

## PROPRIÉTÉS LOCALES DES CHIFFRES DES NOMBRES PREMIERS

BRUNO MARTIN<sup>1</sup>, CHRISTIAN MAUDUIT<sup>2</sup> ET JOËL RIVAT<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Univ. du Littoral-Côte-d'Opale, EA 2797 – LMPA – Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph-Liouville, 62228 Calais, France*  
([martin@lmpa.univ-littoral.fr](mailto:martin@lmpa.univ-littoral.fr))

<sup>2</sup>*Université d'Aix-Marseille et Institut Universitaire de France, Institut de mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France* ([mauduit@iml.univ-mrs.fr](mailto:mauduit@iml.univ-mrs.fr))

<sup>3</sup>*Université d'Aix-Marseille, Institut de mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France*  
([rivat@iml.univ-mrs.fr](mailto:rivat@iml.univ-mrs.fr))

(Reçu le 20 mars 2016; révisé le 28 septembre 2016; accepté le 2 octobre 2016;  
première publication en ligne le 4 avril 2017)

*Résumé* Soit  $b$  un nombre entier supérieur ou égal à 2. Nous donnons une formule asymptotique pour la somme d'exponentielles

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} \exp(2i\pi\beta p),$$

où la sommation est effectuée sur les nombres premiers  $p$ , et où  $\beta$  est un nombre réel,  $k$  un nombre entier et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction fortement  $b$ -additive telle que  $\text{pgcd}(g(1), \dots, g(b-1)) = 1$ .

*Abstract* Let  $b$  be an integer larger than 1. We give an asymptotic formula for the exponential sum

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} \exp(2i\pi\beta p),$$

where the summation runs over prime numbers  $p$  and where  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , and  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  is a strongly  $b$ -additive function such that  $\text{pgcd}(g(1), \dots, g(b-1)) = 1$ .

*Keywords:* prime numbers; exponential sums;  $b$ -additive functions; uniform distribution modulo 1

2010 *Mathematics subject classification:* 11A63; 11J71; 11K65; 11L20; 11N05

Ce travail a bénéficié des aides de l'Agence nationale de la recherche portant les références « ANR-14-CE34-0009 » MUDERA, de Ciência sem Fronteiras, projet PVE 407308/2013-0, et du projet d'échange DynEurBraz (FP7 Irses 230844).

**1. Introduction**

**1.1. Rappels et notations**

Dans cet article,  $b$  est un nombre entier supérieur ou égal à 2 et  $p$  désigne systématiquement un nombre premier, tandis que  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers. On note

$$\mathcal{C}_b = \{0, \dots, b - 1\}$$

et  $\log_b$  la fonction logarithme en base  $b$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\pi(x)$  désigne le nombre de nombres premiers n'excédant pas  $x$ . Le théorème des nombres premiers stipule que l'on a pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Il résulte du mémoire [21] de Vinogradov de 1947 (voir notes du chapitre XI de [22] p. 180) que pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , la suite  $(\beta p)_{p \in \mathcal{P}}$  est équirépartie modulo 1. On en trouvera une preuve complète par exemple dans [11] (théorème 21.3, p. 489). Le critère de Weyl (cf. [14], théorème 2.1 par exemple) donne la formulation équivalente suivante : pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\sum_{p \leq x} e(\beta p) = o(\pi(x)). \tag{1}$$

Nous désignons par  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\lceil x \rceil$  et  $\{x\}$  respectivement la partie entière inférieure, supérieure et la partie fractionnaire de  $x$ . On note également  $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ , autrement dit  $\|x\|$  est la distance de  $x$  au nombre entier le plus proche. Nous employons la notation  $e(x) = e^{2i\pi x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $A$  est un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ ,  $\mathbb{1}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ . Si  $f$  est une fonction à valeurs complexes et  $g$  une fonction à valeurs réelles strictement positives, la notation  $f \ll g$  signifie que le rapport  $|f|/g$  est borné.

**1.2. Fonctions fortement  $b$ -additives**

Rappelons que tout nombre entier  $n \geq 1$  possède un unique développement en base  $b$  de la forme

$$n = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j(n) b^j, \text{ où } \varepsilon_j(n) \in \mathcal{C}_b \text{ pour tout } j \geq 0.$$

On dit qu'une fonction  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $b$ -additive si pour tout  $(u, v, j) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $v < b^j$ , on a

$$g(ub^j + v) = g(ub^j) + g(v).$$

Si de plus pour tout  $(u, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $g(ub^j) = g(u)$ , la fonction  $g$  est dite fortement  $b$ -additive. On constate ainsi qu'une fonction  $g$  est fortement  $b$ -additive si et seulement si

$$g(0) = 0, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, g\left(\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j(n) b^j\right) = \sum_{j \geq 0} g(\varepsilon_j(n)).$$

En particulier, si l'on pose pour tout  $k \in \{0, \dots, b - 1\}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|n|_k = \text{card}\{0 \leq j \leq \log_b n \mid \varepsilon_j(n) = k\},$$

on a

$$g(n) = \sum_{k=1}^{b-1} g(k)|n|_k.$$

Les quantités

$$\mu_g := \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{q-1} g(k) \quad \text{et} \quad \sigma_g^2 := \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{q-1} (g(k) - \mu_g)^2$$

interviennent dans plusieurs résultats relatifs à la distribution de la fonction  $g$ . Dans l'article [16] qui fait suite à [15] et qui généralise [18], nous nous intéressons aux fonctions fortement additives de l'ensemble  $\mathcal{F}^+$  des fonctions  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  fortement  $b$ -additives vérifiant la condition additionnelle

$$\text{pgcd}(g(1), \dots, g(b-1)) = 1. \tag{2}$$

Pour  $g \in \mathcal{F}^+$ , on définit le nombre

$$d_g = \text{pgcd}(g(2) - 2g(1), \dots, g(b-1) - (b-1)g(1), b-1), \tag{3}$$

appelé entier caractéristique de  $g$ . Avec cette définition,  $(d_g, g(1)) = 1$  et on a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$g(n) \equiv g(1)n \pmod{d_g}. \tag{4}$$

**Exemples 1.** (1) La fonction somme des chiffres en base  $b$  définie par

$$s_b(n) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j(n)$$

est fortement  $b$ -additive. On a

$$\mu_{s_b} = \frac{b-1}{2}, \quad \sigma_{s_b}^2 = \frac{b^2-1}{12} \quad \text{et} \quad d_{s_b} = q-1.$$

(2) Pour chaque  $k \in \{1, \dots, b-1\}$ , la fonction  $g_k : n \mapsto |n|_k$  est fortement  $b$ -additive. On a

$$\mu_{g_k} = \frac{1}{b}, \quad \sigma_{g_k}^2 = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{b}\right) \quad \text{et} \quad d_{g_k} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = 3 \text{ et } k = 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons obtenu le résultat suivant (théorème 1 de [16]).

**Théorème A.** Soit  $g \in \mathcal{F}^+$ , alors il existe  $c_g > 0$  tel que pour tous  $x \geq 2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) \ll (\log x)^3 x^{1-c_g \|d_g \alpha\|^2}.$$

La constante implicite ne dépend que de  $b$ .

**1.3. Résultat principal**

Soit  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $g$  une fonction fortement  $b$ -additive appartenant à  $\mathcal{F}^+$ . L'objet de cet article est d'estimer la somme d'exponentielles

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} e(\beta p), \tag{5}$$

lorsque  $k$  est un nombre entier proche de  $\mu_g \log_b x$ . Dans [7], Drmota, Mauduit et Rivat ont évalué la somme (5) dans le cas particulier où  $\beta = 0$  et  $g = s_b$ , qui correspond au cardinal de l'ensemble  $\{p \leq x \mid s_b(p) = k\}$ . En combinant le théorème A et leur approche, il est possible d'obtenir une formule asymptotique pour la somme (5) dans le cas où  $\beta \in \mathbb{Q}$  et  $g \in \mathcal{F}^+$  avec un terme d'erreur dépendant de  $q$  si  $\beta = a/q$  avec  $(a, q) = 1$ . Mais leur méthode ne permet ni de traiter le cas où  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ni d'obtenir une formule uniforme en  $\beta$ , ce qui constitue l'objectif principal de notre travail. Nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 1.** *Soit  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$  et  $g \in \mathcal{F}^+$ . Pour tous  $x \geq 2$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} e(\beta p) &= \frac{d_g}{\sqrt{2\pi \sigma_g^2 \log_b x}} \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ g(1)p \equiv k \pmod{d_g}} e(\beta p) \right) \exp \left( -\frac{(k - \mu_g \log_b x)^2}{2\sigma_g^2 \log_b x} \right) \\ &+ O \left( \frac{\pi(x)}{(\log x)^{1-\varepsilon}} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

où  $d_g$  est l'entier caractéristique de  $g$  défini en (3). La constante implicite ne dépend que de  $\varepsilon$ ,  $b$  et  $g$ .

**Remarque 1.** le théorème 1 n'est intéressant que si  $(k, d_g) = 1$  puisque d'après (4), on a

$$\{p \leq x \mid g(p) = k\} \subseteq \{p \leq x \mid g(1)p \equiv k \pmod{d_g}\}. \tag{7}$$

**Remarque 2.** Le fait de traiter le cas où  $g \in \mathcal{F}^+$  ne restreint pas la généralité. En effet, si  $k \in \mathbb{Z}$  et si  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  est fortement  $b$ -additive et non nulle, l'équation  $g(p) = k$  n'admet de solutions que si  $D = \text{pgcd}(g(1), \dots, g(b-1))$  divise  $k$ . Et dans ce cas, cette équation est équivalente à  $g'(p) = k'$  avec  $g' = g/D$  et  $k' = k/D$ ,  $g'$  étant de fait un élément de  $\mathcal{F}^+$ .

**1.4. Une application**

En s'appuyant sur des résultats obtenus par Mauduit et Sárközy dans [19], Fouvry et Mauduit étudient dans [8] la répartition statistique des nombres entiers dont la somme des chiffres est proche de la moyenne : ils considèrent l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid s_b(n) = \mu_{s_b} \lfloor \log_b n \rfloor + B(\lfloor \log_b n \rfloor)\},$$

où  $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{q-1}{2}j + B(j) \in \mathbb{N}$  et telle que

$$\text{il existe } K > 0 \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, |B(n)| \leq Kn^{1/4}. \tag{8}$$

Le théorème 1.1 de [8] stipule que pour tout  $x \geq 2$ , on a

$$\text{card}\{n \leq x \mid n \in \mathcal{E}\} = \sqrt{\frac{6}{\pi(b^2 - 1)}} \frac{x}{\sqrt{\log_b x}} + O\left(\frac{x}{\log_b x}\right), \tag{9}$$

où la constante implicite ne dépend que de  $K$  et  $b$ . Ils établissent également le résultat suivant.

**Théorème B.** *Pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , la suite  $(n\beta)_{n \in \mathcal{E}}$  est équirépartie modulo 1.*

Des généralisations de ces résultats sont obtenues par Mauduit [17] et Drmota et Mauduit [6]. Le théorème 2 de [6] permet par exemple de montrer qu'étant donné  $g \in \mathcal{F}^+$ , pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , la suite  $(\beta n)$  indexée par les nombres entiers  $n$  tels que  $g(n) = \lfloor \mu_g \log_b n \rfloor$  est équirépartie modulo 1, ce qui découle d'ailleurs directement du théorème B dans les cas particuliers où  $g = s_2$  et  $g = s_3$ . Le théorème 1 permet d'établir un résultat similaire pour les nombres premiers.

**Corollaire 1.** *Soit  $g \in \mathcal{F}^+$  et  $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid g(n) = \lfloor \mu_g \log_b n \rfloor\}$ . Pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , la suite  $(\beta p)_{p \in \mathcal{M}}$  est équirépartie modulo 1.*

**Remarque 3.** Les nombres premiers étant trivialement mal répartis dans les progressions arithmétiques, le théorème B ne peut pas être directement transposé à la suite des nombres premiers. Par exemple, si l'on considère la fonction  $g = s_3$  et la fonction  $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $B(2j) = 0$  et  $B(2j + 1) = 1$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que  $s_3(p) = \lfloor \mu_{s_3} \log_3 p \rfloor + B(\lfloor \log_3 p \rfloor) = \lfloor \log_3 p \rfloor + B(\lfloor \log_3 p \rfloor)$  est vide car  $s_3(p) \equiv p \pmod 2$ .

**1.5. Nombres premiers dont certains chiffres sont fixés**

Fixons  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$  et  $j_1 < \dots < j_r$  des nombres entiers. Lors de la démonstration du théorème 1, l'évaluation de la quantité

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) := \sum_{\substack{p \leq x \\ \varepsilon_{j_1}(p) = \ell_1, \dots, \varepsilon_{j_r}(p) = \ell_r}} e(\beta p) \tag{10}$$

joue un rôle déterminant. Lorsque  $\beta = 0$ ,  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$  est égal au cardinal des nombres premiers n'excédant pas  $x$  dont  $r$  chiffres sont fixés. Dans [10], Harman et Kátai ont estimé ce cardinal lorsque  $r = O(\sqrt{v}/\log v)$  avec  $v = \lfloor \log_b x \rfloor$  (voir également [9, 23]). Bourgain a récemment obtenu un résultat pratiquement optimal en montrant dans [3] et [4] le théorème suivant qui concerne la base 2.

**Théorème C.** *Pour  $b = 2$ , il existe  $c > 0$ , tel que pour  $x = 2^v$ ,  $v \rightarrow +\infty$  et tous nombres entiers  $1 \leq r \leq cv$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_r < v$ ,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \{0, 1\}^r$ , on a*

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; 0) \sim \frac{\pi(x)}{2^r}.$$

Il est naturel de conjecturer que sous les mêmes conditions, et pour  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , on a

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) = o\left(\frac{\pi(x)}{2^r}\right).$$

Notre méthode ne permet pas de montrer un tel résultat, mais en revanche, le résultat plus faible suivant découle de nos travaux.

