Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2008) **7**(4), 723–734 © Cambridge University Press 723
doi:10.1017/S1474748008000194 Printed in the United Kingdom

DE NON ORDINARIA RECOGNITIONE PSL_2

ADRIEN DELORO

Équipe de Logique Mathématique, Université Paris Diderot Paris 7, UFR de mathématiques case 7012, site Chevaleret, 75205 Paris Cedex 13, France (adeloro@logique.jussieu.fr)

(Reçu le 9 janvier 2007 ; accepté le 9 novembre 2007)

Résumé Où l'on montre un résultat d'identification du groupe projectif spécial linéaire de dimension 2 parmi une certaine classe de groupes simples dont le rang de Morley est fini.

Abstract We establish an identification result of the projective special linear group of dimension 2 among a certain class of groups the Morley rank of which is finite.

Mots clés : groupes de rang de Morley fini ; groupes simples minimaux ; PSL_2

Keywords: groups of finite Morley rank; minimal simple groups; PSL_2

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 03C60
Secondary 20E32

1. Introduction

Si Dieu n'existe pas, tout est permis ; et si les mauvais corps existent ? Cette nouvelle plaie lamentable, qui met bien à mal le principe du Nirvana du petit livre jaune, gangrène-t-elle jusqu'à la théorie des groupes de rang de Morley fini ? il est trop tôt pour le dire. Car si la présence de corps verts complique à l'envi les groupes rangés, la conjecture de Cherlin–Zilber ne porte que sur les groupes rangés simples. Aussi l'existence de mauvais corps n'est-elle pas une raison de désespérer de la conjecture d'algébricité.

En revanche, elle complique son étude ; par exemple les sous-groupes multiplicatifs suscités par la méthode de Zilber peuvent être propres, ce qui rend aventureux les calculs de rang ; plus profondément la théorie des intersections, de passablement simple, devient passablement complexe. Certains travaux récents bâtis sur l'ordinarité – hypothèse de travail et non vain pari modèle-théorique – sont ainsi à refaire. Nous exposons une telle réécriture.

La démarche inductive à l'œuvre pour une classification des groupes simples de rang de Morley fini repose sur des groupes *simples et minimaux*. Dans la nature algébrique, le seul groupe ayant cette propriété est PSL_2 ; en toute généralité logique, il se pourrait qu'existent des groupes dénaturés. Fidèles à l'esprit du programme de Borovik, nous faisons des hypothèses sur la structure du 2-sous-groupe de Sylow ainsi que les propriétés des involutions ; et ces hypothèses caractérisent PSL_2 parmi les groupes simples minimaux, mauvais corps ou pas.

Cet exposé relate ainsi un résultat extraordinaire d'identification de PSL_2. Pour rassurer ceux qui trouveraient que l'auteur a manqué de modestie en qualifiant d'"extraordinaire" une de ses créations, je signale qu'il a été nommé ainsi parce que l'hypothèse de Cherlin et Jaligot [**9**] est celle d'*ordinarité* (cf. [livre blanc, § 13.d, p. 376]) ! Voici donc les grandes lignes de [**10**], auquel nous renverrons pour tout détail technique.

Puisque le répit accordé au non-spécialiste s'achève avec la première page, il est temps de devenir plus précis. Parmi les groupes simples de rang de Morley fini, certains possèdent des sections définissables propres infinies encore simples ; ils devraient se prêter à une approche inductive. D'autres ne possèdent de sections définissables connexes et propres qu'à l'état résoluble ; on les dit légitimement *simples connexes minimaux*. Dans un tel groupe, la notion plus générale de sous-groupe de Borel coïncide avec celle de sous-groupe propre définissable connexe maximal.

Le seul groupe algébrique simple connexe minimal est PSL_2 ; comme la conjecture d'algébricité s'est dans [**2**] couronnée de succès pour le cas des groupes simples de rang de Morley fini *de type pair* (cette hypothèse sur le 2-sous-groupe de Sylow permet d'attendre un corps de caractéristique 2), PSL_2 est bien le seul groupe simple connexe minimal de type pair ; dans le cas impair (0 est impair) on ne peut être aussi affirmatif. Il a été montré par Burdges, Cherlin, et Jaligot dans [**8**], que le *rang de Prüfer* – le nombre de facteurs $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ dans un 2-sous-groupe de Sylow – d'un groupe simple connexe minimal de type impair est au plus 2, mais d'étranges configurations de rang de Prüfer 2, sans analogue parmi les groupes algébriques, ont la vie dure. Pis encore : même en supposant l'ordinarité, à savoir qu'aucun mauvais corps n'apparaissait dans leurs preuves, Cherlin et Jaligot n'ont pu dans [**9**] que circonscrire ces bizarreries, pas les proscrire.

