N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 59 (1975), 77-86

SUR QUELQUES COMBINAISONS LINEAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA, IV

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde transcendante à $n(\geqq 2)$ branches dans le plan $|z| < \infty$ définie par une équation irréductible

$$F(z\,;f) \equiv A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0 \tag{1}$$

où les $A_0, \cdots, A_n$ sont des fonctions entières sans zéros communs à toutes au moins un rapport entre lesquelles est transcendant.

Niino et Ozawa ([4]) ($n = 3$), Ozawa ([6]) ($n = 4$), Suzuki ([8]) ($n = 5$) et Noguchi ([5]) ($n \geqq 3$) ont démontré le

THÉORÈME A. *Quand $A_0(z) \equiv 1$, s'il y a $n+1$ valeurs finies et distinctes $a_1, \cdots, a_{n+1}$ telles que*

i) *$n-1$ fonctions quelconque dans $\{F(z\,;a_i)\}_{i+1}^{n+1}$ sont linéairement indépendantes sur C (C signifie le corps de nombre complexe);*

ii) *pour $n-3$ valeurs quelconque $\{a_{i_\nu}\}_{\nu=1}^{n-3}$ dans $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$,*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(a_i, f) + \sum_{\nu=1}^{n-3} \delta(a_{i_\nu}, f) > 2n-3\,,$$

alors, il y a au moins une valeur exceptionnelle au sens de Picard dans $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$.

Kato ([2]) a amélioré un peu ce théorème et quand $n = 5, 7$, l'hypothèse ii) peut être changé par une forme un peu faible (Noguchi ([5]), Kato ([2]) etc.). Mais les résultats ne sont pas décisifs. Comme une forme décisive, Ozawa ([6]) ($n = 4$) et Noguchi ($n \geqq 5$) ont conjecturé que, dans le Théorème A, l'hypothèse ii) peut être changé par

ii)′ $\sum_{i=1}^{n+1} \delta(a_i, f) > n$.

Dans ce mémoire, on démotre, d'abord, que ce qui est conjecturé par Ozawa et Noguchi est positif. C'est-à-dire,

Received September 4, 1974.

THÉORÈME B. *S'il y a $n+2$ valeurs distinctes $a, a_1, \cdots, a_{n+1}$ telles que*

i) *$n-1$ fonctions quelconque dans $\{F(z; a_i)\}_{i=1}^{n+1}$ sont linéairement indépendantes sur C;*

ii) $\delta(a, f) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(a_i, f) > n+1$,

alors,

1) *il y a un nombre i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq n+1)$ tel que $F(z; a) = \alpha F(z; a_{i_0})$ $(\alpha \neq 0$, constante$)$;*

2) $\sum_a \delta(a, f) \leqq n+2$.

Ce théorème contient une réponse positive pour la conjecture d'Ozawa et Noguchi citée en haut.

D'autre part, quand $n=3$ et $A_0(z) \equiv 1$ à (1), Niino et Ozawa ([4]) ont démontré le

THÉORÈME C. *Si $f(z)$ admet cinq valeurs a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 telles que*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta(a_i, f) + \delta(b_j, f) > 3 \qquad (j = 1, 2)\ ,$$

alors, au moins deux valeurs entre les a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 sont exceptionnelles au sens de Picard.

Ici, en appliquant la méthode utilisée dans la démonstration du Thèoréme B, on prouve le

THÉORÈME D. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde entières et transcendante à 4 branches. S'il y a 7 valeurs $\{a_i\}_{i=1}^4$ et $\{b_j\}_{j=1}^3$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{4} \delta(a_i, f) + \delta(b_j, f) > 4 \qquad (j = 1, 2, 3)\ ,$$

alors au moins trois valeurs dans $\{a_i\}_{i=1}^4 \cup \{b_j\}_{j=1}^3$ sont exceptionnelles au sens de Picard.

On peut espérer généraliser ce théorème pour n quelconque.

Dans ce mémoire, on démontre les Théorèmes B et D dans le cas de systèmes. Evidemment, ils contiennent le cas de fonctions algébroïdes. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([3], [7]).