**Théorème 2.** Soit  $0 < \kappa < \nu < 1$  des nombres réels et  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Pour  $x \rightarrow +\infty$ , on a uniformément pour tous nombres entiers  $r, j_1, \dots, j_r$  tels que  $1 \leq r \leq (\log_b x)^\kappa, (\log_b x)^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq \log_b x - (\log_b x)^\nu$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ ,

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) = o\left(\frac{\pi(x)}{b^r}\right). \tag{11}$$

**Remarque 4.** Nous n’avons pas cherché dans cet article à étendre la relation (11) à toutes les valeurs admissibles de  $j_1, \dots, j_r$  ou à optimiser la valeur de  $r$ . Nous signalons par ailleurs que le théorème 1 n’est pas une conséquence du théorème 2 qui ne concerne que le cas où  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  : nous renvoyons au paragraphe 2 pour plus de précisions. En revanche, les théorèmes 1 et 2 découlent tous deux d’une même formule asymptotique pour la quantité (10), obtenue à la proposition 3.

## 2. Description de la preuve du théorème 1

L’identité

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} e(\beta p) = \int_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} \left( \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) \right) e(-k\alpha) d\alpha \tag{12}$$

montre que pour établir le théorème 1, il suffit de disposer d’estimations suffisamment précises de la somme

$$\sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p). \tag{13}$$

Posons

$$I = \bigcup_{n=0}^{d_g-1} \left] \frac{n}{d_g} - (\log x)^{\eta-1/2}, \frac{n}{d_g} + (\log x)^{\eta-1/2} \right[$$

où  $0 < \eta < 1/2$  est un nombre réel à fixer ultérieurement. La contribution à l’intégrale figurant dans (12) du domaine  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus I$  pourra être estimée grâce au théorème A et fournira un terme d’erreur. Pour évaluer la contribution de  $I$  et aboutir au théorème 1, il suffit d’obtenir une formule asymptotique pour la quantité (13) dans un voisinage de  $\alpha = 0$ . C’est l’objet de la proposition suivante qui généralise la proposition 2.2 de [7].

**Proposition 1.** Soit  $g \in \mathcal{F}^+, 0 < \nu < 1/3$  et  $0 < \eta < \nu/2$ . Pour tous  $x \geq 2, |\alpha| \leq (\log x)^{\eta-1/2}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) &= \left( \sum_{p \leq x} e(\beta p) \right) e(\alpha \mu_g \log_b x) \left( e^{-2\pi^2 \alpha^2 \sigma_g^2 \log_b x} (1 + O(|\alpha|^3 \log x)) \right. \\ &\quad \left. + O(\pi(x) |\alpha| (\log x)^\nu + x e^{-c_1 (\log_b x)^\nu}) \right), \end{aligned} \tag{14}$$

avec

$$c_1 = (\log b)/8.$$

Les constantes implicites ne dépendent que de  $v, \eta$  et  $g$ .

**Remarque 5.** Le théorème A et la proposition 1, combinés à l'estimation (1), permettent d'établir rapidement que pour  $g \in \mathcal{F}^+, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $x \rightarrow +\infty$ , on a la relation asymptotique

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left| \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) \right| = o(\pi(x)).$$

Nous omettons les détails.

La démonstration de la proposition 1 est difficile et fait l'objet des paragraphes 3 à 10. Elle repose sur la modélisation de la suite de fonctions  $(n \mapsto \varepsilon_j(n))_{j \geq 0}$  par une suite  $(Z_j)_{j \geq 0}$  de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur  $\{0, \dots, b - 1\}$ . Dans [12], Kátai exploite cette idée dans le but d'étudier les moments de la fonction  $s_b$  le long de la suite des nombres premiers. Dans [1], Bassily et Kátai poursuivent cette approche probabiliste et appliquent la méthode dite des moments (cf. par exemple [2], théorème 30.2, p. 390) à une version tronquée de la fonction  $s_b$  pour établir plusieurs phénomènes de convergence en loi vers une loi normale centrée réduite : ils obtiennent par exemple que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{card} \left\{ p \leq x \mid \frac{s_b(p) - \mu_{s_b} \log_b x}{\sigma_{s_b}^2 \log_b x} \leq y \right\} = \int_{-\infty}^y \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Cette approche fructueuse, connue maintenant sous le nom de méthode de Bassily-Kátai, a été approfondie au fil des ans. Dans le paragraphe 4 de [7], Drmota, Mauduit et Rivat en développent une variante qui permet d'établir le cas  $\beta = 0$  de la proposition 1. La généralisation au cas  $\beta \neq 0$  induit une difficulté nouvelle que nous décrivons plus bas et que nous traitons en introduisant de nouveaux arguments de nature probabiliste. Pour un survol détaillé des liens entre l'étude des fonctions  $b$ -additives et la théorie des probabilités, ainsi que de nombreuses références, on pourra consulter le chapitre 8.3 de [5].

Dans le souci d'alléger notre démonstration, nous adoptons des notations et normalisations similaires à celles de [7], ce qui nous permettra d'en extraire rapidement certaines estimations essentielles à nos calculs. En particulier, nous posons maintenant et dans la suite

$$L = L(x) = \log_b x. \tag{15}$$

De plus, nous utiliserons de manière systématique la notation suivante : pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose

$$S(x; \theta) = \sum_{p \leq x} e(\theta p). \tag{16}$$

Fixons des nombres réels  $\eta$  et  $\nu$  tels que  $0 < 2\eta < \nu < 1/3$  et commençons par remarquer que pour obtenir (14), il suffit d'établir la formule

$$T(x; t, \beta) := \sum_{p \leq x} e(\beta p) e^{it(g(p) - \mu_g L) / (\sigma_g \sqrt{L})}$$

$$= S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{L}}\right) \right) \right) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{L^{1/2-\nu}} + x e^{-c_1 L^\nu}\right) \tag{17}$$

uniformément pour tous  $x \geq 2$  et  $|t| \leq 2\pi\sigma_g L^\eta$ . En effet, la formule (14) se déduit de (17) en effectuant le changement de variable  $t = 2\pi\alpha\sigma_g L^{1/2}$ . À présent, posons pour tout nombre entier  $n \leq x$ ,

$$g_\nu(n) = \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} g(\varepsilon_j(n)) \tag{18}$$

et notons

$$L' = \text{card}\{j \in \mathbb{N} \mid L^\nu \leq j \leq L - L^\nu\} = L - 2L^\nu + O(1). \tag{19}$$

En utilisant la majoration  $|e^{is} - e^{it}| \leq |s - t|$  valable pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , on peut facilement obtenir (cf. démonstration du lemme 4.1 de [7] pour les détails)

$$T(x; t, \beta) = T_\nu(x; t, \beta) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{(\log x)^{1/2-\nu}}\right),$$

avec

$$T_\nu(x; t, \beta) = \sum_{p \leq x} e(\beta p) e^{it(g_\nu(p) - \mu_g L') / (\sigma_g \sqrt{L'})}.$$

De sorte qu'il nous suffit d'établir la formule asymptotique :

$$T_\nu(x; t, \beta) = S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{L'}}\right) \right) \right) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{L'^{1/2-\nu}} + x e^{-c_1 L'^\nu}\right). \tag{20}$$

Dans le cas où  $\beta = 0$ , cette formule peut être comprise et démontrée dans le cadre de la théorie des probabilités : la fonction  $\varphi_1 : t \mapsto T_\nu(x; t, 0) / \pi(x)$  correspond à la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $X_x : p \mapsto (g_\nu(p) - \mu_g L') / (\sigma_g \sqrt{L'})$  définie sur l'espace  $\{p \leq x\}$  muni de la mesure uniforme. Or, on s'attend à ce que la distribution de  $g_\nu$  soit bien approchée par celle de la variable aléatoire

$$\bar{g}_\nu = \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} g(Z_j),$$

où  $(Z_j)_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathcal{C}_b$  et de loi uniforme sur  $\mathcal{C}_b$ . Posons alors  $Y_x = (\bar{g}_\nu - \mu_g L') / (\sigma_g \sqrt{L'})$  et notons  $\varphi_2$  sa fonction caractéristique. En comparant les moments de  $X_x$  et  $Y_x$ , on peut établir que  $\varphi_1$  est bien approchée par  $\varphi_2$  sous réserve que  $|t| \ll L^\eta$ . On utilise enfin le fait classique que  $\varphi_2$  est bien approchée par la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite  $t \mapsto e^{-t^2/2}$ . Plus précisément, la méthode des moments préconise *stricto sensu* d'établir que pour chaque nombre entier  $d \geq 1$  fixé, on a, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\mathbb{E}(X_x^d) = \mathbb{E}(Y_x^d) + o(1), \tag{21}$$



afin d'en déduire la convergence en loi de  $X_x$  vers une loi normale centrée réduite : c'est l'approche développée par Bassily et Kátai dans [1]. Mais cette estimation est insuffisante pour établir la formule (20) dans le cas où  $\beta = 0$ . Drmota, Mauduit et Rivat établissent ainsi une version uniforme de (21) lorsque  $g = s_b$  (cf. lemme 4.6 de [7]) : il existe  $c > 0$  tel que l'on a uniformément pour tous  $x \geq 2$  et  $1 \leq d \leq L'$ ,

$$\mathbb{E}(X_x^d) = \mathbb{E}(Y_x^d) + O((4b\sigma_{s_b}^{-1})^d L^{(\frac{1}{2}+\nu)d} e^{-cL^\nu}).$$

Cette version uniforme permet d'obtenir, grâce à la formule de Taylor, la majoration de  $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$  recherchée (cf. proposition 4.1 de [7]).

Dans le cas plus général où  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'interprétation probabiliste qui précède n'est plus valable mais sert de fil conducteur pour les calculs. Dans les lignes qui suivent, qui n'ont qu'une valeur heuristique, les quantités  $R_j$  avec  $j \in \{1, 2, \dots\}$  sont à concevoir comme des termes d'erreur. Le développement de Taylor de  $u \mapsto e^{iu}$  en 0 à un ordre  $D = D(x)$  fournit la formule

$$T_\nu(x; t, \beta) = \sum_{0 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} M_d(x; \beta) + R_1(x, D) \tag{22}$$

où

$$M_d(x; \beta) = \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( \frac{g_\nu(p) - \mu_g L'}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d = \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} \frac{g(\varepsilon_j(p)) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d. \tag{23}$$

La quantité  $M_d(x; \beta)/\pi(x)$  peut être vue comme un moment pondéré de la variable aléatoire  $X_x$ . En développant, nous obtenons

$$M_d(x; \beta) = \sum_{L^\nu \leq j_1, \dots, j_d \leq L-L^\nu} \sum_{\ell_1, \dots, \ell_d \in \mathcal{C}_b} w_{\ell_1} \dots w_{\ell_d} F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta), \tag{24}$$

où l'on a posé  $w_\ell = (\ell - \mu_g)/\sigma_g \sqrt{L'}$  et où  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$  est défini en (10). Quitte à réarranger la multi-somme sur  $j_1, \dots, j_d$  dans (24), on peut supposer dans la suite de ce paragraphe que les uplets  $(j_1, \dots, j_d)$  considérés satisfont à  $j_1 < \dots < j_d$ . Nous approchons ensuite chaque fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_j(n) = \ell\}}$  par une fonction lipschitzienne  $f_{\ell, \Delta}$  affine par morceaux et telle que  $0 \leq f_{\ell, \Delta} \leq 1$ , où  $\Delta = \Delta(x)$  est un paramètre mesurant la précision de cette approximation et qui est choisi de manière à ce que  $D\Delta \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$ . Il s'avère que la fonction  $f_{\ell, \Delta}$  admet un développement en série de Fourier absolument convergent  $f_{\ell, \Delta}(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell, \Delta}(h) e(hx)$  où la fonction  $h \mapsto \widehat{f}_{\ell, \Delta}(h)$  est à support dans  $(\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$  et où  $\widehat{f}_{\ell, \Delta}(0) = 1/b$ . Nous parvenons ainsi à la formule

$$\begin{aligned} & F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta) \\ &= \sum_{h_1, \dots, h_d \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \dots \widehat{f}_{\ell_d, \Delta}(h_d) S \left( x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}} \right) + R_2(x, \Delta, D). \end{aligned} \tag{25}$$

Lorsque  $\beta = 0$ , le terme correspondant à  $h_1 = \dots = h_d = 0$  dans la somme figurant dans (25) fournit un terme principal (qui vaut  $\pi(x)/b^d$ ). En effet, si  $\theta = \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}}$  avec

l'un des  $h_j$  non divisible par  $b$ , on a  $\theta = a/q$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, q) = 1$  et  $b^{cL^v} \leq q \leq b^{L-L^v}$  où  $c > 0$  dépend de  $b$ . Signalons au passage que cet encadrement de  $q$  est ce qui motive initialement le choix de  $g_v$ . La majoration (41) montre alors que la quantité  $S(x; \theta)$  est négligeable. Il reste ensuite à évaluer soigneusement la contribution du terme principal à  $T_v(x; t, 0)$ . Nous venons de décrire l'argument central utilisé dans [7] pour parvenir à la proposition 1 dans le cas où  $\beta = 0$  et  $g = s_b$ . Il pourrait être étendu au cas où  $\beta \in \mathbb{Q}$  et  $g \in \mathcal{F}^+$ .