Nous ne ferons pas l'hypothèse ordinaire dont [**3**] établit la caducité mais nous limiterons au rang de Prüfer 1, c'est-à-dire que la composante connexe du 2-sous-groupe de Sylow est $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Cela ne suffit pas encore, une pathologie évoquant à certains égards les mauvais groupes se refuse à disparaître. Le jeu d'hypothèse est encore accru d'une condition sur le centralisateur des involutions ; il est maintenant possible d'énoncer le résultat de reconnaissance qui nous occupe ; un possible bestiaire sera évoqué dans la section 6.

Théorème 1.1. *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer* 1*, et i une involution de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Alors G est isomorphe à* $\mathrm{PSL}_2(K)$*, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de* 2*.*

Ce théorème est le dernier fruit en date d'une technique invétérée, qui requiert de scinder certains sous-groupes de Borel sous la forme $K_+ \rtimes K^\times$; nous disons « certains » par manque d'un résultat de conjugaison de tels sous-groupes. Le problème des mauvais corps inhérent à l'apparition d'un corps algébriquement clos, est classiquement contourné par des arguments de rang que rend possibles une étude de la répartition des involutions

https://doi.org/10.1017/S1474748008000194 Published online by Cambridge University Press

dans les co-ensembles des sous-groupes de Borel. Cette méthode présentée dans la section 3, fut entée sur le contexte rangé par Nesin, pour des configurations de type pair ; et Jaligot l'adopta en type impair. Son travail non publié [**13**] tentait une reconnaissance extraordinaire de PSL_2, mais faute d'une théorie de l'unipotence, employait une hypothèse comparable à celle de la section 3. Puis vint [**9**], où notre théorème était déjà prouvé *de more ordinario*, et cet article s'attachait également à limiter les configurations simples connexes minimales de rang de Prüfer 2. L'unipotence alors se trouvait au berceau, et le radical O palliait cette absence.

2. Unipotence graduée

Pour adapter les calculs de rang à un cadre qui tolérât les mauvais corps, il fallait non pas s'affranchir des techniques liées à l'ordinarité mais leur trouver un analogue. Aux *histoires d'O* de Cherlin et Jaligot [**9**], nous avons substitué la théorie de l'unipotence en caractéristique nulle due à Burdges ; théorie aussi conforme à l'unipotence usuelle que le zéro, prince fantasque des nombres premiers, le permettait.

Une théorie de l'unipotence doit respecter deux principes d'inertie. Le premier au sens de pesanteur : un sous-groupe unipotent d'un sous-groupe résoluble gît dans le sous-groupe de Fitting. Le second correspond à une rigidité *dans le contexte des groupes simples connexes minimaux* : un sous-groupe unipotent honnête devrait n'appartenir qu'à un seul sous-groupe de Borel. Ces deux mots d'ordre sont bien sûr liés ; les énoncer rigoureusement nécessitera quelque soin.

L'unipotence de caractéristique première se comporte bien. Si p est un nombre premier et H un groupe résoluble de rang de Morley fini, il existe un radical de p-unipotence $U_p(H)$ ayant les propriétés désirées : $U_p(H) \leqslant F^\circ(H)$, et si le groupe ambiant G est simple connexe minimal, $U_p(H)$ est inclus dans un unique sous-groupe de Borel de G. Cela offre tout de suite un moyen de contrôler les intersections de sous-groupes de Borel ayant de la p-unipotence – elles sont abéliennes.

Burdges a introduit dans sa thèse l'unipotence en caractéristique nulle. Elle ne saurait être aussi forte, car il y a désormais plusieurs façons d'être unipotent : la nouvelle notion est graduée, du moins au plus unipotent, et seuls se maintiennent les résultats portant sur les sous-groupes de degré d'unipotence maximal.

En gardant cette restriction à l'esprit, on peut uniformiser les notations et les techniques, et mener parallèlement en toute caractéristique, les preuves où l'on contrôle l'intersection de conjugués d'un même sous-groupe de Borel. Pour les intersections *arbitraires* de tels sous-groupes, cette même notion d'unipotence est à la racine d'une théorie (pour laquelle nous renvoyons à [**6**]) encore développée par Burdges, et que nous évoquerons en § 4.

Définition 2.1. Un U_p-sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini en est un p-sous-groupe définissable, connexe, et nilpotent d'exposant borné.

Fait 2.2 (Nesin, voir par exemple [1, Fact 2.36]). *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe un U_p-sous-groupe maximal de H, noté $U_p(H)$; de plus $U_p(H) \leqslant F^\circ(H)$ (composante connexe du sous-groupe de Fitting).*

Fait 2.3 (Burdges [6, Lemma 2.1]). *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Si B_1 et B_2 sont deux sous-groupes de Borel distincts tels que $U_p(B_1) \neq 1$ et $U_p(B_2) \neq 1$, alors $F(B_1) \cap F(B_2) = 1$.*

Nous citons les techniques « ordinaires » de [**9**] en soulignant s'il est besoin l'analogie.

