Canad. J. Math. Vol. 73 (4), 2021 pp. 1074–1094
http://dx.doi.org/10.4153/S0008414X20000334


# Données endoscopiques d'un groupe réductif connexe : applications d'une construction de Langlands

Bertrand Lemaire et Jean-Loup Waldspurger

*Résumé.* Soient $F$ un corps global, et $G$ un groupe réductif connexe défini sur $F$. On prouve que si deux données endoscopiques de $G$ sont équivalentes en presque toute place de $F$, alors elles sont équivalentes. Le résultat est encore vrai pour l'endoscopie (ordinaire) avec caractère. On donne aussi, pour $F$ global ou local et $G$ quasi-simple simplement connexe, une description des données endoscopiques elliptiques de $G$.

*Abstract.* Let $F$ be a global field, and $G$ a connected reductive group defined over $F$. We prove that two endoscopic data of $G$ which are equivalent almost everywhere, are equivalent. The result remains true for (non-twisted) endoscopy with character. We also give, for $F$ global or local and $G$ quasi-simple simply connected, a description of the elliptic endoscopic data of $G$.

## Introduction

Soit $F$ un corps global, et soit $G$ un groupe réductif connexe défini sur $F$. On fixe une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de $F$. On note $\Gamma_F$ le groupe de Galois de $\overline{F}/F$, et $W_F$ son groupe de Weil. Pour $v$ une place de $F$, on note $F_v$ le complété de $F$ en $v$, et on pose $G_v = G \times_F F_v$. Fixons un élément $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ — cf. 1.1. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $G$. Pour chaque place $v$ de $F$, cette donnée définit par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $(G_v, \boldsymbol{a}_v)$. Le premier résultat prouvé ici est:

***Proposition 1*** *Si $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont deux données endoscopiques de $(G, \boldsymbol{a})$ telles que les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ soient équivalentes pour presque tout $v$, alors les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.*

L'élément $\boldsymbol{a}$ ne joue en fait aucun rôle puisqu'on se ramène facilement au cas où $G$ est $F$-quasi-simple et simplement connexe et (forcément) $\boldsymbol{a} = 1$. Par restriction des scalaires à la Weil, on se ramène ensuite au cas où $G$ est (absolument) quasi-simple et simplement connexe. On peut donc supposer, et l'on suppose, que le groupe dual $\hat{G}$ est adjoint et simple. Comme les constructions que nous allons faire sont valables

Received by the editors novembre 8, 2019.
Published online on Cambridge Core mai 15, 2020.
AMS subject classification: **22E50**, 22E55.
Keywords: endoscopie ordinaire, donnée endoscopique elliptique, localisation.

aussi bien dans le cas global que dans le cas local, la lettre $F$ désigne maintenant un corps commutatif qui est soit un corps global soit un corps local. Enfin pour alléger l'écriture, on considère plutôt la forme "galoisienne" des $L$-groupes. L'adaptation des constructions ci-dessous à leur forme "groupes de Weil" ne pose aucun problème.

Le groupe dual $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est muni d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. On fixe une paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ conservée par cette action galoisienne. On note $\Delta$ l'ensemble de racines simples déterminé par $\hat{B}$, et $\alpha_0$ l'opposée de la plus grande racine positive. On pose $\Delta_{\mathrm{a}} = \{\alpha_0\} \cup \Delta$. On note $\mathcal{D}$, resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$, le diagramme de Dynkin dont l'ensemble des sommets est $\Delta$, resp. $\Delta_{\mathrm{a}}$. L'ensemble $\Omega$ des éléments de $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$ qui conservent $\Delta_{\mathrm{a}}$ s'identifie à un sous-groupe abélien distingué du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ de $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$, et on a la décomposition

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}}) = \Omega \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{D}).$$

Puisque l'action galoisienne conserve la paire $(\hat{B}, \hat{T})$, elle induit une action sur $\mathcal{D}$. On note $E$ l'extension galoisienne finie de $F$ telle que $\Gamma_E = \ker(\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}))$.

Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $G$ (on a donc $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$). On suppose que $s$ est d'ordre fini $d$. À équivalence près, on peut supposer $s \in \hat{T}$. On fixe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^{\circ}$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on peut choisir un élément $(g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$ dont l'action par conjugaison conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. Il détermine un élément $w_{G'}(\sigma) \in W$, ainsi qu'une action galoisienne sur $\hat{T}$

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G.$$

Son image est contenue dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent $s$ et conservent $\hat{B}'$. Le point-clé de la construction est une conséquence des résultats de Langlands [L]. À $s$ et $\hat{B}'$, Langlands associe un ensemble de racines $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0,\dots,d-1} \mathfrak{X}_k$. Il démontre qu'à conjugaison près par un élément de $W$, cet ensemble est soit $\Delta$ soit $\Delta_{\mathrm{a}}$. Quitte à conjuguer $\hat{G}'$ par un élément $u \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et à remplacer $\hat{B}'$ par $u(\hat{B}')$, on peut supposer que $\mathfrak{X} = \Delta$ ou $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Alors l'application $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$ est à valeurs dans $\Omega$, et $w_{G'}(\sigma)$ conserve $\mathfrak{X}$. Notons $K$ l'extension galoisienne finie de $F$ telle que $\Gamma_K$ soit le noyau de l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. On distingue deux cas:

- **Cas 1**: si $\mathfrak{X} = \Delta$, alors $w_{G'}(\sigma) = 1$ et $\mathcal{G}' = \hat{G}' \rtimes \Gamma_F$.
- **Cas 2**: si $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, alors $E \subset K$ et la restriction de l'application $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$ à $\Gamma_E$ se quotiente en une injection de $\Gamma_{K/E} = \mathrm{Gal}(K/E)$ dans $\Omega$.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s)$ de $G$, avec le même $s$ d'ordre fini $d$. On note encore $\hat{G}'$ le groupe $Z_{\hat{G}}(s)^{\circ}$. On applique les constructions ci-dessus à ces deux données, en choisissant le même sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ pour les deux constructions. On obtient les mêmes ensembles $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_k$ pour les deux données, seules diffèrent (éventuellement) les actions galoisiennes $\sigma_{G'_1}$ et $\sigma_{G'_2}$. On obtient:

- **Cas 1**: si $\mathfrak{X} = \Delta$, les deux données sont équivalentes.
- **Cas 2**: si $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \dots, d-1$ et $\omega \sigma_{G'_1} \omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Grâce à ce résultat, on démontre la proposition 1 dans le cas où les éléments $s_1$ et $s_2$ sont d'ordre fini. Notons qu'il suffit de traiter le cas $s_1 = s_2 = s$. On supprime ensuite la restriction sur $s$ grâce aux constructions de Langlands [L] pp. 704–705: elles permettent de construire des données endoscopiques $\boldsymbol{G}_1'' = (G_1'', \mathcal{G}_1'', t)$ et $\boldsymbol{G}_2'' = (G_2'', \mathcal{G}_2'', t)$ de $G$ avec $t$ d'ordre fini, telles que les données $\boldsymbol{G}_1'$ et $\boldsymbol{G}_2'$ sont équivalentes si et seulement si les données $\boldsymbol{G}_1''$ et $\boldsymbol{G}_2''$ le sont (idem pour les données locales $\boldsymbol{G}_{i,v}'$ et $\boldsymbol{G}_{i,v}''$).

Les constructions ci-dessus permettent aussi de décrire les données endoscopiques elliptiques de $G$. Les hypothèses sont les mêmes qu'avant: $F$ est global ou local; $\hat{G}$ est adjoint et simple; et on considère la forme "galoisienne" des $L$-groupes. Notons $\underline{\mathcal{E}}(G)$ l'ensemble des couples $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$ où $\omega_{G'} : \Gamma_F \to \Omega$ est une application telle que l'application

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

soit un homomorphisme de $\Gamma_F$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, et $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble non vide de $\Delta_{\mathrm{a}}$ qui est conservé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et qui forme une unique orbite pour cette action. Deux tels couples $(\omega_{G_1'}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G_2'}, \mathcal{O}_2)$ sont dits équivalents s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$ et $\sigma_{G_2'} = \omega\sigma_{G_1'}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $\underline{E}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\underline{\mathcal{E}}(G)$.

Considérons un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Fixons $\zeta_d \in \mathbb{C}^\times$ une racine primitive de 1 d'ordre $d$. Soit $s$ l'unique élément de $\hat{T}$ tel que $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$. Il est fixe par l'action galoisienne $\sigma_{G'}$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de ${}^LG$ formé des éléments $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$ pour $g \in \hat{G}'$ et $\sigma \in \Gamma_F$, où $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$ est un représentant quelconque de $\omega_{G'}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'ensemble $\mathcal{G}'$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit de la façon habituelle une $L$-action de $\Gamma_F$ sur $\hat{G}'$. Soit $G'$ un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur $F$ dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de $G$. L'hypothèse que $\mathcal{O}$ est une seule orbite sous l'action de $\Gamma_F$ implique que cette donnée est elliptique. Le second résultat prouvé ici est:

***Proposition 2*** *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une bijection de $\underline{E}(G)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de $G$.*

L'article comporte deux sections, la première est dédiée à la preuve de la proposition 1, la seconde à celle de la proposition 2. À partir de 1.3, le groupe $G$ est (absolument) quasi-simple et simplement connexe, et on utilise la forme "galoisienne" des $L$-groupes.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

# 1 Équivalence presque partout de données endoscopiques

## 1.1 Le résultat

On considère un corps commutatif $F$ qui est soit un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions) soit un corps local ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p((t))$). On fixe une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de $F$. On note $\Gamma_F$ le groupe de Galois de $\overline{F}/F$, et $W_F$ son groupe de Weil. Via l'homomorphisme naturel $W_F \to \Gamma_F$, le groupe $W_F$ agit sur tout ensemble sur lequel agit $\Gamma_F$. Toutes les extensions séparables finies de $F$ seront supposées incluses dans $\overline{F}$. Pour une extension séparable finie $K$ de $F$, on note $\Gamma_K$ le groupe de Galois de $\overline{F}/K$, et $W_K$ son groupe de Weil. Si de plus $K/F$ est galoisienne, on note $\Gamma_{K/F}$ $(= \Gamma_F/\Gamma_K)$ le groupe de Galois de $K/F$.

Soit $G$ un groupe réductif connexe défini sur $F$. On note $\hat{G}$ le groupe dual de $G$. Il est muni d'une action galoisienne notée $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_F$ le $L$-groupe de $G$, et $Z(\hat{G})$ le centre de $\hat{G}$. Dans le cas local on fixe un élément $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))$, et dans le cas global on fixe $\boldsymbol{a} \in \mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G}))/\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$, où $\ker^1(W_F, Z(\hat{G}))$ est le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$\mathrm{H}^1(W_F, Z(\hat{G})) \to \prod_v \mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(\hat{G})).$$

D'après un théorème de Langlands, à cet élément $\boldsymbol{a}$ correspond un caractère (i.e. un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$) $\boldsymbol{\omega}$ de $G(F)$ — cf. [LL, W]. On peut supposer, mais ce n'est pas nécessaire, que $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $Z(G;F)$; sinon la théorie est vide. Ici $Z(G;F)$ est le groupe des points $F$–rationnels du centre de $G$. Nous utilisons la notion de *donnée endoscopique de* $(G, \boldsymbol{a})$ telle qu'elle est définie dans [MW, I.1.5, VI.3.1][1]. Il s'agit donc d'endoscopie ordinaire (i.e. non tordue) avec caractère. Une telle donnée est notée $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$. On définit la notion d'équivalence, ou d'isomorphisme, entre deux telles données, et en particulier, le groupe $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{G}')$ des automorphismes de $\boldsymbol{G}'$. Ce groupe contient $\hat{G}' = \mathcal{G}' \cap \hat{G}$. Rappelons que $\hat{G}'$ est la composante neutre $Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ du centralisateur de $s$ dans $\hat{G}$ (munie d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ qui en fait un groupe dual de $G'$).

