N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 49 (1973), 91–100

LE NOMBRE DE COMBINAISONS LINEAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA ET SES APPLICATIONS

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$ et $X=\{F\}$ un ensemble de combinaisons des fonctions $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, combien de combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna y-a-t-il dans X ? On sait que 1) il y en a une infinité dénombrable au plus en général ([5]) et 2) si l'ordre inférieur de f est égal à zéro, il y en a n au plus ([4]).

Dans ce mémoire, on considère sur ce problème du point de vue différente; c'est-à-dire, on donne un exemple de f tel que X admet des combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna dénombrablement infini et démontre que s'il y a $n+1$ combinaisons $F_i(i=0,\cdots,n)$ telles que $\delta(F_i)=1$ dans X, X admet au plus $n+\lambda+1$ combinaisons exceptionnelles aus sens de Nevanlinna y compris $F_0,\cdots,F_n$ où λ est le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes. De plus, on considère sur une généralisation d'un théorème de Niino et Ozawa (Th. 3 [3]) et, en appliquant le résultat ci-dessus, on démontre quelques cas particuliers.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes ([2]) librement.

2. Préliminaires. Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et $\lim_{r\to\infty} T(r,f)/\log r=\infty$, où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan ([1]), et α un nombre admissible pour f (voir [7]). On dit qu'une combinaison linéaire, homogène à coefficients constants:

Received May 24, 1972.

$$F = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \ (\not\equiv 0)$$

est

1) lacunaire si F n'admet pas de zéro dans $|z| < \infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si F n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z| < \infty$ au plus;

3) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de f;

4) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) \equiv 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 \ ;$$

5) exceptionnelle au sens de α-Nevanlinna si

$$\delta_\alpha(F) \equiv 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r, 0, F)}{T_\alpha(r, f)} > 0 \ .$$

On note que $1) \Longrightarrow 2) \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow\ 3)}{\searrow\ 4)} \nearrow 5)$ et $3) \Longrightarrow 5)$ pour un nombre α suffisamment grand ([7]).

Soit

$$\begin{aligned} C_\alpha(f) = \{a(z)\,;\ &\text{méromorphe dans } |z| < \infty \quad \text{et} \quad T_\alpha(r, a) \\ &= o(T_\alpha(r, f)) \quad \text{quand} \quad r \to \infty\}\,, \end{aligned}$$

où $T_\alpha(r, f) = \displaystyle\int_1^r \frac{T(r, f)}{t^{1+\alpha}}\, dt$ etc. (voir [7]).

Lemme 1. *Soient X et λ comme dans l'introduction, alors, quand $\lambda = 0$, on a*

$$\sum_{F\in X} \delta_\alpha(F) \leqq n + 1$$

(voir [1], [7]).

Lemme 2. *Soient $g_0, \cdots, g_\nu, c_0, \cdots, c_\nu (\nu \geqq 1)$ des fonctions méromorphes dans $|z| < \infty$ telles que*

1) *pour $i \neq j$ quelconque*

$$0 < \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, g_i/g_j)}{T_\alpha(r, f)} < \infty \ ;$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000015300 Published online by Cambridge University Press

2) *pour tout i,*

$$N_\alpha(r, 0, g_i) = o(T_\alpha(r, f)) \quad et \quad N_\alpha(r, g_i) = o(T_\alpha(r, f))$$

et

3) *toutes les fonctions* $c_i (i = 0, \cdots, \nu)$ *appartiennent à* $C_\alpha(f)$.

Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0 ,$$

on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0$$

(Lemme 5 [7]).

3. Nombre de combinaisons exceptionnelles. D'abord, on donne le

THÉORÈME 1. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système dans* $|z| < \infty$ *d'order non zéro,* $X = \{F\}$ *un ensemble de combinaisons linéaires homogènes des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *à coefficients constants et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et* α *un nombre admissible pour* f *quelconque. S'il y a* $n+1$ *combinaisons* F_i *dans* X *telles que* $\delta_\alpha(F_i) = 1 (i = 0, \cdots, n)$, *alors le nombre* $\nu(f)$ *des combinaisons exceptionnelle au sens de* α-*Nevanlinna dans* X *est au plus égal à* $n + \lambda + 1$; *où* λ *est le nombre maximum de relations linéaires homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$.