Fait 2.4 (Cherlin et Jaligot [9, Lemma 2.41]). *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe un sous-groupe normal, définissable, connexe, et sans involution maximal de H, noté $O(H)$. De plus,* si H est ordinaire, $O(H) \leqslant F^\circ(H)$.

Fait 2.5 (Cherlin et Jaligot [9, Proposition 3.11]). *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal* et ordinaire. *Si B_1 et B_2 sont deux sous-groupes de Borel distincts tels que $O(B_1) \neq 1$ et $O(B_2) \neq 1$, alors $F(B_1) \cap F(B_2) = 1$.*

Les Faits 2.3 et 2.5 (dits « lemmes de Jaligot ») permettent un excellent contrôle des intersections de sous-groupes de Borel. La question est de fournir en caractéristique nulle une unipotence aussi puissante, et un lemme de Jaligot encore valide.

Idée 2.6 (Burdges [5, Chapter 2]). *Il existe une notion correcte pourvu qu'on y fasse attention.*

Explicitons ce dernier point. Pour chaque entier d (à penser comme *degré d'unipotence*), on peut définir suivant Burdges une notion de $U_{(\infty,d)}$-groupe et de $U_{(\infty,d)}$-radical, définitions que nous n'explicitons pas, mais dont nous détaillons quelques propriétés et déficiences.

Fait 2.7 (Burdges [5, Theorem 2.31]). *Soit N un groupe de rang de Morley fini, connexe et nilpotent. Alors*

$$N = (U_{(\infty,0)}(N) * \cdots * U_{(\infty,d_\infty(N))}(N)) * (U_2(N) \times \cdots \times U_{q_\infty(N)}),$$

où $q_\infty(N)$ et $d_\infty(N)$ représentent respectivement le plus grand nombre premier q tel que $U_q(N) \neq 1$, et le plus grand entier d tel que $U_{(\infty,d)}(N) \neq 1$.
(Ces notations font sens quand N est seulement résoluble.)

Le sous-groupe de torsion divisible est inclus dans $U_{(\infty,0)}$. Tout cela incite à unifier la notation avec des *paramètres d'unipotence*, qui sont la mention d'une caractéristique, et d'un degré si celle-ci n'est pas un nombre premier. On formule ainsi une notion générale de $U_{\tilde{p}}$-groupe.

Définition 2.8.

- Un *paramètre d'unipotence* est une paire $\tilde{p} = (p, d)$ où $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $p \neq \infty \Leftrightarrow d = \infty$.
- Un *$U_{\tilde{p}}$-groupe* est un U_p-groupe si $\tilde{p} = (p, \infty)$, ou un $U_{(\infty,d)}$-groupe de Burdges si $\tilde{p} = (\infty, d)$.
- Un groupe résoluble de rang de Morley fini H *admet* le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ s'il contient un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe non-trivial.
- Le paramètre $\tilde{p} = (p, d)$ est *maximal* pour H si H admet $\tilde{p}$, et que $p = \infty$ ou $d_\infty(H) = d$.

La maximalité est ainsi au sens du préordre : $(p, \infty) \succcurlyeq \tilde{q}$ pour tout $\tilde{q}$, et $(\infty, k) \succcurlyeq (\infty, \ell) \Leftrightarrow k \geqslant \ell$.

Au vu de la décomposition du Fait 2.7, tout semble pour le mieux ; hélas les choses se compliquent pour deux raisons. La première est le défaut de « pesanteur » des $U_{(\infty,d)}$-sous-groupes de Burdges quand d n'est pas maximal (Fait suivant). L'« inertie », énoncée dans le Lemme 2.10, sera donc moins grande en caractéristique nulle qu'en caractéristique première (Fait 2.3) ou dans le cas ordinaire (Fait 2.5). Quant au second obstacle, nous en reparlerons en temps opportun, quand il s'agira d'homogénéité (§ 3).

Fait 2.9 (Burdges [5, Theorem 2.21]). *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors $U_{(\infty, d_\infty(H))}(H) \leqslant F^\circ(H)$; mais pour les autres degrés d,* ce n'est pas vrai en général.

Tout le contrôle d'intersections dans un groupe simple connexe minimal s'accotait contre un tel principe. On peut formuler un lemme d'inertie à la Jaligot, mais il exige des précautions ; nous énonçons une version compacte ; on saurait être un peu plus général.

Lemme 2.10 (Jaligot en caractéristique nulle [10, Lemme 3.3]). *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B un sous-groupe de Borel, et $\tilde{p} = (\infty, d)$ un paramètre d'unipotence maximal de B. Si B possède un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe U* distingué *dans B, alors B est l'unique sous-groupe de Borel admettant $\tilde{p}$ pour paramètre d'unipotence maximal et contenant U.*

La comparaison avec les Faits 2.3 ou 2.5 est frappante. On le voit, la machinerie du contrôle d'intersections est moins robuste ici, à cause d'une fuite éventuelle du degré d'unipotence : le groupe U du Lemme 2.10 peut être inclus dans un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence strictement plus grand.