Lorsque  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ce raisonnement n'est plus valide, car on ne dispose pas de suffisamment d'informations sur les approximations diophantiennes de  $\beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}}$ . Rien ne garantit par exemple que le terme correspondant à  $h_1 = \dots = h_d = 0$  dominera la somme figurant dans (25). Nous procédons de la manière suivante. Pour commencer, nous remarquons que nous pouvons tronquer sans dommage la série figurant dans (25) : en choisissant  $H = H(x) \geq 1$  tel que  $\Delta H$  tende vers l'infini avec  $x$ , on parvient à

$$\begin{aligned}
 &F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta) \\
 &= \sum_{\substack{h_1, \dots, h_d \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\} \\ -H \leq h_1, \dots, h_d \leq H}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_d, \Delta}(h_d) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}}\right) \\
 &+ R_3(x, \Delta, H, D).
 \end{aligned}$$

Il est possible de choisir  $H$  de manière à ce que  $HL^{-v}$  tende vers 0 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . De la sorte, pour  $1 \leq d \leq D$ ,  $L^v \leq j_1 < \dots < j_d \leq L - L^v$  et  $h_1, \dots, h_d \in ((\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}) \cap [-H, H]$ , les nombres de la forme

$$\beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}}$$

décrivent un ensemble que nous notons  $\Gamma_\beta$ , dont le diamètre tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini. On peut montrer alors que pour  $x$  suffisamment grand, il y a au plus un de ces nombres, que l'on note  $\tilde{\beta}$ , qui est bien approché par un nombre rationnel à dénominateur « petit » et dont la contribution  $S(x; \tilde{\beta})$  à  $F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta)$  peut être substantielle. En traitant à part la contribution de ce terme éventuel, on peut aboutir assez rapidement au théorème 2, soit pour  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta) = o\left(\frac{\pi(x)}{2^d}\right). \tag{26}$$

La proposition 1 ne résulte pas directement de la relation (26) et la contribution à  $F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta)$  de  $S(x; \tilde{\beta})$  doit être traitée plus finement. Introduisant  $\tilde{m} \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$  et  $L^v \leq \tilde{j} \leq L - L^v$  des nombres entiers tels que  $\tilde{\beta} = \beta + \tilde{m}/2^{\tilde{j}+1}$ , nous parvenons à

$$\begin{aligned}
 F_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(x; \beta) &= S(x; \tilde{\beta}) \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_d \leq H \\ \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}} = \tilde{\beta}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_d, \Delta}(h_d) + R_4(x, H, \Delta, D, v) \\
 &= S(x; \tilde{\beta}) \rho_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(\tilde{m}/2^{\tilde{j}+1}, \Delta) + R_5(x, H, \Delta, D, v)
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\rho_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta) = \sum_{\substack{h_1, \dots, h_d \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cup \{0\} \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}} = \frac{\tilde{m}}{2^{\tilde{J}+1}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_d, \Delta}(h_d).$$

Lorsque  $\tilde{\beta} = \beta$ , le coefficient  $\rho_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta)$  vaut tout simplement  $b^{-d}$  et la suite de la démonstration est essentiellement similaire au cas où  $\beta = 0$  traité dans [7]. Lorsque  $\tilde{\beta} \neq \beta$ , nous obtenons une représentation intégrale du coefficient  $\rho_{j_1, \dots, j_d}^{\ell_1, \dots, \ell_d}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta)$  et cela permet, après calculs, d'approcher la contribution de  $\tilde{\beta}$  à  $T(x; t, \beta)$  par la quantité

$$S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 \mathbb{E}_u(e^{it(Y_u - \tilde{Y}_u)})e(-\tilde{m}u) du \tag{27}$$

où, pour tout  $u \geq 1$ ,  $Y_u$  et  $\tilde{Y}_u$  sont des variables aléatoires définies sur un espace  $\Omega_u$ , et dont les lois sont fonctions de  $u$  et seront explicitées ultérieurement. Une majoration simple de la variable  $Y_u - \tilde{Y}_u$  permet alors de montrer que la quantité (27) est uniformément  $\ll |t|\pi(x)/\sqrt{\log x}$ , ce qui est suffisant pour conclure.

Sans rentrer ici dans le détail des définitions de  $Y_u$  et  $\tilde{Y}_u$ , disons que l'on peut interpréter cette majoration de  $Y_u - \tilde{Y}_u$  comme le reflet du fait suivant : lorsque  $\tilde{\beta} \neq \beta$ , pour  $d$  fixé, les différentes représentations de  $\tilde{\beta}$  sous la forme

$$\tilde{\beta} = \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_d}{b^{j_d+1}}$$

ont toutes en commun un nombre entier  $s \in \{1, \dots, d\}$  pour lequel  $j_s = \tilde{j}$  (cf. deuxième assertion du lemme 7). On s'attend donc à un gain de l'ordre de  $\log x$  puisque la multi-somme dans (24) sur  $j_1, \dots, j_d$  comportera une somme en moins lorsqu'il s'agira d'estimer la contribution de  $\tilde{\beta}$ . Néanmoins, une majoration brutale, basée sur cette seule observation, ne conduit qu'à une estimation pire que triviale de  $T_v(x; t, \beta)$ .

### 3. Lissage des conditions digitales

Dans ce paragraphe, nous approchons la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_j(n) = \ell\}}$  par une fonction continue et affine par morceaux. Nous employons la même fonction que celle employée dans [7] et déjà utilisée dans [13]. Pour  $\Delta > 0$  et  $\ell \in \mathcal{C}_b$ , nous posons

$$f_{\ell, \Delta}(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \mathbb{1}_{[\ell/b, (\ell+1)/b]}(\{x+y\}) dy.$$

D'après la définition de  $f_{\ell, \Delta}$ , qui est le produit de convolution de deux fonctions indicatrices, nous avons pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathcal{C}_b$ ,

$$0 \leq f_{\ell, \Delta}(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=0}^{b-1} f_{\ell, \Delta}(x) = 1. \tag{28}$$

De plus, on a

$$f_{\ell, \Delta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[ \frac{\ell}{b} + \Delta, \frac{\ell+1}{b} - \Delta \right], \\ 0 & \text{si } x \in [0; 1] \setminus \left[ \frac{\ell}{b} - \Delta, \frac{\ell+1}{b} + \Delta \right]. \end{cases} \tag{29}$$

**Remarque 6.** Les relations (28) montrent qu'à  $x$  fixé, la suite  $(f_{\ell,\Delta}(x))_{\ell \in \mathcal{C}_b}$  engendre une probabilité sur  $\mathcal{C}_b$ . Ce fait s'avérera capital dans la suite de nos calculs (cf. formule (63)).

Comme  $f_{\ell,\Delta}$  est lipschitzienne, elle admet un développement en série de Fourier absolument convergent. Il est donné par

$$f_{\ell,\Delta}(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell,\Delta}(h) e(hx) \tag{30}$$

avec

$$\widehat{f}_{\ell,\Delta}(0) = \frac{1}{b}$$

et pour  $h \neq 0$ ,

$$\widehat{f}_{\ell,\Delta}(h) = \frac{e(-h\ell/b) - e(-h(\ell + 1)/b)}{2i\pi h} \cdot \frac{\sin(\pi h\Delta)}{\pi h\Delta}.$$

En particulier,

$$\widehat{f}_{\ell,\Delta}(h) = 0 \text{ pour tout nombre entier } h \text{ non nul et divisible par } b, \tag{31}$$

et pour tout  $h \in \mathbb{Z}^*$ , on a

$$|\widehat{f}_{\ell,\Delta}(h)| \leq \min\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{\pi|h|}, \frac{1}{\Delta\pi^2 h^2}\right). \tag{32}$$

Il résulte notamment de (32) la majoration uniforme pour  $\ell \in \mathbb{Z}$  et  $0 < \Delta \leq 1$ ,

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_{\ell,\Delta}(h)| \ll 1 + \log(1/\Delta). \tag{33}$$

Rappelons la notation  $L$  en (15). Dans la suite, on se donne quatre nombres réels  $\kappa, \kappa_1, \nu_1, \nu$  tels que

$$0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu,$$

et nous posons

$$H = H(x) = b^{L^{\nu_1}} \quad \text{et} \quad \Delta = \Delta(x) = e^{-L^{\kappa_1}}. \tag{34}$$

**Lemme 1.** *Il existe  $x_0 = x_0(b, \kappa, \kappa_1, \nu_1) \geq 1$  tel que uniformément pour tous  $x \geq x_0$ ,  $1 \leq r \leq L^\kappa$ ,  $(y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^r$ ,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$  et  $V$  une partie de  $\mathbb{Z}^r$ , on a*

$$\begin{aligned} & \sum_{(h_1, \dots, h_r) \in V} \widehat{f}_{\ell_1,\Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r,\Delta}(h_r) e(h_1 y_1 + \cdots + h_r y_r) \\ &= \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ (h_1, \dots, h_r) \in V}} \widehat{f}_{\ell_1,\Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r,\Delta}(h_r) e(h_1 y_1 + \cdots + h_r y_r) + O(e^{-c_2 L^{\nu_1}}), \end{aligned} \tag{35}$$

avec  $c_2 = \log(b)/2$ . La constante implicite est absolue.

**Démonstration.** D'après les estimations (32) et (33), l'écart entre les deux multi-sommes figurant dans l'identité (35) n'excède pas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z} \\ |h_i| > H}} |\widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r)| &\ll r(1 + \log(1/\Delta))^{r-1} \sum_{h > H} \frac{1}{\Delta h^2} \\ &\ll L^\kappa (L^{\kappa_1})^{L^\kappa} (\Delta H)^{-1} \\ &\ll e^{\kappa \log L + \kappa_1 L^\kappa \log L + L^{\kappa_1} - L^{\nu_1} \log b}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation attendue pour  $L = \log_b x$  suffisamment grand puisque  $\nu_1 > \kappa_1 > \kappa$ . □

La proposition suivante exprime, à un terme d'erreur près, la quantité  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$  définie en (10) comme une combinaison linéaire de sommes du type  $S(x; \theta)$  définies en (16).

**Proposition 2.** *Soit  $0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu < 1$ . Il existe  $x_0 = x_0(b, \kappa, \kappa_1, \nu_1, \nu) \geq 1$  tel que uniformément pour tous  $x \geq x_0$ ,  $1 \leq r \leq L^\kappa$ ,  $L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L - L^\nu$ ,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\begin{aligned} F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) &= \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \\ &\quad + O(xe^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}}), \end{aligned} \tag{36}$$

où  $H$  et  $\Delta$  sont définis en (34). La constante implicite est absolue.

**Démonstration.** On a la décomposition

$$\begin{aligned} F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) &- \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \\ &= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( \mathbb{1}_{\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_{j_1}(n) = \ell_1, \dots, \varepsilon_{j_r}(n) = \ell_r\}}(p) - f_{\ell_1, \Delta}\left(\frac{p}{b^{j_1+1}}\right) \cdots f_{\ell_r, \Delta}\left(\frac{p}{b^{j_r+1}}\right) \right)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( f_{\ell_1, \Delta}\left(\frac{p}{b^{j_1+1}}\right) \cdots f_{\ell_r, \Delta}\left(\frac{p}{b^{j_r+1}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) e\left(p \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \right). \end{aligned}$$

Posons

$$U_\Delta = [0, \Delta] \cup \bigcup_{\ell=1}^{b-1} \left[ \frac{\ell}{b} - \Delta, \frac{\ell}{b} + \Delta \right] \cup [1 - \Delta, 1].$$

Comme  $\varepsilon_j(p) = \ell \Leftrightarrow \{p/b^{j+1}\} \in [\ell/b, (\ell + 1)/b[$  pour tous  $j \in \mathbb{N}$  et  $\ell \in \mathcal{C}_b$ , on a, d'après (29),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &\leq \sum_{p \leq x} \left| \mathbb{1}_{\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_{j_1}(n) = \ell_1, \dots, \varepsilon_{j_r}(n) = \ell_r\}}(p) - f_{\ell_1, \Delta} \left( \frac{p}{b^{j_1+1}} \right) \cdots f_{\ell_r, \Delta} \left( \frac{p}{b^{j_r+1}} \right) \right| \\ &\leq r \max_{L^\nu \leq j \leq L - L^\nu} \text{card} \left\{ p \leq x \mid \left\{ \frac{p}{b^{j+1}} \right\} \in U_\Delta \right\}. \end{aligned}$$

Or le lemme 4.4 de [7] fournit l'estimation suivante : étant donné un nombre réel  $0 < c < \log(b)/3$ , il existe  $x_1 = x_1(c, \nu) \geq 1$  tel que uniformément pour  $x \geq x_1$ ,  $0 < \Delta < 1/(2b)$  et  $L^\nu \leq j \leq L - L^\nu$ , on a

$$\text{card} \left\{ p \leq x \mid \left\{ \frac{p}{b^{j+1}} \right\} \in U_\Delta \right\} \ll \pi(x)(\Delta + e^{-cL^\nu}).$$

Cela fournit la majoration

$$\mathcal{T}_1 \ll \pi(x)L^\kappa (e^{-L^{\kappa_1}} + e^{-cL^\nu}) \ll \pi(x)e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}},$$

valable pour  $x$  suffisamment grand puisque  $\kappa_1 < \nu$ . Par ailleurs, le développement (30) et le lemme 1 appliqué avec  $V = \mathbb{Z}^r$  et  $y_s = p/b^{j_s+1}$  pour tout  $s \in \{1, \dots, r\}$  entraînent directement que

$$\mathcal{T}_2 \ll \pi(x)e^{-c_2L^{\nu_1}}.$$

Comme  $\kappa_1 < \nu_1$ , nous obtenons bien la majoration  $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \ll xe^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}}$  souhaitée. □

#### 4. L'ensemble $\Gamma_\beta$

Au vu de la proposition 2, nous sommes amenés à étudier la quantité

$$\sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S \left( x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} \right).$$

Comme  $\widehat{f}_{\ell, \Delta}(h) = 0$  dès que  $h$  est non nul et divisible par  $b$ , nous en venons à considérer l'ensemble  $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta(x, \beta, \kappa, \nu_1, \nu)$  de tous les nombres réels de la forme

$$\beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} \tag{37}$$

où  $1 \leq r \leq L^\kappa$  est un nombre entier,  $h_1, \dots, h_r$  appartient à  $((\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}) \cap [-H, H]$  et  $j_1, \dots, j_r$  sont des nombres entiers tels que  $L^\nu \leq j_1 < \cdots < j_r \leq L - L^\nu$ . Notons que des nombres entiers  $1 \leq r \leq L^\kappa$  et  $L^\nu \leq j_1 < \cdots < j_r \leq L - L^\nu$  étant fixés, un élément de  $\Gamma_\beta$  peut avoir une, plusieurs ou aucune représentation(s) de la forme (37).