Démonstration. Quand $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver d'après le lemme 1. Donc, on démontre ce théorème quand $\lambda > 0$. Or, on peut supposer que $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ sont linéairement indépendantes et toutes les autres combinaisons dans X sont représentées par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ à coefficients constants. Soient λ_α le nombre maximum de relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients méromorphes contenus dans $C_\alpha(f)$ et $G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}$ une base de $\{F_i\}_{i=0}^n$ sur $C_\alpha(f)$. Alors, on peut supposer que $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\} \subset \{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$. Représentons $F_{n+1-\lambda}, \cdots, F_n$ par $\{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$ et $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\}$. Alors, d'après le lemme 2, pour tout j $(j = 0, \cdots, n)$, il existe un et un seul k_j tel que $F_j/G_{k_j} \in C_\alpha(f)$ comme dans [2, p. 113]. On dit que F_j appartient à la classe $[k_j]$. Cela veut dire que quand on représente F_j par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$, tous les coefficients sauf cels de combinaisons à la classe $[k_j]$ sont égals à zéro.

Soit α_j le nombre de combinaisons dans $\{F_j\}_{j=n+1-\lambda}^{n}$ appartenant à la classe $[j]$ $(j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha)$. Alors,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-\lambda_\alpha} = \lambda\,.$$

D'autre part, soit $F \in X$ telle que $\delta_\alpha(F) > 0$, et

$$F = a_0 F_0 + \cdots + a_{n-\lambda} F_{n-\lambda}\,. \tag{1}$$

Alors, il existe au moins une classe (soit $[j_0]$) dans les classes $[0], \cdots, [n - \lambda_\alpha]$ telle que tous les coefficients des éléments appartenant à la classe $[j_0]$ sont égals à zéro à (1).

En effet, d'abord on note que

i) $\lim_{r\to\infty} T_\alpha(r, f)/T_\alpha(r, \tilde{F}) = 1$

ii) $\lim_{r\to\infty} T_\alpha(r, \tilde{F})/T_\alpha(r, G) = 1$

où $\tilde{F} = (F_0, \cdots, F_n)$ et $G = (G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha})$.

Comme i) est visible des définitions de $T(r, f)$ et $T_\alpha(r, f)$, on démontre ii). La relation $\{G_0, \cdots, G_{n-\lambda_\alpha}\} \subset \{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\}$ entraîne que

$$T_\alpha(r, G) \leqq T_\alpha(r, \tilde{F})$$

D'autre part, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\max_{0\leqq j\leqq n} \log|F_j| &= \max_{0\leqq j\leqq n} \left(\log|G_{k_j}| + \log\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right|\right) \\
&\leqq \max_{0\leqq j\leqq n} \left(\log|G_{k_j}| + \log^+\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right|\right) \\
&\leqq \max_{0\leqq j\leqq n} (\log|G_{k_j}|) + \sum_{j=0}^{n} \log^+\left|\frac{F_j}{G_{k_j}}\right|
\end{aligned}$$

donne l'inégalite

$$T(r, \tilde{F}) \leqq T(r, G) + \sum_{j=0}^{n} m(r, F_j/G_{k_j}) + O(1)\,;$$

donc on a

$$T_\alpha(r, \tilde{F}) \leqq T_\alpha(r, G) + \sum_{j=0}^{n} T_\alpha(r, F_j/G_{k_j}) + O(1)\,.$$

Cela veut dire que

$$1 \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, G)}{T_\alpha(r, \tilde{F})}$$

parce que $F_j/G_{k_j} \in C_\alpha(f)$. On a ii).