Comme nous l'avons dit, Burdges a néanmoins su décrire abondamment certaines intersections de sous-groupes de Borel de degré d'unipotence distinct, et cette théorie nous tirera d'un mauvais pas en § 4.

3. Ebauche de preuve : la voie droite

Après ce bref survol de la notion générale d'unipotence, nous esquissons la preuve du Théorème 1.1. Elle repose, comme nous l'avons dit, sur des calculs de rang liés à la répartition des involutions dans les co-ensembles de sous-groupes de Borel. Cela n'est possible que si le centralisateur d'une involution n'est pas un sous-groupe de Borel.

Notation 3.1. *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et i une involution de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Soit $B > C^\circ(i)$ un sous-groupe de Borel de G.*

Commençons par remarquer que l'involution est quelconque. En effet, Cherlin et Burdges ont montré dans [**7**, Theorem 3] que toutes les involutions d'un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair appartenaient à la composante connexe d'au moins un 2-sous-groupe de Sylow. En particulier, si le rang de Prüfer est 1, elles sont toutes conjuguées.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000194 Published online by Cambridge University Press

Nous choisissons un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ du sous-groupe de Borel B ; un argument général impose $\tilde{p} \neq (\infty, 0)$. La preuve se divisera bientôt en deux branches, selon que l'action de i sur $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ n'est pas triviale, ou si au contraire il y centralisation ; le premier des deux cas mène à PSL_2 et le second à une contradiction.

Le premier résultat, où la symétrie des théories en caractéristique première ou nulle fait des merveilles, est consacré à limiter le rôle d'involutions parasites.

Proposition 3.2 ([10, Théorème 4.10]). *$I(G) \cap N(B) = I(B)$.*

On définit alors les sous-groupes qui vont permettre, dans le premier cas, de scinder B, et dans le second de produire un argument de concentration incompatible avec la simplicité du groupe.

Notation 3.3. *Pour $w \in I(G) \setminus B$, on pose $T[w] = \{b \in B,\ b^w = b^{-1}\}$.*

Il s'agit pour le moment d'un sous-ensemble définissable. En revanche, un simple décompte permet d'affirmer l'inégalité suivante.

Lemme 3.4 ([10, Lemme 4.28]). *Pour w générique dans $i^G \setminus B$, on a $\mathrm{rg}(T[w]) \geqslant \mathrm{rg}(F^\circ(B)^{-i})$.*

C'est ici que la preuve se divise. Nous exposons le cas qui aboutit à PSL_2, reléguant en § 4 l'étude de la configuration inconsistante.

On suppose que i ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. L'idée est d'exploiter l'ensemble $T[w]$, « plutôt gros », pour scinder B sous la forme $K_+ \rtimes K^\times$. Au vu du Lemme 3.4, cela suppose de travailler avec un sous-groupe B-minimal inclus dans $F^\circ(B)^{-i}$; ce point ne pose pas de problème, puisqu'on peut commencer la recherche d'un tel sous-groupe dans $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))^{-i}$, supposé non-trivial (qu'il soit distingué est facile).

La question est maintenant de se mettre sous les hypothèses du théorème du corps. Le contrôle d'intersections qu'offre le Lemme 2.10 est pour cela tout indiqué car l'involution $w \notin N(B)$ permet des conjugaisons non-triviales. C'est ici qu'apparaît un obstacle : le Lemme 2.10 nécessite non seulement un sous-groupe distingué de $F^\circ(B)$, mais il faut encore qu'il s'agisse d'un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe ! Or notre sous-groupe B-minimal n'a aucune raison *a priori* d'être un $U_{\tilde{p}}$-groupe, quand bien même nous en commencerions la recherche dans $U_{\tilde{p}}(B)$. En clair, un sous-groupe définissable et connexe d'un $U_{\tilde{p}}$-groupe même nilpotent, peut ne pas être un $U_{\tilde{p}}$-groupe. Une telle pathologie n'apparaissait pas en caractéristique première.

Frécon a trouvé une panacée à ce genre de problème.

Définition 3.5. Un $U_{\tilde{p}}$-groupe est homogène si tous ses sous-groupes définissables, connexes et nilpotents sont encore des $U_{\tilde{p}}$-groupes (pour le même paramètre d'unipotence $\tilde{p}$).