2. Préliminaires.

Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ un système transcedant dans le plan

$|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique définie par Cartan ([1]):

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(re^{i\theta})|\, d\theta - \max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(0)| \, .$$

Soit

$$F = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire de $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients constants. On dit que la combinaison F est

1) lacunaire si elle n'admet pas de zéro dans $|z| < \infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si elle n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z| < \infty$;

3) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) \equiv 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 \, .$$

On note que 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 3) et $0 \leqq \delta(F) \leqq 1$.

On donne ici quelques lemmes qui seront utilisés après.

LEMME 1. *Soient $F_1, \cdots, F_k$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$ k combinaisons linéaires de $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants, qui ne sont pas identiquement nulles. Alors,*

$$m(r, \|F_1, \cdots, F_k\|/F_1 \cdots F_k) = O(\log rT(r, f)) \qquad (r \notin E) \, ,$$

où $\|F_1, \cdots, F_k\|$ signifie le wronskian de $F_1, \cdots, F_k$ et E est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Une démonstration de ce lemme est contenue dans celle du théorème fondamental de Cartan ([1]).

Soient X un ensemble de combinaisons $(\not\equiv 0)$ linéaires de $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et indépendantes sur C entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Alors, il y a $n+1-\lambda$ combinaisons $G_1, \cdots, G_{n+1-\lambda}$ dans X telles que toutes les combinaisons dans X sont représentées par $G_1, \cdots, G_{n+1-\lambda}$ à coefficients constants et $G_1, \cdots, G_{n+1-\lambda}$ sont linéairement indépendantes sur C. On dit que telles $G_1, \cdots, G_{n+1-\lambda}$ forment une base de X. Evidemment, $G = (G_1, \cdots, G_{n+1-\lambda})$ est un système dans $|z| < \infty$. On note que $0 \leqq \lambda \leqq n - 1$.

LEMME 2. *Quand* $\lambda = 0$, $\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n + 1$. ([1]).

LEMME 3. $|T(r, f) - T(r, G)| < O(1)$.

C'est trivial d'après les définitions de $T(r, f)$, $T(r, G)$ et G.

LEMME 4. *Quand* $\lambda = 1$, *s'il y a deux combinaisons proportionnelles dans* X, *on a* $\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n + 2$. ([9], Th. 6).

3. Théorème B.

Pour démontrer le Théorème B il suffit de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME B′. *Soient* f, X *et* λ *comme dans les préliminaires. S'il y a* $n + 2$ *combinaisons* $F, F_1, \cdots, F_{n+1}$ *dans* X *telles que*

i) $n - 1$ *combinaisons quelconque dans* $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ *sont linéarirement indépendantes sur* C *et*

ii) $\delta(F) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) > n + 1$,

alors

1) *il y a une dans* $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ *qui est proportionnelle à* F;

2) $\sum_{G \in X'} \delta(G) < 1$, *où* $X' = X - \{F, F_1, \cdots, F_{n+1}\}$;

3) *pour* G *dans* X', $\delta(G) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) \leqq n + 1$.

Démonstration. D'abord, on note que le nombre maximum de relation linéaires, homogènes à coefficients constants et indépendantes sur C entre $n + 1$ combinaisons quelconque de X est égal à λ. Par conséquent, celui entre $F_1, \cdots, F_{n+1}$ est égal à λ aussi. D'après le lemme 2 et les hypothèses i), ii), $\lambda = 1$ ou 2. Si $\lambda = 2$, il y a $n - 1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ qui forment une base de X. Soient $F_1, \cdots, F_{n-1}$ telles combinaisons, alors

$$F_n = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$$

où les coefficients α_i $(i = 1, \cdots, n - 1)$ sont différents de zéros grâce à l'hypothèse i). Par conséquent, en vertu des lemmes 2 et 3, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(F_i) \leqq n - 1 \ ,$$

qui est contraire à l'hypothése ii). Cela veut dire que $\lambda = 1$ et il y a une et une seule relation linéaire, homogène à coefficients constants entre $F_1, \cdots, F_{n+1}$:

$$\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_{n+1} F_{n+1} = 0 \ .$$

Si tous les coefficients $\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}$ sont différents de zéro, $F_1, \cdots, F_n$ forment une base de X. En appliquant le lemma 2 à $\tilde{F} = (F_1, \cdots, F_n)$, $\tilde{X} = \{F_1, \cdots, F_n, F_{n+1} = -(\beta_1 F_1 + \cdots + \beta_n F_n)/\beta_{n+1}\}$, on a l'linégalité