Or, s'il existe au moins un coefficient $a_{\nu_j} \neq 0$ tel que $F_{\nu_j}/G_j \in C_\alpha(f)$ pour tout $j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha$ à (1), soient $l(j)$ le nombre des coefficients $a_{\nu_j} \neq 0$ tels que F_{ν_j}/G_j appartient à $C_\alpha(f)$ et

$$l = l(0) + l(1) + \cdots + l(n - \lambda_\alpha) \ (\leqq n + 1 - \lambda) ,$$

alors, comme $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ sont linéairement indépendantes, du lemme 1 et utilisant ii), on a

$$\delta_\alpha(F) + \sum_{a_j \neq 0} \delta_\alpha(F_j) \leqq l .$$

Par conséquent, on a

$$\delta_\alpha(F) = 0 ,$$

qui est contraire à l'hypothèse: $\delta_\alpha(F) > 0$. Cela veut dire qu'au moins une classe (soit $[j_0]$) telle que tous les coefficients a_j où $F_j/G_{j_0} \in C_\alpha(f)$ sont égals à zéro à (1).

S'il existe $\mu(> \lambda)$ combinaisons $H_1, \cdots, H_\mu$ dans X différentes de $\{F_i\}_{i=0}^n$ telles que $\delta_\alpha(H_i) > 0$ $(i = 1, \cdots, \mu)$, d'après ce qui est donné maintenant, pour chaque i, si l'on représente H_i par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$, il existe au moins une classe $[k_i]$, $0 \leqq k_i \leqq n - \lambda_\alpha$, telle que tous les coefficients de F_j appartenant à la classe $[k_i]$ sont égals à zéro. Soit β_j $(j = 0, \cdots, n - \lambda_\alpha)$ le nombre de combinaisons dans $\{H_i\}_{i=1}^\mu$ telles que tous les coefficients de F_{ν_j} où $F_{\nu_j}/G_j \in C_\alpha(f)$ sont égals à zéro. Alors,

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{n-\lambda_\alpha} \geqq \mu .$$

Comme $\mu > \lambda$, il existe au moins un j_0 tel que $\beta_{j_0} > \alpha_{j_0} (0 \leqq j_0 \leqq n - \lambda_\alpha)$. Alors, $\lambda - \alpha_{j_0} + \beta_{j_0} (\geqq \lambda + 1)$ combinaisons dans $\{F_{n+1-\lambda}, \cdots, F_n, H_1, \cdots, H_\mu\}$ admet le zéro comme coefficient d'une combinaison dans $\{F_i\}_{i=0}^{n-\lambda}$ appartenant à la classe $[j_0]$ quand on répresente par $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$. Soient $I_0, \cdots, I_\lambda$ $\lambda + 1$ telles combinaisons, alors elles sont représentées par $\{F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\} - \{G_{j_0}\}$. Cela veut dire qu'il existe $\lambda + 1$ relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre $n + 1$ combinaisons $\{I_0, \cdots, I_\lambda, F_0, \cdots, F_{n-\lambda}\} - \{G_{j_0}\}$, qui est absurde. Cela veut dire qu'il faut

$$\mu \leqq \lambda .$$

On a le résultat.

https://doi.org/10.1017/S0027763000015300 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE. *Le nombre de combinaisons F dans X qui sont exceptionnelles au sens de Borel ou $\delta(F) = 1$ est au plus égal à $n + \lambda + 1$* ($N.B.$ 4 [7]).

On obtient ce corollaire du théorème 1 en utilisant la note donnée dans §2.

$N.B.$ 1. Si le nombre de combinaisons F dans X telles que $\delta_a(F) = 1$ est au plus égal à n, le théorème 1 n'est plus vrai. Par exemple, soient $f(z)$ une fonction entière qui admet une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna, $f_0(z) = f_1(z) = \cdots = f_{n-1}(z) = f(z)$, $f_n(z) = 1$ et

$$X = \{w^n f(z) + w^{n-1} f(z) + \cdots + w f(z) + 1;\ w \neq \infty\} \cup \{f(z)\}\ .$$

Alors, il y a n combinaisons lacunaires et une infinité dénombrable de combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna dans X.

