Compositio Math. 142 (2006) 1451–1458
doi:10.1112/S0010437X0600234X

Hauteur de Faltings et hauteur de Néron–Tate du diviseur thêta

Pascal Autissier

Abstract

In this paper we prove a formula relating the Faltings height of an abelian variety A over $\bar{\mathbb{Q}}$ and the Néron–Tate height of a theta divisor on A.

Résumé

On montre dans ce texte une formule reliant la hauteur de Faltings d'une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et la hauteur de Néron–Tate d'un diviseur thêta sur A.

1. Introduction

On étudie dans ce travail le lien entre la hauteur de Faltings d'une variété abélienne A et la hauteur de Néron–Tate d'un diviseur thêta sur A. Introduisons d'abord quelques notations :

Dans toute la suite, on note κ_0 la constante $\kappa_0 = \ln(\pi\sqrt{2})$. Soit g un entier $\geqslant 1$. On désigne par $\mathcal{A}_g$ le schéma de modules (grossier) des schémas abéliens de dimension relative g et principalement polarisés.

Soit $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres de degré N. Notons G_K l'ensemble des plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Pour tout idéal maximal b de O_K, on pose $\mathrm{N}_b = \#(O_K/b)$.

Soit A une variété abélienne de dimension g sur K. On désigne par $\hat{\mathrm{h}}(A_{\bar{\mathbb{Q}}})$ la hauteur de Faltings (stable) de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Lorsque L est un faisceau inversible symétrique et ample sur A, on note h'_L la fonction hauteur de Néron–Tate sur A.

Observons que h'_L et $\hat{\mathrm{h}}$ ne sont pas de même nature *a priori* : h'_L est une hauteur sur A, tandis que $\hat{\mathrm{h}}$ est une hauteur sur $\mathcal{A}_g(\bar{\mathbb{Q}})$. On montre cependant la relation suivante :

Théorème (Théorème 3.1). *On suppose que A a potentiellement bonne réduction partout. Soit Θ un diviseur effectif symétrique et ample sur A, définissant une polarisation principale λ de A. En posant $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$, on a alors l'égalité suivante :*

$$\hat{\mathrm{h}}(A_{\bar{\mathbb{Q}}}) = 2g\mathrm{h}'_L(\Theta) - \kappa_0 g + \frac{2}{N}\sum_{\sigma\in G_K} I(A_\sigma;\lambda_\sigma).$$

Dans cet énoncé, I est une fonction continue explicite $\mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ (cf. § 2.1), que l'on peut voir comme une hauteur locale en la place archimédienne. On prouve au § 4 que $I(A;\lambda)$ tend vers $+\infty$ lorsque $(A;\lambda)$ tend vers l'infini dans $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$.

La démonstration du théorème 3.1 repose sur la 'formule clef' de Moret-Bailly (cf. [Mor85, § 8.1] et [Mor90]) et sur les propriétés élémentaires des hauteurs d'Arakelov (cf. [BGS94]).

Received 5 December 2005, accepted in final form 10 May 2006.
2000 Mathematics Subject Classification 14G40, 11G10, 14K15, 11G50.
Keywords: height, abelian variety, Arakelov theory, theta-function.

Ce résultat suggère que $\hat{\mathrm{h}}(A_{\bar{\mathbb{Q}}}) - 2g\mathrm{h}'_L(\Theta)$ admet peut-être une décomposition en termes locaux, même sans hypothèse de bonne réduction :

Question. Soit A une variété abélienne semi-stable de dimension g sur K. Soit Θ un diviseur effectif symétrique et ample sur A, définissant une polarisation principale λ de A. On pose $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$. A-t-on une formule du type

$$\hat{\mathrm{h}}(A_{\bar{\mathbb{Q}}}) = 2g\mathrm{h}'_L(\Theta) + \frac{1}{N}\sum_b \alpha_b \ln \mathrm{N}_b + \frac{2}{N}\sum_\sigma I(A_\sigma;\lambda_\sigma) - \kappa_0 g,$$

où pour tout idéal maximal b de O_K, α_b est un rationnel positif ou nul calculable en fonction de la réduction de A modulo b (et $\alpha_b = 0$ si A a bonne réduction en b)?