On suppose maintenant que $F$ est un corps global. Pour chaque place $v$ de $F$, on fixe un prolongement $\overline{v}$ de $v$ à $\overline{F}$. Le fixateur $\Gamma_v$ de $\overline{v}$ dans $\Gamma_F$ s'identifie à $\Gamma_{F_v}$ où $F_v$ est le complété de $F$ en $v$. On a aussi une identification $W_{F_v} \subset W_F$. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $(G, \boldsymbol{a})$. Pour chaque place $v$ de $F$, on en déduit par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_v = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $(G_v, \boldsymbol{a}_v)$, où $G_v = G \times_F F_v$ et $\boldsymbol{a}_v \in \mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(\hat{G}))$. En particulier, le caractère $\boldsymbol{\omega}_v$ de $G(F_v)$ correspondant à $\boldsymbol{a}_v$ est le prolongement (par continuité) de $\boldsymbol{\omega}$, et $\mathcal{G}'_v$ est le sous-groupe des $(g, w) \in \mathcal{G}'$ tels que $w \in W_{F_v}$.

La proposition suivante est le résultat principal de cette section 1.

***Proposition*** *Considérons deux données endoscopiques* $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ *et* $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ *de* $(G, \boldsymbol{a})$. *On suppose que pour presque toute place* $v$ *de* $F$, *les données* $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ *et* $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ *sont équivalentes. Alors les données* $\boldsymbol{G}'_1$ *et* $\boldsymbol{G}'_2$ *sont équivalentes.*

[1] Le peu que nous utilisons de loc. cit. est valable en toute caractéristique.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

***Remarque*** On a besoin en fait que les données locales soient équivalentes en un ensemble de places auquel s'applique le théorème de Tchebotarev, c'est-à-dire qui soit analytiquement dense. Sinon, il est possible de produire un groupe $G$ et deux données endoscopiques elliptiques $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ de $G$ (avec $\boldsymbol{a} = 1$) qui vérifient les conditions suivantes:

- les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont simultanément elliptiques ou non elliptiques, et l'ensemble des places $v$ de $F$ où elles sont elliptiques est infini;
- les données locales $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes en toute place $v$ de $F$ où elles sont elliptiques;
- les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont non équivalentes.

## 1.2 Réduction au cas où $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est simple

Revenons à $F$ global ou local. Soit $G_{\mathrm{SC}}$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G$. Son groupe dual est le groupe adjoint $\hat{G}_{\mathrm{AD}} = \hat{G}/Z(\hat{G})$, et toute donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $(G, \boldsymbol{a})$ définit une donnée endoscopique $\overline{\boldsymbol{G}}' = (\overline{G}, \overline{\mathcal{G}}', \bar{s})$ de $G_{\mathrm{SC}}$. L'élément $\bar{s}$ est l'image de $s$ dans $\hat{G}_{\mathrm{AD}}$, la composante neutre de son centralisateur $Z_{\hat{G}_{\mathrm{AD}}}(\bar{s})^\circ = \hat{G}'/Z(\hat{G})$ est munie de l'action galoisienne déduite de $\sigma_{G'}$, $\overline{G}'$ est un $F$-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'/Z(\hat{G})$ est le groupe dual, et $\overline{\mathcal{G}}' = \mathcal{G}'/Z(\hat{G})$.

Soient $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ deux données endoscopiques de $(G, \boldsymbol{a})$. Elles définissent comme ci-dessus des données endoscopiques $\overline{\boldsymbol{G}}'_1$ et $\overline{\boldsymbol{G}}'_2$ de $G_{\mathrm{SC}}$. Par définition, un élément $x$ de $\hat{G}$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ si et seulement si l'image $\bar{x}$ de $x$ dans $\hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est une équivalence entre $\overline{\boldsymbol{G}}'_1$ et $\overline{\boldsymbol{G}}'_2$. Si $F$ est global, l'application $\boldsymbol{G}' \mapsto \overline{\boldsymbol{G}}'$ commute à la localisation. On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de 1.1 dans le cas où $G$ est semisimple simplement connexe et (forcément) $\boldsymbol{a} = 1$.

On suppose désormais $G = G_{\mathrm{SC}}$ (et toujours $F$ global ou local). On fixe une paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ conservée par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$. On note $\Sigma$ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et $\Sigma^+$, resp. $\Delta$, le sous-ensemble de racines positives, resp. simples, déterminé par $\hat{B}$. Notons $\mathcal{D}$ le diagramme de Dynkin dont l'ensemble de sommets est $\Delta$. Puisque la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est stable par l'action galoisienne, cette dernière induit une action sur $\mathcal{D}$ et peut-être considérée comme un homomorphisme $\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. On a la décomposition

$$\hat{G} = \hat{G}_1 \times \cdots \times \hat{G}_d$$

où $\hat{G}_i$ est simple et adjoint. On note

$$G = G_1 \times \cdots \times G_d$$

la décomposition duale: $G_i$ est un groupe semisimple simplement connexe, défini sur $\overline{F}$ et (absolument) quasi-simple. Pour $i = 1, \ldots, d$, on note $\mathcal{D}_i$ la composante connexe de $\mathcal{D}$ correspondant à $\hat{G}_i$. On a la décomposition

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_d.$$

Le groupe $G$ est un produit direct de $F$-groupes semisimples simplement connexes et $F$-quasi-simples, chacun d'eux correspondant à une orbite de $\Gamma_F$ dans l'ensemble $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$.

On suppose dans un premier temps que $G$ est $F$-quasi-simple, c'est-à-dire que $\Gamma_F$ agit transitivement sur l'ensemble $\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d\}$. Soit $F_1/F$ l'extension séparable finie (de degré $d$) telle que $\Gamma_{F_1}$ soit le stabilisateur de $\mathcal{D}_1$ dans $\Gamma_F$. Alors [BT, 6.21] $G_1$ est défini sur $F_1$ et $G \simeq R_{F_1/F}(G_1)$ où $R_{F_1/F}$ est le foncteur restriction des scalaires à la Weil. Reprenons brièvement la description de ${}^LG$ telle qu'elle est donnée dans [Bor, 5.1]. Pour un groupe $A$, un sous-groupe d'indice fini $A_1 \subset A$, et un groupe $V_1$ muni d'une structure de $A_1$-module (à gauche), on note $V = I_{A_1}^A(V_1)$ l'ensemble des fonctions $v : A \to V_1$ telles $v(a_1 a) = a_1 \cdot a(v)$ pour tout $(a_1, a) \in A_1 \times A$. On munit $V$ de la structure de groupe donnée par $(vv')(a) = v(a)v'(a)$, et de la structure de $A$-module donnée par $(a \cdot v)(a') = v(a'a)$. Pour $a \in A$, on note $V_a$ le sous-groupe de $V$ formé des fonctions $v$ à support dans $A_1 a$. On a la décomposition $V = \prod_{a \in A_1 \backslash A} V_a$ et les groupes $V_a$ sont permutés par $A$. Notons $e$ l'élément neutre de $A$. Le groupe $V_e$ est un sous-$A_1$-module de $V$, et l'application $V \to V_1$, $v \mapsto v(e)$ est un homomorphisme de $A_1$-modules qui induit un isomorphisme de $V_e$ sur $V_1$. Appliquons cela à $A = \Gamma_F$ et $A_1 = \Gamma_{F_1}$, et à $V_1 = \hat{G}_1$ muni de l'action galoisienne $\tau \mapsto \tau_{G_1}$ de $\Gamma_{F_1}$. Le groupe $\hat{G}$ s'identifie à $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1)$ muni de l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_G$ de $\Gamma_F$ donnée par

$$\sigma_G(g)(\sigma') = g(\sigma'\sigma), \quad \sigma' \in \Gamma_F.$$

La paire de Borel $(\hat{B}, \hat{T})$ de $\hat{G}$ est égale à $(I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{B}_1), I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{T}_1))$ pour une paire de Borel $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}_1$ bien déterminée, et la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservée par l'action de $\Gamma_F$ si et seulement si la paire $(\hat{B}_1, \hat{T}_1)$ est conservée par l'action de $\Gamma_{F_1}$, ce que l'on suppose. Enfin puisque l'homomorphisme naturel $W_F \to \Gamma_F$ induit une bijection $W_{F_1} \backslash W_F \to \Gamma_{F_1} \backslash \Gamma_F$, l'application $g \mapsto g \circ (W_F \to \Gamma_F)$ induit un isomorphisme $I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \xrightarrow{\simeq} I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1)$ dont l'inverse est $W_F$-équivariant. On pose

$${}^LG = I_{W_{F_1}}^{W_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(\hat{G}_1) \rtimes W_F.$$

Posons $W = N_{\hat{G}}(\hat{T})/\hat{T}$ et $W_1 = N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)/\hat{T}_1$. On a l'égalité $W = I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)$.

Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $G$, avec $s \in \hat{T}$. On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\boldsymbol{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$$

de $G_1$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ et $\hat{B}' = \hat{B} \cap \hat{G}'$. Pour chaque $w \in W_F$ d'image $\sigma$ dans $\Gamma_F$, choisissons un élément $(g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que $\mathrm{Int}_{g(w)} \circ \sigma_G$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. La classe $\hat{T}g(w)$ est uniquement déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé $\eta_{G'}(\sigma)$ de $W$ tel que l'action par conjugaison de $(g(w), w)$ sur $\hat{T}$ soit égale à

$$\sigma_{G'} = \eta_{G'}(\sigma)\sigma_G;$$

où l'on identifie $\eta_{G'}(\sigma)$ à l'automorphisme $\mathrm{Int}_{\eta_{G'}(\sigma)}$ de $\hat{T}$. L'élément $s$ est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. L'application $\sigma \mapsto \eta_{G'}(\sigma)$ est un 1-cocycle de $\Gamma_F$ à valeurs dans $W$.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

Pour $\tau \in \Gamma_{F_1}$, posons[2] $\eta_{G',1}(\tau) = \eta_{G'}(\tau)(1)$. L'application $\tau \mapsto \eta_{G',1}(\tau)$ est un 1-cocycle de $\Gamma_{F_1}$ à valeurs dans $W_1$. Notons $\tau \mapsto \tau_{G',1}$ l'action de $\Gamma_{F_1}$ sur $\hat{T}_1$ donnée par

$$\tau_{G',1} = \eta_{G',1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

On prend pour $s_1$ l'élément $s(1) \in \hat{T}_1$. Il est fixé par l'action galoisienne $\tau \mapsto \tau_{G',1}$ sur $\hat{T}_1$. Posons $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$ et $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$. Pour chaque $w_1 \in W_{F_1}$ d'image $\tau$ dans $\Gamma_{F_1}$, choisissons un représentant $\tilde{\eta}_{G',1}(w_1) = \tilde{\eta}_{G',1}(\tau)$ de $\eta_{G',1}(\tau)$ dans $N_{\hat{G}_1}(\hat{T}_1)$. L'automorphisme $\mathrm{Int}_{\tilde{\eta}_{G',1}(\tau)} \circ \tau_{G_1}$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}'_1$. Soit

$$\mathcal{G}'_1 = \{(g'_1\tilde{\eta}_{G',1}(w_1), w_1) : g'_1 \in \hat{G}'_1,\ w_1 \in W_{F_1}\} \subset {}^L(G_1).$$

L'ensemble $\mathcal{G}'_1$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'_1$. On en déduit de la manière habituelle une $L$-action de $\Gamma_{F_1}$ sur $\hat{G}'_1$. Soit $G'_1$ un $F_1$-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'_1$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\boldsymbol{G}'_{F_1} = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ est une donnée endoscopique de $G_1$.