$N.B.$ 2. On peut donner quelques généralisations de ce théorème. Par exemple, quand les coefficients des combinaisons dans X sont des fonctions rationnelles, on a $\nu(f) \leqq n + \lambda_p + 1$; où λ_p est le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$.

4. Théorème de Niino-Ozawa. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde entière transcendante à trois branches. Alors, Niino et Ozawa ([3]) ont démontré le

THÉORÈME A. *Si $f(z)$ admet cinq valeurs finies et distinctes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 telles que*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta(a_i, f) + \delta(b_j, f) > 3 \qquad (j = 1, 2)\ ,$$

alors, au moins deux valeurs entre les a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 sont exceptionnelles au sens de Picard.

Dans ce paragraphe, on considère sur une généralisation de ce théorème. D'abord, on donne le

LEMME 3. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans $|z| < \infty, F_0, \cdots, F_n$, $G_1, \cdots, G_{n-1}$ $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$ telles que*

(2) $$\sum_{i=0}^{n} \delta_\alpha(F_i) + \delta_\alpha(G_j) > n+1 \qquad (j = 1, \cdots, n-1)$$

et λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Si $\lambda \geqq n-2$, alors $\lambda = n-1$ nécessairement.

Démonstration. Supposons que $\lambda = n-2$. Alors, on peut supposer que $F_0, \cdots, F_n, G_1, \cdots, G_{n-1}$ sont representées par F_0, F_1 et F_2:

$$F_i = \alpha_{0i}F_0 + \alpha_{1i}F_1 + \alpha_{2i}F_2 \quad (i = 3, \cdots, n)$$

$$G_j = \beta_{0j}F_0 + \beta_{1j}F_1 + \beta_{2j}F_2 \quad (j = 1, \cdots, n-1) .$$

D'après le lemme 1 et en utilisant que F_0, F_1 et F_2 sont linéairement indépendantes, (2) entraîne que pour tout i et j au moins un des α_{0i}, α_{1i}, α_{2i} et au moins un des $\beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}$ soient égals à zéro. D'autre part, "$\lambda = n-2$" entraîne qu'il y ait un i et un j tels que deux des α_{0i}, α_{1i}, α_{2i} et deux des $\beta_{0j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}$ sont différents de zéro et de plus $|\alpha_{ki}| + |\beta_{kj}| \neq 0\,(k = 0, 1, 2)$. Par exemple, soient $\alpha_{0i} \neq 0$, $\alpha_{1i} \neq 0$, $\beta_{1j} \neq 0$, $\beta_{2j} \neq 0$, c'est-à-dire,

(3) $$F_i = \alpha_{0i}F_0 + \alpha_{1i}F_1 + 0$$

(4) $$G_j = 0 + \beta_{1j}F_1 + \beta_{2j}F_2 .$$

En éliminant F_1 de (3) et (4), on a

$$F_i = \alpha_{0i}F_0 + (\alpha_{1i}/\beta_{1j})G_j - (\alpha_{1i}\beta_{2j}/\beta_{1j})F_2 .$$

Ici, F_0, G_j et F_2 sont linéairement indépendantes et leurs coefficients sont différents de zéro. Donc, du lemme 1, on a

$$\delta_\alpha(F_0) + \delta_\alpha(G_j) + \delta_\alpha(F_2) + \delta_\alpha(F_i) \leqq 3 .$$

D'autre part, de (2), on a

$$\delta_\alpha(F_0) + \delta_\alpha(G_j) + \delta_\alpha(F_2) + \delta_\alpha(F_i) > 3 ,$$

qui est absurde. Cela veut dire que $\lambda \geqq n-1$. Maintenant, f est transcendant, par conséquent $\lambda \leqq n-1$. C'est-à-dire, $\lambda = n-1$.