Fait 3.6 (Frécon [12, Theorem 4.11]). *Soit dans un univers de rang de Morley fini un groupe définissable connexe G normalisant un $U_{\tilde{p}}$-groupe définissable connexe et nilpotent H. Alors $[G, H]$ est un $U_{\tilde{p}}$-groupe homogène.*

En commençant la recherche de sous-groupe B-minimal à l'intérieur de

$$[U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))), i] \leqslant [U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))), B],$$

qui est un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe définissable, connexe, non-trivial, et distingué de B, on peut affirmer le résultat ci-après.

Lemme 3.7. *Il existe un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe B-minimal inversé par i.*

Nous appelons A un tel sous-groupe. Le contrôle d'intersections du Lemme 2.10 implique alors aisément le principe que voici.

Lemme 3.8 ([10, Lemme 5.9]). *Si $w \notin B$, alors aucun sous-groupe définissable connexe propre de G ne peut à la fois contenir A et être w-invariant.*

Grâce à ce dernier résultat, se placer sous les hypothèses du théorème du corps de Zilber (ce qui requiert notamment de montrer que $T[w]$ est un groupe !) est immédiat. C'est maintenant l'argument de rang du Lemme 3.4 qui permet, pour w générique, de scinder B sous la forme $A \rtimes T[w] \simeq K_+ \rtimes K^\times$.

En particulier, pour w générique, $T[w]$ (isomorphe à un $K^\times$) possède une unique involution j_w. La considération de $w \mapsto j_w$ aboutit enfin à une estimation du rang du groupe.

Lemme 3.9. $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(A)$.

A partir de ce point, les techniques d'identification de PSL_2 mises au point par Nesin prennent le relais. Nous citons pour mémoire l'énoncé employé.

Fait 3.10 (Borovik et Nesin [4, Theorem 11.89]). *Soit G un groupe infini de rang de Morley fini. On suppose que G est 2-transitif et 3-libre. On suppose encore que dans le stabilisateur d'un point, le stabilisateur de deux points est le complément semi-direct d'un sous-groupe distingué. On suppose enfin que le stabilisateur de deux points contient une involution. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

Mais vérifier que G dans son action sur G/B satisfait bien les hypothèses de ce dernier fait n'est plus que pure routine. Ainsi sous l'hypothèse de cette section, a-t-on démontré que G était isomorphe à un groupe $\mathrm{PSL}_2(K)$. La basse n'a pas changé depuis les FT-groupes de [**13**] ; l'ornementation seule est refaite.

4. Une configuration inconsistante

Plus complexe est la seconde partie de la preuve : celle vouée à exclure le cas où i centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. La contradiction résultera d'un argument de concentration ; mais il faut pour cela une étude assez poussée de B, qui exige l'introduction d'un sous-groupe de Borel auxiliaire, pour pouvoir user la théorie développée dans [**6**].

On suppose à présent que i centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Cette fois nous n'avons aucune chance de trouver un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe de $F^\circ(B)^{-i}$ qui convienne ; aussi scinder B est-il dans un premier temps irréalisable. Il faut d'abord une étude assez fine des $T[w]$.

On peut assez rapidement affirmer que $T[w]$ est formé d'éléments sans torsion ; si bien que le résultat suivant de Wagner a tôt fait de prouver que la caractéristique du sous-groupe de Borel est ∞.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000194 Published online by Cambridge University Press

Fait 4.1 (Wagner [14, Corollary 9]). *S'il y a un mauvais corps (K,T) de caractéristique p, alors T possède de la torsion.*

Donc $\tilde{p}$ est de la forme (∞, d) ; après quoi la mêlée commence.

Lemme 4.2 ([10, § 6.2]). *Il existe, pour un entier $s \geqslant 1$, un $U_{(\infty,s)}$-groupe inclus dans l'ensemble $T[w]$, et qui ne centralise pas $F^\circ(B)$. Aucune involution de B ne le centralise ni ne l'inverse.*

Sans approfondir des détails souvent techniques, la première étape est, grâce à ce sous-groupe qui s'avère hostile tant au sous-groupe de Fitting qu'aux sous-groupes de Carter, de prouver que $B \cap B^w$ est abélien – et du coup, $T[w]$ aussi.

Lemme 4.3 ([10, Proposition 6.17]). *$B \cap B^w$ est abélien ; $T[w]$ est un sous-groupe définissable abélien sans torsion de B.*

Le sous-groupe B est alors dans une impasse, car l'introduction d'un sous-groupe minimal ne mène à rien. Le dilemme est cornélien : si l'on veut un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe (ce qui n'est d'ailleurs pas forcément possible), on ne peut pas user l'argument de rang du Lemme 3.4 ; si l'on préfère, pour faire appel au Lemme 3.4, un sous-groupe de $F^\circ(B)^{-i}$, ce ne sera pas un $U_{\tilde{p}}$-groupe, ce qui exclut un contrôle d'intersection comme dans le Lemme 2.10.