***Lemme*** *L'application $\boldsymbol{G}' \mapsto \boldsymbol{G}'_{F_1}$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de $G$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques de $G_1$.*

**Proof** Réciproquement, soit $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ une donnée endoscopique de $G_1$, avec $s_1 \in \hat{T}_1$. On lui associe comme suit une donnée endoscopique

$$\mathrm{Res}_{F_1/F}(\boldsymbol{G}'_1) = (G', \mathcal{G}', s)$$

de $G$. Posons $\hat{G}'_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$ et $\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 \cap \hat{G}'_1$. Pour chaque $w_1 \in W_{F_1}$ d'image $\tau$ dans $\Gamma_{F_1}$, choisissons un élément $(g_1(w_1), w_1) \in \mathcal{G}'_1$ tel que l'automorphisme $\mathrm{Int}_{g_1(w_1)} \circ \tau_{G_1}$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T}_1)$ de $\hat{G}'_1$. La classe $\hat{T}_1 g_1(w_1)$ est bien déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé $\eta_{G'_1}(\tau)$ de $W_1$ tel que l'action par conjugaison de $(g_1(w_1), w_1)$ sur $\hat{T}_1$ soit donnée par

$$\tau_{G'_1} = \eta_{G'_1}(\tau)\tau_{G_1}.$$

L'application $\tau \mapsto \eta_{G'_1}(\tau)$ est un 1-cocycle. Notons $\alpha_1 \in \mathrm{H}^1(\Gamma_{F_1}, W_1)$ sa classe de cohomologie, et soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Gamma_F, W)$ l'image de $\alpha_1$ par l'inverse de l'isomorphisme de Shapiro

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_F, I_{\Gamma_{F_1}}^{\Gamma_F}(W_1)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^1(\Gamma_{F_1}, W_1),\ \beta \mapsto (\tau \mapsto \beta(\tau)(1)).$$

Choisissons un 1-cocycle $\sigma \mapsto \eta_{G'_1,G}(\sigma)$ de $\Gamma_F$ à valeurs dans $W$ qui soit dans la classe de cohomologie $\alpha$. Quitte à remplacer $\eta_{G'_1,G}$ par un 1-cocycle cohomologue, on peut supposer, et on suppose, que $\eta_{G'_1,G}(\tau)(1) = \eta_{G'_1}(\tau)$ pour tout $\tau \in \Gamma_{F_1}$. Notons $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1,G}$ l'action de $\Gamma_F$ sur $\hat{T}$ donnée par

$$\sigma_{G'_1,G} = \eta_{G'_1,G}(\sigma)\sigma_G.$$

Soit $\Gamma_F \to \hat{T}_1$, $\sigma \mapsto s(\sigma)$ l'application définie par

$$s(\sigma) = \eta_{G'_1,G}(\sigma)(1)^{-1}(s_1).$$

[2] La notation n'est pas très heureuse: rappelons que pour $\sigma \in \Gamma_F$, $\eta_{G'}(\sigma)$ est un élément de $W = \prod_{\sigma' \in \Gamma_{F_1} \backslash \Gamma_F} W_{\sigma'}$, et que pour $\sigma' \in \Gamma_F$, $\eta_{G'}(\sigma)(\sigma')$ est la composante de $\eta_{G'}(\sigma)$ sur $W_{\sigma'}$.

Pour $\tau \in \Gamma_{F_1}$ et $\sigma \in \Gamma_F$, on a

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= [\eta_{G_1',G}(\tau)\tau_G(\eta_{G_1',G}(\sigma))](1)^{-1}(s_1) \\ &= \tau_G(\eta_{G_1',G}(\sigma))(1)^{-1}\eta_{G_1',G}(\tau)(1)^{-1}(s_1). \end{aligned}$$

Or

$$\tau_G(\eta_{G_1',G}(\sigma))(1) = \eta_{G_1',G}(\sigma)(\tau) = \tau_{G_1}(\eta_{G_1',G}(\sigma)(1)),$$

d'où

$$\begin{aligned} s(\tau\sigma) &= \tau_{G_1}[\eta_{G_1',G}(\sigma)(1)^{-1}(\eta_{G_1'}(\tau)\tau_{G_1})^{-1}(s_1)] \\ &= \tau_{G_1}(s(\sigma)) \end{aligned}$$

car $s_1$ est fixé par l'action $\tau \mapsto \tau_{G_1'} = \eta_{G_1'}(\tau)\tau_{G_1}$ de $\Gamma_{F_1}$. Par conséquent l'application

$$\Gamma_F \to \hat{T},\ \sigma \mapsto s(\sigma)$$

est un élément de $\hat{T}$, qui vérifie $s(1) = s_1$. On vérifie facilement que $s$ est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G_1',G}(\sigma)$ de $\Gamma_F$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$ et $\hat{B}' = \hat{G}' \cap \hat{B}$. Pour chaque $w \in W_F$ d'image $\sigma$ dans $\Gamma_F$, choisissons un représentant $\tilde{\eta}_{G_1',G}(w) = \tilde{\eta}_{G_1',G}(\sigma)$ de $\eta_{G_1',G}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'automorphisme $\mathrm{Int}_{\tilde{\eta}_{G_1',G}(\sigma)} \circ \sigma_G$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$ de $\hat{G}'$. Soit

$$\mathcal{G}' = \{(g'\tilde{\eta}_{G_1',G}(w), w) : g' \in \hat{G}',\ w \in W_F\} \subset {}^L G.$$

L'ensemble $\mathcal{G}'$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit une $L$-action de $\Gamma_F$ sur $\hat{G}'$. Soit $G'$ un $F$-groupe réductif connexe quasi-déployé dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. Le triplet $\mathrm{Res}_{F/F_1}(\boldsymbol{G}_1') = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de $G$, bien déterminée à équivalence près par un élément $x$ de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ tel que $x(1) \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{G}_1')$ et $\mathrm{Int}_{\eta_{G_1'}(\tau)} \circ \tau_{G_1}(\bar{x}(1)) = \bar{x}(1)$ pour tout $\tau \in W_{F_1}$; où $\bar{x}$ est l'image de $x$ dans $W$. Par construction, on a

$$(\mathrm{Res}_{F/F_1}(\boldsymbol{G}_1'))_{F_1} = \boldsymbol{G}_1'.$$

Cela prouve le lemme. ∎

Soit $\boldsymbol{G}''$ une autre donnée endoscopique de $G$. Si $x \in \hat{G}$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'$ et $\boldsymbol{G}''$, alors $x(1)$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}_{F_1}'$ et $\boldsymbol{G}_{F_1}''$. Réciproquement, si $x_1 \in \hat{G}_1$ est une équivalence entre $\boldsymbol{G}_{F_1}'$ et $\boldsymbol{G}_{F_1}''$, alors on peut construire un $x \in \hat{G}$ qui est une équivalence entre $\boldsymbol{G}'$ et $\boldsymbol{G}''$ et tel que $x(1) = x_1$.

Comme la propriété d'être $F$-quasi-simple n'est pas conservée par localisation, il nous faut maintenant revenir au cas général. Écrivons $\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^r (\mathcal{D}_{k,1} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_{k,d_k})$ où, pour chaque $k$, $\mathcal{D}_{k,1} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_{k,d_k}$ est une orbite dans l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{D}$. Pour $k = 1, \ldots, r$, soit $F_k/F$ l'extension séparable finie telle que $\Gamma_{F_k}$ soit le stabilisateur de $\mathcal{D}_{k,1}$ dans $\Gamma_F$. Le groupe $G_k$ correspondant à $\mathcal{D}_{k,1}$ est défini sur $F_k$, et l'on a $G \simeq \prod_{k=1}^r H_k$ où $H_k = \mathrm{Res}_{F_k/F}(G_k)$. Pour $k = 1, \ldots, r$, soit $\boldsymbol{H}_k' = (H_k', \mathcal{H}_k', s_k)$ une donnée endoscopique de $H_k$. La famille des $\boldsymbol{H}_k'$ définit une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $G$: on prend $s = (s_1, \ldots, s_r)$, $G' = H_1' \times \cdots \times H_r'$, et $\mathcal{G}'$ est l'ensemble des $((h_1, \ldots, h_r), \sigma) \in {}^L G$ tels que pour chaque $k$, $(h_k, \sigma)$ appartient à $\mathcal{H}_k'$. Toute donnée endoscopique de $\boldsymbol{G}$ est obtenue de cette manière. Par abus d'écriture, on note

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

$\boldsymbol{G}' = \prod_{k=1}^{r} \boldsymbol{H}'_k$. À chaque donnée $\boldsymbol{H}'_k$ est associée comme ci-dessus une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_k = (\boldsymbol{H}'_k)_{F_k}$ de $G_k$. L'application qui à $\boldsymbol{G}'$ associe la famille $\{\boldsymbol{G}'_1, \ldots, \boldsymbol{G}'_k\}$ est compatible à la relation d'équivalence entre données endoscopiques en un sens évident (déduit par produit du cas $r = 1$).