Théorème 1.1. *La réponse est positive si $g \leqslant 2$, et plus généralement si $(A_{\bar{\mathbb{Q}}};\lambda_{\bar{\mathbb{Q}}})$ est un produit de courbes elliptiques et de surfaces abéliennes principalement polarisées.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit, par additivité, de considérer les deux cas suivants :

- A est une courbe elliptique; le résultat est alors connu (cf. théorème 7 de Faltings [Fal84]) avec les précisions suivantes: on a $\mathrm{h}'_L(\Theta) = 0$ et $12\alpha_b$ vaut le nombre de points singuliers de la fibre X_b du modèle régulier minimal X de A ;
- $(A;\lambda)$ est une surface jacobienne; c'est l'objet du § 5 (cf. théorème 5.1).

Remarque. La formule de l'énoncé 3.1 précise l'inégalité de Bost suivante (cf. [Bos96]) : avec les mêmes notations, on a la minoration

$$\hat{\mathrm{h}}(A_{\bar{\mathbb{Q}}}) \geqslant \frac{2}{N}\sum_{\sigma\in G_K} I(A_\sigma;\lambda_\sigma) - \kappa_0 g. \qquad (*)$$

2. Préliminaires

2.1 Contribution locale

Soit A une variété abélienne complexe de dimension $g \geqslant 1$. Soit $\lambda : A \to A^\vee$ une polarisation principale de A. Notons μ la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ de masse 1.

Définition. On choisit un faisceau inversible L ample sur A définissant λ (on a donc $h^0(A;L) = 1$), une métrique du cube $\|\cdot\|$ sur L, et une section $s \in \Gamma(A;L) - \{0\}$ (une métrique du cube sur L est par définition une métrique sur L à courbure invariante par translations). On pose

$$I(A;\lambda) = -\int_{A(\mathbb{C})} \ln\|s\|\mu + \frac{1}{2}\ln\int_{A(\mathbb{C})}\|s\|^2\mu.$$

On vérifie aisément que ce nombre réel ne dépend pas du choix de $(L;\|\cdot\|;s)$. De plus, l'inégalité de convexité de Jensen montre que $I(A;\lambda) > 0$. On vient en fait de définir une fonction continue $I : \mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$.

Étudions de plus près le cas des courbes elliptiques :

On désigne par $\mathbb{H}_1$ le demi-plan supérieur. Pour $\tau \in \mathbb{H}_1$, on pose $q = e^{2i\pi\tau}$ et $\Delta(\tau) = q\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^{24}$ (rappelons que Δ est une forme modulaire de poids 12).

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$. On note λ la polarisation canonique de E. Prenons un $\tau \in \mathbb{H}_1$ tel que $E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$.

Proposition 2.1. *Avec ces notations, on a la formule suivante :*

$$I(E;\lambda) = -\frac{1}{24}\ln[|\Delta(\tau)|(2\operatorname{Im}\tau)^6].$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X0600234X Published online by Cambridge University Press

Démonstration. La section neutre 0_E de E définit un faisceau inversible $L = \mathcal{O}_E(0_E)$ et une section globale 1_L de L (de diviseur 0_E). On munit L de la métrique du cube $\|\cdot\|$ telle que $\int_{E(\mathbb{C})} \|1_L\|^2\mu = 1/\sqrt{2}$. Notons g_0 la fonction de Green pour 0_E normalisée par la condition $\int_{E(\mathbb{C})} g_0\mu = 0$.