L'emploi d'intersections non-abéliennes est une méthode générale contre les nœuds gordiens depuis que Burdges a dans [**6**] décrit ces configurations. Cela nécessite de trouver un autre sous-groupe de Borel B_1 tel que $(B \cap B_1)^\circ$ soit à la fois maximal parmi les sous-groupes de cette forme, et non-abélien.

Notation 4.4. *Soit B_1 un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(T[w])$ et maximisant $H = (B \cap B_1)^\circ$.*

Un peu d'attention et H s'avère non-abélien. Nous faisons alors donner l'artillerie [**6**]. Dès que l'on sait préciser les degrés d'unipotence des sous-groupes impliqués, l'introduction de B_1 porte ses fruits.

Lemme 4.5 ([10, Lemmes 6.34 et 6.39]). *$K = F^\circ(B)^{-i}$ est un sous-groupe distingué de B. Pour w générique, $T[w]$ lui est conjugué.*

A ce point l'examen des unipotences en jeu cède à une simple combinatoire. Disons sans rigueur que les $T[w]$ sont génériquement des K^g, et que les K^g sont génériquement des $T[w]$; que partant, les K^g sont génériquement inclus dans B ; et qu'enfin la (sancta) simplicitas du groupe ambiant est contredite par cette concentration.

Fait 4.6 (variation sur [13, Lemme 2.13]). *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $\{1\} \neq X \subseteq G$ un sous-ensemble définissable. Alors $\mathrm{rg}(X^G \cap M) < \mathrm{rg}(X^G)$.*

La contradiction achevant cette section, et la preuve du Théorème 1.1, provient ainsi de la rencontre du Fait 4.6 avec le résultat suivant.

Lemme 4.7 ([10, Corollaire 6.44]). *L'union pour w générique des $T[w]$ est un sous-ensemble générique de $\bigcup_G K^g$; en particulier $B \cap (\bigcup_G K^g)$ est générique dans $\bigcup_G K^g$.*

5. Un corollaire

Le Théorème 1.1 a révélé une autre caractérisation de PSL_2.

Corollaire 5.1 ([10, Corollaire 1.2]). *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair, et w une involution de G. Alors :*

- *soit tout sous-groupe propre définissable, connexe, et w-invariant de G est inclus dans un sous-groupe de Borel w-invariant ;*
- *soit G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

La conjugaison des sous-groupes de Carter d'un groupe simple connexe minimal (annoncée récemment par Frécon) offre une rapide généralisation.

Corollaire 5.2. *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair. Alors :*

- *soit pour tout sous-groupe K engendré par des involutions, tout sous-groupe propre définissable, connexe, et K-invariant de G est inclus dans un sous-groupe de Borel K-invariant ;*
- *soit $G \simeq \mathrm{PSL}_2$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe propre, définissable, connexe, et K-invariant. Les techniques de [**10**, § 3.5] permettent de supposer que H est un sous-groupe de Carter de G ; il contient donc un 2-tore maximal S° ; en outre $H = C^\circ(S^\circ)$.

Si le rang de Prüfer est 1 et que le groupe ambiant n'est pas PSL_2, alors le centralisateur connexe de chaque involution est un sous-groupe de Borel. Notamment si i est l'unique involution de H, alors $H \leqslant C^\circ(i)$, or $C^\circ(i)$ est clairement K-invariant.

Si le rang de Prüfer est 2, on fait tomber les involutions engendrant K dans H grâce au lemme que voici. □

Lemme 5.3 ([11, Proposition 4.2.1]). *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer 2. Alors deux involutions qui commutent sont cotoriques.*

Démonstration. Nous noterons pour plus de confort $\sim$ la relation de cotoricité On remarque avant tout, par induction et grâce à la toricité des involutions [**7**, Theorem 3], que dans tout groupe de rang de Morley fini connexe de type impair,

$$i \sim j \Leftrightarrow i \in C^\circ(j).$$

Alors si i, j, k sont des involutions d'un groupe simple connexe minimal,

$$\left.\begin{array}{c}[i,j]=[j,k]=[k,i]=1\\ i\sim k\sim j\end{array}\right\} \Rightarrow i\sim j \quad (\text{« transitivité »}).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748008000194 Published online by Cambridge University Press

En effet on a dans ce cas i, $j \in C^\circ(k)$ qui est résoluble connexe, et la connexité des sous-groupes de Hall implique la cotoricité de i et j.

Soient donc, dans G simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2, deux involutions i et j qui commutent. Comme j appartient à tout 2-tore maximal de $C^\circ(j)$ [**7**, Theorem 3], la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow implique l'existence d'un 2-tore maximal τ_j contenant j et normalizé par i. On considère alors l'action de i sur τ_j.

