Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2006) **5**(4), 605–627
doi:10.1017/S1474748005000277 Printed in the United Kingdom © Cambridge University Press

CYCLES DE TATE ET CYCLES MOTIVÉS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES EN CARACTÉRISTIQUE $p > 0$

YVES ANDRÉ

Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230, Paris Cedex 05, France (yves.andre@ens.fr)

(Reçu le 22 October 2003 ; accepté le 24 March 2005)

Résumé La conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis a été prouvée par Tate lui-même dans le cas d'un H^2, mais reste ouverte en degré supérieur. Nous démontrons ici une variante affaiblie de cette conjecture (en tout degré), qui décrit néanmoins tout cycle de Tate « en termes de » cycles algébriques. Cette variante s'applique aussi aux variétés abéliennes A sur un corps de type fini sur un corps fini, au moins dans le cas « de bonne réduction », i.e. dans le cas où A est fibre générique d'un schéma abélien sur une base projective normale sur un corps fini.

Abstract Tate's conjecture for abelian varieties over finite fields has been proven by Tate himself for H^2 but remains open in higher degree. We prove a weaker version of the conjecture in any degree, which describes every Tate cycle 'in terms of' algebraic cycles. This variant also applies to abelian varieties A over finitely generated fields of characteristic p, at least in the 'good reduction' case, i.e. when A is the generic fibre of an abelian scheme on a normal projective variety defined over a finite field.

Mots clés : cycle de Tate ; cycle algébrique ; cycle motivé ; variété abélienne ; variété de Shimura ; corps fini

Keywords: Tate cycle; algebraic cycle; motivated cycle; abelian variety; Shimura variety; finite field

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 14G15; 14K15; 14C25

Table de matières

Introduction

0.1. La théorie des motifs purs envisagée par Grothendieck dépend de ses conjectures standard sur les cycles algébriques. Vu l'état stagnant de ces conjectures, plusieurs ten-

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

tatives ont été proposées pour les contourner. Les plus récentes sont [**2**] et [**5**] : il s'agit en un sens de deux modifications minimales de la théorie, l'une par excès et l'autre par défaut (cf. [**4**, Chapitre 9]).

Le point de vue de [**2**] est d'adjoindre formellement aux morphismes de la catégorie des motifs les inverses des morphismes dont le théorème de Lefschetz affirme qu'ils induisent des isomorphismes en cohomologie. Cette modification donne lieu, sur un corps de caractéristique nulle, à une catégorie tannakienne semi-simple de motifs et à la batterie attendue de ses réalisations.

Les morphismes de cette catégorie, baptisés « correspondances motivées », ont en outre la propriété remarquable de se déformer par « transport parallèle ». Ceci permet d'attaquer certains cas de la conjecture de Hodge, quitte à affaiblir l'énoncé en remplaçant cycles algébriques par cycles motivés.

On prouve ainsi dans [**2**] que *tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est motivé.*

0.2. L'objectif de cet article est de démontrer un résultat analogue pour les variétés abéliennes sur les corps finis. Rappelons qu'un cycle de Tate est une classe de cohomologie ℓ-adique invariante sous l'action du groupe de Galois absolu du corps de base (supposé de type fini sur son sous-corps premier, de caractéristique distincte de ℓ).

Théorème 0.2.1. *Tout cycle de Tate sur une variété abélienne sur un corps fini est combinaison $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire de cycles motivés.*

C'est une variante affaiblie de la conjecture de Tate (cycles motivés remplaçant cycles algébriques). Au § 6, nous étendons ce résultat aux *variétés abéliennes sur un corps de type fini sur un corps fini*, au moins *dans le cas de bonne réduction en tout premier de hauteur* 1.

La méthode de démonstration du théorème 0.2.1 s'inspire fortement du travail [**18**] de Milne, où celui-ci prouve que la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis découlerait de la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes de type CM en caractéristique nulle. Le fait que tout cycle de Hodge sur une variété abélienne soit motivé suggère alors de combiner [**18**] et [**2**] pour obtenir le théorème 0.2.1.

0.3. Pour éviter toute interprétation erronée du théorème 0.2.1, rappelons d'emblée qu'un *cycle motivé* sur une variété projective lisse X est une classe de cohomologie de la forme $\mathrm{pr}^{XX'}_{X*}(\alpha \cup *_L(\beta))$, où X' est une variété projective lisse « auxiliaire », α et β sont des classes de cycles algébriques sur le produit $X \times X'$, et $*_L$ est l'*inverse* de l'isomorphisme de Lefschetz induit par les cup-produits itérés avec la classe de cohomologie d'une section hyperplane de $X \times X'$ dans le produit de Segre d'un plongement projectif de X et d'un plongement projectif de X'.