Si $F$ est global, pour chaque place $v$ de $F$, chaque $k$, et chaque place $w$ de $F_k$ au-dessus de $v$, le complété $F_{k,w}$ de $F_k$ en $w$ est une extension séparable finie de $F_v$. Le groupe $G_v = G \times_F F_v$ est isomorphe à $\prod_{k=1}^{r} H_{k,v}$ avec

$$H_{k,v} = \mathrm{Res}_{F_k/F}(G_k) \times_F F_v \simeq \prod_{w_k|v} \mathrm{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$$

où $w_k$ parcourt les places de $F_k$ au-dessus de $v$, et $G_{k,w_k} = G_k \times_{F_k} F_{k,w_k}$. C'est donc encore un groupe du même type, c'est-à-dire un produit fini de groupes $F_v$-quasi-simples simplement connexes. L'application qui à une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'$ de $G$ associe la famille $\{\boldsymbol{G}'_1, \ldots, \boldsymbol{G}'_r\}$ est compatible à la localisation au sens suivant. Écrivons $\boldsymbol{G}' = \prod_{k=1}^{r} \boldsymbol{H}'_k$. Pour chaque place $v$ de $F$, et pour chaque $k$, la donnée endoscopique $\boldsymbol{H}'_{k,v}$ de $H_{k,v}$ obtenue par localisation de $\boldsymbol{H}'_k$ en $v$ se décompose (avec le même abus d'écriture que plus haut) en

$$\boldsymbol{H}'_{k,v} = \prod_{w_k|v} \boldsymbol{H}'_{k,w_k}$$

pour des données endoscopiques $\boldsymbol{H}'_{k,w_k}$ de $H_{k,w_k} = \mathrm{Res}_{F_{k,w_k}/F_v}(G_{k,w_k})$. D'autre part pour chaque place $w_k$ de $F_k$ au-dessus de $v$, la donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_k = (\boldsymbol{H}'_k)_{F_k}$ de $G_k$ donne par localisation une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'_{k,w_k}$ de $G_{k,w_k}$. La compatibilté en question est (pour tout $v$, tout $k$, et tout $w_k|v$)

$$(\boldsymbol{H}'_{k,w_k})_{F_{k,w_k}} = \boldsymbol{G}'_{k,w_k}.$$

On en déduit qu'il suffit de prouver la proposition de 1.1 dans le cas $r = 1$ et $d_1 = 1$, c'est-à-dire le cas où $\hat{G}$ $(= \hat{G}_{\mathrm{AD}})$ est simple.

## 1.3 Hypothèses et définitions

Continuons avec les notations de 1.1 et 1.2. Sauf précision, le corps $F$ est global ou local. On suppose jusqu'à la fin de l'article que $G$ est quasi-simple et simplement connexe, c'est-à-dire que $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ et $\mathcal{D}$ est connexe. Pour alléger l'écriture, nous utilisons désormais la forme "galoisienne" des $L$-groupes: ${}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$. L'adaptation de ce qui suit à la forme "groupes de Weil" ne pose aucun problème.

Notons $\alpha_0$ l'opposée de la plus grande racine dans $\Sigma^+$ et $\Delta_{\mathrm{a}} = \{\alpha_0\} \cup \Delta$. En écrivant $-\alpha_0$ dans la base $\Delta$, on obtient une relation

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}} d(\alpha)\alpha = 0 \tag{1}$$

où $d(\alpha_0) = 1$ et, pour $\alpha \in \Delta$, $d(\alpha)$ appartient à l'ensemble $\mathbb{N}_{>0}$ des entiers strictement positifs. On sait que l'espace des relations entre les éléments de $\Delta_{\mathrm{a}}$ est la droite portée par la relation (1). Cela implique que

(2) la relation (1) est la seule relation linéaire entre les éléments de $\Delta_{\mathrm{a}}$ dont les coefficients sont entiers relatifs et dont au moins un coefficient vaut 1.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

Rappelons aussi la propriété suivante. Pour $\beta \in \Sigma^+$, écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$ avec $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Alors

(3) $m(\alpha) \le d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

Notons $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$ le diagramme de Dynkin complété dont l'ensemble de sommets est $\Delta_{\mathrm{a}}$. Notons $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ les groupes d'automorphismes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$. Remarquons que, puisque $\hat{G}$ est adjoint, $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ se plonge naturellement dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$. Puisque la paire $(\hat{B}, \hat{T})$ est conservée par l'action galoisienne, l'action galoisienne se restreint en une action sur $\Delta$ et $\Delta_{\mathrm{a}}$, et peut être considérée comme un homomorphisme $\Gamma_F \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. D'ailleurs comme on le sait, la donnée de l'action galoisienne est équivalente à celle de cet homomorphisme. On note $E$ l'extension galoisienne finie de $F$ telle que $\Gamma_E$ soit le noyau de cet homomorphisme.

Rappelons qu'on a noté $W$ le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relatif à $\hat{T}$. Soit $\Omega$ le sous-groupe des éléments de $W$ qui conservent $\Delta_{\mathrm{a}}$. L'application qui à un élément de $\Omega$ associe son action sur $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$ identifie $\Omega$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. On sait [Bou][VI.4.3] que c'est un sous-groupe abélien distingué de $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, et que

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}}) = \Omega \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{D}).$$

Signalons que, pour $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, on a $d(\tau(\alpha)) = d(\alpha)$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$: en appliquant $\tau^{-1}$ à (1), on obtient $\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}} d(\tau(\alpha))\alpha = 0$; c'est une relation entre les éléments de $\Delta_{\mathrm{a}}$ qui vérifie les conditions de (2), donc c'est la relation (1). On voit en inspectant chaque système de racines que:

(4) l'application $\omega \mapsto \omega(\alpha_0)$ est une bijection de $\Omega$ sur l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$ telles que $d(\alpha) = 1$.

## 1.4 La construction de Langlands

On fixe pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ un élément $\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$ qui est une racine primitive de 1 d'ordre $n$. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $G$ (rappelons que $\mathcal{G}' \subset {}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_F$). À équivalence près, on peut supposer, et on suppose, $s \in \hat{T}$. Dans ce paragraphe 1.4, on impose la condition:

(1) $s$ est d'ordre fini.

On note $d$ cet ordre.

Nous allons rappeler les résultats de Langlands [L, pp. 708–709]. Commençons par reprendre la construction habituelle (cf. 1.2). On pose $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ \supset \hat{T}$, et on fixe un sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ de $\hat{G}'$ contenant $\hat{T}$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, on peut choisir un élément $(g(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'$ dont l'action par conjugaison conserve la paire $(\hat{B}', \hat{T})$. La classe $\hat{T}g(\sigma)$ est uniquement déterminée. Il existe donc un élément bien déterminé $w_{G'}(\sigma) \in W$ tel que l'action par conjugaison de $(g(\sigma), \sigma)$ sur $\hat{T}$ soit égale à $w_{G'}(\sigma)\sigma_G$. L'application

$$\sigma \mapsto \sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$$

est un homomorphisme de $\Gamma_F$ dans le groupe d'automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent $s$.

Pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$, posons $\mathfrak{Y}_k = \{\alpha \in \Sigma; \alpha(s) = \zeta_d^k\}$. L'ensemble $\mathfrak{Y}_0$ est celui des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$. On note $\mathfrak{X}_0$ l'ensemble de racines simples relatif à $\hat{B}'$. On introduit dans $\Sigma$ la relation d'ordre partiel $\le_{\hat{B}'}$ suivante: pour $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\alpha \le_{\hat{B}'} \beta$

si et seulement si $\beta - \alpha$ est égal à une combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{X}_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \{1, \dots, d-1\}$, notons $\mathfrak{Z}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{Y}_k$ qui ne sont pas combinaisons linéaires d'éléments de $\bigcup_{j=0,\dots,k-1} \mathfrak{Y}_j$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En particulier $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Y}_1$. On note $\mathfrak{X}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{Z}_k$ qui sont minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$. On pose $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=0,\dots,d-1} \mathfrak{X}_k$. Le résultat de Langlands est:

(2) il existe $u \in W$ tel que $u(\mathfrak{X}) = \Delta$ ou $u(\mathfrak{X}) = \Delta_{\mathrm{a}}$.

Quitte à remplacer $\boldsymbol{G}'$ par la donnée équivalente conjuguée par un relèvement de $u$ dans le normalisateur $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et à remplacer $\hat{B}'$ par $u(\hat{B}')$, on peut supposer $u = 1$; donc $\mathfrak{X} = \Delta$ ou $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Remarquons que, jusque-là, les constructions ne dépendent que de $s$ et d'un choix de $\hat{B}'$ mais pas de $\mathcal{G}'$.

Justement, puisque les constructions ne dépendent que de $s$ et de $\hat{B}'$, elles sont conservées par le groupe des automorphismes de $\hat{T}$ qui fixent $s$ et conservent $\hat{B}'$ (conserver $\hat{B}'$ revient à conserver l'ensemble $\mathfrak{X}_0$ de racines simples relatif à $\hat{B}'$). En particulier, pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, l'automorphisme $\sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$ de $\hat{T}$ conserve chaque $\mathfrak{X}_k$ et $\mathfrak{X}$ tout entier. L'automorphisme $\sigma_G$ conservant $\Delta$ et $\Delta_a$, donc $\mathfrak{X}$, $w_{G'}(\sigma)$ conserve aussi $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord $\mathfrak{X} = \Delta$. Le seul élément de $W$ qui conserve $\Delta$ est l'identité. Donc $w_{G'}(\sigma) = 1$. Il en résulte que

(3) si $\mathfrak{X} = \Delta$, alors $\mathcal{G}' = \hat{G}' \rtimes \Gamma_F$.

Supposons maintenant $\mathfrak{X} = \Delta_a$. Puisque $w_{G'}(\sigma)$ conserve $\Delta_a$, on a $w_{G'}(\sigma) \in \Omega$. Dans la suite, $w_{G'}(\sigma)$ et $\sigma_{G'}$ seront la plupart du temps considérés comme des automorphismes de $\mathcal{D}_{\mathrm{a}}$. Notons $K$ l'extension galoisienne finie de $F$ telle que $\Gamma_K$ soit le noyau de l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. On a

(4) $E \subset K$ et la restriction à $\Gamma_E$ de l'application $\sigma \mapsto w_{G'}(\sigma)$ se quotiente en une injection de $\Gamma_{K/E}$ dans $\Omega$.

En effet, pour $\sigma \in \Gamma_K$, on a $w_{G'}(\sigma)\sigma_G = 1$. Puisque $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$ est produit semi-direct de $\Omega$ et $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$, cette égalité entraîne $w_{G'}(\sigma) = 1$ et $\sigma_G = 1$. L'assertion (4) s'en déduit.

## 1.5 Equivalences de données endoscopiques

On considère maintenant deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s)$ de $G$, dont l'élément $s$ est le même. Les groupes $\hat{G}'_1$ et $\hat{G}'_2$ sont donc les mêmes et on note simplement $\hat{G}'$ ce groupe. On suppose comme dans le paragraphe précédent que $s$ est d'ordre fini $d$. On applique les constructions précédentes aux deux données, en affectant d'indices 1 et 2 les objets associés à nos deux données. On peut choisir le même groupe de Borel $\hat{B}'$ pour les deux constructions. Puisque celles-ci ne dépendent que de $s$ et de ce choix de Borel, on obtient les mêmes ensembles $\mathfrak{X}_k$ et $\mathfrak{X}$ pour les deux données. Les seules différences entre nos données sont les actions galoisiennes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$. L'assertion 1.4.(3) entraîne que

(1) si $\mathfrak{X} = \Delta$, les deux données sont équivalentes.