D'après Faltings (cf. lemme p. 417 de [Fal84]), on a la relation suivante :

$$\forall z \in E(\mathbb{C}) - \{0_E\}, \quad g_0(z) = -2\ln\|1_L\|(z) + \frac{1}{12}\ln[|\Delta(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^6].$$

On en déduit le résultat en intégrant cette égalité sur $E(\mathbb{C})$ contre μ. □

2.2 Hauteurs

Lorsque V est une variété de dimension d sur un corps K et p un entier dans $\{0;\cdots;d\}$, on désigne par $\mathrm{Ef}_p(V)$ l'ensemble des p-cycles effectifs non nuls sur V, et par $\mathrm{Ef}(V)$ la réunion $\mathrm{Ef}_0(V)\cup\cdots\cup\mathrm{Ef}_d(V)$.

Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de dimension $g \geqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, notons $[n] : A \to A$ le morphisme de multiplication par n. Soit L un faisceau inversible symétrique et ample sur A.

On désigne par $\mathrm{h}'_L : \mathrm{Ef}(A) \to \mathbb{R}$ la fonction hauteur de Néron–Tate. Rappelons que c'est la hauteur de Weil pour L caractérisée par la propriété suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall E \in \mathrm{Ef}(A), \quad \mathrm{h}'_L([n]_*E) = n^2\mathrm{h}'_L(E).$$

On sait de plus que h'_L est à valeurs positives ou nulles.

Faisons maintenant quelques rappels de la théorie des hauteurs d'Arakelov :

Soit X une variété arithmétique (*ie* un schéma intègre, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ soit régulière) de dimension (absolue) d. Pour tout $p \in \{0;\cdots;d\}$, on désigne par $\mathrm{Z}_p(X)$ le groupe des p-cycles sur X.

On note $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens sur X. Lorsque $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L};\|\cdot\|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$, on note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ la $(1;1)$-forme de courbure de $\widehat{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbb{C})$.

Bost, Gillet et Soulé (cf. § 3.1 de [BGS94]) construisent pour tout $p \in \{0;\cdots;d\}$ une application $(p+1)$-linéaire $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)^p \times \mathrm{Z}_p(X) \to \mathbb{R}$, qui à $(\widehat{\mathcal{L}}_1;\cdots;\widehat{\mathcal{L}}_p;D)$ associe la multihauteur $\langle\widehat{\mathcal{L}}_1\cdots\widehat{\mathcal{L}}_p|D\rangle$ de D relativement à $(\widehat{\mathcal{L}}_1;\cdots;\widehat{\mathcal{L}}_p)$. Ces applications multilinéaires sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- Lorsque Y est un point fermé, on a $\langle|Y\rangle = \ln\#k(Y)$;
- Lorsque Y est un fermé intègre de dimension $p \geqslant 1$ et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{p|Y}$, on a

$$\langle\widehat{\mathcal{L}}_1\cdots\widehat{\mathcal{L}}_p|Y\rangle = \langle\widehat{\mathcal{L}}_1\cdots\widehat{\mathcal{L}}_{p-1}|\mathrm{div}(s)\rangle - \int_{Y(\mathbb{C})}\ln\|s\|_p\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_1}\cdots\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{p-1}}. \qquad (\ddagger)$$

Définitions. Soient $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ et $p \in \{0;\cdots;d\}$. La hauteur d'Arakelov de $D \in \mathrm{Z}_p(X)$ relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le nombre réel $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \langle\widehat{\mathcal{L}}\cdots\widehat{\mathcal{L}}|D\rangle$.

Lorsque $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ est ample sur $X_{\mathbb{Q}}$ et $p \geqslant 1$, la hauteur normalisée de $E \in \mathrm{Ef}_{p-1}(X_{\mathbb{Q}})$ relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\bar{E}) = \frac{\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(\bar{E})}{\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(E)p},$$

où $\bar{E}$ désigne l'adhérence de E dans X.

https://doi.org/10.1112/S0010437X0600234X Published online by Cambridge University Press

3. Formule de hauteur

Lorsque A est une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on note $\hat{\mathrm{h}}(A)$ la hauteur de Faltings de A ; rappelons sa définition :

On prend une variété abélienne A' semi-stable sur un corps de nombres $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ telle que $A'_{\bar{\mathbb{Q}}} = A$. On désigne par X le modèle de Néron de A' sur $B = \mathrm{Spec}(O_K)$, par $0_X \in X(B)$ sa section neutre, et par ω_X le faisceau inversible $\omega_X = 0_X^* \Lambda^g \Omega_{X/B}$ sur B.