Si $C^\circ_{\tau_j}(i) \neq 1$, soit k une involution de $C^\circ_{\tau_j}(i)$. Alors $k \in C^\circ(i) \Rightarrow i \sim k$ d'une part, $k \in C^\circ(j) \Rightarrow j \sim k$ d'autre part ; comme $[i,j] = 1$ par hypothèse, on en déduit par transitivité que $i \sim j$.

Supposons maintenant $C^\circ_{\tau_j}(i) = 1$; en particulier, i inverse τ_j, et centralise donc le sous-groupe engendré par les involutions de τ_j, que nous notons V_j. Ainsi V_j normalise $C^\circ(i)$. Comme i appartient à tout 2-tore maximal de $C^\circ(i)$ [**7**, Theorem 3], la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow implique l'existence d'un 2-tore maximal τ_i contenant i et normalizé par V_j. On considère alors l'action de V_j sur τ_i.

Comme V_j a trois involutions, il en existe une, disons k, qui n'inverse pas τ_i. En particulier il existe une involution ℓ dans $C^\circ_{\tau_i}(k)$. D'autre part i centralise V_j, donc i et k commutent. Nous avons alors

$$\left.\begin{array}{c}[i,k] = [k,\ell] = [\ell,i] = 1\\ i \sim \ell \sim k\end{array}\right\} \quad \text{et donc} \quad i \sim k,$$

puis

$$\left.\begin{array}{c}[i,j] = [i,k] = [k,j] = 1\\ i \sim k \sim j\end{array}\right\} \quad \text{et donc} \quad i \sim j.$$

FIN

On aimerait à terme déduire une autre caractérisation de PSL_2 : comme la cause de tout contre-exemple au Lemme 5.3.

Conjecture 5.4. *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini et de type impair. S'il existe deux involutions i et j qui commutent, mais que l'on ne peut inclure dans un même 2-tore, alors G interprète* PSL_2.

6. Du reste

Que le rang de Prüfer d'un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair soit au plus 2 a été prouvé par Burdges, Cherlin, et Jaligot.

Fait 6.1 (Burdges et al. [8, Theorem 1 et Fact 2.1]). *Il n'existe pas de groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini, de type impair, et de rang de Prüfer au moins* 3.

Une seule partie du travail sur les « petits » groupes simples connexes minimaux de type impair a été menée à bien ; la jonction avec le Fait 6.1 semble encore lointaine,

https://doi.org/10.1017/S1474748008000194 Published online by Cambridge University Press

voire incertaine : car quelques pathologies semblent vouloir survivre, même à l'hypothèse d'ordinarité de [**9**]. Nous mentionnons deux problèmes auxquels nous ne sommes pas indifférents.

Question 6.2. Existe-t-il un groupe (nécessairement non-algébrique) de rang de Morley fini simple connexe minimal et de rang de Prüfer 1 autre que PSL_2 ?

L'étude d'une telle question se heurte à une déprimante absence de prise. Le centralisateur $C^\circ(i)$ est alors un sous-groupe de Borel. Des techniques empruntées à [**9**] permettent, avec un emploi un peu archaïsant du radical O, de déterminer le groupe de Weyl. Dans un cas, il est trivial, ce qui limite les moyens d'action. Dans un autre, $C^\circ(i)$ est abélien, inversé par l'unique involution formant son groupe de Weyl ; la configuration ressemble à un mauvais groupe, mais en type impair.

Proposition 6.3 ([11, § 4.1]). *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer* 1. *On suppose que le centralisateur connexe d'une involution est un sous-groupe de Borel B, et que $N(B) > B$. Alors $N(B) = B \rtimes \langle w\rangle$ pour une involution w inversant B.*

Démonstration. Soit $x \in N(B)\setminus B$ d'ordre n sur B. D'après [**9**, Lemma 3.4], l'ensemble $X = \{y \in xB,\ \exists g \in G \setminus N(B),\ y \in (\langle x\rangle B)^g\}$ est alors générique dans le co-ensemble xB.

Nous allons travailler modulo $O(B)$. Soit $H = (B \cdot \langle x\rangle)/O(B)$, de sorte que $H^\circ = B/O(B)$. Alors H° est de rang de Prüfer exactement 1 et $O(H^\circ) = 1$. C'est un groupe abélien d'après [**9**, Lemma 3.2] ; il n'a pas de q-unipotence. Ainsi $H^\circ = \mathrm{Tor}(H^\circ) \oplus D$ où D est divisible sans torsion et $\mathrm{Tor}(H^\circ)$ est somme d'un unique 2-tore $\bar{S}^\circ$ et pour chaque q premier différent de 2 d'un nombre fini de q-tores.