Supposons $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Montrons que

(2) les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \dots, d-1$ et $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Si un tel $\omega$ existe, on le relève en un élément quelconque $x \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et on vérifie que $x$ est une équivalence entre les deux données. Inversement, soit $x$ une telle équivalence qui conjugue $\boldsymbol{G}'_1$ en $\boldsymbol{G}'_2$. On peut multiplier $x$ à gauche ou à droite par un élément de $\hat{G}'$ et supposer que la conjugaison $\mathrm{Int}_x$ conserve la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T})$. Par définition, $\mathrm{Int}_x$ fixe $s$. Notons $\omega$ l'image de $\mathrm{Int}_x$ dans $W$. Comme on l'a déjà dit, un automorphisme de $\hat{T}$ qui fixe $s$ et conserve $\hat{B}'$ conserve tous les objets définis au paragraphe précédent. Donc $\omega$ conserve $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, c'est-à-dire $\omega \in \Omega$. On a $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \ldots, d-1$ comme on vient de le dire. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Pour $i = 1, 2$, on relève $w_{G'_i}(\sigma)$ en un élément $g_i(\sigma) \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$. On a $(g_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$. Par définition d'une équivalence, on a $x(g_1(\sigma), \sigma)x^{-1} \in \mathcal{G}'_2$, donc $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$ pour un $h \in \hat{G}'$. Tous les éléments autres que $h$ normalisant $\hat{T}$, $h$ le normalise aussi. Puisque les conjugaisons par $x$, $(g_1(\sigma), \sigma)$ et $(g_2(\sigma), \sigma)$ conservent le groupe $\hat{B}'$, la conjugaison par $h$ le conserve aussi. Un élément $y$ de $\hat{G}'$ tel que $\mathrm{Int}_y$ conserve $(\hat{B}', \hat{T})$ appartient à $\hat{T}$, donc $h \in \hat{T}$. En projetant dans $W$ l'égalité $xg_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} = hg_2(\sigma)$, on obtient $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$. Cela démontre (2).

Considérons une unique donnée $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$. On note $\mathrm{Out}(\boldsymbol{G}')$ le groupe des composantes connexes du groupe d'automorphismes de $\boldsymbol{G}'$. Si $s$ est d'ordre fini et $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$, on démontre de la même façon que

(3) $\mathrm{Out}(\boldsymbol{G}')$ est le groupe des $\omega \in \Omega$ tels que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour $k = 1, \ldots, d-1$ et $\omega\sigma_{G'}\omega^{-1} = \sigma_{G'}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

## 1.6 Équivalence presque partout, cas particulier

On suppose dans ce paragraphe et le suivant que $F$ est un corps global. Soit $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ une donnée endoscopique de $G$. Rappelons que pour chaque place $v$ de $F$, on en déduit une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}' = (G'_v, \mathcal{G}'_v, s)$ de $G_v = G \times_F F_v$, cf. 1.1. En particulier, $\mathcal{G}'_v$ est le sous-groupe des $(g, \sigma) \in \mathcal{G}'$ tels que $\sigma \in \Gamma_v$.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de $G$. On suppose:

(1) les éléments $s_1$ et $s_2$ sont d'ordre fini;

(2) les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes pour presque toute place $v$.

***Proposition*** *Sous ces hypothèses, la proposition de* 1.1 *est vraie: les données* $\boldsymbol{G}'_1$ *et* $\boldsymbol{G}'_2$ *sont équivalentes.*

**Proof** L'équivalence en au moins une place entraîne que $s_1$ et $s_2$ sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer $s_1 = s_2$ et on note simplement $s$ cet élément. On applique les constructions des paragraphes précédents, on obtient en particulier un ensemble $\mathfrak{X}$ commun qui est égal soit à $\Delta$ soit à $\Delta_{\mathrm{a}}$. Si $\mathfrak{X} = \Delta$, l'assertion 1.5.(1) entraîne que $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes. Supposons $\mathfrak{X} = \Delta_{\mathrm{a}}$. Notons $\Omega^\sharp$ le sous-groupe des $\omega \in \Omega$ tels que $\omega(\mathfrak{X}_k) = \mathfrak{X}_k$ pour tout $k = 1, \ldots, d-1$. Montrons que

(3) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

D'après le théorème de Tchebotarev et l'hypothèse (2), il existe une place $v$ et un élément $\gamma \in \Gamma_F$ tels que les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ soient équivalentes et $\gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Gamma_{F_v}$. En appliquant 1.5.(2) aux données locales, il existe $\omega' \in \Omega^\sharp$ tel que

$$\omega'\gamma_{G'_1}\sigma_{G'_1}\gamma_{G'_1}^{-1}\omega'^{-1} = \gamma_{G'_2}\sigma_{G'_2}\gamma_{G'_2}^{-1}.$$

Posons $\omega = \gamma_{G'_2}^{-1}\omega'\gamma_{G'_1} = \gamma_G^{-1}w_{G'_2}(\gamma)^{-1}\omega' w_{G'_1}(\gamma)\gamma_G$. Puisque $\Omega$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$, on a $\omega \in \Omega$. Puisque $\omega'$ et $\gamma_{G'_2}$ conservent tous deux les ensembles $\mathfrak{X}_k$, $\omega$ les conserve aussi, donc $\omega \in \Omega^\sharp$. Enfin, on a bien $\omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1} = \sigma_{G'_2}$. Cela démontre (3).

On a

(4) $w_{G'_1}(\sigma) = w_{G'_2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_E$.

En effet, pour $\sigma \in \Gamma_E$, on a simplement $\sigma_{G'_i} = w_{G'_i}(\sigma)$ pour $i = 1, 2$. Ces éléments $w_{G'_i}(\sigma)$ appartiennent à $\Omega$ et sont conjugués par un élément de $\Omega$ d'après (3). Puisque $\Omega$ est commutatif, ils sont égaux.

Si $E = F$, l'assertion (4) entraîne que $\boldsymbol{G}'_1 = \boldsymbol{G}'_2$. Supposons maintenant que $\Gamma_{E/F}$ soit cyclique et fixons un élément $\gamma \in \Gamma_F$ dont l'image dans $\Gamma_{E/F}$ soit un générateur de ce groupe. Appliquons (3) et fixons $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$. Considérons les deux homomorphismes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$ et $\sigma \mapsto \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ de $\Gamma_F$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. L'ensemble des $\sigma \in \Gamma_F$ en lesquels ils coïncident est un sous-groupe de $\Gamma_F$. Ce sous-groupe contient $\Gamma_E$ d'après (4) et parce que $\Omega$ est commutatif. Il contient aussi $\gamma$ par le choix de $\omega$. Mais le sous-groupe engendré par $\Gamma_E$ et $\gamma$ est $\Gamma_F$ tout entier. Donc $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. D'après 1.5.(2), nos deux données endoscopiques sont donc équivalentes.

Remarquons que l'application $\sigma \mapsto \sigma_G$ se quotiente en une injection de $\Gamma_{E/F}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. Donc l'hypothèse que $\Gamma_{E/F}$ est cyclique est vérifiée sauf dans le cas où $G$ est de type $D_4$ et où $\sigma \mapsto \sigma_G$ se quotiente en un isomorphisme de $\Gamma_{E/F}$ sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \mathfrak{S}_3$. Supposons ces hypothèses vérifiées. Notons $L$ l'extension quadratique de $F$ contenue dans $E$ telle que l'image de $\Gamma_L$ dans $\mathfrak{S}_3$ soit le sous-groupe distingué d'ordre 3 de ce groupe. On fixe un élément $\gamma \in \Gamma_L$ dont l'image dans $\Gamma_{E/L}$ engendre ce groupe. Appliquons (3) et fixons $\omega \in \Omega^\sharp$ tel que $\omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1} = \gamma_{G'_2}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que les homomorphismes $\sigma \mapsto \sigma_{G'_2}$ et $\sigma \mapsto \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ coïncident sur $\Gamma_L$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. On a $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in \Gamma_L$, donc, en appliquant ce que l'on vient de démontrer à cet élément et à $\gamma$, on a les deux égalités

$$\sigma_{G'_2}\gamma_{G'_2}\sigma_{G'_2}^{-1} = \omega\sigma_{G'_1}\gamma_{G'_1}\sigma_{G'_1}^{-1}\omega^{-1}, \quad \gamma_{G'_2} = \omega\gamma_{G'_1}\omega^{-1}.$$

Posons

$$\omega_1 = \omega^{-1}\sigma_{G'_2}^{-1}\omega\sigma_{G'_1} = \omega^{-1}\sigma_G^{-1}w_{G'_2}(\sigma)^{-1}\omega w_{G'_1}(\sigma)\sigma_G.$$

C'est un élément de $\Omega$ puisque ce groupe est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$. Les égalités précédentes entraînent $\omega_1\gamma_{G'_1}\omega_1^{-1} = \gamma_{G'_1}$, c'est-à-dire $\omega_1 w_{G'_1}(\gamma)\gamma_G = w_{G'_1}(\gamma)\gamma_G\omega_1$. Parce que $\Omega$ est commutatif, on peut supprimer les termes $w_{G'_1}(\gamma)$: on a

(5) $\omega_1\gamma_G = \gamma_G\omega_1$.

Notons $(\alpha_i)_{i=1,\dots,4}$ les éléments de $\Delta$, $\alpha_2$ étant la racine centrale, liée aux trois autres. Les racines $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}}$ telles que $d(\alpha) = 1$ sont les $\alpha_i$ pour $i = 0, 1, 3, 4$. Donc $\omega_1(\alpha_0)$ est l'une de ces racines d'après 1.3.(4). Par hypothèse, $\gamma_G$ est un automorphisme d'ordre 3. Il fixe $\alpha_2$ et $\alpha_0$ et permute cycliquement $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. L'égalité (5) entraîne que $\omega_1(\alpha_0)$ est fixe par $\gamma_G$ et ne peut donc être que $\alpha_0$. L'assertion 1.3.(4) entraîne alors $\omega_1 = 1$.

En revenant à la définition de $\omega_1$, cela signifie que $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$. Cela étant vrai pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, nos deux données endoscopiques sont équivalentes. Cela achève la preuve. ∎

## 1.7 Equivalence presque partout, cas général

Dans ce paragraphe, on prouve la proposition de 1.1 dans le cas général.

Considérons deux données endoscopiques $\boldsymbol{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, s_1)$ et $\boldsymbol{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, s_2)$ de $G$. On suppose que les données $\boldsymbol{G}'_{1,v}$ et $\boldsymbol{G}'_{2,v}$ sont équivalentes pour presque toute place $v$. On doit montrer que les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ sont équivalentes.