On munit ω_X de la métrique $\|\cdot\|_{\mathrm{Fa}}$ telle que pour tout $\sigma \in B(\mathbb{C}) = G_K$ et tout $\omega \in \Gamma(B_\sigma; \omega_{X\sigma}) = \Gamma(A'_\sigma; \Lambda^g \Omega_{A'_\sigma/\mathbb{C}})$, on ait

$$\|\omega\|^2_{\mathrm{Fa}}(\sigma) = \frac{i^{g^2}}{2^g} \int_{A'_\sigma(\mathbb{C})} \omega \wedge \overline{\omega}.$$

Alors

$$\hat{\mathrm{h}}(A) = \frac{\widehat{\deg}(\omega_X; \|\cdot\|_{\mathrm{Fa}})}{[K : \mathbb{Q}]}$$

(cela ne dépend pas du choix de $(K; A')$).

Définition. Soit $(A; \lambda)$ une $\bar{\mathbb{Q}}$-variété abélienne de dimension $g \geqslant 1$. On choisit un corps de nombres $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ et une K-variété abélienne principalement polarisée $(A'; \lambda')$ telle que $(A'_{\bar{\mathbb{Q}}}; \lambda'_{\bar{\mathbb{Q}}}) = (A; \lambda)$. On pose

$$I'(A; \lambda) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} I(A'_\sigma; \lambda'_\sigma).$$

Il est facile de voir que ce réel ne dépend pas du choix de $(K; A'; \lambda')$.

On montre ici une formule reliant la hauteur de Faltings, la hauteur de Néron–Tate du diviseur thêta, et l'invariant I :

Théorème 3.1. *Soit A une variété abélienne de dimension $g \geqslant 1$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ ayant partout bonne réduction. Soit Θ un diviseur effectif symétrique et ample sur A, définissant une polarisation principale λ de A. En posant $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$, on a alors l'égalité suivante :*

$$\hat{\mathrm{h}}(A) = 2g\mathrm{h}'_L(\Theta) + 2I'(A; \lambda) - \kappa_0 g.$$

Démonstration. On fixe un corps de nombres $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ de degré N, une variété abélienne A' sur K et un diviseur effectif Θ' symétrique et ample sur A' tels que $(A'_{\bar{\mathbb{Q}}}; \Theta'_{\bar{\mathbb{Q}}}) = (A; \Theta)$.

Désignons par $f : X \to B$ le modèle de Néron de A' sur $B = \mathrm{Spec}(O_K)$ et par T l'adhérence de Θ' dans X. Le diviseur T définit un faisceau inversible $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_X(T)$ (symétrique et ample) et une section globale 1_T de $\mathcal{L}_0$.

Pour tout $\sigma \in G_K$, notons μ_σ la mesure de Haar sur $A'_\sigma(\mathbb{C})$ de masse 1. Munissons $\mathcal{L}_0$ de la métrique du cube $\|\cdot\|_0$ vérifiant $\int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \|1_T\|_0^2 \mu_\sigma = 2^{-g/2}$ pour tout $\sigma \in G_K$. On pose $\widehat{\mathcal{L}}_0 = (\mathcal{L}_0; \|\cdot\|_0)$ et $\widehat{\omega}_X = (\omega_X; c\|\cdot\|_{\mathrm{Fa}})$ où c est une constante qui sera choisie dans un instant.