THÉORÈME 2. *Soient $f, F_0, \cdots, F_n, G_1, \cdots, G_{n-1}$ et λ comme dans le lemme 3. Si $\lambda \geqq n-2$ et $\delta_\alpha(F_0) = 1$, alors, ou bien*

1) *il y a $n-1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ (soient $F_1, \cdots, F_{n-1}$) telles que*

https://doi.org/10.1017/S0027763000015300 Published online by Cambridge University Press

$$F_i = a_i F_0 \quad (i = 1, \cdots, n-1, a_i \neq 0, \ \textit{constante})$$

et

$$G_j = b_j F_n \quad (j = 1, \cdots, n-1, b_j \neq 0, \ \textit{constante}),$$

(*par conséquent*

$$\delta_\alpha(F_i) = 1 \ (i = 1, \cdots, n-1) \quad \textit{et} \quad \delta_\alpha(F_n) = \delta_\alpha(G_j) > \frac{1}{2} \, (j = 1, \cdots, n-1)) \, ;$$

ou bien

2) $$F_i = \alpha_i F_n \ (i = 1, \cdots, n-1, \alpha_i \neq 0, \ \textit{constante}) \ ,$$

et

$$G_j = \beta_j F_0 \ (j = 1, \cdots, n-1, \beta_j \neq 0, \ \textit{constante}) \ ,$$

(*par conséquent*

$$\delta_\alpha(G_j) = 1 \ (j = 1, \cdots, n-1) \quad \textit{et} \quad \delta_\alpha(F_1) = \cdots = \delta(F_n) > 1 - \frac{1}{n}\Big) \, .$$

Démonstration. En utilisant le lemme 3, l'hypothèse "$\lambda \geqq n-2$" entraîne que $\lambda = n-1$. Par conséquent, on peut supposer que F_i et G_j sont représentées par f_0 et f_1:

$$F_i = x_i f_0 - y_i f_1 \ (i = 0, \cdots, n)$$

$$G_j = x_{n+j} f_0 - y_{n+j} f_1 \ (j = 1, \cdots, n-1)$$

Brièvement, on écrit $G_j = F_{n+j}$ $(j = 1, \cdots, n-1)$.

Soient $x_i/y_i = z_i$ $(i = 0, \cdots, 2n-1)$ et $f_1/f_0 = g$ où $z_i = \infty$ si $y_i = 0$. Alors, g est transcendante,

(5) $$\delta_\alpha(F_i) = \delta_\alpha(z_i, g) \ (i = 0, \cdots, 2n-1)$$

et $z_i = z_j$ $(i \neq j)$ signifie que $F_i/F_j =$ constante.

Or, on introduit une relation "$\sim$" entre $F_0, \cdots, F_{2n-1}$: $F_i \sim F_j$ si et seulement si $F_i/F_j =$ constante. C'est une relation équivalente dans $\{F_i\}_{i=0}^{2n-1}$. On classifie $\{F_i\}_{i=0}^{2n-1}$ par cette relation. Soient $X_p (p = 1, \cdots, c)$ toutes les classes obtenues. On démontre que $c = 2$ et chaque classe comprend n éléments. Soit X_1 la classe comprenant F_0. En utilisant (5), (2) devient

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{n} \delta_\alpha(z_i, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > n + 1 \quad (j = 1, \cdots, n-1)$$

En appliquant la proposition 4 ([6]), pour chaque j, il y a au moins un $i(j)$ tel que $z_0 = z_{i(j)}$.

Quand $z_0 = z_{n+j}(j \geqq 1)$, on peut démontrer facilement que $z_0 = z_{n+1} = \cdots = z_{2n}$ et $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$; c'est-à-dire, $c = 2$ et $X_1 = \{F_0, G_1, \cdots, G_{n-1}\}$, $X_2 = \{F_1, \cdots, F_n\}$.