Encore une fois, l'équivalence en au moins une place entraîne que $s_1$ et $s_2$ sont conjugués. Quitte à remplacer l'une de nos données par une donnée équivalente, on peut supposer $s_1 = s_2$ et on note simplement $s$ cet élément. On va utiliser la construction de Langlands, cf. [L, pp. 704–705]. Notons $\mu_\infty$ le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$. Le groupe $\mathbb{C}^\times/\mu_\infty$ est sans torsion. Notons $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times/\mu_\infty$ la projection naturelle et $R$ le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{p(\alpha(s)); \alpha \in \Sigma\}$. C'est un groupe abélien de type fini et sans torsion, donc il est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Fixons-en une base $(r_i)_{i=1,\dots,n}$. Un élément $r \in R$ s'écrit $r = \prod_{i=1,\dots,n} r_i^{n_i(r)}$ avec $n_i(r) \in \mathbb{Z}$. Notons $R^+$, resp. $R^-$, le sous-ensemble des $r \in R$ tels que, ou bien $r = 1$, ou bien, pour le plus petit entier $i$ tel que $n_i(r) \neq 0$, on a $n_i(r) > 0$, resp. $n_i(r) < 0$. Il est clair que $R^+$ et $R^-$ sont stables par multiplication, que $R^-$ est l'ensemble des inverses d'éléments de $R^+$ et que $R^+ \cap R^- = \{1\}$. Notons $\Sigma^P$, resp. $\Sigma^M$, l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $p(\alpha(s)) \in R^+$, resp. $p(\alpha(s)) = 1$. Les propriétés précédentes entraînent qu'il existe un sous-groupe parabolique $\hat{P}$ de $\hat{G}$ et une composante de Levi $\hat{M}$ de $\hat{P}$ tels que $\hat{T} \subset \hat{M}$ et que $\Sigma^P$, resp. $\Sigma^M$, soit l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{P}$, resp. $\hat{M}$. Conjuguer nos données par un même élément de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$ conjugue notre couple $(\hat{P}, \hat{M})$ par le même élément. On peut donc supposer $\hat{B} \subset \hat{P}$. Il résulte de la construction que

(1) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et fixe $s$ conserve aussi la paire $(\hat{P}, \hat{M})$.

Notons $\Delta^M = \Delta \cap \Sigma^M$ et $\Delta_M = \Delta \smallsetminus \Delta^M$. L'ensemble $\Delta^M$ est un ensemble de racines simples pour $\hat{M}$. Introduisons la relation d'équivalence dans $\Delta_M$ définie par

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow p(\alpha(s)) = p(\beta(s)).$$

Notons $(\Delta_i)_{i=1,\dots,m}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $i = 1, \dots, m$, fixons une racine $\delta_i \in \Delta_i$. Fixons un entier $b \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que:

- $\alpha(s)^b = 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M$;
- $\alpha(s)^b = \beta(s)^b$ pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$ tels que $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$.

Posons $c = \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{\alpha\in\Delta_i} id(\alpha)$ et $d = 3cb$. Définissons un élément $t \in T$ par les égalités:

- $\alpha(t) = \alpha(s)$ pour tout $\alpha \in \Delta^M$;
- pour $i = 1, \dots, m$ et pour tout $\alpha \in \Delta_i$, $\alpha(t) = \zeta_d^i \alpha(s)\delta_i(s)^{-1}$.

Montrons que

(2) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et fixe $t$ conserve aussi la paire $(\hat{P}, \hat{M})$.

Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a $\alpha(t) = \zeta_d^{m(\alpha)}$ pour un élément bien défini $m(\alpha) \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

Introduisons les ensembles $S^M$, resp. $S^U$, $S^{\bar{U}}$, des racines $\alpha \in \Sigma$ qui vérifient les conditions $m(\alpha) \in 3c\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, resp. $m(\alpha) \in (\{1,\ldots,c\}+3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$, resp. $m(\alpha) \in (\{-1,\ldots,-c\}+3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$. Il résulte des définitions que l'on a les inclusions $\Sigma^M \subset S^M$, $(\Sigma^P \smallsetminus \Sigma^M) \subset S^U$ et $\{-\alpha; \alpha \in \Sigma^P - \Sigma^M\} \subset S^{\bar{U}}$. Il résulte aussi des définitions que les ensembles $S^M$, $S^U$ et $S^{\bar{U}}$ sont disjoints. Les inclusions précédentes sont des égalités. Par définition de ces ensembles, $S^M$, $S^U$ et $S^{\bar{U}}$ sont conservés par tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et qui fixe $t$. Il en est donc de même de $\Sigma^P$ et $\Sigma^M$, donc de $\hat{P}$ et $\hat{M}$. Cela prouve (2).

Montrons que

(3) tout automorphisme de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ fixe $s$ si et seulement s'il fixe $t$.

On considère un automorphisme $u$ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{T}$ et qui fixe l'un des éléments $s$ ou $t$. On veut prouver qu'il fixe l'autre. D'après (1) et (2), $u$ conserve la paire $(\hat{P},\hat{M})$. On sait que l'on peut écrire $u = \mathrm{Int}_n \circ v$ pour un élément $n \in N_{\hat{G}}(\hat{T})$ et un automorphisme $v$ de $\hat{G}$ qui conserve la paire $(\hat{B},\hat{T})$. Alors la paire $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$ est conjuguée par $n^{-1}$ à $(\hat{P},\hat{M})$. Les deux paires $(\hat{P},\hat{M})$ et $(v(\hat{P}), v(\hat{M}))$ étant standard, il en résulte qu'elles sont égales. Donc $v$ et $\mathrm{Int}_n$ conservent la paire $(\hat{P},\hat{M})$. Il en résulte que $n \in N_{\hat{M}}(\hat{T})$. On note $w$ l'image de $n$ dans le groupe de Weyl $W^M$ de $\hat{M}$ relatif à $\hat{T}$. Puisque $v$ conserve $(\hat{P},\hat{M})$, $v$ conserve $\Delta^M$ et $\Delta_M$.

Montrons que

(4) pour $i = 1,\ldots,m$, $v$ conserve $\Delta_i$.

Notons $y$ l'élément $s$ ou $t$ que l'on suppose conservé par $u$. On a $wv(y) = y$. Soit $\alpha \in \Delta_i$, et posons $\beta = v(\alpha)$. On a $\beta(y) = v(\alpha)(wv(y)) = w'(\alpha)(y)$, où $w' = v^{-1}w^{-1}v$. Cet élément $w'$ appartient encore à $W^M$. Il est connu que $w'(\alpha)$ s'écrit $\alpha + \sum_{\alpha' \in \Delta^M} c(\alpha')\alpha'$, avec des coefficients $c(\alpha') \in \mathbb{Z}$. Par définition de $t$ et $y$, on a $\alpha'(y) = \alpha'(s)$ pour tout $\alpha' \in \Delta^M$ et ce terme est une racine de l'unité d'ordre au plus $b$. Il en résulte que $\beta(y)^b \alpha(y)^{-b} = 1$. Si $y = s$, alors $p(\alpha(s)) = p(\beta(s))$ donc $\beta \in \Delta_i$ par définition des classes d'équivalence $\Delta_i$. Si $y = t$, on a $m(\beta) \in (m(\alpha)+3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z} = (i+3c\mathbb{Z})/d\mathbb{Z}$ et l'on voit que cette relation caractérise les éléments de $\Delta_i$, donc encore $\beta \in \Delta_i$. Cela prouve (4).

Posons $x = s/t$. Pour achever la preuve de (3), il suffit de prouver que $w(x) = v(x) = x$. On a $\alpha(x) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta^M$, ce qui implique que $x$ appartient au centre de $\hat{M}$ donc est fixé par $w \in W^M$. Pour $i = 1,\ldots,m$, $\alpha(x)$ est constant quand $\alpha$ parcourt $\Delta_i$, cela par définition de $t$. Avec (4), on voit que $v(\alpha)(x) = \alpha(x)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, donc $v(x) = x$. Cela achève de prouver (3).

Posons $\boldsymbol{G}_1'' = (G_1', \mathcal{G}_1', t)$ et $\boldsymbol{G}_2'' = (G_2', \mathcal{G}_2', t)$. Il résulte facilement de (3) que ces triplets sont des données endoscopiques de $G$. Il en résulte tout aussi facilement que les données $\boldsymbol{G}_1'$ et $\boldsymbol{G}_2'$ sont équivalentes si et seulement si les données $\boldsymbol{G}_1''$ et $\boldsymbol{G}_2''$ le sont. La même chose vaut pour les données localisées en une place $v$. Alors l'assertion de la proposition pour $\boldsymbol{G}_1'$ et $\boldsymbol{G}_2'$ équivaut à la même assertion pour la paire $\boldsymbol{G}_1''$ et $\boldsymbol{G}_2''$. Mais on peut appliquer à cette dernière paire la proposition de 1.6. Cela achève la preuve de la proposition de 1.1 dans le cas où $\hat{G} = \hat{G}_{\mathrm{AD}}$ est simple (pour la forme "galoisienne" des $L$-groupes). Cette preuve s'adapte aisément à la forme "groupes de Weil" des $L$-groupes, ce qui d'après 1.2 prouve la proposition de 1.1 dans le cas général.

# 2 Description des données endoscopiques elliptiques

## 2.1 Construction de données endoscopiques elliptiques

Les hypothèses sont comme en 1.3. Notons $\underline{\mathcal{E}}(G)$ l'ensemble des couples $(\omega_{G'}, \mathcal{O})$ où:

- $\omega_{G'} : \Gamma_F \to \Omega$ est une application telle que l'application $\sigma \mapsto \sigma_{G'} \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_{G'}(\sigma)\sigma_G$ soit un homomorphisme de $\Gamma_F$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_{\mathrm{a}})$;
- $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble non vide de $\Delta_{\mathrm{a}}$ qui est conservé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et qui forme une unique orbite pour cette action.

Disons que deux tels couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalents si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\mathcal{O}_2 = \omega(\mathcal{O}_1)$ et $\sigma_{G'_2} = \omega\sigma_{G'_1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Notons $\underline{E}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\underline{\mathcal{E}}(G)$. Nous allons associer à tout élément de $\underline{\mathcal{E}}(G)$ une donnée endoscopique elliptique de $G$.

Considérons un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Posons

$$d = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha).$$

Soit $s$ l'unique élément de $\hat{T}$ tel que $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$. La relation 1.3.(1) implique que ces égalités s'étendent à $\Delta_{\mathrm{a}}$, c'est-à-dire $\alpha(s) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ et $\alpha(s) = \zeta_d$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est stable par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$, le point $s$ est fixe par cette action. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s)^\circ$. Ce groupe contient $\hat{T}$. Notons $\mathcal{G}'$ le sous-ensemble de ${}^LG$ formé des éléments $(g\tilde{\omega}_{G'}(\sigma), \sigma)$ pour $g \in \hat{G}'$ et $\sigma \in \Gamma_F$, où $\tilde{\omega}_{G'}(\sigma)$ est un représentant quelconque de $\omega_{G'}(\sigma)$ dans $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'ensemble $\mathcal{G}'$ est un groupe qui normalise $\hat{G}'$. On en déduit de la façon habituelle une $L$-action de $\Gamma_F$ sur $\hat{G}'$ et on introduit le groupe réductif connexe $G'$ défini et quasi-déployé sur $F$ dont $\hat{G}'$, muni de cette action galoisienne, est le groupe dual. On vérifie que le triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ est une donnée endoscopique de $G$.

Puisque $\mathcal{O}$ est non vide, les éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ sont linéairement indépendants. Notons $\Sigma_0$ l'ensemble des éléments de $\Sigma$ qui sont combinaisons linéaires des éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$ à coefficients entiers relatifs. Notons $\Sigma_0^+$, resp. $\Sigma_0^-$, le sous-ensemble des éléments de $\Sigma_0$ pour lesquels ces coefficients sont tous positifs ou nuls, resp. négatifs ou nuls. Évidemment, $\Sigma_0^- = -\Sigma_0^+$. Notons $\Sigma^{G'}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}'$. Montrons:

(1) on a les égalités $\Sigma^{G'} = \Sigma_0 = \Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^-$.

