Adv. Appl. Prob. **19**, 289–291 (1987)
Printed in N. Ireland

NOTE SUR UN MODELE DE FILE $GI/G/1$ A SERVICE AUTONOME (AVEC VACANCES DU SERVEUR)

CHRISTINE FRICKER,* *Université Paris VI*

Abstract

Keilson and Servi introduced in [5] a variation of a $GI/G/1$ queue with vacation, in which at the end of a service time, either the server is not idle, and he starts serving the first customer in the queue with probability p, or goes on vacation with probability $1-p$, or he is idle, and he takes a vacation. At the end of a vacation, either customers are present, and the server starts serving the first customer, or he is idle, and he takes a vacation. The case $p=1$, called the $GI/G/1/V$ queue, was studied analytically by Gelenbe and Iasnogorodski [3] (see also [4]) and then by Doshi [1] and Fricker [2] who obtained stochastic decomposition results on the waiting-time of the nth customer extending the law decomposition result of [3]. Keilson and Servi [5] give a more complete analytic method of treating both the $GI/G/1/V$ model and the Bernoulli vacation model: instead of the waiting time, they use a bivariate process at the service and vacation initiation epochs and the waiting-time distribution is computed as a conditional distribution of the above. In this note the law decomposition result is obtained from a reduction to the $GI/G/1/V$ model with a modified service-time distribution just using the waiting time, with simple path arguments so that by [1] and [2] stochastic decomposition results are valid, which extend the result of [5].

Introduction

Keilson et Servi [5] introduisent un modèle de file $GI/G/1$ avec vacances où le serveur s'il vient d'effectuer un service et que des clients sont présents sert le premier avec une probabilité p ou prend une période de vacances avec probabilité $1-p$; mais s'il est libre, il prend une période de vacances. S'il revient de vacances et si des clients sont présents, il sert le premier; s'il est libre, il repart en vacances. Sous des hypothèses générales, la loi stationnaire ou limite du temps d'attente d'un client est la convolée de la loi stationnaire du temps d'attente dans la file sans vacances avec une loi de service modifiée, et de la loi d'équilibre du processus de renouvellement des vacances. Cela avait été démontré dans le cas $p=1$ de manière analytique [3], puis de manière probabiliste dans [1] et [2] par une décomposition stochastique du temps d'attente. En traitant analytiquement de façon analogue à la file $GI/G/1/V$ le cas général, on obtient [5] la décomposition en loi du temps d'attente. Nous montrons dans cet article que ce

Received 4 April 1986; revision received 10 October 1986.

* Postal address: Laboratoire de Probabilités, 4 place Jussieu, Tour 56, 75252 Paris Cédex 05, France.

modèle est un modèle $GI/G/1/V$ à service modifié, dans le sens où on a égalité en trajectoire des suites des temps d'attente. L'étude de ce modèle se réduit donc à l'application des résultats de [1] et [2].

On se donne sur un espace de probabilité (Ω, A, P) convenable des variables aléatoires positives indépendantes w_0, V_0, τ_n $(n \in \mathbb{N})$ de loi μ_τ, σ_n $(n \in \mathbb{N})$ de loi μ_σ, X_n $(n \in \mathbb{N})$ de loi de Bernoulli de paramètre p, $(P(X_n = 0) = p$, $P(X_n = 1) = 1 - p)$, et indépendantes des processus de renouvellement indépendants $(V_q^n, q \in \mathbb{N})$ de loi μ_V (i.e. loi commune des $V_{q+1}^n - V_q^n$) portée par $\mathbb{R}^+$, tels que $V_0^n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

On considère la file $GI/G/1$ décrite par Keilson où le n^e client arrivant à $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i$ demande un service de durée σ_n, où la loi commune des périodes de vacances est μ_V, où le temps d'attente du client 0 est $w_0 + V_0$, V_0 représentant un temps d'attente supplémentaire. Le temps d'attente de n^e client du modèle de Keilson noté $\tilde{W}_n$ est donné par

$$\tilde{W}_0 = w_0 + V_0; \qquad \tilde{W}_{n+1} = \tilde{W}_n + \sigma_n - \tau_n + V_{\beta_n}^n$$

où

$$\beta_n = \inf \{q \geqq X_n : \tilde{W}_n + \sigma_n - \tau_n + V_q^n \geqq 0\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La proposition suivante nous permet de réduire le modèle général au cas $p = 1$ avec service modifié.

Proposition. $(\tilde{W}_n, n \in \mathbb{N})$ *est la suite des temps d'attente des clients successifs d'une file* $GI/G/1/V$ *de mêmes caractéristiques excepté la loi des durées de service qui est* $\mu_\sigma * [p\varepsilon_0 + (1-p)\mu_V]$.