En notant $\widehat{\mathcal{L}}_1 = \widehat{\mathcal{L}}_0^{\otimes 8} \otimes f^* \widehat{\omega}_X^{\otimes -4}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_B = (\mathcal{O}_B; |\cdot|)$, la 'formule clef' de Moret-Bailly (cf. théorèmes 0.2 et 3.3 de [Mor90]) produit un isomorphisme $0_X^* \mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{O}_B$ qui est une isométrie $0_X^* \widehat{\mathcal{L}}_1 \simeq \widehat{\mathcal{O}}_B$ lorsque $c = (2\pi)^{-g}$.

Par le théorème du cube, on en déduit naturellement une isométrie $[n]^* \widehat{\mathcal{L}}_1 \simeq \widehat{\mathcal{L}}_1^{\otimes n^2}$ sur X pour chaque entier $n \geqslant 2$, où $[n]$ désigne la multiplication par n sur le O_K-schéma abélien X.

La formule de projection (cf. proposition 3.2.1(iii) de [BGS94]) donne $\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}_1}([n]_* \bar{E}) = \mathrm{h}'_{[n]^* \widehat{\mathcal{L}}_1}(\bar{E}) = n^2 \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(\bar{E})$ pour tout $E \in \mathrm{Ef}(A')$ et tout $n \geqslant 2$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X0600234X Published online by Cambridge University Press

On en déduit que la hauteur d'Arakelov coïncide avec la hauteur de Néron–Tate, *ie* que $\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(\bar{E}) = \mathrm{h}'_{L^{\otimes 8}}(E_{\bar{\mathbb{Q}}}) = 8\mathrm{h}'_L(E_{\bar{\mathbb{Q}}})$ pour tout $E \in \mathrm{Ef}(A')$. On a en particulier $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(X) = 0$ et $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(T) = g!8^g gN\mathrm{h}'_L(\Theta)$ (observons que $\deg_L(\Theta) = g!$).

Fait. *Pour tout* $p \in \{0; \cdots; g+1\}$ *et tout* $D \in \mathrm{Z}_p(X)$, *on a la relation suivante :*

$$\frac{1}{8^p}\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(D) = \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_0}(D) - \deg_L(D_{\bar{\mathbb{Q}}})\frac{pN}{2}[\hat{\mathrm{h}}(A) - \ln c]. \tag{1}$$

Prouvons ce Fait. En utilisant la multilinéarité, on obtient

$$\frac{1}{8^p}\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(D) = \sum_{j=0}^{p} \mathrm{C}_p^j(-2)^{-j}\langle \widehat{\mathcal{L}}_0^{p-j}(f^*\widehat{\omega}_X)^j | D\rangle.$$

Puisque $\widehat{\omega}_X$ vit sur B qui est de dimension 1, on a (cf. proposition 2.3.1(iii) de [BGS94, p. 938]) l'égalité $\langle \widehat{\mathcal{L}}_0^{p-j}(f^*\widehat{\omega}_X)^j | D\rangle = 0$ pour tout $j \geqslant 2$, ainsi que $\langle \widehat{\mathcal{L}}_0^{p-1} f^*\widehat{\omega}_X | D\rangle = \deg_L(D_{\bar{\mathbb{Q}}})N[\hat{\mathrm{h}}(A) - \ln c]$. D'où le fait énoncé.

Maintenant, on écrit la relation (1) pour $D = T$ et pour $D = X$, puis on soustrait membre à membre; on trouve alors

$$\frac{1}{8^g}\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(T) - \frac{1}{8^{g+1}}\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_1}(X) = \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_0}(T) - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_0}(X) + g!\frac{N}{2}[\hat{\mathrm{h}}(A) - \ln c].$$

Par ailleurs, grâce à la propriété (‡) des hauteurs d'Arakelov, on a

$$\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_0}(T) - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_0}(X) = \sum_{\sigma \in G_K} \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} (\ln \|1_T\|_0) g!\mu_\sigma = -g!N\left[I'(A;\lambda) + \frac{g}{4}\ln 2\right].$$

On obtient donc l'égalité

$$g!gN\mathrm{h}'_L(\Theta) = -g!N\left[I'(A;\lambda) + \frac{g}{4}\ln 2\right] + g!\frac{N}{2}[\hat{\mathrm{h}}(A) - \ln c].$$

On conclut en divisant par $g!N/2$. □

Remarquons que cette formule précise l'inégalité de Bost suivante (cf. théorème § 3 de [Bos96]).