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) \leqq n$$

d'après le lemme 3. C'est contraire à ii). Par conséquent, il y a au moins un coefficient dans $\{\beta_i\}_{i=1}^{n+1}$ égal à zéro. Soit $\beta_{n+1} = 0$ sans restriction de généralité. L'hypothèse i) entraîne qu'il n'y ait rien d'autre égal à zéro:

$$\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_n F_n = 0 \qquad (\beta_i \neq 0, i = 1, \cdots, n) \ , \tag{2}$$

De (2) et l'hypothèse i), on peut conclure que $n-1$ combinaisons quelconque dans $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ et F_{n+1} forment une base de X parce que $\lambda = 1$.

Représentons F par $F_1, \cdots, F_{n+1}$. Alors, on a

$$F = q_1 F_1 + q_2 F_2 + \cdots + q_n F_n + q_{n+1} F_{n+1} \tag{3}$$

où chaque q_i est différent de zéro grâce à l'hypothèse sur X. En éliminant F_1 de (3) en utilisant (2), on a

$$F = \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n + q_{n+1} F_{n+1}$$

où $\alpha_i = q_i - q_1 \beta_i / \beta_1$. On démontre que $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

D'abord, si $\alpha_2 \neq 0, \cdots, \alpha_n \neq 0$, comme $F_2, \cdots, F_n$ et F_{n+1} forment une base de X, d'après le lemma 2, on a

$$\delta(F) + \sum_{i=2}^{n+1} \delta(F_i) \leqq n \ ,$$

qui est contraire à ii). Par conséquent, il y a au moins un qui est égal à zéro. S'il y a au moins un différent de zéro, on peut supposer que $\alpha_k \neq 0, \cdots, \alpha_n \neq 0$ $(3 \leqq k \leqq n)$:

$$F = \alpha_k F_k + \cdots + \alpha_n F_n + q_{n+1} F_{n+1} \ . \tag{4}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000016809 Published online by Cambridge University Press

De (4), on a

$$\alpha_j F_j = F\Delta'_j/\Delta' \qquad (k \leqq j \leqq n+1, \alpha_{n+1} = q_{n+1})$$

où

$$\Delta'_j = \|F_k, \cdots, F_{j-1}, F, F_{j+1}, \cdots, F_{n+1}\|/F_k \cdots F_{j-1}FF_{j+1} \cdots F_{n+1} ,$$
$$\Delta' = \|F_k, \cdots, F_{n+1}\|/F_k \cdots F_{n+1} .$$

En conséquence, on a l'inégalité

$$(5) \qquad \max_{k \leqq j \leqq n+1} \log |F_j| \leqq \log |F| + \sum_{j=k}^{n+1} \log^+ |\Delta'_j| + \log^+ \left|\frac{1}{\Delta'}\right| + \max_{k \leqq j \leqq n+1} \log \left|\frac{1}{\alpha_j}\right| .$$

D'autre part, de (2)

$$\beta_1 F_1 + \cdots + \beta_{k-1} F_{k-1} = -\beta_k F_k - \cdots - \beta_n F_n$$

et on a

$$\beta_m F_m = G\Delta''_m/\Delta'' \qquad (1 \leqq m \leqq k-1)$$

où

$$G = -\beta_k F_k - \cdots - \beta_n F_n ,$$
$$\Delta''_m = \|F_1, \cdots, F_{m-1}, G, F_{m+1}, \cdots, F_{k-1}\|/F_1 \cdots F_{m-1}GF_{m+1} \cdots F_{k-1} ,$$
$$\Delta'' = \|F_1, \cdots, F_{k-1}\|/F_1 \cdots F_{k-1} .$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$(6) \qquad \max_{1 \leqq m \leqq k-1} \log |F_m| \leqq \log |G| + \sum_{m=1}^{k-1} \log^+ |\Delta''_m| + \log^+ \left|\frac{1}{\Delta''}\right| + \max_{1 \leqq m \leqq k-1} \log \left|\frac{1}{\beta_m}\right| .$$

