Singular integral and differential properties of functions* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973).

[Su] D. Sullivan, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976), 225–255.

[Ti] G. Tian, On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, *J. Diff. Geom.* **32** (1990), 99–130.

[Ve] A. Verjovsky, A uniformization theorem for holomorphic foliations, in *The Lefschetz Centennial Conference*, Contemporary Mathematics, Volume 58, pp. 233–253 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1987).