Arabic Sciences and Philosophy, vol. 13 (2003) pp. 311-315
DOI:10.1017/S095742390300314X

ESSAY-REVIEW
GÉOMÉTRIE ET PHILOSOPHIE: DE THĀBIT IBN QURRA À IBN AL-HAYTHAM

ALAIN MICHEL

R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles*, vol. IV: *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002, XIII-1064-VII p.

Roshdi Rashed publie aux éditions d'al-Furqān Islamic Heritage Foundation, le volume IV des *Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles*. Les volumes précédents avaient été consacrés respectivement aux fondateurs et commentateurs (vol. I), à Ibn al-Haytham lui-même (vol. II) et à la théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique (vol. III). Les volumes V et VI sont en préparation.

Il s'agit ici d'un aspect essentiel de l'œuvre géométrique d'Ibn al-Haytham: les traités relatifs à l'introduction systématique des transformations en géométrie, à la "méthodologie" qui en résulte, à la nouvelle "philosophie des mathématiques" qu'elles appellent, et qu'elles contribuent à renouveler. Trois appendices donnent le texte et la traduction de traités en relation directe avec l'œuvre d'Ibn al-Haytham, qu'il s'agisse de certains de ses prédécesseurs, en fonction desquels il a élaboré ses conceptions (Thābit ibn Qurra et al-Sijzī sur la méthode d'invention, dans l'appendice I), ou de commentateurs et de critiques ultérieurs (Ibn Hūd, sur *Les connus* et *L'analyse et la synthèse*, dans l'appendice II, al-Baghdādī, sur le lieu, dans l'appendice III), qui apportent, par emprunts ou réfutations, et de manière également précieuse, soit un éclairage d'interprétation, soit un témoignage sur le contexte de réception et de diffusion de la doctrine.

À partir de la fin du IXe siècle, l'usage des transformations géométriques se généralise et se systématise, donnant lieu à un nouveau point de vue mathématique. C'est d'abord le résultat d'une maturation historique: mise au point de procédés de projection, notamment de représentation de la sphère, pour l'astronomie; traitement de l'héritage de la géométrie de position et de mesure d'Archimède et d'Apollonius; extension de la pratique de constructions géométriques à l'aide des sections coniques. Le résultat est la promotion du mouvement dans la discipline géométrique. Le succès de l'usage des transformations appelle une inscription des géomètres arabes dans la tradition antique post-platonicienne qui aurait été, dit-on, celle de Ménechme contre Speusippe, et qui comportait l'admission du mouvement comme d'un procédé mathématique de plein droit. Toute la problématique de l'existence de l'objet mathématique en reçoit une lumière nouvelle. Mais aussi, dès lors qu'on promeut les transformations et qu'on admet le mouvement, une double question de justification ou de légitimité se pose: comment caractériser, puis justifier, les transformations? comment légitimer le mouvement? Au cours de ce changement, le thème géométrique principal se déplace, de la figure aux relations entre les figures. Une troisième et dernière question, étroitement liée aux deux dernières, concerne alors la spatialité. Où exactement prennent place les relations entre les figures? On ne peut plus se satisfaire de la conception aristotélicienne de l'"enveloppe du corps". Il faut, dans ce contexte, reprendre à neuf la constitution d'une théorie du lieu. À une géométrie renouvelée, devait donc correspondre, par une sorte de prolongement nécessaire, une réflexion sur les objets et les méthodes, des mathématiques en général, de la géométrie en particulier. Seule une méconnaissance opiniâtre de la période historique, des textes et des auteurs, peut empêcher de reconnaître, dans les textes publiés, une interrogation sur les fondements, expressive d'une authentique tentative de philosophie mathématique.

Le volume contient l'édition *princeps*, la première traduction, en même temps que le premier commentaire historique et mathématique, des textes fondamentaux d'Ibn al-Haytham et même, en appendice, de quelques-uns des mathématiciens en fonction desquels il a défini sa méthode, comme Thābit ibn Qurra et al-Sijzī. D'Ibn al-Haytham, nous avons ainsi six textes choisis parmi les plus représentatifs: *Les propriétés des cercles*, *Les connus*, *L'analyse et la synthèse*, deux petits traités sur la géométrie des triangles, *Sur un problème géométrique* et *Sur les propriétés des triangles*, enfin *Le lieu*.

Le premier de ces traités procure une illustration concrète de la notion de transformation géométrique. L'homothétie ponc-

https://doi.org/10.1017/S095742390300314X Published online by Cambridge University Press

tuelle, déjà appliquée par Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān et al-Sijzī, y occupe la place centrale. Même s'il ne va pas jusqu'à la concevoir comme une véritable transformation ponctuelle, Ibn al-Haytham innove en étudiant les propriétés de la transformation, identifiant, dans les cas les plus communs, ce qu'on appellerait aujourd'hui les éléments invariants. À travers obstacles et insuffisances, la recherche s'inscrit dans un mouvement propre, déployant pour la géométrie un champ nouveau, qui trouvera l'instrument de sa thématisation théorique dans le traité intitulé *Les connus*.