**Lemme 2.** (1) *Le diamètre de l'ensemble  $\Gamma_\beta$  n'excède pas  $4H/b^{L^\nu+1}$  et, en particulier, tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .*

(2) *Tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma_\beta \setminus \{\beta\}$  possède une unique écriture de la forme  $\beta + \frac{m}{b^{j+1}}$  avec  $L^\nu \leq j \leq L - L^\nu$  et  $m \not\equiv 0 \pmod{b}$ .*

(3) Pour tous  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 \in \Gamma_\beta$ ,

$$\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow |\gamma_1 - \gamma_2| \geq \frac{b^{L^v-1}}{x}. \tag{38}$$

**Démonstration.** (1) On a

$$\left| \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} \right| \leq \frac{H}{b^{L^v+1}} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{b^j} \leq \frac{H}{b^{L^v}(b-1)} \leq \frac{2H}{b^{L^v+1}}.$$

La deuxième partie de l’assertion provient du fait que  $H = b^{L^{v_1}}$  avec  $v_1 < v$ .

(2) On peut supposer que  $\gamma = \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}$  avec  $1 \leq r \leq L^k$ ,  $L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L - L^v$  et  $h_r \not\equiv 0 \pmod{b}$  et cela permet d’écrire  $\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = (bk + h_r)/b^{j_r+1}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . L’unicité est immédiate.

(3) Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 \in \Gamma_\beta$  tels que  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Si  $\gamma_1 = \beta$  ou  $\gamma_2 = \beta$ , alors  $|\gamma_1 - \gamma_2| = |m|/b^{j+1}$  avec  $m \neq 0$  et  $L^v \leq j \leq L - L^v$ , et donc  $|\gamma_1 - \gamma_2| \geq b^{L^v-1}/x$ . Sinon  $\gamma_1 = \beta + \frac{m_1}{b^{j_1+1}}$  et  $\gamma_2 = \beta + \frac{m_2}{b^{j_2+1}}$  avec  $m_1$  et  $m_2$  non divisibles par  $b$ , disons  $L^v \leq j_1 \leq j_2 \leq L - L^v$ , et

$$\frac{m_1}{b^{j_1+1}} \neq \frac{m_2}{b^{j_2+1}}.$$

Si  $j_1 = j_2$ , alors  $|m_2 - m_1| \geq 1$  et donc  $|\gamma_1 - \gamma_2| \geq 1/b^{j_1+1} \geq 1/b^{L-L^v+1}$ . Si  $j_1 < j_2$ , alors

$$|\gamma_1 - \gamma_2| = \frac{1}{b^{j_2+1}} |b^{j_2-j_1} m_1 - m_2| \geq \frac{1}{b^{j_2+1}} \geq \frac{1}{b^{L-L^v+1}}. \quad \square$$

Nous effectuons à présent une approximation diophantienne de chaque nombre  $\gamma \in \Gamma_\beta$ . Posons

$$Q = 3xb^{-L^v+1}.$$

Pour  $x$  suffisamment grand, on a  $Q > 2$ , ce que nous supposerons dans la suite. D’après le théorème de Dirichlet, pour tout  $\gamma \in \Gamma_\beta$ , il existe  $a \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $q \leq Q$  et  $|\gamma - a/q| \leq 1/(qQ)$ . Étant donné  $\gamma \in \Gamma_\beta$ , nous posons

$$q_\gamma = \min\{q \in \mathbb{N}^* \mid \exists a \in \mathbb{Z}, |\gamma - a/q| \leq 1/(qQ)\}. \tag{39}$$

Le nombre entier  $a_\gamma$  tel que  $|\gamma - a_\gamma/q_\gamma| \leq 1/(q_\gamma Q)$  est unique : si  $a \in \mathbb{Z}$  est tel que  $a \neq a_\gamma$  et  $|\gamma - a/q_\gamma| \leq 1/(q_\gamma Q)$ , on a

$$\frac{1}{q_\gamma} \leq \left| \frac{a - a_\gamma}{q_\gamma} \right| \leq \frac{2}{q_\gamma Q},$$

ce qui entraîne  $Q \leq 2$ , une contradiction. L’application  $\gamma \mapsto a_\gamma/q_\gamma$  est donc bien définie.

**Lemme 3.** *Supposons  $Q > 2$ . L’application  $\gamma \mapsto a_\gamma/q_\gamma$  est injective sur  $\Gamma_\beta$ .*

**Démonstration.** D’après l’inégalité triangulaire, l’assertion (38) et le choix de  $Q$ , on a, pour  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ,

$$\left| \frac{a_{\gamma_1}}{q_{\gamma_1}} - \frac{a_{\gamma_2}}{q_{\gamma_2}} \right| \geq |\gamma_1 - \gamma_2| - \left| \gamma_1 - \frac{a_{\gamma_1}}{q_{\gamma_1}} \right| - \left| \gamma_2 - \frac{a_{\gamma_2}}{q_{\gamma_2}} \right| \geq \frac{b^{L^v-1}}{x} - \frac{2}{Q} > 0. \quad \square$$

Nous introduisons maintenant le paramètre réel

$$z = z(x, v_1, v) = \sqrt{\frac{b^{L^v}}{4H}} = \frac{1}{2}b^{(L^v-L^{v_1})/2}. \quad (40)$$

**Lemme 4.** *Supposons  $Q > b^{L^v} \geq 2$ . Pour tous  $\gamma$  et  $\gamma' \in \Gamma_\beta$  tels que  $\gamma \neq \gamma'$ , on a  $q_\gamma q_{\gamma'} \geq z^2$ .*

**Démonstration.** D’après le lemme 3 et la première assertion du lemme 2, on a

$$\frac{1}{q_{\gamma'} q_\gamma} \leq \left| \frac{a_{\gamma'}}{q_{\gamma'}} - \frac{a_\gamma}{q_\gamma} \right| \leq |\gamma - \gamma'| + \left| \gamma' - \frac{a_{\gamma'}}{q_{\gamma'}} \right| + \left| \gamma - \frac{a_\gamma}{q_\gamma} \right| \leq \frac{4H}{b^{L^v+1}} + \frac{2}{Q} \leq z^{-2}. \quad \square$$

**5. Formule asymptotique pour  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$**

La suite de notre démonstration requiert une estimation classique de la somme  $S(x; \theta)$ , définie en (16), faisant intervenir les bonnes approximations diophantiennes de  $\theta$ .

**Lemme 5.** *On a uniformément pour tous  $x \geq 2$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $(a, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $(a, q) = 1$  et  $|\theta - a/q| \leq 1/q^2$ ,*

$$S(x; \theta) \ll \left( \frac{x}{\sqrt{q}} + \sqrt{xq} + x^{4/5} \right) (\log x)^2. \quad (41)$$

**Démonstration.** Sous les mêmes hypothèses, le théorème 13.6 de [11] fournit une majoration pour la somme  $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\theta)$  où  $\Lambda$  est la fonction de von Mangoldt. Une intégration par parties standard permet d’en déduire l’estimation souhaitée.  $\square$

Appliquons le lemme 5 à un élément quelconque  $\gamma \in \Gamma_\beta$  et à son approximation diophantienne  $a_\gamma/q_\gamma$ . Compte tenu de la majoration  $q_\gamma \leq Q$  et du choix de  $Q$ , on a

$$S(x; \gamma) \ll \left( \frac{x}{\sqrt{q_\gamma}} + \sqrt{xQ} + x^{4/5} \right) (\log x)^2 \ll x (\log x)^2 \left( \frac{1}{\sqrt{q_\gamma}} + e^{-\frac{1}{2}L^v \log b} \right). \quad (42)$$

Nous introduisons en conséquence le nombre entier

$$\tilde{q} = \tilde{q}(x, \beta, \kappa, v_1, v) = \min_{\gamma \in \Gamma_\beta} q_\gamma. \quad (43)$$

Rappelons que l’on a posé  $c_1 = \log(b)/8$ .



**Lemme 6.** Soit  $0 < \kappa < \nu_1 < \nu < 1$  des nombres réels. Il existe  $x_0 = x_0(b, \kappa, \nu_1, \nu)$  tel que, uniformément pour tout  $x \geq x_0$ , on a (avec les notations (40) et (43))

- si  $\tilde{q} \geq z$ , alors pour tout  $\gamma \in \Gamma_\beta$ ,

$$S(x; \gamma) \ll x e^{-c_1 L^\nu}; \tag{44}$$

- si  $\tilde{q} < z$ , alors il existe un unique élément  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(x, \beta, \kappa, \nu_1, \nu)$  de  $\Gamma_\beta$  tel que

$$q_{\tilde{\beta}} = \tilde{q}, \tag{45}$$

et pour tout  $\gamma \in \Gamma_\beta \setminus \{\tilde{\beta}\}$ ,

$$S(x; \gamma) \ll x e^{-c_1 L^\nu}. \tag{46}$$

Les constantes implicites dans (44) et (46) sont absolues.

**Remarque 7.** Si  $\beta = 0$ , on a  $\tilde{q} = 1$  et  $\tilde{\beta} = \beta$ .

**Démonstration.** On peut supposer  $x_0$  suffisamment grand de manière à ce que, pour  $x \geq x_0$ , on ait  $Q > b^{L^\nu} \geq 2$ .

D'après (42), on a pour tout  $\gamma \in \Gamma_\beta$  tel que  $q_\gamma \geq z$ ,

$$S(x; \gamma) \ll x (\log x)^2 (e^{-\frac{1}{4}(L^\nu - L^{\nu_1}) \log b} + e^{-\frac{1}{2} L^\nu \log b}) \ll x e^{-c_1 L^\nu}. \tag{47}$$

Cela règle le cas où  $\tilde{q} \geq z$ . Supposons à présent  $\tilde{q} < z$  et considérons  $\gamma \in \Gamma_\beta$  tel que  $q_\gamma = \tilde{q}$ . Si  $\gamma' \in \Gamma_\beta$  est tel que  $\gamma' \neq \gamma$ , le lemme 4 montre que  $q_{\gamma'} \geq z^2/q_\gamma > z > \tilde{q}$ . Cela prouve d'un part l'unicité de  $\gamma$  et d'autre part, compte tenu de (47), que pour tout  $\gamma' \neq \gamma$ , on a  $S(x; \gamma) \ll x e^{-c_1 L^\nu}$ .  $\square$

Avant de poursuivre, nous introduisons quelques notations. Dans le cas où  $\tilde{q} < z$  et  $\tilde{\beta} \neq \beta$ , il existe, d'après la deuxième assertion du lemme 2, un unique couple de nombres entiers  $\tilde{m} = \tilde{m}(x, \beta, \kappa, \nu_1, \nu)$  et  $\tilde{j} = \tilde{j}(x, \beta, \kappa, \nu_1, \nu)$  tels que

$$\tilde{m} \in \mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}, \quad L^\nu \leq \tilde{j} \leq L - L^\nu \quad \text{et} \quad \tilde{\beta} = \beta + \frac{\tilde{m}}{2^{\tilde{j}+1}}. \tag{48}$$

Lorsque  $\tilde{\beta} = \beta$ , nous posons  $\tilde{m} = 0$  et  $\tilde{j} = 0$ . De plus, pour  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq j_1 < \dots < j_r$  des nombres entiers,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ ,  $t \in \mathbb{Q}$  et  $\Delta > 0$ , nous introduisons la quantité

$$\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(t, \Delta) = \sum_{\substack{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z} \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = t}} \hat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \hat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r), \tag{49}$$

qui est la somme d'une série absolument convergente d'après (32).

Nous sommes maintenant en mesure de fournir une formule asymptotique pour  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$ .

**Proposition 3.** Soit  $0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu < 1$  des nombres réels. Il existe  $x_0 = x_0(b, \kappa, \kappa_1, \nu_1, \nu) \geq 1$  tel que uniformément pour tous  $x \geq x_0$ ,  $1 \leq r \leq L^\kappa$ ,  $L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L - L^\nu$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ , on a (avec les notations (40) et (43))

- si  $\tilde{q} \geq z$ , alors

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) \ll x e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}}; \tag{50}$$

- si  $\tilde{q} < z$ , alors

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) = S(x; \tilde{\beta}) \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta) + O(xe^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}}), \tag{51}$$

où  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{J}$  et  $\Delta$  sont définis respectivement au lemme 6, en (48) et en (34). Les constantes implicites dans (50) et (51) sont absolues.

**Démonstration.** Commençons par traiter le cas où  $\tilde{q} \geq z$ . L'estimation (44) ainsi que la majoration  $|\widehat{f}_{\ell, \Delta}(h)| \leq \min(1/2, 1/\pi|h|)$  donnent

$$\begin{aligned} & \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \\ & \leq \max_{\gamma \in \Gamma_\beta} |S(x; \gamma)| \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} |\widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r)| \\ & \ll x (\log H)^r e^{-c_1 L^\nu} \\ & \ll x (\log H)^{L^\kappa} e^{-c_1 L^\nu} \ll x e^{L^\kappa(\nu_1 \log L + \log \log b) - c_1 L^\nu} \\ & \ll x e^{-\frac{c_1}{2} L^\nu}, \end{aligned} \tag{52}$$

puisque  $\kappa < \nu$ . Pour obtenir (50), il suffit d'insérer la majoration (52) dans la formule (36) et d'invoquer le fait que  $\kappa_1 < \nu$ .