L'ensemble $\Sigma^{G'}$ est celui des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(s) = 1$. L'inclusion $\Sigma_0 \subset \Sigma^{G'}$ est évidente. Soit $\beta \in \Sigma^{G'}$. Quitte à remplacer $\beta$ par $-\beta$, on suppose $\beta \in \Sigma^+$. Écrivons $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m(\alpha)\alpha$, avec des coefficients $m(\alpha) \in \mathbb{N}$. D'après 1.3.(3), on a $m(\alpha) \le d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Posons $m = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} m(\alpha)$. Les inégalités précédentes impliquent $0 \le m \le d$ et même $m \le d - 1$ si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. L'égalité $\beta(s) = 1$ implique $\zeta_d^m = 1$, donc $m$ est divisible par $d$. Si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ cela force $m = 0$. Si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, on a seulement $m = 0$ ou $m = d$. Si $m = 0$, on a $m(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$, donc $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta \smallsetminus (\mathcal{O} \cap \Delta)} m(\alpha)\alpha$ et $\beta$ appartient à $\Sigma_0^+$. Supposons $m = d$, ce qui impose $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$. L'égalité $m = d$ et les inégalités $m(\alpha) \le d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta = \mathcal{O}$ impliquent $m(\alpha) = d(\alpha)$ pour

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

tout $\alpha \in \mathcal{O}$. Alors

$$\begin{aligned}\beta &= \Big(\sum_{\alpha\in\Delta}(m(\alpha)-d(\alpha))\alpha\Big)+\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{O}}d(\alpha)\alpha\Big)\\ &= \Big(\sum_{\alpha\in\Delta\smallsetminus\mathcal{O}}(m(\alpha)-d(\alpha))\alpha\Big)-\alpha_0.\end{aligned}$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients entiers négatifs ou nuls d'éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$. Donc $\beta \in \Sigma_0^-$. Cela prouve (1).

Cette propriété entraîne qu'il existe un unique sous-groupe de Borel $\hat{B}'$ contenant $\hat{T}$ de sorte que l'ensemble de racines positives dans $\hat{G}'$ associé à ce Borel soit $\Sigma_0^+$. L'ensemble de racines simples $\Delta^{G'}$ est alors $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$.

Montrons que

(2) la donnée $\boldsymbol{G}'$ est elliptique.

Notons $X^*(\hat{T})$ le groupe des caractères algébriques de $\hat{T}$ et $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}} = X^*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini $E \subset \Delta_{\mathrm{a}}$ stable par l'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$, notons $\mathbb{Q}[E]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de base $E$. Si $E \neq \Delta_{\mathrm{a}}$ l'espace $\mathbb{Q}[E]$ se plonge naturellement dans $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$. On munit $X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{Q}[E]$ de cette action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Dire que la donnée $\boldsymbol{G}'$ est elliptique est équivalent à l'égalité

$$X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}^{\Gamma_F} = \mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F},$$

les exposants signifiants que l'on prend les sous-espaces de points fixes. On a une projection naturelle $p : \mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}] \to X^*(\hat{T})_{\mathbb{Q}}$ dont le noyau est l'espace engendré par la relation (1) de 1.3, laquelle est fixe par $\Gamma_F$. De plus, cette projection est l'identité sur $\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]$ (qui est plongé à la fois dans les espaces de départ et d'arrivée). L'ellipticité se traduit donc par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_{\mathrm{a}}]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\Delta^{G'}]^{\Gamma_F}).$$

Cela équivaut à $\dim(\mathbb{Q}[\mathcal{O}]^{\Gamma_F}) = 1$. Mais ceci résulte de l'hypothèse que $\mathcal{O}$ est une unique orbite pour l'action de $\Gamma_F$.

## 2.2 Injectivité

Continuons avec les notations de 2.1. Munissons $\Sigma$ de l'ordre partiel $\leq_{\hat{B}'}$ défini en 1.4: pour $\alpha, \beta \in \Sigma$, on a $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$ si et seulement si $\beta - \alpha$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'éléments de $\Delta_{\mathrm{a}} \smallsetminus \mathcal{O}$. Posons

$$\mathfrak{S} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(s) = \zeta_d\}.$$

Cet ensemble contient $\mathcal{O}$.

Montrons que

(1) pour tout $\beta \in \mathfrak{S}$, il existe $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$.

Supposons d'abord $\beta \in \Sigma^+$. Écrivons $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m(\alpha)\alpha$. Posons $m = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}\cap\Delta} m(\alpha)$. Comme plus haut, on a $0 \leq m(\alpha) \leq d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, d'où $0 \leq m \leq d$. On a $\beta(s) = \zeta_d^m$. Puisque $\beta(s) = \zeta_d$, cela implique $m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$, donc $m = 1$. Il existe donc un unique élément $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$ tel que $m(\alpha) \neq 0$ et, pour cette unique racine, on a $m(\alpha) = 1$. Alors $\beta = \alpha + \sum_{\alpha'\in\Delta\smallsetminus(\mathcal{O}\cap\Delta)} m(\alpha')\alpha'$, donc $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$. Supposons maintenant

$\beta \in -\Sigma^+$, écrivons $-\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m(\alpha)\alpha$ et définissons $m$ comme ci-dessus. On a alors $\beta(s) = \zeta_d^{-m}$ d'où $-m \equiv 1 \pmod{d\mathbb{Z}}$. Cela impose $m = d-1$. Supposons d'abord $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$. On a alors $m = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}} m(\alpha)$ et $d = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}} d(\alpha)$. Les inégalités entre les $m(\alpha)$ et les $d(\alpha)$ impliquent qu'il existe un unique élément $\alpha \in \mathcal{O}$ tel que $m(\alpha) = d(\alpha) - 1$ et on a $m(\alpha') = d(\alpha')$ pour tout $\alpha' \in \mathcal{O} \smallsetminus \{\alpha\}$. Alors

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha_0 + \sum_{\alpha'\in\Delta}(d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'\\ &= \alpha + \alpha_0 + \sum_{\alpha'\in\Delta\smallsetminus\mathcal{O}}(d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'.\end{aligned}$$

Cette égalité montre que $\alpha \leq_{\hat{B}'} \beta$. Supposons maintenant $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. On a alors $m = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}\smallsetminus\{\alpha_0\}} m(\alpha)$ et $d = 1 + \sum_{\alpha\in\mathcal{O}\smallsetminus\{\alpha_0\}} d(\alpha)$. L'égalité $m = d-1$ force $m(\alpha) = d(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{O}\cap\Delta$. On obtient comme ci-dessus

$$\beta = \alpha_0 + \sum_{\alpha'\in\Delta\smallsetminus(\mathcal{O}\cap\Delta)}(d(\alpha') - m(\alpha'))\alpha'$$

et $\alpha_0 \leq_{\hat{B}'} \beta$. Cela démontre (1).

Montrons que

(2) $\mathcal{O}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}$ qui sont minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$.

La relation (1) entraîne que les éléments de $\mathfrak{S}$ qui sont minimaux pour l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$ appartiennent à $\mathcal{O}$. Soit maintenant $\alpha \in \mathcal{O}$ et considérons un élément $\beta \in \mathfrak{S}$ tel que $\beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$. D'après (1), on peut fixer $\alpha' \in \mathcal{O}$ tel que $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta$, donc $\alpha' \leq_{\hat{B}'} \alpha$. Supposons $\alpha' \neq \alpha$. Alors, par définition de l'ordre $\leq_{\hat{B}'}$, on obtient une égalité

$$-\alpha + \alpha' + \sum_{\alpha''\in\Delta_a\smallsetminus\mathcal{O}} m(\alpha'')\alpha'' = 0,$$

avec des coefficients $m(\alpha'') \in \mathbb{N}$. Or les seules relations linéaires entre éléments de $\Delta_a$ sont proportionnelles à la relation (1) de 1.3 donc le coefficient de $\alpha$ et celui de $\alpha'$ doivent être de même signe. Ce n'est pas le cas. Cette contradiction prouve que $\alpha' = \alpha$. Alors, les inégalités $\alpha = \alpha' \leq_{\hat{B}'} \beta \leq_{\hat{B}'} \alpha$ entraînent $\beta = \alpha$, ce qui prouve que $\alpha$ est minimal. Cela démontre (2).

***Proposition*** *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une injection de $\underline{E}(G)$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de $G$.*

**Proof** Soient $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1), (\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$. Notons $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ les données endoscopiques de $G$ associées. La proposition signifie que $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalentes si et seulement si $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ le sont. Dans un sens, c'est clair: si les couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont conjugués par un élément $\omega \in \Omega$, il suffit de relever $\omega$ en un élément quelconque $x$ de $N_{\hat{G}}(\hat{T})$. L'élément $x$ est une équivalence entre les deux données endoscopiques. Inversement, supposons que les données $\boldsymbol{G}'_1$ et $\boldsymbol{G}'_2$ soient équivalentes. On affecte les objets relatifs à nos deux séries de données d'indices 1 ou 2. En particulier, on introduit les sous-groupes de Borel $\hat{B}'_1$ de $\hat{G}'_1$, resp. $\hat{B}'_2$ de $\hat{G}'_2$, que l'on a défini avant l'assertion 2.1.(2). Fixons $x \in \hat{G}$ qui réalise l'équivalence, c'est-à-dire que $s_2 = x s_1 x^{-1}$ et $\mathcal{G}'_2 = x\mathcal{G}'_1 x^{-1}$. On peut multiplier $x$ à droite par un élément de $\hat{G}'_1$ et à gauche par un élément de $\hat{G}'_2$. On peut donc supposer que la conjugaison par $x$

https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press

envoie la paire de Borel $(\hat{B}'_1, \hat{T})$ de $\hat{G}'_1$ sur la paire de Borel $(\hat{B}'_2, \hat{T})$ de $\hat{G}'_2$. En particulier, $x$ normalise $\hat{T}$ et définit un élément $\omega \in W$. Puisque, pour $i = 1, 2$, $\Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}_i$ est l'ensemble des racines simples dans $\Sigma^{G'_i}$ pour le Borel $\hat{B}'_i$, on a $\omega(\Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}_1) = \Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}_2$. De même, $\omega$ transporte l'ordre $\leq_{\hat{B}'_1}$ en l'ordre $\leq_{\hat{B}'_2}$. Pour $i = 1, 2$, $d_i$ est l'ordre de $s_i$. Puisque $xs_1x^{-1} = s_2$, on a $d_1 = d_2$ et on note simplement $d$ cet entier. Alors la conjugaison par $\omega$ envoie $\mathfrak{S}_1$ sur $\mathfrak{S}_2$. Puisque cette conjugaison transporte les ordres, l'assertion (2) entraîne qu'elle envoie $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$. Alors, elle conserve $\Delta_a$, donc $\omega \in \Omega$. Soit $\sigma \in \Gamma_F$. Pour $i = 1, 2$, l'élément $\omega_{G'_i}(\sigma)$ est obtenu en choisissant un élément $(g'_i(\sigma), \sigma) \in \mathcal{G}'_i$ qui conserve $(\hat{B}'_i, \hat{T})$, puis en posant $\omega_{G'_i}(\sigma) = \hat{T}g'_i(\sigma)$. Puisque $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$, on a $x(g'_1(\sigma), \sigma)x^{-1} = (hg_2(\sigma), \sigma)$, pour un $h \in \hat{G}'$. Puisque la conjugaison par $x$ envoie $(\hat{B}'_1, \hat{T})$ sur $(\hat{B}'_2, \hat{T})$, la conjugaison par $h$ conserve $(\hat{B}'_2, \hat{T})$. Donc $h \in \hat{T}$. On en déduit $xg'_1(\sigma)\sigma_G(x)^{-1} \in \hat{T}g'_2(\sigma)$, ce qui équivaut à $\omega\omega_{G'_1}(\sigma)\sigma_G(\omega)^{-1} = \omega_{G'_2}(\sigma)$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma$, les couples $(\omega_{G'_1}, \mathcal{O}_1)$ et $(\omega_{G'_2}, \mathcal{O}_2)$ sont équivalents. ∎