Théorème (Bost). *Soit* $(A;\lambda)$ *une* $\bar{\mathbb{Q}}$*-variété abélienne de dimension* $g \geqslant 1$, *principalement polarisée. On a alors la minoration* $\hat{\mathrm{h}}(A) \geqslant 2I'(A;\lambda) - \kappa_0 g$.

4. Étude asymptotique

Soit g un entier $\geqslant 1$. On note $\mathbb{H}_g$ l'espace de Siegel des matrices $\Omega \in \mathrm{M}_g(\mathbb{C})$ symétriques telles que $\mathrm{Im}\,\Omega$ soit définie positive. À tout $\Omega \in \mathbb{H}_g$ on associe la fonction thêta définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^g, \quad \theta_\Omega(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi{}^{\mathrm{t}}m\Omega m + 2i\pi{}^{\mathrm{t}}mz).$$

Soit $(A;\lambda)$ une $\mathbb{C}$-variété abélienne de dimension g, principalement polarisée. Choisissons un $\Omega \in \mathbb{H}_g$ tel que $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$, que λ soit induite par $\Theta = \mathrm{div}(\theta_\Omega)$, et que $Y = \mathrm{Im}\,\Omega$ soit réduite au sens de Minkowski (cf. § V.4 de [Igu72]).

En notant $a_1; \cdots; a_g$ les coefficients diagonaux de Y, on a en particulier $a_k \geqslant \sqrt{3}/2$ pour tout $k \in \{1; \cdots; g\}$.

Proposition 4.1. *Il existe deux constantes* $\varepsilon_g > 0$ *et* $c_g > 0$ *ne dépendant que de* g *telles que* $I(A;\lambda) \geqslant \varepsilon_g \mathrm{Tr}(Y) - c_g$.

Démonstration. On désigne par μ la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ et par ν la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^g$. On pose $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$ et on note θ la section globale de L définie par Θ. On munit L de la métrique $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^g, \quad \|\theta\|(z) = \sqrt[4]{\det(Y)}\exp(-\pi {}^{\mathrm{t}}yY^{-1}y)|\theta_\Omega(z)|.$$

C'est une métrique du cube sur L (cf. § 3 de [Mor90]) et on a

$$\ln \int_{A(\mathbb{C})} \|\theta\|^2 \mu = -\frac{g}{2}\ln 2.$$

Maintenant, majorons le terme $\int_{A(\mathbb{C})} \ln \|\theta\|\mu$. Posons $F = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^g$. En utilisant l'inégalité de Jensen puis la formule de Parseval, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}^g$:

$$\begin{aligned}\int_F \ln \|\theta\|^2(x + \Omega y)\nu(x) &\leqslant \ln \int_F \|\theta\|^2(x + \Omega y)\nu(x)\\ &= \ln\biggl[\sqrt{\det(Y)} \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp[-2\pi {}^{\mathrm{t}}(m + y)Y(m + y)]\biggr].\end{aligned}$$

On pose $D = \mathrm{Diag}(a_1; \cdots; a_g)$. D'après la théorie de la réduction (cf. corollaire 2 de [Igu72, p. 193]), il existe $c > 0$ ne dépendant que de g tel que ${}^{\mathrm{t}}yYy \geqslant c{}^{\mathrm{t}}yDy$ pour tout $y \in \mathbb{R}^g$. On en déduit

$$\begin{aligned}2\int_{A(\mathbb{C})} \ln \|\theta\|\mu - \frac{1}{2}\ln[\det(Y)] &\leqslant \int_F \ln\biggl[\sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp[-2c\pi {}^{\mathrm{t}}(m + y)D(m + y)]\biggr]\nu(y)\\ &= \sum_{k=1}^{g} \int_{-1/2}^{1/2} \ln\biggl[\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-2c\pi a_k(m+y)^2}\biggr] dy.\end{aligned}$$