Traisons à présent le cas où  $\tilde{q} < z$ . Compte tenu de (36), il suffit de prouver que l'on a

$$\begin{aligned} & \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \\ & = S(x; \tilde{\beta}) \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta) + O(e^{-cL^\varepsilon}), \end{aligned} \tag{53}$$

avec  $c > 0$  et  $\varepsilon > \kappa_1$ . En isolant la contribution du terme  $\tilde{\beta}$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) S\left(x; \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}}\right) \\ & = \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \tilde{\beta}}} + \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} \neq \tilde{\beta}}} \\ & = S(x; \tilde{\beta}) \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ \beta + \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \tilde{\beta}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) + O\left((\log H)^r \max_{\gamma \in \Gamma_\beta \setminus \{\tilde{\beta}\}} |S(x; \gamma)|\right) \\ & = S(x; \tilde{\beta}) \sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \cdots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{\tilde{m}}{2^{\tilde{J}+1}}} } \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) + O(xe^{-\frac{c_1}{2}L^\nu}), \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (46). Le lemme 1 appliqué avec  $y_s = 0$  pour tout  $s \in \{1, \dots, r\}$  et  $V$  l'ensemble des  $r$ -uplets  $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbb{Z}^r$  tels que  $\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{\tilde{m}}{2^{j+1}}$  fournit alors l'estimation

$$\sum_{\substack{-H \leq h_1, \dots, h_r \leq H \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{\tilde{m}}{2^{j+1}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) = \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{j+1}, \Delta) + O(e^{-c_2 L^{v_1}}),$$

avec  $c_2 = \log(b)/2$ . Compte tenu des inégalités  $\kappa_1 < \nu_1 < \nu$ , nous obtenons bien (53).  $\square$

**6. Formule pour  $\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta)$**

L'objet de ce paragraphe est de fournir une estimation pour la quantité  $\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta)$  défini en (49). Pour cela, nous commençons par étudier l'équation  $\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{m}{b^{j+1}}$ .

**Lemme 7.** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_1, \dots, h_r \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$  et  $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$  des nombres entiers.

(1) Si

$$\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = 0, \tag{54}$$

alors  $h_1 = \dots = h_r = 0$ .

(2) Soit  $m \in \mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Si l'on a

$$\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{m}{b^{j+1}}, \tag{55}$$

alors il existe un unique  $s \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $j_s = j$  et on a, pour tout  $t > s$ ,  $h_t = 0$ .

**Démonstration.** (1) Il suffit de raisonner par l'absurde, de considérer le plus grand entier  $s$  tel que  $h_s$  est non nul et donc non divisible par  $b$ , puis de multiplier (54) par  $b^{j_s+1}$ . On aboutit à  $h_s \in b\mathbb{Z}$ , une contradiction.

(2) Comme  $m \neq 0$ , l'ensemble  $\{t \in \mathbb{N} \mid 1 \leq t \leq r \text{ et } h_t \neq 0\}$  est non vide, notons  $s$  son plus grand élément. Supposons par l'absurde que  $j < j_s$ . On multiplie alors (55) par  $b^{j_s+1}$  et on aboutit à  $h_s \in b\mathbb{Z}$  et  $h_s \neq 0$ , une contradiction. Donc  $j \geq j_s$ . On montre de même que  $j \leq j_s$  en multipliant (55) par  $b^{j+1}$ . Ainsi  $j = j_s$  et on a bien  $h_t = 0$  pour tout  $t > s$ .  $\square$

**Lemme 8.** Soit  $\Delta > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$  des nombres entiers,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  et  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $j \geq j_r$ . On a l'identité

$$\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) = \int_0^1 f_{\ell_1, \Delta}(ub^{j-j_1}) \cdots f_{\ell_{r-1}, \Delta}(ub^{j-j_{r-1}}) f_{\ell_r, \Delta}(u) e(-mu) du. \tag{56}$$

**Démonstration.** D’après (49), on a

$$\begin{aligned} &\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) \\ &= \sum_{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) \int_0^1 e(u(h_1 b^{j-j_1} + h_2 b^{j-j_2} + \dots + h_r b^{j-j_r} - m)) \, du \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{h_1 \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) e(uh_1 b^{j-j_1}) \right) \cdots \left( \sum_{h_r \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) e(h_r u) \right) e(-mu) \, du. \end{aligned}$$

L’interversion des signes  $\sum$  et  $\int$  est licite puisque la série

$$\sum_{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r)$$

est absolument convergente. La relation (30) permet de conclure. □

Nous sommes maintenant en mesure de fournir plusieurs formules, ainsi qu’une majoration pour  $\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta)$  lorsque  $m \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ .

**Proposition 4.** Soit  $\Delta > 0$  un nombre réel,  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$  des nombres entiers,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ ,  $m \in (\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$  et  $j \in \mathbb{N}$ .

- Si  $m = 0$ , on a

$$\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) = \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(0, \Delta) = \frac{1}{b^r}; \tag{57}$$

- si  $m \neq 0$  et  $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ , on a  $\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) = 0$ ;
- si  $m \neq 0$  et  $j = j_s$  avec  $s \in \{1, \dots, r\}$ , on a

$$\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) = \frac{1}{b^{r-s}} \int_0^1 f_{\ell_1, \Delta}(ub^{j-j_1}) \cdots f_{\ell_{s-1}, \Delta}(ub^{j-j_{s-1}}) f_{\ell_s, \Delta}(u) e(-mu) \, du. \tag{58}$$

Dans tous les cas, on a

$$|\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta)| \leq \frac{1}{b^r}. \tag{59}$$

**Démonstration.** En vertu de la première assertion du lemme 7 et de l’identité  $\widehat{f}_{\ell, \Delta}(0) = 1/b$ , on a

$$\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(0, \Delta) = \sum_{\substack{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z} \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = 0}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) = \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(0) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(0) = \frac{1}{b^r}.$$

Traisons maintenant le cas où  $m \neq 0$ . Le cas où  $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$  est une conséquence directe de la deuxième assertion du lemme 7. Supposons à présent que  $j_s = j$  avec  $s \in \{1, \dots, r\}$  et considérons  $h_1, \dots, h_r$  des éléments de  $(\mathbb{Z} \setminus b\mathbb{Z}) \cup \{0\}$  tels que

$$\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_s}{b^{j_s+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{m}{b^{j+1}}.$$

Toujours d'après la deuxième assertion du lemme 7, on a  $h_{s+1} = \dots = h_r = 0$  et donc

$$\frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_s}{b^{j_s+1}} = \frac{m}{b^{j+1}}.$$

Cela conduit directement à

$$\begin{aligned} \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta) &= \sum_{\substack{h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z} \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_r}{b^{j_r+1}} = \frac{m}{b^{j+1}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(h_r) \\ &= \widehat{f}_{\ell_{s+1}, \Delta}(0) \cdots \widehat{f}_{\ell_r, \Delta}(0) \sum_{\substack{h_1, \dots, h_s \in \mathbb{Z} \\ \frac{h_1}{b^{j_1+1}} + \dots + \frac{h_s}{b^{j_s+1}} = \frac{m}{b^{j_s+1}}} \widehat{f}_{\ell_1, \Delta}(h_1) \cdots \widehat{f}_{\ell_s, \Delta}(h_s) \\ &= \frac{1}{b^{r-s}} \rho_{j_1, \dots, j_s}^{\ell_1, \dots, \ell_s}(m/2^{j_s+1}, \Delta). \end{aligned}$$

La formule (58) découle donc de (56) appliqué avec  $r = s$  et  $j = j_s$ .

En ce qui concerne la majoration (59), seul le cas où  $m \neq 0$  et  $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$  n'est pas immédiat. D'après l'identité (58), nous avons

$$\begin{aligned} |\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(m/2^{j+1}, \Delta)| &\leq \frac{1}{b^{r-s}} \int_0^1 f_{\ell_1, \Delta}(ub^{j-j_1}) \cdots f_{\ell_{s-1}, \Delta}(ub^{j-j_{s-1}}) f_{\ell_s, \Delta}(u) du \\ &= \frac{1}{b^{r-s}} \rho_{j_1, \dots, j_s}^{\ell_1, \dots, \ell_s}(0, \Delta) = \frac{1}{b^r}, \end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé le fait que  $f_{\ell, \Delta} \geq 0$ , l'identité (56) avec  $r = s$  et  $m = 0$ , puis l'identité (57). □

### 7. Intermède : démonstration du théorème 2

Soit  $0 < \kappa < \nu < 1$ . Nous voulons montrer que lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a uniformément pour  $1 \leq r \leq L^\kappa$ ,  $L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L - L^\nu$ ,  $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r$ , et  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,

$$F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta) = o\left(\frac{\pi(x)}{2^r}\right). \tag{60}$$

Soit  $\kappa_1$  et  $\nu_1$  des nombres réels tels que  $0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu < 1$ . Remarquons que l'on a pour tout  $c > 0$ ,

$$xe^{-cL^{\kappa_1}} \frac{b^r}{\pi(x)} \ll b^{L^\kappa} (\log x) e^{-cL^{\kappa_1}} \ll e^{L^\kappa \log b + \log \log x - cL^{\kappa_1}} \ll e^{-\frac{c}{2}L^{\kappa_1}},$$

puisque  $\kappa_1 > \kappa$ , de sorte que

$$xe^{-cL^{\kappa_1}} = o\left(\frac{\pi(x)}{b^r}\right). \tag{61}$$

Nous appliquons à présent la proposition 3. Dans le cas où  $\tilde{q} \geq z$ , la relation (61) suffit à établir (60). Dans le cas où  $\tilde{q} < z$ , on a

$$|F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)| \leq |S(x; \tilde{\beta}) \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{\tilde{q}+1}, \Delta)| + o\left(\frac{\pi(x)}{b^r}\right).$$

La majoration (59) fournit alors

$$|F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)| \leq \frac{|S(x; \tilde{\beta})|}{b^r} + o\left(\frac{\pi(x)}{b^r}\right).$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$S(x; \tilde{\beta}) = o(\pi(x)).$$

Comme le diamètre de  $\Gamma_\beta$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (cf. première assertion du lemme 2), il suffit d'employer le résultat suivant qui est un raffinement de (1).

**Lemme 9.** Soit  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $v : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \beta$ . On a pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{p \leq x} e(pv(x)) = o(\pi(x)).$$

**Démonstration.** Pour  $x \geq 2$  et un certain  $B > 0$ , posons  $Q_x = x/(\log x)^B$ . D'après le théorème de Dirichlet, il existe  $(a_x, q_x) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $(a_x, q_x) = 1$ ,  $1 \leq q_x \leq Q_x$  et  $|v(x) - a_x/q_x| \leq 1/q_x Q_x$ . En reprenant la démonstration du théorème 21.3 p. 489 de [11], on peut établir l'existence de  $C > 2$  tel que

$$\sum_{p \leq x} e(pv(x)) \ll \frac{\pi(x)}{\varphi(q_x)} + \frac{x}{(\log x)^C}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_x/q_x = \beta$  et que  $\beta$  est irrationnel, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_x = +\infty$ . On en déduit le résultat. □

### 8. Évaluation de $M_d(x; \beta)$

Soit  $x \geq 2$  et  $0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu < 1$  des nombres réels. Rappelons les définitions de  $g_\nu$  et  $L'$  respectivement en (18) et (19). Dans ce paragraphe, nous établissons pour tout nombre entier  $1 \leq d \leq L^\kappa$  et tout  $\beta \in \mathbb{R}$ , une formule asymptotique pour la quantité

$$M_d(x; \beta) = \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( \frac{g_\nu(p) - \mu_g L'}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d.$$

Dans le paragraphe 4, nous avons introduit un paramètre  $z = z(x, \nu_1, \nu)$  et un nombre entier  $\tilde{q} = \tilde{q}(x, \beta, \kappa, \nu_1, \nu)$ , puis distingué les cas où  $\tilde{q} < z$  et  $\tilde{q} \geq z$  afin d'évaluer  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$ . Dans le cas où  $\tilde{q} < z$ , cette évaluation fait intervenir le nombre  $\tilde{\beta} \in \Gamma_\beta$  défini en (45).

Lorsque  $\tilde{\beta} = \beta$ , nous évaluons  $M_d(x; \beta)$  comme dans [7] en faisant intervenir le moment d'ordre  $d$  d'une variable aléatoire  $Y$  modélisant  $(g_\nu - \mu_g L')/\sigma_g \sqrt{L'}$  et définie de la manière suivante. Il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sur lequel est définie une suite de variables aléatoires indépendantes  $(Z_j)_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu}$ , à valeurs dans  $\mathcal{C}_b$  et toutes de loi uniforme sur  $\mathcal{C}_b = \{0, \dots, b-1\}$ . Nous posons alors

$$Y = \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} \frac{g(Z_j) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}}. \tag{62}$$

Nous procédons différemment lorsque  $\tilde{\beta} \neq \beta$ . Dans ce cas, nous avons introduit en (48) les nombres entiers  $\tilde{m}$  et  $\tilde{j}$  tels que  $\tilde{\beta} = \beta + \tilde{m}/2^{\tilde{j}+1}$ . Fixons  $u \in [0, 1]$ . Rappelons qu'en vertu de (28), pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_{\ell, \Delta}(y))_{\ell \in \mathcal{C}_b}$  engendre une mesure de probabilité sur  $\mathcal{C}_b$ . Il existe donc un espace de probabilité  $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbb{P}_u)$  et une suite de variables aléatoires indépendantes  $(Z_j^{(u)})_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu}$  définie sur  $\Omega_u$ , à valeurs dans  $\mathcal{C}_b$  et dont la loi est donnée par

$$\text{pour tous nombres entiers } L^\nu \leq j \leq \tilde{j}, \ell \in \mathcal{C}_b, \quad \mathbb{P}_u(Z_j^{(u)} = \ell) = f_{\ell, \Delta}(ub^{\tilde{j}-j}), \quad (63)$$

et

$$\text{pour tous nombres entiers } \tilde{j} < j \leq L - L^\nu, \ell \in \mathcal{C}_b, \quad \mathbb{P}_u(Z_j^{(u)} = \ell) = \frac{1}{b}. \quad (64)$$

Nous introduisons alors les variables aléatoires

$$Y_u = \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} \frac{g(Z_j^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_u = Y_u - \frac{g(Z_{\tilde{j}}^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}}. \quad (65)$$

Dans la suite, si une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega_u$  (resp. sur  $\Omega$ ) admet un moment d'ordre 1, nous désignons par  $\mathbb{E}_u(X)$  (resp.  $\mathbb{E}(X)$ ) son espérance.