Bien qu'on sache depuis longtemps que sur une variété abélienne, l'inverse de l'isomorphisme de Lefschetz est donné par une correspondance algébrique (Lieberman), le théorème 0.2.1 n'implique pas pour autant la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis, car les cycles motivés en jeu font intervenir certaines variétés auxiliaires X' qui ne sont pas des variétés abéliennes.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Nous montrons qu'on peut se limiter à des variétés auxiliaires qui sont fibrées en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse connexe (nous montrons en fait un résultat bien plus précis). On déduit de là et du théorème 0.2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 0.3.1 (cf. Remarque 5.2.4). *Si la conjecture standard de type Lefschetz est vraie pour toute variété fibrée en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse connexe sur* $\bar{\mathbb{Q}}$ ou bien *sur* $\bar{\mathbb{F}}_p$,* *alors la conjecture de Tate est vraie pour toute variété abélienne sur un corps fini de caractéristique* p.

0.4. Le point technique principal est la preuve du fait qu'un cycle motivé sur une variété abélienne A de type CM sur $\bar{\mathbb{Q}}_p$ se spécialise en un cycle motivé sur la réduction de A. Là encore, la difficulté vient de la mauvaise réduction des variétés auxiliaires (fibrées en variétés abéliennes sur des courbes projectives lisses connexes). Pour traiter ce point, nous faisons appel aux techniques de déformation et de spécialisation de cycles motivés de [**3**], ainsi qu'à une étude détaillée du comportement à l'infini de modèles de certaines variétés de Shimura « unitaires » en caractéristique mixte.

0.5. Ce point étant établi, la stratégie consiste grosso modo, en s'appuyant sur un calcul tannakien dû à Milne (cf. 4.7.1), à montrer que les cycles de Tate sur les variétés abéliennes sur un corps fini k s'obtiennent, par combinaison linéaire et cup-produit, à partir de classes de diviseurs d'une part, et de spécialisations de cycles motivés sur des variétés abéliennes de type CM sur $\bar{\mathbb{Q}}$ d'autre part.

Nous montrons aussi que la catégorie de motifs—bâtie en termes de correspondances motivées—découpés sur les variétés abéliennes sur k est *abélienne semi-simple* (Proposition 5.2.1). Elle est même tannakienne, mais la question de savoir si le corps des endomorphismes de l'objet unité est réduit à $\mathbb{Q}$ reste ouverte (cf. Remarque 5.2.3).

0.6. Pour étendre le théorème 0.2.1 au cas d'une variété abélienne A sur un corps de type fini sur un corps fini dans le cas de bonne réduction (i.e. dans le cas où A est fibre générique d'un schéma abélien sur une base projective normale sur un corps fini), nous utilisons l'étude faite dans [**3**] de la variation du groupe de Galois motivique dans une famille.

1. Cycles de Hodge et cycles motivés sur les variétés abéliennes

1.1. Soit k un corps.

Notation 1.1.1. On note $\mathcal{V}_k$ la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des k-schémas projectifs lisses qui est stable par somme, produit, passage aux composantes connexes, et qui contient les variétés abéliennes sur k ainsi que l'espace total X de tout schéma abélien $X \to S$, où S est une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k.

* C'est dans cette seconde alternative que le résultat est nouveau ; dans la première, il se déduit du résultat de [**2**] cité ci-dessous comme théorème 1.2.1, joint au résultat principal de [**18**].

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

1.2. Dans [**2**, 6.3], nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Tout cycle de Hodge sur une variété abélienne complexe est motivé, modelé sur* $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.

Ce résultat implique (cf. l. 5, p. 9 et Proposition 2.5.2 de [**2**]) celui de Deligne [**8**] (tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est de Hodge absolu) ainsi que les compléments p-adiques qu'y ont apportés Blasius, Ogus et Wintenberger.

Pour les besoins de la suite, nous allons rappeler le principe de la démonstration, avec quelques compléments.

Le plan de démonstration suit le fil de [**8**]. On procède en trois étapes.