On conclut en appliquant g fois le lemme 4.2 ci-dessous et en remarquant que

$$\frac{1}{g}\ln[\det(Y)] \leqslant \ln\biggl[\frac{1}{g}\mathrm{Tr}(Y)\biggr] \leqslant \frac{c}{g}\mathrm{Tr}(Y) - 1 - \ln c. \qquad \square$$

Lemme 4.2. *Soit $a > 0$. On a la majoration suivante :*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln\biggl[\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-a(m+y)^2}\biggr] dy \leqslant -\frac{a}{12} + \ln\Bigl(1 + \frac{1}{a}\Bigr).$$

Démonstration. L'inégalité de Jensen donne

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln\biggl(\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-am^2-2amy}\biggr) dy \leqslant \ln \int_{-1/2}^{1/2} \biggl(\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-am^2-2amy}\biggr) dy.$$

Un calcul montre que le membre de droite vaut $\ln[1 + 1/a - \sum_{m\geqslant1}(e^{-am(m+1)}/am(m + 1))]$. D'où le résultat. $\square$

Remarque. La proposition 4.1 implique que $I(A; \lambda)$ tend vers $+\infty$ lorsque $(A; \lambda)$ tend vers l'infini dans $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$. Autrement dit, pour tout $Q \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{(A; \lambda) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \mid I(A; \lambda) \leqslant Q\}$ est compact.

5. Surfaces jacobiennes

Soit K un corps de nombres de degré N. Soit $f : X \to B$ une surface arithmétique régulière semi-stable sur $B = \mathrm{Spec}(O_K)$, telle que la fibre générique $C = X_K$ soit de genre 2.

https://doi.org/10.1112/S0010437X0600234X Published online by Cambridge University Press

Soit M un faisceau inversible (de degré 1) sur C tel que $M^{\otimes 2} = \Omega_{C/K}$. Désignons par $(J;\lambda)$ la jacobienne de C. Le faisceau M définit un plongement $C \hookrightarrow J$, dont on note Θ l'image. On pose $L = \mathcal{O}_J(\Theta)$.

Théorème 5.1. *Avec ces notations, on a la formule*

$$\hat{\mathrm{h}}(J_{\bar{\mathbb{Q}}}) = 4\mathrm{h}'_L(\Theta) + \frac{1}{N}\sum_{b\in B}\alpha_b \ln \mathrm{N}_b + \frac{2}{N}\sum_{\sigma\in G_K} I(J_\sigma;\lambda_\sigma) - 2\kappa_0,$$

où pour tout point fermé $b \in B$, α_b est un rationnel positif ou nul calculable en fonction du graphe de réduction de la fibre X_b au-dessus de b.

Démonstration. On note $\widehat{\mathcal{K}}$ le faisceau canonique sur X, muni des métriques d'Arakelov.

Pour tout $\sigma \in G_K$, on désigne par δ_σ l'invariant de Faltings de $C_\sigma(\mathbb{C})$ (cf. [Fal84, p. 402]). Pour chaque point fermé $b \in B$, on note δ_b le nombre géométrique de points singuliers de la fibre X_b. La formule de Noether arithmétique de Moret-Bailly (cf. théorème 2.5 de [Mor89]) donne

$$6\hat{\mathrm{h}}(J_{\bar{\mathbb{Q}}}) = \frac{\langle\widehat{\mathcal{K}}.\widehat{\mathcal{K}}\rangle}{2N} + \frac{1}{2N}\sum_b \delta_b \ln \mathrm{N}_b + \frac{1}{2N}\sum_\sigma \delta_\sigma - 4\ln(2\pi). \tag{2}$$