**Proposition 5.** *Soit  $g \in \mathcal{F}^+$  et  $0 < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu < 1$  des nombres réels. Il existe  $x_0 = x_0(g, \kappa, \kappa_1, \nu_1, \nu) \geq 1$  tel que uniformément pour tous  $x \geq x_0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq d \leq L^\kappa$ , on a (avec les notations définies en (43), (40) et (45))*

$$M_d(x; \beta) = K_d(x; \beta) + O(xe^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}}), \quad (66)$$

avec

$$K_d(x; \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{q} \geq z, \\ S(x, \beta)\mathbb{E}(Y^d) & \text{si } \tilde{q} < z \text{ et } \tilde{\beta} = \beta, \\ S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{(-\tilde{m}u)} (\mathbb{E}_u(Y_u^d) - \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^d)) du & \text{si } \tilde{q} < z \text{ et } \tilde{\beta} \neq \beta, \end{cases} \quad (67)$$

où les variables aléatoires  $Y$ ,  $Y_u$  et  $\tilde{Y}_u$  ont été définies en (62) et (65). La constante implicite dans (66) est absolue.

**Démonstration.** Nous commençons par appliquer la formule du multinôme de Newton sous la forme suivante : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\left( \sum_{1 \leq j \leq n} z_j \right)^d = \sum_{r=1}^d \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} z_{j_1}^{d_1} \dots z_{j_r}^{d_r}, \quad (68)$$

où  $\binom{d}{d_1, \dots, d_r} = \frac{d!}{d_1! \dots d_r!}$  est le coefficient binomial généralisé. Nous obtenons ainsi que pour tout  $d \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 M_d(x; \beta) &= \sum_{p \leq x} e(\beta p) \left( \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} \frac{g(\varepsilon_j(p)) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d \\
 &= \sum_{p \leq x} e(\beta p) \sum_{r=1}^d \sum_{L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^v} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \\
 &\quad \left( \frac{g(\varepsilon_{j_1}(p)) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_1} \dots \left( \frac{g(\varepsilon_{j_r}(p)) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_r}.
 \end{aligned}$$

En intervertissant les sommations puis en sommant sur les différentes valeurs prises par les chiffres  $\varepsilon_j(p)$ , nous aboutissons à l’expression

$$\begin{aligned}
 M_d(x; \beta) &= \sum_{r=1}^d \sum_{L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^v} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \\
 &\quad \sum_{\ell_1, \dots, \ell_r \in \mathcal{C}_b} \left( \frac{g(\ell_1) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_1} \dots \left( \frac{g(\ell_r) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_r} F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta),
 \end{aligned}$$

où  $F_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(x; \beta)$  est défini en (10). Nous appliquons la proposition 3. Dans le calcul qui suit, nous utilisons la notation

$$\|g\| = \max_{\ell \in \mathcal{C}_b} |g(\ell)|. \tag{69}$$

La contribution à  $M_d(x; \beta)$  du majorant de (50) et du terme d’erreur de (51) est

$$\begin{aligned}
 &\ll x \left( \frac{2\|g\|}{\sigma_g} \right)^d e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}} (L')^{-d/2} \sum_{r=1}^d \sum_{L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^v} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} b^r \\
 &\ll x \left( \frac{2b\|g\|}{\sigma_g} \right)^d e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}} (L')^{-d/2} \left( \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} 1 \right)^d \\
 &\ll x \left( \frac{2b\|g\|}{\sigma_g} \right)^d L^{d/2} e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1}} \ll x e^{-\frac{1}{2}L^{\kappa_1} + \frac{1}{2}L^{\kappa} (\log(L) + 2 \log(2b\|g\|/\sigma_g))} \ll x e^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}},
 \end{aligned}$$

puisque  $\kappa < \kappa_1$ . Cela règle le cas où  $\tilde{q} \geq z$  et, dans le cas où  $\tilde{q} < z$ , on a ainsi

$$M_d(x; \beta) = S(x; \tilde{\beta}) N_d + O(xe^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}})$$

avec

$$\begin{aligned}
 N_d &= \sum_{r=1}^d \sum_{L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^v} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \\
 &\quad \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathcal{C}_b^r} \left( \frac{g(\ell_1) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_1} \dots \left( \frac{g(\ell_r) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_r} \rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta).
 \end{aligned}$$



Commençons par traiter le cas où  $\tilde{\beta} = \beta$ . Dans ce cas,  $\tilde{m} = 0$  et, d'après, la proposition 4, on a  $\rho_{j_1, \dots, j_r}^{\ell_1, \dots, \ell_r}(\tilde{m}/2^{\tilde{J}+1}, \Delta) = b^{-r}$ . On remarque alors que

$$\begin{aligned} N_d &= \sum_{r=1}^d \sum_{L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^\nu} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \prod_{k=1}^r \mathbb{E} \left( \left( \frac{g(Z_{j_k}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{r=1}^d \sum_{L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^\nu} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \prod_{k=1}^r \left( \frac{g(Z_{j_k}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right) = \mathbb{E}(Y^d), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'indépendance mutuelle des variables  $(Z_j)_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu}$ .

Traisons pour finir le cas où  $\tilde{\beta} \neq \beta$ . D'après la proposition 4 appliquée avec  $m = \tilde{m}$  et  $j = \tilde{J}$ , on a

$$\begin{aligned} N_d &= \int_0^1 \left( e(-\tilde{m}u) \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^r \sum_{\substack{L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^\nu \\ j_s = j}} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \right. \\ &\quad \left. \prod_{k=1}^s \sum_{\ell \in \mathcal{C}_b} f_{\ell, \Delta}(ub\tilde{J}^{-j_k}) \left( \frac{g(\ell) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \cdot \prod_{k=s+1}^r \sum_{\ell \in \mathcal{C}_b} \frac{1}{b} \left( \frac{g(\ell) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right) du. \end{aligned}$$

Compte tenu de la loi des variables aléatoires  $Z_j^{(u)}$  (cf. (63) et (64)) et de leur indépendance mutuelle à  $u \in [0, 1]$  fixé, nous remarquons que

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^s \sum_{\ell \in \mathcal{C}_b} f_{\ell, \Delta}(ub\tilde{J}^{-j_k}) \left( \frac{g(\ell) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \cdot \prod_{k=s+1}^r \sum_{\ell \in \mathcal{C}_b} \frac{1}{b} \left( \frac{g(\ell) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \\ &= \prod_{k=1}^r \mathbb{E}_u \left( \left( \frac{g(Z_{j_k}^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right) = \mathbb{E}_u \left( \prod_{k=1}^r \left( \frac{g(Z_{j_k}^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right). \end{aligned}$$

Nous invoquons ensuite l'identité

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^r \sum_{\substack{L^\nu \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^\nu \\ j_s = i}} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} x_{j_1}^{d_1} \dots x_{j_r}^{d_r} \\ &= \left( \sum_{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu} x_j \right)^d - \left( \sum_{\substack{L^\nu \leq j \leq L-L^\nu \\ j \neq i}} x_j \right)^d, \end{aligned}$$

valable pour tout nombre entier  $i \in [L^\nu, L - L^\nu]$  et tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ . Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 N_d &= \int_0^1 e(-\tilde{m}u) \mathbb{E}_u \left( \sum_{r=1}^d \sum_{s=1}^r \sum_{\substack{L^v \leq j_1 < \dots < j_r \leq L-L^v \\ j_s = j}} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \geq 1 \\ d_1 + \dots + d_r = d}} \binom{d}{d_1, \dots, d_r} \prod_{k=1}^r \left( \frac{g(Z_{j_k}^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^{d_k} \right) du \\
 &= \int_0^1 e(-\tilde{m}u) \mathbb{E}_u \left( \left( \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} \frac{g(Z_j^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d - \left( \sum_{\substack{L^v \leq j \leq L-L^v \\ j \neq \tilde{j}}} \frac{g(Z_j^{(u)}) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L'}} \right)^d \right) du \\
 &= \int_0^1 e(-\tilde{m}u) (\mathbb{E}_u(Y_u^d) - \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^d)) du. \quad \square
 \end{aligned}$$

**9. Estimations concernant les variables aléatoires  $Y, Y_u$  et  $\tilde{Y}_u$**

Dans ce paragraphe, nous donnons plusieurs estimations concernant la loi et les moments des variables aléatoires  $Y, Y_u$  et  $\tilde{Y}_u$  définies en (62) et (65). Pour commencer, nous donnons un développement asymptotique de  $\mathbb{E}(e^{wY})$  pour  $w \in \mathbb{C}$  au voisinage de  $w = 0$ . Le cas particulier où  $g = s_b$  fait l'objet du lemme 4.2 de [7].

**Lemme 10.** *Soit  $g \in \mathcal{F}^+$  et  $0 < \nu < 1$  un nombre réel. Il existe  $x_0 = x_0(\nu, g)$  tel que uniformément pour  $x \geq x_0$  et  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $|w| \leq L^{1/6}$ , on a*

$$\mathbb{E}(e^{wY}) = e^{w^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|w|^3}{\sqrt{L}}\right) \right), \tag{70}$$

où la constante implicite ne dépend que de  $b$  et  $g$ .

**Démonstration.** On a  $Y = \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} (Z_j - \mu_g) / (\sigma_g^2 \sqrt{L'})$  où  $L' = \text{card}\{j \in \mathbb{N} \mid L^v \leq j \leq L - L^v\}$  a été défini en (19). Les variables aléatoires  $Z_j$  sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur  $\mathcal{C}_b$ . On a donc

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( v \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} Z_j \right) \right) = (\mathbb{E}(e^{vZ_{[L^v, 1]}}))^{L'} = \left( \frac{1 + \sum_{1 \leq k < b} e^{vg(k)}}{q} \right)^{L'}.$$

Un calcul asymptotique standard montre qu'avec la notation (69), on a uniformément pour  $|v| \|g\| \leq 1$ ,

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( v \sum_{L^v \leq j \leq L-L^v} Z_j \right) \right) = \exp \left( L'(v\mu_g + v^2\sigma_g^2/2 + O(|v|^3 \|g\|^3)) \right). \tag{71}$$

Soit  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $|w| \leq L^{1/6}$  et posons  $v = w/(\sigma_g \sqrt{L'})$ . Pour  $x$  suffisamment grand, on a  $|v| \|g\| \leq 1$ , et (71) donne

$$\mathbb{E}(e^{wY}) = \exp \left( \frac{w^2}{2} + O\left(\frac{(\|g\| |w|)^3}{\sigma_g^3 \sqrt{L'}}\right) \right),$$

ce qui entraîne bien (70). □

Les deux lemmes qui suivent montrent qu'en moyenne, sur  $u \in [0, 1]$ , pour tout  $d \geq 1$ , le moment d'ordre  $d$  de  $Y_u$  coïncide avec celui de  $Y$ , tandis que le moment d'ordre  $d$  de  $\tilde{Y}_u$  coïncide avec celui de la variable aléatoire  $\tilde{Y}$  définie sur  $\Omega$  par

$$\tilde{Y} = \sum_{\substack{L^v \leq j \leq L-L^v \\ j \neq \tilde{j}}} \frac{g(Z_j) - \mu_g}{\sigma_g \sqrt{L^v}}.$$

**Lemme 11.** Soit  $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$  une famille de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable  $\mathcal{K}$  inclus dans  $\mathbb{R}$  et admettant des moments de tout ordre. On se donne pour tout  $u \geq 1$ ,  $(X_j^{(u)})_{1 \leq j \leq n}$  une famille de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega_u, \mathcal{A}_u, \mathbb{P}_u)$ , à valeurs dans  $\mathcal{K}$  et admettant des moments de tout ordre. On pose

$$X = \sum_{1 \leq j \leq n} X_j \quad \text{et} \quad X^{(u)} = \sum_{1 \leq j \leq n} X_j^{(u)}.$$

Si pour tous  $d \geq 1$ ,  $(j_1, \dots, j_d) \in \{1, \dots, n\}^d$  et  $(k_1, \dots, k_d) \in \mathcal{K}^d$ , on a

$$\int_0^1 \mathbb{P}_u(X_{j_1}^{(u)} = k_1, \dots, X_{j_d}^{(u)} = k_d) \, du = \mathbb{P}(X_{j_1} = k_1, \dots, X_{j_d} = k_d), \tag{72}$$

alors on a, pour tout  $d \geq 1$ ,

$$\int_0^1 \mathbb{E}_u((X^{(u)})^d) \, du = \mathbb{E}(X^d).$$

**Démonstration.** En développant  $(X^{(u)})^d$  et  $X^d$ , on constate qu'il suffit de montrer que pour tous  $d \geq 1$  et  $(j_1, \dots, j_d) \in \{1, \dots, n\}^d$ , on a

$$\int_0^1 \mathbb{E}_u(X_{j_1}^{(u)} \dots X_{j_d}^{(u)}) \, du = \mathbb{E}(X_{j_1} \dots X_{j_d}),$$

ce qui est une conséquence immédiate de (72). □

**Lemme 12.** Pour tout  $d \geq 1$ , on a

$$\int_0^1 \mathbb{E}_u(Y_u^d) \, du = \mathbb{E}(Y^d) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^d) \, du = \mathbb{E}(\tilde{Y}^d). \tag{73}$$

**Démonstration.** Pour démontrer la première identité, nous appliquons le lemme 11 avec  $n = L'$ ,  $X_j = \frac{Z_{j+[L^v]_1 - \mu_g L'}}{\sigma_g \sqrt{L'}}$  et  $X_j^{(u)} = \frac{Z_{j+[L^v]_1 - \mu_g L'}}{\sigma_g \sqrt{L'}}$ . Comme les variables  $Z_j$  sont indépendantes, ainsi que les variables  $Z_j^{(u)}$  pour tout  $u \geq 1$ , il suffit, pour établir (72), de montrer que pour tous  $d \geq 1$ ,  $L^v \leq j_1 < \dots < j_d \leq L - L^v$  et  $(k_1, \dots, k_d) \in \mathcal{C}_b^d$ , on a

$$\int_0^1 \mathbb{P}_u(Z_{j_1}^{(u)} = k_1) \dots \mathbb{P}_u(Z_{j_d}^{(u)} = k_d) \, du = \frac{1}{b^d}.$$

Soit  $s$  le plus grand nombre entier de  $\{1, \dots, d\}$  tel que  $j_s \leq \tilde{J}$ . On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbb{P}_u(Z_{j_1}^{(u)} = k_1) \cdots \mathbb{P}_u(Z_{j_d}^{(u)} = k_d) du &= \frac{1}{b^{d-s}} \int_0^1 f_{\ell_1, \Delta}(ub^{\tilde{J}-j_1}) \cdots f_{\ell_s, \Delta}(ub^{\tilde{J}-j_s}) du \\ &= \frac{1}{b^{d-s}} \rho_{j_1, \dots, j_s}^{\ell_1, \dots, \ell_s}(0, \Delta) \\ &= \frac{1}{b^d}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les identités (56) et (57). La deuxième identité de (73) se démontre de même. □

Dans la suite, étant donné  $\kappa > 0$ , nous introduisons le nombre entier pair

$$D = D(x, \kappa) = \max\{n \in 2\mathbb{N}^* \mid n \leq L^\kappa\}. \tag{74}$$

Pour conclure ce paragraphe, nous donnons une majoration des moments d'ordre  $D$  de  $Y$  et  $\tilde{Y}$ .