Avec *L'analyse et la synthèse*, qui le précède de peu d'un point de vue chronologique, ce dernier témoigne d'une ambition fondatrice. Il s'agit de rien de moins que de concevoir une discipline géométrique originale, dont le traité se propose de fournir la méthode. Celle-ci tient à deux préceptes. D'abord, les figures géométriques ne doivent plus faire l'objet d'une conception statique, et être prises "comme données une fois pour toutes, mais comme [...] engendrées par un, ou plusieurs, mouvement continu, et donc variables" (p. 393). Ensuite, à titre de conséquence, il faut admettre explicitement le mouvement, non seulement dans les définitions des objets, comme ingrédient ontologique, mais encore à titre de procédé légitime de démonstration, comme structure discursive. Il en résulte une redistribution des rôles respectifs de l'analyse et de la synthèse au cœur de la nouvelle méthode, l'art analytique (*ars analytica*) qui est un des projets les plus novateurs et intéressants de notre auteur. Les deux démarches ne peuvent plus être séparées, ni même distinguées comme elles l'étaient auparavant, et la nouvelle méthode sera une combinaison d'*ars inveniendi* et d'*ars demonstrandi*. D'une part, pour identifier le mouvement qui engendre la figure dont on part, il faut procéder par analyse; d'autre part, la pratique commune du mathématicien consistant à partir des définitions des objets pour en suivre déductivement toutes les conséquences revient ici, du fait de l'incorporation du mouvement d'engendrement, à une synthèse. L'*ars analytica* comprendra donc les deux voies, désormais indissociables. La synthèse en particulier y est alors méthode de découverte; elle permet, aussi bien que l'analyse, la recherche des propriétés invariantes. L'*ars inveniendi* se révèle à son tour inséparable de l'*ars demonstrandi*. Ainsi dualement structuré, quoique essentiellement un, l'*ars analytica* se présente comme la discipline idéale susceptible de rendre compte des transformations et de procurer la connaissance de la "cause entière" de l'objet de pensée, garantissant par là son existence. Elle peut se voir ériger, sans excès de prétention théorique, comme la discipline *fondatrice* de la géométrie euclidienne. En déployant le mouvement qui engendre les objets, elle fonde tout à la fois leur définition et la démonstration de leurs propriétés. On aperçoit alors ce qui constituait le pôle idéal des recherches proprement géométriques sur les transformations des figures: l'articulation d'une véritable logique philosophique des mathématiques, constitutive de son unité profonde, laquelle se trouvait masquée depuis des siècles par l'éclatement apparent des disciplines particulières. Cette discipline nouvelle, qui est générale sans aller jusqu'à se réduire à une pure logique, qui peut légitimer les nouveaux objets en leur procurant un "plan d'existence", doit aussi précéder logiquement, pour pouvoir les fonder, les diverses procédures démonstratives des disciplines particulières.

Dans la dernière partie de l'ouvrage (chapitre IV), R. Rashed montre comment Ibn al-Haytham ne peut éviter, dans la discussion du devenir des prédicats d'essence des figures au cours du mouvement (extension, position, forme, grandeur), le traitement de questions plus traditionnellement philosophiques. C'est notamment le cas du problème de l'espace, dont il est justement question dans le traité sur *Le lieu*, premier traité exclusivement consacré à la question. Là encore, l'appareil axiomatique de la géométrie d'Euclide révèle ses insuffisances. L'objet n'y est représenté que par la médiation de la figure, sans que celle-ci renvoie jamais à l'espace dans lequel elle se trouve. Dès lors qu'on a admis comme objet authentique de connaissance la transformation, et en général le mouvement, des figures, on se trouve devant la nécessité de penser ce qui en est le support et la condition, la spatialité. Tel est l'objet du traité *Sur le lieu*. Le contexte, pour l'essentiel ici de tradition philosophique, n'est pas encore celui d'une conceptualisation de l'espace: il ne s'agit que de spéculations héritées sur le vide et le lieu. Ibn al-Haytham renouvelle cette tradition par les conquêtes de la géométrie des transformations. À partir d'une double critique de la théorie aristotélicienne et de celle de son commentateur Jean Philopon, il développe une conception abstraite et mathématique du lieu. Du premier, promoteur de la conception du lieu (d'un corps donné) comme surface enveloppante adjacente à ce corps, il rejette le point de vue d'ontologie matérielle: il s'agit au contraire de délier le concept de ses attaches concrètes, physiques et cosmologiques. Du second, il retient l'approche d'abstraction mathématique, celle d'un lieu défini comme extension vide, indépendante du corps, mais y infuse une signification mathématique précise. Le lieu devient le vide mathématiquement imaginable et doté des propriétés spécifiques de la spatialité euclidienne: c'est une région de l'extension tridimensionnelle, définissable par le biais d'une correspondance invariante entre les distances respectives des points du corps. Il s'agit donc d'une authentique mathématisation, et le traité apparaît comme un chaînon essentiel dans la tradition de la pensée de l'espace qui, par Descartes et Leibniz, relie Euclide à Newton et aux modernes. Il complète ainsi admirablement le tissu de continuités déjà instaurées avec les traités sur la méthode, présentés dans leur double fonction historique: à la fois accomplissement de toute une série de travaux antérieurs, et puissante anticipation de ce qui constituera une bonne part des efforts des mathématiciens du XVII[e] siècle pour reprendre et dépasser l'œuvre d'Euclide. On retrouve ici l'ambition avouée de l'auteur, lui-même héritier d'une certaine tradition française, de donner en quelque sorte sa pleine mesure à l'histoire, conçue, au-delà d'une discipline textuelle qu'elle est aussi, comme une restitution réfléchie des traditions de recherche et des styles de pensée mathématique, et à ce titre inséparable d'une analyse épistémologique.

Telle est la plus importante leçon de cet ouvrage riche et suggestif, si remarquablement présenté: celle de nous donner à voir et à méditer, entre le grand exemple des *Éléments* et la figure de la mathématique telle qu'elle se dessine à partir de la renaissance occidentale, une étape nécessaire et oubliée de la géométrie dont la méconnaissance n'était due qu'à son recouvrement, et dont l'ouvrage nous restitue, dans l'accompagnement d'une traduction en français, quelques-uns des plus éclatants témoins.