De plus, de l'inégalité

$$|G| \leqq \sum_{j=k}^{n} |\beta_j| |F_j| \leqq K \max_{k \leqq j \leqq n} |F_j| , \qquad K = \sum_{j=k}^{n} |\beta_j| ,$$

on a l'inégalité

$$(7) \qquad \log |G| \leqq \max_{k \leqq j \leqq n} \log |F_j| + \log K .$$

De (5), (6) et (7), on a

$$\max_{1 \leqq i \leqq n+1} \log |F_i| \leqq \log |F| + \sum_{j=k}^{n+1} \log^+ |\Delta'_j| + \sum_{m=1}^{k-1} \log^+ |\Delta''_m|$$
$$+ \log^+ \left| \frac{1}{\Delta'} \right| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta''} \right| + O(1) ,$$

de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leqq N(r, 0, F) + \sum_{j=k}^{n+1} m(r, \Delta'_j) + \sum_{m=1}^{k-1} m(r, \Delta''_m) \\ &\quad + m(r, 1/\Delta') + m(r, 1/\Delta'') + O(1) \\ &= N(r, 0, F) + \sum_{j=1}^{n+1} N(r, 0, F_j) + S(r) \end{aligned}$$

où

$$S(r) = o(T(r, f)) \qquad (r \notin E) ;$$

parce que

$$\begin{aligned} m(r, 1/\Delta') &= N(r, \Delta') + m(r, \Delta') - N(r, 1/\Delta') + O(1) , \\ m(r, 1/\Delta'') &= N(r, \Delta'') + m(r, \Delta'') - N(r, 1/\Delta'') + O(1) , \\ N(r, \Delta') &\leqq \sum_{j=k}^{n+1} N(r, 0, F_j), \qquad N(r, \Delta'') \leqq \sum_{m=1}^{k-1} N(r, 0, F_m) \end{aligned}$$

et grâce aux lemmes 1 et 3. En conséquence, on a

$$\delta(F) + \sum_{j=1}^{n+1} \delta(F_j) \leqq n + 1 ,$$

qui est contraire à l'hypothèse ii). Cela veut dire que $\alpha_k = 0, \cdots, \alpha_n = 0$. C'est-à-dire, $F = q_{n+1} F_{n+1}$ de (4). On a démontré 1).

En conséquence, du lemme 4,

$$\sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n + 2$$

et

$$\sum_{G \in X'} \delta(G) \leqq n + 2 - \delta(F) - \sum_{j=1}^{n+1} \delta(F_j) < 1 .$$

C'est 2). S'il y a G dans X' telle que

$$\delta(G) + \sum_{j=1}^{n+1} \delta(F_j) > n + 1 ,$$

alors d'après 1), $G = q'_{n+1} F_{n+1}$. Cela veut dire que $\lambda \geqq 2$, qui est absurde. On a 3).

https://doi.org/10.1017/S0027763000016809 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE. *Quand* $F \equiv 1$, *il y a au moins une combinaison lacunaire dans* $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$.

N.B. Au lieu de l'hypothèse i), on peut utiliser

"ii)′ $\lambda = 1$, $n-1$ combinaisons quelconque dans $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ sont linéairement indépendantes et $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ sont dépendantes sur C."

4. Théorème D.

Soient f, X et λ comme dans § 2.

LEMME 5. *S'il y a* $2n$ *combinaisons* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *dans* X *telles que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) + \delta(F_{n+1+j}) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, n-1) \tag{8}$$

et si $\lambda \geqq n-2$, *alors* $\lambda = n-1$. ([10]), Lemme 3).

LEMME 6. *Soient* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *comme dans le lemme* 5. *Si* $\lambda \geqq n-2$, *les combinaisons* $F_1, \cdots, F_{2n}$ *se repartissent en deux classes jouissant les propriétés suivantes*:

1) *Chaque classe contient* n *combinaisons*;

2) *Tous les rapports entre des éléments dans chaque classe sont des constantes.*

Démonstration. D'après le lemme 5, $\lambda = n-1$. Par conséquent, on peut supposer que F_1 et F_2 forment une base de X:

$$F_i = a_{1i}F_1 + a_{2i}F_2 \qquad (i = 1, \cdots, 2n)$$

où $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$. D'après le lemme 2, l'hypothèse (8) entraîne que, pour chaque i $(3 \leqq i \leqq 2n)$, a_{1i} ou a_{2i} soit égal à zéro. Soient

$$X_1 = \{F_i\,;\, a_{1i} \neq 0\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{F_i\,;\, a_{2i} \neq 0\}\,.$$

Alors, X_1 et X_2 contiennent n combinaisons. En effet, si X_1 (ou X_2) contient au moins $n+1$ elements, alors X_2 (ou X_1) contient au plus $n-1$ éléments parce que $X_1 \cup X_2 = \{F_i\}_{i=1}^{2n}$ et $\lambda \geqq n$, qui est absurde. On a 1) et 2).