**Lemme 13.** *Soit  $g \in \mathcal{F}^+$  et  $\eta, \kappa$  des nombres réels tels que  $0 < 2\eta < \kappa < 1/3$ . Il existe  $x_0 = x_0(\eta, \kappa, g)$  tel que uniformément pour  $x \geq x_0$ ,  $|t| \leq 2\pi\sigma_g L^\eta$ , on a (avec la notation (74))*

$$\max\left(\frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(Y^D), \frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(\tilde{Y}^D)\right) \ll |t|e^{-c_3 L^\kappa \log L},$$

avec  $c_3 = \frac{1}{2}(\kappa/2 - \eta) > 0$ . La constante implicite ne dépend que de  $b$  et  $g$ .

**Démonstration.** L'estimation

$$\frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(Y^D) \ll |t|e^{-c_3 L^\kappa \log L} \tag{75}$$

peut se déduire de la formule de Cauchy et de l'estimation (70) : puisque  $D \leq L^\kappa$  avec  $\kappa > 1/3$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Y^D)}{D!} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\sqrt{D}} \mathbb{E}(e^{wY}) \frac{dw}{w^{D+1}} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\sqrt{D}} e^{w^2/2} \left(1 + O\left(\frac{D^{3/2}}{\sqrt{L}}\right)\right) \frac{dw}{w^{D+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi D^{D/2}} \int_{-\pi}^\pi e^{\frac{D}{2}e^{2i\theta} - iD\theta} \left(1 + O\left(\frac{D^{3/2}}{\sqrt{L}}\right)\right) d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit<sup>1</sup>

$$\frac{\mathbb{E}(Y^D)}{D!} \ll D^{-D/2} \int_{-\pi}^\pi e^{\frac{D}{2} \cos(2\theta)} d\theta \ll D^{-D/2} e^{D/2}.$$

<sup>1</sup>Signalons qu'un calcul plus approfondi donne la formule

$$\frac{\mathbb{E}(Y^D)}{D!} = D^{-D/2} e^{D/2} (\pi D)^{-1/2} \left(1 + O\left(\frac{D^3}{\sqrt{L}}\right)\right),$$

dont la précision n'est pas requise ici.

On a donc pour  $|t| \leq 2\pi\sigma_g L^\eta$ ,

$$\frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(Y^D) \ll |t| e^{(\eta-\kappa/2)D \log(L)+D/2+(D-1) \log(2\pi\sigma_g)} \ll |t| e^{-c_3 L^\kappa \log L}.$$

Pour obtenir la majoration  $\frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(\tilde{Y}^D) \ll |t| e^{-c_3 L^\kappa \log L}$ , il suffit d'utiliser l'inégalité de Minkowski

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}^D)^{1/D} \leq \mathbb{E}((Y - \tilde{Y})^D)^{1/D} + \mathbb{E}(Y^D)^{1/D},$$

puis d'appliquer (75) et la majoration  $|Y - \tilde{Y}| \leq 2\|g\| L^{-1/2} \sigma_g^{-1}$ , où  $\|g\|$  est défini en (69). La formule de Stirling donne alors

$$\frac{t^D}{D!} \mathbb{E}((Y - \tilde{Y})^D)^{1/D} \ll |t| e^{-\frac{\kappa-\eta}{2} L^\kappa \log L} \ll |t| e^{-c_3 L^\kappa \log L}. \quad \square$$

### 10. Preuve de la proposition 1

Nous établissons dans ce paragraphe la formule (14). Nous fixons donc des nombres  $\eta$  et  $\nu$  tels que

$$0 < 2\eta < \nu < 1/3,$$

Rappelons les définitions de  $g_\nu$  et  $L'$  respectivement en (18) et (19). Nous avons remarqué au début du paragraphe 2 que pour obtenir (14), il est suffisant d'établir la formule

$$\begin{aligned} T_\nu(x; t, \beta) &:= \sum_{p \leq x} e(\beta p) e^{it(g_\nu(p) - \mu_g L') / (\sigma_g \sqrt{L'})} \\ &= S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{L}}\right) \right) \right) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{L^{1/2-\nu}} + x e^{-c_1 L^\nu}\right), \end{aligned}$$

uniformément pour  $x \geq 2$  et  $|t| \leq 2\pi\sigma_g L^\eta$ . Les majorations  $|T_\nu(x; t, \beta)| \leq \pi(x)$  et  $|S(x; \beta)| \leq \pi(x)$  montrent que quitte à augmenter la valeur des constantes implicites, nous pouvons supposer dans la suite  $x$  suffisamment grand. Nous posons  $\kappa = (2\eta + \nu)/2$ ,  $\kappa_1 = (3\kappa + \nu)/4$  et  $\nu_1 = (\kappa + 3\nu)/4$  de sorte que

$$0 < 2\eta < \kappa < \kappa_1 < \nu_1 < \nu.$$

Nous introduisons également le nombre entier pair  $D = D(x, \kappa)$  défini en (74). Pour évaluer  $T_\nu(x; t, \beta)$ , nous employons le développement de Taylor

$$e^{iu} = \sum_{0 \leq d < D} \frac{(iu)^d}{d!} + O\left(\frac{|u|^D}{D!}\right), \tag{76}$$

valable uniformément pour  $u \in \mathbb{R}$ . Nous obtenons, puisque  $D$  est pair,

$$\begin{aligned} T_\nu(x; t, \beta) &= S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} M_d(x; \beta) + O\left(\frac{t^D}{D!} \sum_{p \leq x} \left(\frac{g_\nu(p) - \mu_g L'}{\sigma_g \sqrt{L'}}\right)^D\right) \\ &= S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} M_d(x; \beta) + O\left(\frac{t^D}{D!} M_D(x; 0)\right), \end{aligned}$$

où  $M_d(x; \beta)$  est défini en (23). Pour estimer  $t^D M_D(x; 0)/D!$ , nous pouvons utiliser la proposition 5 en remarquant que lorsque  $\beta = 0$ , on a  $\tilde{q} = 1$  et  $\tilde{\beta} = \beta = 0$ <sup>2</sup>. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{t^D}{D!} M_D(x; 0) &\ll \pi(x) \frac{t^D}{D!} \mathbb{E}(Y^D) + \frac{t^D}{D!} x e^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}} \\ &\ll |t|x e^{-c_3 L^\kappa \log L} + |t|x e^{-\frac{1}{8}L^{\kappa_1}} \\ &\ll |t|x e^{-c_3 L^\kappa \log L}, \end{aligned}$$

où la deuxième majoration vient du lemme 13. Nous avons par conséquent

$$T(x; t, \beta) = S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} M_d(x; \beta) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{(\log x)^{1/2-\nu}}\right).$$

Appliquons la proposition 5. La contribution à  $\sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} M_d(x; \beta)$  du terme d’erreur de (66) est

$$\ll x e^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}} \sum_{1 \leq d < D} |t|^d \ll |t|x L^{\eta D} e^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1}} \ll |t|x e^{-\frac{1}{4}L^{\kappa_1} + \eta L^\kappa \log L + \kappa \log L} \ll |t|x e^{-\frac{1}{8}L^{\kappa_1}},$$

puisque  $|t| \leq L^\eta$  et  $\kappa_1 > \kappa$ . Nous avons donc

$$T(x; t, \beta) = S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{(\log x)^{1/2-\nu}}\right),$$

où  $K_d(x; \beta)$  est défini en (67). Pour conclure, il suffit donc d’établir la formule asymptotique

$$\begin{aligned} S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) \\ = S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{L}}\right) \right) \right) + O\left(\frac{\pi(x)|t|}{(\log x)^{1/2-\nu}} + x e^{-c_1 L^\nu}\right). \end{aligned} \tag{77}$$

Au vu de la définition de  $K_d(x; \beta)$ , nous distinguons trois cas.

*Premier cas :  $\tilde{q} \geq z$*

On a alors  $K_d(x; \beta) = 0$  pour tout  $1 \leq d \leq L^\kappa$ . On a donc, d’après l’inégalité triangulaire,

$$\left| S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) - S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{L}}\right) \right) \right) \right| \ll |S(x; \beta)| \ll x e^{-c_1 L^\nu},$$

où la deuxième majoration est fournie par (44). L’estimation (77) est bien vérifiée.

<sup>2</sup>Une autre possibilité est d’employer le lemme 4.6 de [7].

Deuxième cas :  $\tilde{q} < z$  et  $\tilde{\beta} = \beta$

Dans ce cas, on a  $K_d(x; \beta) = S(x; \beta)\mathbb{E}(Y^d)$  et donc

$$\begin{aligned} S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) &= S(x; \beta) \sum_{0 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} \mathbb{E}(Y^d) \\ &= S(x; \beta) \mathbb{E} \left( \sum_{0 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} Y^d \right) \\ &= S(x; \beta) \mathbb{E}(e^{itY}) + O \left( \pi(x) \frac{t^D Y^D}{D!} \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le développement de Taylor (76). Nous utilisons alors le lemme 10 avec  $w = it$  (notons que  $|t| \leq 2\pi\sigma_g L^\eta \leq L^{1/6}$  pour  $x$  suffisamment grand puisque  $\eta < \nu/2 < 1/6$ ), ainsi que le lemme 13. Nous obtenons

$$S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) = S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O \left( \frac{|t|^3}{\sqrt{L}} \right) \right) \right) + O(\pi(x)|t|e^{-c_3 L^\kappa}).$$

Cela donne bien la formule (77).

Troisième cas :  $\tilde{q} < z$  et  $\tilde{\beta} \neq \beta$

Dans ce cas, on a  $K_d(x; \beta) = S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} (\mathbb{E}_u(Y_u^d) - \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^d)) du$ , et donc

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} (\mathbb{E}_u(Y_u^d) - \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^d)) du \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} \mathbb{E}_u \left( \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} Y_u^d - \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} \tilde{Y}_u^d \right) du \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} \mathbb{E}_u \left( e^{itY_u} - e^{it\tilde{Y}_u} + O \left( \frac{t^D}{D!} (Y_u^D + \tilde{Y}_u^D) \right) \right) du \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} \mathbb{E}_u (e^{itY_u} - e^{it\tilde{Y}_u}) du + O \left( \pi(x) \frac{t^D}{D!} \int_0^1 (\mathbb{E}_u(Y_u^D) + \mathbb{E}_u(\tilde{Y}_u^D)) du \right). \end{aligned}$$

Le lemme 12 puis le lemme 13 fournissent alors

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} \mathbb{E}_u (e^{itY_u} - e^{it\tilde{Y}_u}) du + O \left( \pi(x) \frac{t^D}{D!} (\mathbb{E}(Y^D) + \mathbb{E}(\tilde{Y}^D)) \right) \\ &= S(x; \tilde{\beta}) \int_0^1 e^{-\tilde{m}u} \mathbb{E}_u (e^{itY_u} - e^{it\tilde{Y}_u}) du + O(|t|\pi(x)e^{-c_3 L^\kappa}). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité  $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a pour tout  $u \in [0, 1]$ ,

$$|\mathbb{E}_u(e^{itY_u} - e^{it\tilde{Y}_u})| \leq |t|\mathbb{E}_u(|Y_u - \tilde{Y}_u|) = |t|\mathbb{E}_u\left(\frac{|g(Z_{\tilde{Y}}^{(u)}) - \mu_g|}{\sigma_g\sqrt{L'}}\right) \leq \frac{2|t| \cdot \|g\|}{\sigma_g\sqrt{L'}}.$$

Ainsi

$$\sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) \ll \frac{|t|\pi(x)}{\sqrt{L'}} + |t|\pi(x)e^{-c_3L^k} \ll \frac{|t|\pi(x)}{\sqrt{L}}.$$

De plus, d'après (46), comme  $\beta \neq \tilde{\beta}$ , on a  $S(x; \beta) \ll xe^{-c_1L^v}$ . L'inégalité triangulaire donne ainsi trivialement pour  $|t| \leq 2\pi\sigma_gL^\eta \leq L^{1/6}$  :

$$\begin{aligned} \left| S(x; \beta) + \sum_{1 \leq d < D} \frac{(it)^d}{d!} K_d(x; \beta) - S(x; \beta) \left( e^{-t^2/2} \left( 1 + O\left( \frac{|t|^3}{\sqrt{L}} \right) \right) \right) \right| &\ll |S(x; \beta)| + \frac{|t|\pi(x)}{\sqrt{L}} \\ &\ll xe^{-c_1L^v} + \frac{|t|\pi(x)}{\sqrt{L}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