(1) Réduction au cas d'une variété abélienne de type CM. Rappelons qu'une variété abélienne A sur un corps est dite *de type CM si* $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ *contient une sous-*$\mathbb{Q}$*-algèbre semi-simple commutative de dimension* $2 \dim A$ *sur* $\mathbb{Q}$.

(2) Réduction au cas où le cycle de Hodge est un « cycle de Weil ».

(3) Réduction au cas où la variété abélienne est puissance d'une courbe elliptique de type CM.

Les étapes (1) et (3) sont basées sur le cas particulier suivant du théorème de déformation des cycles motivés de [**2**, 0.5].

Proposition 1.2.2. *Soient S une variété projective connexe et lisse sur $\mathbb{C}$, et $f : X \to S$ un morphisme projectif lisse. Soient s et t deux points de S.*

Soit $\mathcal{V}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des variétés projectives lisses, stable par somme, produit, passage aux composantes connexes, et contenant les fibres de f ainsi que X.

Soient q un entier naturel et ξ une section $R^{2q} f_* \mathbb{Q}(q)$ sur l'analytisée de S. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *il existe $s \in S(\mathbb{C})$ tel que $\xi_s \in H^{2q}(X_s, \mathbb{Q})(q)$ soit un cycle motivé sur X_s modelé sur $\mathcal{V}$,*

(ii) *pour tout $t \in S(\mathbb{C})$, ξ_t est un cycle motivé sur X_t modelé sur $\mathcal{V}$,*

(iii) *ξ provient d'un cycle motivé sur X modelé sur $\mathcal{V}$.*

Une preuve tout à fait différente, et plus effective, est donnée dans [**3**, 7.2.1].

1.3. Première étape [2, 6.3.1]

(Elle ne nous servira pas dans la suite.) On part d'une variété abélienne A et d'un cycle de Hodge $\theta \in H^{2q}(A, \mathbb{Q})(q)$. Si $q = 1$, le théorème de Lefschetz montre que θ est algébrique. On supposera donc dans la suite que $q > 1$.

Dans cette étape, on construit un pinceau abélien compact $f : X \to S$, dont une fibre X_t est isogène à $A \times A$, une autre X_s a multiplication complexe, et l'image inverse de (θ, θ) sur X_t est invariant sous la monodromie, donc est fibre en t d'une section ξ de

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

$R^{2q}f_*\mathbb{Q}(q)$. L'application de la proposition 1.2.2 à ce pinceau nous ramène à montrer que tout cycle de Hodge sur X_s est motivé modelé sur $\mathcal{V}$.

L'idée de la construction est de considérer la famille de type de Hodge associée au groupe de Mumford–Tate spécial G^1 de A (vu comme sous-groupe du groupe des similitudes symplectiques), et avec structure de niveau $\nu \geqslant 3$ fixée ; sur la variété de Shimura connexe qui paramètre cette famille, on trace alors une courbe passant par le point t correspondant à A et par un point CM, i.e. un point correspondant à une variété abélienne de type CM (il en existe d'après [**22**]). Pour obtenir une courbe compacte S, il y a lieu de se placer dans le cas où le bord de la variété de Shimura dans sa compactification minimale (Baily–Borel–Satake) est de codimension au moins 2. On y parvient en choisissant un corps quadratique réel L^+ auxiliaire, et en remplaçant la famille de type de Hodge associée à G^1 par celle associée à $R_{L^+/\mathbb{Q}}(G^1 \otimes_{\mathbb{Q}} L^+)$, où $R_{L^+/\mathbb{Q}}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil.

1.4. Seconde étape [2, 6.3.2]

Commençons par de brefs rappels sur les « cycles de Weil » (cf. [**1**, **8**, **21**, **29**]). Soit E un corps CM, i.e. une extension totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel E^+.

Une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge V de dimension paire $d = 2q$ et de type $(1,0)+(0,1)$, munie d'une action de E, est dite *de Weil* s'il existe une forme E-hermitienne $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ sur le E-espace sous-jacent à V admettant un sous-espace totalement isotrope de dimension q, et s'il existe un élément totalement imaginaire ε de E tel que

$$(v,w) = \operatorname{tr}_{E/\mathbb{Q}} \varepsilon\langle v,w\rangle$$

polarise V. D'après Landherr (cf. [**25**, **26**]), cette condition détermine l'espace E-hermitien sous-jacent à V. Elle implique que $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$ sont des $E\otimes\mathbb{R}$-modules libres.