LEMME 7. *Quand* $n = 4$, *s'il y a* 8 *combinaisons* $F_1, \cdots, F_8$ *telles que*

$$\sum_{i=1}^{5} \delta(F_i) + \delta(F_{5+j}) > 5 \qquad (j = 1, 2, 3)\,, \tag{9}$$

alors $\lambda = 3$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000016809 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Grâce au lemme 5, il suffit de prouver que $\lambda \geqq 2$ pour obtenir $\lambda = 3$. D'après le lemme 2, les inégalités (9) entrainent que $\lambda \geqq 1$. Supposons que $\lambda = 1$. On peut supposer que $F_1, \cdots, F_4$ forment une base de X. Représentons $F_5, \cdots, F_8$ par $F_1, \cdots, F_4$:

$$F_j = \alpha_{1j}F_1 + \alpha_{2j}F_2 + \alpha_{3j}F_3 + \alpha_{4j}F_4 \qquad (j = 5, 6, 7, 8) .$$

Alors, pour chaque j, il y a au moins un coefficient $\alpha_{i(j)j}$ qui est égal à zéro en vertu du lemme 2; et comme $\lambda = 1$, si $j_1 \neq j_2$, $i(j_1) \neq i(j_2)$. En conséquence, pour chaque j, il y a un et un seul coefficient égal à zéro. Soient

$$\text{(a)} \qquad F_5 = \alpha_{15}F_1 + \alpha_{25}F_2 + \alpha_{35}F_3 + 0 ,$$

$$\text{(b)} \qquad F_6 = \alpha_{16}F_1 + \alpha_{26}F_2 + 0 + \alpha_{46}F_4 ,$$

$$\text{(c)} \qquad F_7 = \alpha_{17}F_1 + 0 + \alpha_{37}F_3 + \alpha_{47}F_4 ,$$

$$\text{(d)} \qquad F_8 = 0 + \alpha_{28}F_2 + \alpha_{38}F_3 + \alpha_{48}F_4 .$$

Alors, comme dans la démonstration du Théorème B′–1), on a, de (a) et (b),

$$\sum_{i=1}^{5} \delta(F_i) + \delta(F_6) \leqq 5 ,$$

qui est contraire à (9). C'est-à-dire, il faut que $\lambda \geqq 2$. On a la conclusion.

THÉORÈME D′. *Soient $F_1, \cdots, F_8$ comme dans le lemme 7. Alors, $F_1, \cdots, F_8$ se repartissent en deux classes telles que*

1) *chaque classe contient 4 combinaisons;*

2) *tous les rapports entre des éléments dans chaque classe sont des constantes.*

Par conséquent, s'il y a une combinaison exceptionnelles au sens de Picard dans $\{F_i\}_{i=1}^{8}$, il y en a trois en outre.

On obtient ce théorème tout de suite des lemme 6 et 7.

ADDENDA

Pendant la préparation de ce mémoire, on a connu qu'il y a une faute dans le Théorème 2 dans [10]. On échange le Théorème 2 pour le Lemme 6 dans ce mémoire et les corollaires 1 et 2 ([10]) sont vrais sans changement.

Bibliographie

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5–31.

[2] M. Kato, On exceptional linear combinations of entire functions, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 700–704.

[3] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Gauthier-Villars, Paris 1929.

[4] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function I et II, Kōdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 98–113 et 178–187.

[5] J. Noguchi, On the deficiencies and the existence of Picard exceptional values of entire algebroid function, Kōdai Math. Sem. Rep., **26** (1974), 29–35.

[6] M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function III, Kōdai Math. Sem. Rep., **23** (1971), 486–492.

[7] H. L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehlfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid. Oslo **8** (1934), 1–72.

[8] T. Suzuki, On deficiencies of an entire algebroid function, Kōdai Math. Sem. Rep., **24** (1972), 62–74.

[9] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67–95.

[10] N. Toda, Le nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna et ses applications, Nagoya Math. J., **49** (1973), 91–100.

Université de Nagoya