## 2.3 Surjectivité d'après Langlands

***Proposition*** *L'application qui, à un couple $(\omega_{G'}, \mathcal{O}) \in \underline{\mathcal{E}}(G)$, associe la donnée $\boldsymbol{G}'$, se quotiente en une bijection de $\underline{E}(G)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques de $G$.*

**Proof** L'injectivité ayant déjà été établie, il faut prouver la surjectivité. On considère une donnée endoscopique elliptique $\boldsymbol{G}' = (G', \mathcal{G}', s)$ de $G$. Parce qu'elle est elliptique, Langlands prouve (par la méthode que l'on a reprise en 1.7) que $s$ est d'ordre fini. On effectue la construction de 1.4, dont en reprend les notations. Montrons que

(1) si la donnée $\boldsymbol{G}'$ est équivalente à la donnée principale $\boldsymbol{G} = (G, 1, {}^LG)$, on a $\mathfrak{X} = \Delta$; sinon, on a $\mathfrak{X} = \Delta_a$, il existe un unique $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{X}_k \neq \varnothing$ et cet unique ensemble $\mathfrak{X}_k$ forme une unique orbite pour l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$.

Si la donnée $\boldsymbol{G}'$ est équivalente à $\boldsymbol{G}$, on a $s = 1$ donc $d = 1$ et $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0$. Puisque ce dernier ensemble est un ensemble de racines simples pour $\hat{G}'$, ses éléments sont linéairement indépendants donc $\mathfrak{X} \neq \Delta_a$, ce qui implique $\mathfrak{X} = \Delta$. Supposons maintenant que la donnée $\boldsymbol{G}'$ ne soit pas équivalente à $\boldsymbol{G}$. Alors $s \neq 1$ et $d \geq 2$. Il y a forcément une racine $\alpha \in \Sigma$ pour laquelle $\alpha(s) \neq 1$, donc un $k \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{Y}_k \neq \varnothing$. Considérons le plus petit $k$ pour lequel cette propriété est vérifiée. Alors, par définition, $\mathfrak{Z}_k = \mathfrak{Y}_k$ donc $\mathfrak{Z}_k \neq \varnothing$. L'ensemble $\mathfrak{X}_k$ des éléments minimaux de $\mathfrak{Z}_k$ n'est pas vide non plus. Comme dans la preuve de 2.1.(2), l'ellipticité se traduit par l'égalité $\dim(X^*(\hat{T})^{\Gamma_F}_{\mathbb{Q}}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$. Si $\mathfrak{X} = \Delta$, on a

$$\dim(X^*(\hat{T})^{\Gamma_F}_{\mathbb{Q}}) = \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}) + \sum_{j=1,\dots,d-1} \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_j]^{\Gamma_F}).$$

Mais puisque $\mathfrak{X}_k$ n'est pas vide, l'espace $\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}$ n'est pas nul: la somme des éléments de $\mathfrak{X}_k$ appartient à cet espace. Donc $\dim(X^*(\hat{T})^{\Gamma_F}_{\mathbb{Q}}) > \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$, contradiction. Donc $\mathfrak{X} = \Delta_a$. Comme dans la preuve de 2.1(2), l'ellipticité se traduit alors par l'égalité

$$\dim(\mathbb{Q}[\Delta_a]^{\Gamma_F}) = 1 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F}).$$

S'il y a au moins deux $j \in \{1, \ldots, d-1\}$ tels que $\mathfrak{X}_j \neq \emptyset$, on voit comme ci-dessus que $\dim(\mathbb{Q}[\Delta_a]^{\Gamma_F}) \geq 2 + \dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_0]^{\Gamma_F})$, contradiction. Donc $k$ est l'unique élément de $\{1, \ldots, d-1\}$ tel que $\mathfrak{X}_k \neq \emptyset$. Pour la même raison, on a $\dim(\mathbb{Q}[\mathfrak{X}_k]^{\Gamma_F}) = 1$. Cela prouve (1).

Considérons le couple $(\omega_G, \{\alpha_0\})$, où $\omega_G : \Gamma_F \to \Omega$ est l'application constante de valeur 1. Ce couple appartient à $\underline{\mathcal{E}}(G)$ et on voit que la donnée endoscopique qui lui est associée n'est autre que $\boldsymbol{G}$. Cela règle la question pour cette donnée. Supposons maintenant que la donnée $\boldsymbol{G}'$ ne soit pas équivalente à $\boldsymbol{G}$. Alors $\mathfrak{X} = \Delta_a$ et la construction de 1.4 munit $\Delta_a$ d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ qui est de la forme $\sigma_{G'} = w_{G'}(\sigma)\sigma_G$, où $w_{G'}$ est une application de $\Gamma_F$ dans $\Omega$. On pose $\mathcal{O} = \mathfrak{X}_k$, où $k$ est l'entier de la relation (1). Le couple $(w_{G'}, \mathcal{O})$ appartient à $\underline{\mathcal{E}}(G)$. On lui associe une donnée endoscopique $\boldsymbol{G}'' = (G'', \mathcal{G}'', \underline{s})$ comme dans le paragraphe précédent. Il résulte des définitions que $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}'$. Il est moins clair que $\underline{s} = s$. En effet, les définitions entraînent $\alpha(s) = \alpha(\underline{s}) = 1$ pour $\alpha \in \Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}$, mais, pour $\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha(s) = \zeta_d^k$ tandis que $\alpha(\underline{s}) = \zeta_{\underline{d}}$, où $\underline{d} = \sum_{\beta \in \mathcal{O}} d(\beta)$. Pour montrer que $\underline{s} = s$ et donc pour achever la preuve de la proposition, il reste à prouver:

(2) on a les égalités $\underline{d} = d$ et $k = 1$.

On vient de dire que $\alpha(s) = 1$ si $\alpha \in \Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}$ et $\alpha(s) = \zeta_d^k$ si $\alpha \in \mathcal{O}$. Puisque $d$ est par définition l'ordre de $s$, cela entraîne que $k$ est premier à $d$. De plus, la relation 1.3.(1) entraîne que $\zeta_d^{k\underline{d}} = 1$, donc $d$ divise $\underline{d}$. On sait que, pour toute racine positive $\beta \in \Sigma$, on peut trouver une suite de racines positives $(\beta_i)_{i=1,\ldots,m}$ de sorte que $\beta_1 \in \Delta$, $\beta_{i+1} - \beta_i \in \Delta$ pour $i = 1, \ldots, m-1$ et $\beta_m = \beta$. On applique cela à $\beta = -\alpha_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} d(\alpha)\alpha$ et on écrit

$$\beta_i = \sum_{\alpha \in \Delta} d_i(\alpha)\alpha. \tag{3}$$

L'application $i \mapsto d_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta} d_i(\alpha)$ est croissante et on a $d_{i+1} \leq d_i + 1$. Pour $i = m$, on a $d_m = \underline{d}$ si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, et $d_m = \underline{d} - 1$ si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$. Supposons $d < \underline{d}$. Alors il existe $i$ tel que $d_i = d$. Fixons un tel $i$. On a alors $\beta_i(s) = \zeta_d^{kd} = 1$. Donc $\beta_i \in \Sigma^{G'}$ et $\beta_i$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{X}_0 = \Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}$. Écrivons $\beta_i = \sum_{\alpha \in \Delta_a \smallsetminus \mathcal{O}} m(\alpha)\alpha$. Si $\alpha_0 \in \mathcal{O}$, seuls interviennent ici des éléments de $\Delta$ et cette égalité coïncide avec (3). En ce cas $d_i(\alpha) = 0$ pour $\alpha \in \mathcal{O} \cap \Delta$, donc $d = d_i = 0$ ce qui est impossible. Si $\alpha_0 \notin \mathcal{O}$, on a

$$\begin{aligned}\beta_i &= m(\alpha_0)\alpha_0 + \sum_{\alpha \in \Delta \smallsetminus \mathcal{O}} m(\alpha)\alpha \\ &= -\sum_{\alpha \in \mathcal{O}} m(\alpha_0)d(\alpha)\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta \smallsetminus \mathcal{O}} (m(\alpha) - m(\alpha_0)d(\alpha))\alpha.\end{aligned}$$

En comparant avec (3), on obtient

$$d = -m(\alpha_0) \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} d(\alpha) = -m(\alpha_0)\underline{d}.$$

On a $d \geq 1$ par définition de $d$. L'égalité précédente contredit l'hypothèse $d < \underline{d}$. Cette hypothèse est donc contradictoire, d'où $d = \underline{d}$. Le même raisonnement prouve que, pour tout $e \in \{1, \ldots, d-1\}$, il existe une racine $\beta_i$ telle que $\beta_i(s) = \zeta_d^{ke}$. En choisissant pour $e$ l'entier tel que $ke \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, d\mathbb{Z})$, on obtient que l'ensemble $\mathfrak{Y}_1$ n'est pas vide.

Comme on l'a vu ci-dessus, cela entraîne $\mathfrak{X}_1 \neq \emptyset$, donc $k = 1$. Cela démontre (2) et la proposition. ■

## Bibliographie


[Bor] A. Borel, *Automorphic L-functions*. Proc. Symp. Pure Math. 33(1979), part 2, 27–61.

[BT] A. Borel and J. Tits, *Groupes réductifs*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques 27(1965), 55–150.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*. Hermann, 1968.

[LL] J.-P. Labesse and E. Lapid, *Characters of G over local and global fields,* appendice à Lapid E., Mao Z., *A conjecture of Whittaker–Fourier coefficients of cusp forms*. J. Number Theory 146(2015), 448–505.

[L] R. Langlands, *Stable conjugacy: definitions and lemmas*. Canad. J. Math. 31(1979), 700–725.

[MW] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue, vol. 1 et 2*. Progress in Math., Birkhäuser 316–317(2016).

[W] J.-L. Waldspurger, *Caractères automorphes d'un groupe réductif*. Prépublication (2016). arxiv:1608.07150



*CNRS, Institut de Mathématiques de Marseille (UMR 7373), Campus de Luminy, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9, France*
*e-mail:* bertrand.lemaire@univ-amu.fr

*CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris-Rive-Gauche, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France*
*e-mail:* jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr


https://doi.org/10.4153/S0008414X20000334 Published online by Cambridge University Press