### 11. Démonstration du théorème 1

Les calculs qui suivent sont similaires à ceux menés pp. 287–288 dans [7]. Nous rappelons la définition de l'entier caractéristique  $d_g$  en (3). On a d'après (4),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=k}} e(\beta p) &= \int_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} e(-k\alpha) \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) d\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{d_g-1} \int_{-1/2d_g}^{1/2d_g} e\left(-k\left(\alpha + \frac{n}{d_g}\right)\right) \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) e\left(\frac{ng(p)}{d_g}\right) d\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{d_g-1} \int_{-1/2d_g}^{1/2d_g} e\left(-k\left(\alpha + \frac{n}{d_g}\right)\right) \sum_{p \leq x} e(\alpha g(p) + \beta p) e\left(\frac{ng(1)p}{d_g}\right) d\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{d_g-1} e\left(\frac{-kn}{d_g}\right) J(\beta, n, d_g) \end{aligned} \tag{78}$$

avec

$$J(\beta, n, d_g) = \int_{-1/2d_g}^{1/2d_g} e(-k\alpha) \sum_{p \leq x} e\left(\alpha g(p) + \left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right) d\alpha.$$

Soit  $n \in \{0, \dots, d_g - 1\}$  et  $0 < \eta < 1/2$ . Nous avons

$$J(\beta, n, d_g) = J_1 + J_2, \tag{79}$$

avec

$$J_1 = \int_{|\alpha| \leq (\log x)^{\eta-1/2}} e(-k\alpha) \sum_{p \leq x} e\left(\alpha g(p) + \left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right) d\alpha$$



et

$$J_2 = \int_{(\log x)^{\eta-1/2} < |\alpha| \leq 1/2d_g} e(-k\alpha) \sum_{p \leq x} e\left(\alpha g(p) + \left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right) d\alpha.$$

D'après le théorème A, on a

$$J_2 \ll (\log x)^3 x e^{-c_g d_g^2 (\log x)^{2\eta}} \ll \frac{\pi(x)}{\log x}. \tag{80}$$

La proposition 1 appliquée avec  $\beta = \beta + ng(1)/d_g$  fournit une formule asymptotique pour  $J_1$  uniforme en  $n$  et  $d_g$ . On a

$$\begin{aligned} J_1 &= \left( \sum_{p \leq x} e\left(\left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right) \right) \int_{|\alpha| \leq (\log x)^{\eta-1/2}} e(\alpha(\mu_g \log_b x - k)) e^{-2\pi^2 \alpha^2 \sigma_g^2 \log_b x} d\alpha \\ &+ O\left(\pi(x)(\log x) \int_{|\alpha| \leq (\log x)^{\eta-1/2}} |\alpha|^3 d\alpha + \pi(x)(\log x)^v \int_{|\alpha| \leq (\log x)^{\eta-1/2}} |\alpha| d\alpha\right. \\ &\left. + x e^{-c_1 (\log_b x)^v} (\log x)^{\eta-1/2}\right). \end{aligned} \tag{81}$$

L'intégrale en (81) se calcule en effectuant le changement de variables  $u = 2\pi\sigma_g\alpha(\log_b x)^{1/2}$ , puis en utilisant la formule classique  $\int_{\mathbb{R}} e^{iau-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}e^{-a^2/2}$ , valable pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\sum_{p \leq x} e\left(\left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2 \log_b x}} \exp\left(-\frac{(k - \mu_g \log_b x)^2}{2\sigma_g^2 \log_b x}\right) \\ &+ O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{1-4\eta}} + \frac{\pi(x)}{(\log x)^{1-2\eta-v}}\right). \end{aligned} \tag{82}$$

Nous posons alors  $v = 2\varepsilon/3$  et  $\eta = \varepsilon/6$  pour  $0 < \varepsilon < 1/2$  donné. Nous obtenons, compte tenu de (79), (80) et (82), l'estimation uniforme pour  $n \in \{0, \dots, d_g - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} J(\beta, n, d_g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2 \log_b x}} \left( \sum_{p \leq x} e\left(\left(\beta + \frac{ng(1)}{d_g}\right)p\right) \right) \exp\left(-\frac{(k - \mu_g \log_b x)^2}{2\sigma_g^2 \log_b x}\right) \\ &+ O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{1-\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

En insérant cette identité dans (78) et en remarquant que l'on a

$$\sum_{n=0}^{d_g-1} e\left(\frac{g(1)p - k}{d_g}n\right) = \begin{cases} d_g & \text{si } g(1)p \equiv k \pmod{d_g}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous parvenons bien à (6).

### 12. Démonstration du corollaire 1

Le théorème 1.2 de [7] fournit une formule asymptotique pour  $\text{card}\{p \leq x \mid s_b(p) = \lfloor \mu_b \log_b p \rfloor\}$ . Nous commençons ce paragraphe en généralisant ce résultat à toute fonction  $g \in \mathcal{F}^+$ .

**Proposition 6.** Soit  $\varepsilon \in ]0; 1/2[$  et  $g \in \mathcal{F}^+$ . On a pour tout  $x$  suffisamment grand,

$$\text{card}\{p \leq x \mid g(p) = \lfloor \mu_g \log_b p \rfloor\} = Q\left(\frac{\mu_g}{d_g} \log_b x\right) \frac{x}{(\log_b x)^{3/2}} (1 + O((\log x)^{-\frac{1}{2} + \varepsilon})), \tag{83}$$

où  $d_g$  est l'entier caractéristique de  $g$  défini en (3) et où  $Q$  est la fonction 1-périodique et strictement positive définie sur  $\mathbb{R}$  par  $Q(t) = c$  si  $\mu_g = 0$  et par

$$Q(t) = c \left( C \frac{b^{-\{t\}d_g/\lfloor \mu_g \rfloor}}{b^{d_g/\lfloor \mu_g \rfloor} - 1} + q^{-\{t\}d_g/\lfloor \mu_g \rfloor} \sum_{\substack{0 \leq j < \lfloor d_g \{t\} \rfloor \\ (j, d_g) = 1}} b^{j/\lfloor \mu_g \rfloor} (b^{1/\lfloor \mu_g \rfloor} - 1) + (1 - b^{-\{d_g t\}/\lfloor \mu_g \rfloor}) \right)$$

si  $\mu_g \neq 0$ , avec

$$c = \frac{d_g}{\varphi(d_g) \log b \sqrt{2\pi \sigma_g^2}} \quad \text{et} \quad C = \sum_{\substack{0 \leq j < d_g \\ (j, d_g) = 1}} b^{j/\lfloor \mu_g \rfloor} (b^{1/\lfloor \mu_g \rfloor} - 1),$$

où  $\varphi$  est la fonction indicatrice d'Euler. La constante implicite dans (83) ne dépend que de  $\varepsilon$ ,  $b$  et  $g$ .

**Démonstration.** Il suffit de reprendre les calculs menés dans la démonstration du théorème 1.2 de [7] et d'appliquer le théorème 1 avec  $\beta = 0$ . Nous omettons les détails.  $\square$

**Remarque 8.** La démonstration du théorème 1.2 de [7] comporte deux coquilles :

- p. 290, l. 12, la sommation sur  $0 \leq j < \{(\mu_q \log_q x)/(q - 1)\}(q - 1)$  doit être remplacée par une sommation sur  $0 \leq j < \lfloor \{(\mu_q \log_q x)/(q - 1)\}(q - 1) \rfloor$  ;
- p. 290, l. 17, la sommation sur  $0 \leq j < (q - 1)\{t\}$  doit être remplacée par une sommation sur  $0 \leq j < \lfloor (q - 1)\{t\} \rfloor$ .

Notons que la fonction  $Q$  admet un minimum strictement positif. Par conséquent, pour démontrer le corollaire 1, il suffit, d'après le critère de Weyl, d'établir que pour tout  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ g(p) = \lfloor \mu_g \log_b p \rfloor}} e(p\beta) = o\left(\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\right). \tag{84}$$

Fixons  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et rappelons la notation  $S(x; \beta)$  en (16). Remarquons que pour  $u \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv u \pmod{d_g}} e(\beta p) \right| = \left| \frac{1}{d_g} \sum_{j=0}^{d_g-1} e\left(-\frac{ju}{d_g}\right) S\left(x; \beta + \frac{j}{d_g}\right) \right| \leq \max_{0 \leq j < d_g} \left| S\left(x; \beta + \frac{j}{d_g}\right) \right|.$$

Donc d'après la relation (1), on a uniformément pour  $u \in \mathbb{Z}$  et  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv u \pmod{d_g}} e(\beta p) = o(\pi(x)).$$

Le théorème 1 permet alors de montrer que l'on a uniformément pour  $y \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $|k - \mu_g \log_b y| \leq 1$  et  $(k, d_g) = 1$ ,

$$V_k(y) := \sum_{\substack{p < y \\ g(p)=k}} e(p\beta) = o\left(\frac{y}{(\log y)^{3/2}}\right). \tag{85}$$

Cette relation subsiste trivialement lorsque  $(k, d_g) > 1$  (cf. (7)). Nous sommes maintenant en mesure d'établir (84). Si  $\mu_g = 0$ , cela découle directement de (85). Si  $\mu_g > 0$ , nous avons pour tout  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p < x \\ g(p)=\lfloor \mu_g \log_b p \rfloor}} e(p\beta) &= \sum_{0 \leq m < \lfloor \mu_g \log_b x \rfloor} V_m(b^{(m+1)/\mu_g}) - V_m(b^{m/\mu_g}) \\ &\quad + V_{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor}(x) - V_{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor}(b^{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor/\mu_g}). \end{aligned}$$

Nous déduisons directement de (85) la majoration

$$\left| \sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=\lfloor \mu_g \log_b p \rfloor}} e(p\beta) \right| \leq \sum_{1 \leq m \leq \lfloor \mu_g \log_b x \rfloor + 1} o\left(\frac{b^{m/\mu_g}}{m^{3/2}}\right) = o\left(\sum_{m \leq \lfloor \mu_g \log_b x \rfloor + 1} \frac{b^{m/\mu_g}}{m^{3/2}}\right),$$

où la dernière égalité découle du théorème de Cesàro (cf. par exemple [20], problème 70 p. 16). L'estimation standard (voir lemme 2.3 de [8] par exemple)

$$\sum_{j=1}^v \frac{b^j}{j^\alpha} \sim_{v \rightarrow +\infty} \frac{b^{v+1}}{v^\alpha}$$

donne bien alors (84). La démonstration est identique lorsque  $\mu_g < 0$  en partant cette fois de l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ g(p)=\lfloor \mu_g \log_b p \rfloor}} e(p\beta) &= \sum_{1 \leq m \leq \lfloor \mu_g \log_b x \rfloor} W_m(b^{m/|\mu_g|}) - W_m(b^{(m-1)/|\mu_g|}) \\ &\quad + W_{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor + 1}(x) - W_{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor + 1}(b^{\lfloor \mu_g \log_b x \rfloor/|\mu_g|}), \end{aligned}$$

où l'on a posé pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$W_m(y) = \sum_{\substack{p \leq y \\ g(p)=-m}} e(p\beta).$$

### Références

1. N. L. BASSILY ET I. KÁTAI, Distribution of the values of  $q$ -additive functions on polynomial sequences, *Acta Math. Hungar.* **68**(4) (1995), 353–361.
2. P. BILLINGSLEY, *Probability and measure*, éd. third, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995). A Wiley-Interscience Publication.

3. J. BOURGAIN, Prescribing the binary digits of primes, *Israel J. Math.* **194**(2) (2013), 935–955.
4. J. BOURGAIN, Prescribing the binary digits of primes, II, *Israel J. Math.* **206**(1) (2015), 165–182.
5. M. DRMOTA ET P. J. GRABNER, Analysis of digital functions and applications, in *Combinatorics, automata and number theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 135, pp. 452–504 (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
6. M. DRMOTA ET C. MAUDUIT, Weyl sums over integers with affine digit restrictions, *J. Number Theory* **130**(11) (2010), 2404–2427.
7. M. DRMOTA, C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Primes with an Average Sum of Digits, *Compositio* **145**(2) (2009), 271–292.
8. E. FOUVRY ET C. MAUDUIT, Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne, *J. Number Theory* **114**(1) (2005), 135–152.
9. G. HARMAN, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **125**(2) (2006), 179–185.
10. G. HARMAN ET I. KÁTAI, Primes with preassigned digits. II, *Acta Arith.* **133**(2) (2008), 171–184.
11. H. IWANIEC ET E. KOWALSKI, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume 53 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2004).
12. I. KÁTAI, On the sum of digits of primes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **30**(1–2) (1977), 169–173.
13. I. KÁTAI, Distribution of digits of primes in  $q$ -ary canonical form, *Acta Math. Hungar.* **47**(3–4) (1986), 341–359.
14. L. KUIPERS ET H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, Pure and Applied Mathematics (Wiley-Interscience John Wiley & Sons, New York, 1974), 390 pp.
15. B. MARTIN, C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales, *Acta Arith.* **165**(1) (2014), 11–45.
16. B. MARTIN, C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Fonctions digitales le long des nombres premiers, *Acta Arith.* **170**(2) (2015), 175–197.
17. C. MAUDUIT, Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56**(7) (2006), 2525–2549.
18. C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers, *Ann. of Math. (2)* **171**(3) (2010), 1591–1646.
19. C. MAUDUIT ET A. SÁRKÖZY, On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed, *Acta Arith.* **81** (1997), 145–173.
20. G. PÓLYA ET G. SZEGÖ, *Problems and theorems in analysis. I, Classics in Mathematics* (Springer, Berlin, 1998). Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by Dorothee Aepli, Reprint of the 1978 English translation.
21. I. VINOGRADOV, The method of trigonometrical sums in the theory of numbers, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **23**(1947) (1947), 110 pp.
22. I. VINOGRADOV, *The method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers, translated from the Russian, revised and annotated by K. F. Roth and A. Davenport* (Interscience, London, 1954).
23. D. WOLKE, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **119**(2) (2005), 201–209.