Par ailleurs, d'après Zhang [Zha93, théorème 5.5] et Abbes [Abb97, théorème 5.2 et remarque p. 161], on a

$$\frac{\langle\widehat{\mathcal{K}}.\widehat{\mathcal{K}}\rangle}{2N} = 4\mathrm{h}'_L(\Theta) + \frac{1}{2N}\sum_b e_b \ln \mathrm{N}_b, \tag{3}$$

où les e_b sont des rationnels positifs ou nuls explicites (l'hypothèse $g = 2$ est ici cruciale).

Désignons par $\Delta \in \Gamma(B;(\Lambda^2 f_*\mathcal{K})^{\otimes 10})$ le discriminant de C (cf. § 2 de [Uen88]). Pour tout point fermé $b \in B$, notons d_b l'ordre d'annulation de Δ en b. Par la proposition 4 de [Bos87], on a $\ln\|\Delta\|(\sigma) = 4I(J_\sigma;\lambda_\sigma) - \delta_\sigma + 2\ln(8\pi^2)$ pour tout $\sigma \in G_K$. On en déduit

$$\frac{1}{2N}\sum_b d_b \ln \mathrm{N}_b + \frac{1}{2N}\sum_\sigma(\delta_\sigma - 4I(J_\sigma;\lambda_\sigma)) - \ln(8\pi^2) = 5\hat{\mathrm{h}}(J_{\bar{\mathbb{Q}}}). \tag{4}$$

En additionnant membre à membre les égalités (2), (3) et (4), on obtient le résultat avec $\alpha_b = (\delta_b + e_b - d_b)/2$. □

Remarque. On peut expliciter α_b. En reprenant la classification exposée dans la table 1 de [Mor96], on trouve:

- Cas I (bonne réduction): $\alpha_b = 0$;
- Cas II(x): $\alpha_b = 0$;
- Cas III(x): $\alpha_b = x/12$;
- Cas IV($x;y$): $\alpha_b = y/12$;
- Cas V($x;y$): $\alpha_b = (x+y)/12$;
- Cas VI($x;y;z$): $\alpha_b = (y+z)/12$;
- Cas VII($x;y;z$): $\alpha_b = [xyz/(xy+yz+zx) + x + y + z]/12$.

Remerciements

Je remercie Jean-Benoît Bost pour m'avoir exposé sa démonstration de l'inégalité $(*)$. Je remercie également Marc Hindry et Nicolas Ratazzi pour d'intéressantes discussions concernant cet article. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses suggestions avisées.

Bibliographie

Abb97 A. Abbes, *Hauteurs et discrétude*, Astérisque **245** (1997), 141–166.

Bos87 J. B. Bost, *Fonctions de Green–Arakelov, fonctions thêta et courbes de genre* 2, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 643–646.

Bos96 J. B. Bost, *Arakelov geometry of abelian varieties*, Preprint 51 (1996), Max-Planck-Institut für Mathematik.

BGS94 J. B. Bost, H. Gillet and C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

Fal84 G. Faltings, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. (2) **119** (1984), 387–424.

Igu72 J. Igusa, *Theta functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 194 (Springer, New York, 1972).

Mor85 L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985).

Mor89 L. Moret-Bailly, *La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques*, Invent. Math. **98** (1989), 491–498.

Mor90 L. Moret-Bailly, *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann*, Compositio Math. **75** (1990), 203–217.

Mor96 A. Moriwaki, *Bogomolov conjecture for curves of genus* 2 *over function fields*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 687–695.

Uen88 K. Ueno, *Discriminants of curves of genus* 2 *and arithmetic surfaces*, Algebr. Geom. Commutative Algebra **2** (1988), 749–770.

Zha93 S. Zhang, *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193.

Pascal Autissier pascal.autissier@univ-rennes1.fr
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France