Pour $g \in G \setminus N(B)$, on forme $T_g = (O(B) \cdot (B \cap B^g))/O(B) \leqslant H^\circ$. C'est un groupe définissable et $2^\perp$ (car l'involution de B permet de définir B). Comme H° est abélien, $T_g \lhd H^\circ$, en particulier $T_g^\circ \leqslant O(H^\circ) = 1$. Les groupes T_g forment donc une famille uniformément définissable de groupes *finis*. Par élimination des quanteurs infinis, il existe une borne sur leur ordre. Comme H° est abélien sans unipotence, la borne sur $|T_g|$ implique $T_g \leqslant T_0$ pour un même sous-groupe *fini et indépendant de g*.

En particulier, si $y \in X$, on a $y^n \in B \cap B^g$ pour un $g \notin N(B)$ et donc $\bar{y}^n \in T_0$ est d'ordre fini. Un sous-ensemble générique du co-ensemble $H^\circ\bar{x}$ est ainsi d'exposant borné.

Ceci vaut encore pour les autres co-ensembles de H modulo H°, tous donnés par une puissance de $\bar{x}$. D'après [**9**, Lemma 3.8], il vient $C_H(\bar{S}^\circ) = H^\circ$. En particulier, l'action de $\bar{x}$ sur $\bar{S}^\circ$ est non-triviale, et donc $\bar{x}$ inverse $\bar{S}^\circ$.

Maintenant si x' est un autre élément de $N(B) \setminus B$, $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont congrus modulo $C_H(\bar{S}^\circ) = H^\circ$, et donc x et x' sont congrus modulo B. Le groupe de Weyl est ainsi d'ordre 2. Relevant la 2-torsion, on obtient une involution agissant sur B. Elle l'inverse : la preuve est similaire à celle du Théorème 3.2 cité plus haut [**10**, Théorème 4.10]. □

Nous observons ainsi un sous-groupe de Borel abélien, et donc disjoint de ses conjugués propres. En revanche on ne sait pas montrer que ses conjugués recouvrent l'ambiant ; et comme le sous-groupe de Sylow de celui-ci est similaire à celui de PSL_2, l'analogie avec les mauvais groupes s'arrête ici. Un emploi du théorème de Bachmann reste douteux.

Mais plus désespéré encore est le cas où $N(B) = B$: et l'artisan des groupes, qui n'a rien à en dire, céderait volontiers l'honneur au théoricien des modèles !

Les autres configurations qui survivent au Fait 6.1 et au Théorème 1.1 sont de rang de Prüfer 2.

Question 6.4. Existe-t-il un groupe (nécessairement non-algébrique) de rang de Morley fini simple connexe minimal et de rang de Prüfer 2 ?

Le Lemme 5.3 et les techniques exposées en § 4 permettent d'entreprendre une étude comparable à celle ordinaire de [**9**].

Théorème 6.5 ([11, Théorème 5.0.1]). *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $I(S) = I(S^\circ)$ et les involutions de G sont conjugués. Le centralisateur connexe de chacune est un sous-groupe de Borel. En outre $C^\circ(S^\circ) = C^\circ(I(S^\circ))$ est un sous-groupe de Carter abélien de G, égal à la composante connexe de chacune des trois intersections deux-à-deux de ces sous-groupes de Borel.*

Si dans le cas ordinaire Cherlin et Jaligot ont su poursuivre un peu plus avant la description d'un tel monstre, ils n'ont pu pour autant le dissiper.

Références

1. T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin, Groups of mixed type, *J. Alg.* **192**(2) (1997), 524–571.
2. T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2008).
3. A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, Die böse Farbe, preprint (disponible à http://math.univ-lyon1.fr/~wagner/publ.html, 2006).
4. A. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides, Volume 26 (Clarendon Press/Oxford University Press, 1994).
5. J. Burdges, Simple groups of finite Morley rank of odd and degenerate type, PhD thesis, Rutgers University, New Brunswick, NJ (2004).
6. J. Burdges, The Bender method in groups of finite Morley rank, *J. Alg.* **307**(2) (2007), 704–726.
7. J. Burdges et G. Cherlin, Semisimple torsion in groups of finite Morley rank, en préparation (2008).
8. J. Burdges, G. Cherlin et E. Jaligot, Minimal connected simple groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups, *J. Alg.* **314** (2007), 581–612.
9. G. Cherlin et E. Jaligot, Tame minimal simple groups of finite Morley rank, *J. Alg.* **276**(1) (2004), 13–79.
10. A. Deloro, Groupes simples connexes minimaux algébriques de type impair, *J. Alg.* **317**(2) (2007), 877–923.
11. A. Deloro, Groupes simples connexes minimaux de type impair, PhD thesis, Université Paris 7, Paris (2007).
12. O. Frécon, Around unipotence in groups of finite Morley rank, *J. Group Theory* **9**(3) (2006), 341–359.
13. E. Jaligot, *FT-groupes*, Prépublications de l'Institut Girard Desargues, No. 33 (Janvier 2000, UPRESA 5028).
14. F. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symb. Logic* **66**(2) (2001), 703–706.