Quand $z_0 \neq z_{n+j}$ $(j = 1, \cdots, n-1)$, il y a $n-1$ valeurs dans $\{z_i\}_{i=1}^n$ qui sont égales à z_0 (soient $z_1, \cdots, z_{n-1}$) et $z_n = z_{n+1} = \cdots = z_{2n-1}$. En effet, s'il n'y a que $p(\leqq n-2)$ valeurs dans $\{z_i\}_{i=1}^n$ qui sont égales à z_0 (soient $z_1, \cdots, z_p$), $F_{p+1}, \cdots, F_{2n-1}$ ne sont pas contenues dans une classe. En effet, si le contraire est vrai, $T(r, f) = O(1)$ parce que $2n - 1 - p \geqq n + 1$. C'est une contradiction à l'hypothèse. Par conséquent, il y a un j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ tel que $F_{p+1}, \cdots, F_n$, F_{n+j} ne sont pas contenues dans une classe. De (6), on a

$$(7) \qquad \delta_\alpha(z_{p+1}, g) + \cdots + \delta_\alpha(z_n, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > n - p \,.$$

Soient $\tilde{z}_i(i = 1, \cdots, l, l \geqq 2)$ les valeurs distinctes dans $\{z_{p+1}, \cdots, z_n, z_{n+j}\}$, alors, on a de (7)

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{l} \delta_\alpha(\tilde{z}_i, g) > 1 \,.$$

D'autre part, $\tilde{z}_i \neq z_0$ $(i = 1, \cdots, l)$ et $\delta_\alpha(z_0, g) = 1$. Donc, de (8) on a

$$\delta_\alpha(z_0, g) + \sum_{i=1}^{l} \delta_\alpha(\tilde{z}_i, g) > 2 \,,$$

qui est absurde. Cela veut dire que $p = n - 1$ parce que f est transcendant.

Par conséquent, on a de (6)

$$\delta_\alpha(z_0, g) + \delta_\alpha(z_n, g) + \delta_\alpha(z_{n+j}, g) > 2 \,,$$

ici, $z_0 \neq z_n$, z_{n+j} $(j = 1, \cdots, n-1)$. Cela veut dire qu'il faut que $z_n = z_{n+j}$ $(j = 1, \cdots, n-1)$:

$$z_n = z_{n+1} = \cdots = z_{2n-1} \,.$$

Donc, on a $c = 2$ et $X_1 = \{F_0, \cdots, F_{n-1}\}$, $X_2 = \{F_n, G_1, \cdots, G_{n-1}\}$. On a le résultat.

COROLLAIRE 1. *Dans le théorème 2, si* $\delta_\alpha(F_0) = \cdots = \delta_\alpha(F_n) = 1$, *on a* $\lambda = n - 1$ *et la même conclusion.*

En effet, du théorème 1, on obtient que $\lambda = n - 1$ parce que $\delta_\alpha(F_i) = 1$ $(i = 0, \cdots, n)$ et $\delta_\alpha(G_j) > 0$ $(i = 1, \cdots, n - 1)$. Donc, on a le résultat tout de suite du théorème 2.

COROLLAIRE 2. *Quand* $n = 3$, *si* F_0 *est lacunaire (resp. exceptionnelle au sens de Picard, etc.), on peut conclure qu'il y a au moins deux combinaisons lacunaires (resp. exceptionnelles au sens de Picard, etc.) dans* $\{F_1, F_2, F_3, G_1, G_2\}$ *sans restriction que* $\lambda \geqq 1$.

En effet, d'après le lemme 1, (2) entraîne que $\lambda \geqq 1 = 3 - 2$. Donc, on a le résultat tout de suite du théorème 2.

N.B. Ce corollaire contient une amériolation du théorème A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fontions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5–31.

[2] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[3] K. Niino et M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function, Kôdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 98–113.

[4] N. Toda, Sur la croissance de fonctions algébroïdes à valeurs déficientes, Kôdai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 324–337.

[5] N. Toda, Sur les combinaison exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 290–319.

[6] N. Toda, On a modified deficiency of meromorphic functions, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 635–658.

[7] N. Toda, Le défaut modifié de systèmes et ses applications, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 491–524.

Université de Nagoya