Démonstration. Notons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé:

$$\beta_n = X_n + \inf \{q \geqq 0: \tilde{W}_n + \sigma_n + V_{X_n}^n - \tau_n + V_{q+X_n}^n - V_{X_n}^n + V_{X_n}^n \geqq 0\};$$

ainsi en posant

$$\tilde{\sigma}_n = \sigma_n + V_{X_n}^n, \qquad \tilde{V}_q^n = V_{q+X_n}^n - V_{X_n}^n \qquad (q \in \mathbb{N})$$

et

$$\tilde{\beta}_n = \inf \{q \geqq 0: \tilde{W}_n + \tilde{\sigma}_n - \tau_n + \tilde{V}_q^n \geqq 0\}$$

on a

$$\beta_n = X_n + \tilde{\beta}_n$$

et donc:

$$\tilde{W}_{n+1} = \tilde{W}_n + \tilde{\sigma}_n - \tau_n + \tilde{V}_{\tilde{\beta}_n}^n.$$

De plus puisque les suites $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ et $(\tilde{\sigma}_n, n \in \mathbb{N})$ sont indépendantes entre elles, indépendantes équidistribuées de lois μ_τ et $\mu_\sigma^*[p\varepsilon_0 + (1-p)\mu_V]$, indépendantes aussi des $(\tilde{V}_q^n, q \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, processus de renouvellement indépendants de loi μ_V avec $\tilde{V}_0^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{W}_n$ est bien le temps d'attente annoncé.

L'étude de $\tilde{W}_n$ est alors immédiate: on peut appliquer les résultats de [1] et [2]. $\tilde{W}_n$ se décompose en somme du temps d'attente $\tilde{w}_n$ de la file sans vacances associée et du dépassement par un processus de renouvellement indépendant de loi μ_V de la période de liberté cumulée jusqu'à l'instant T_n d'arrivée du n^e client, notée $\tilde{l}_n$, dans la file sans vacances. Et le théorie du renouvellement nous a permis d'étudier le comportement asymptotique en loi de $\tilde{W}_n$. On peut ainsi énoncer le théorème suivant en notant $\mu_{\tilde{L}}$ la loi commune des périodes de liberté (indépendantes équidistribuées) du serveur dans la file $GI/G/1$ sans vacances.

Théorème. On suppose que $E\sigma_0 < E\tau_0$ *et* $0 < m = \int x d\mu_V(x) < +\infty$.

1. *Si* w_0 *est tel que* $(\tilde{w}_n, n \in \mathbb{N})$ *est stationnaire en loi, si* V_0 *est de loi* ρ_V, *loi d'équilibre de* μ_V *(i.e. de densité* $(\mu_V([x, +\infty[)/m)1_{\mathbb{R}^+}(x)dx)$, *alors pour tout* n, $\tilde{w}_n$, $\tilde{W}_n - \tilde{w}_n$ *sont indépendantes de lois respectives* $\mu_{\tilde{w}}$, ρ_V *donc* $(\tilde{W}_n, n \in \mathbb{N})$ *est stationnaire de loi* $\mu_{\tilde{w}}^* \rho_V$.

2. *Si* ρ_V *n'est pas arithmétique,* $(\tilde{w}_n, \tilde{W}_n - \tilde{w}_n)$ *converge en loi vers le couple* (X, Y) *de variables aléatoires indépendantes de lois respectives* $\mu_{\tilde{w}}$, ρ_V. *Par suite* $\tilde{W}_n$ *converge en loi vers* $X + Y$ *de loi* $\mu_{\tilde{w}}^* \rho_V$.

3. *Si* $\mu_{\tilde{L}}$ *n'est pas arithmétique,* $\tilde{W}_n$ *converge en loi vers* $\mu_{\tilde{w}}^* \rho_V$.

Remarque. $\mu_{\tilde{w}}$ est l'unique probabilité ν sur $\mathbb{R}^+$ telle que ν soit l'image de $\nu \otimes \mu_{\tilde{\sigma}} \otimes \mu_\tau$ par $(w, s, t) \to (w + s - t)^+$ où $\mu_{\tilde{\sigma}} = \mu_\sigma^*[p\varepsilon_0 + (1-p)\mu_V]$.

Références

[1] Doshi, B. T. (1985) A note on stochastic decomposition in a $GI/G/1$ queue with vacations or set-up times. *J. Appl. Prob.* **22,** 419–428.

[2] Fricker, C. (1986) Etude d'une file $GI/G/1$ à service autonome (avec vacances du serveur). *Adv. Appl. Prob.* **18,** 283–286.

[3] Gelenbe, E. and Iasnogorodski, R. (1980) A queue with server of walking type (autonomous service). *Ann. Inst. H. Poincaré* **16,** 63–73.

[4] Iasnogorodski, R. (1979) Problèmes-frontières dans les files d'attente. Thèse d'Etat, Paris VI.

[5] Keilson, J. and Servi, L. D. (1986) Oscillating random walk models for $GI/G/1$ vacation systems with Bernoulli schedules. *J. Appl. Prob.* **23,** 790–802.