On vérifie alors que les éléments de $(\bigwedge_E^{2q} V)(q)$ sont de type $(0,0)$, donc des cycles de Hodge, appelés *cycles de Weil*.

Soit maintenant une variété abélienne A de type CM, et soit $\theta \in H^{2q}(A,\mathbb{Q})(q)$ un cycle de Hodge sur A. On montre [**1**] qu'il existe un corps CM E galoisien sur $\mathbb{Q}$, des variétés abéliennes A_j de dimension

$$g = nq, \quad \text{où } n = [E:\mathbb{Q}],$$

telles que $\operatorname{End} A_j \otimes \mathbb{Q}$ contienne E, des homomorphismes $f_j : A \to A_j$, et des cycles de Weil $\theta_j \in (\bigwedge_E^{2q} H_B^1(A_j,\mathbb{Q}))(q)$ tels que $\theta = \sum f_j^*\theta_j$. On est donc ramené à prouver l'algébricité de ces cycles de Weil.

Par ailleurs, l'argument de [**1**] montre qu'on peut remplacer E par tout corps CM plus gros galoisien sur $\mathbb{Q}$. Cela permet de choisir ad libitum un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, et de supposer que E est de la forme $E^+.\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ où E^+ est totalement réel.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

1.5. Troisième étape [2, 6.3.3]

On part cette fois-ci d'une variété abélienne A (qu'on pourrait supposer de type CM) munie d'un cycle de Weil θ. On construit un pinceau abélien compact $f : X \to S$, et des points s, t de S tels que

(i) X_s soit isogène à la puissance g-ième d'une courbe elliptique (de type CM si on veut),

(ii) X_t soit isogène à A,

(iii) l'image inverse de θ sur X_t s'étende en une section globale ξ de

$$\biggl(\bigwedge_E^{2q} R^1 f_* \mathbb{Q}\biggr)(q) \subset R^{2q} f_* \mathbb{Q}(q),$$

(iv) la fibre de ξ en s soit algébrique.

On applique la proposition 1.2.2 à ce pinceau, et on conclut de (iv) que θ est algébrique.

L'idée est de considérer, comme en [**8**], la famille de type de Hodge associée au groupe unitaire $R_{E^+/\mathbb{Q}}\,\mathrm{SU}(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle) \subset \mathrm{Sp}(V, (\cdot\,,\cdot))$ (et avec structure de niveau $\nu \geqslant 3$). Cette famille contient des fibres du type X_s, X_t décrit ci-dessus (cf. [**2**, preuve de 6.3.3]), correspondant à des points s, t de la variété de Shimura connexe Sh^0 qui paramètre cette famille. D'autre part, comme on suppose $q > 1$, le bord de Sh^0 dans sa compactification minimale est de codimension au moins 2. Par un argument de type Bertini, on trouve enfin une courbe S projective lisse connexe et un morphisme

$$S \to \mathrm{Sh}^0$$

(qu'on peut supposer être une immersion fermée, peu importe) dont l'image passe par les points s, t, et telle que l'image inverse de la famille de type de Hodge sur S nous donne le pinceau abélien voulu.*

Par ailleurs, il est bien connu que la famille de type de Hodge est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, de même que la compactification minimale $\mathrm{Sh}^{0,*}$ de Sh^0, et que les points CM de Sh^0 sont définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$. On en conclut que l'*on peut choisir f et s, t définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$*. Ceci montre qu'on peut raffiner le théorème 1.2.1, dans le cas CM, de la manière suivante.

Variante 1.5.1. *Soit A une variété abélienne de type CM sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Alors tout cycle de Hodge sur $A_{\mathbb{C}}$ est un cycle motivé, modelé sur la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}$-variétés projectives lisses, stable par somme, produit, passage aux composantes connexes, et contenant les variétés abéliennes de type CM ainsi que l'espace total de tout pinceau abélien de base une courbe projective lisse.*

* Il est bien connu que sur une variété abélienne du type X_s, tout cycle de Hodge est algébrique (en fait combinaison linéaire de produit de classes de diviseurs (cf. [**14**])), d'où (iv).

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

2. Spécialisation des cycles motivés sur les variétés abéliennes de type CM

2.1. Dans [**3**], nous avons donné diverses variantes et raffinements de la proposition 1.2.2 sur un corps de caractéristique quelconque. En voici une conséquence, dans le cas particulier des pinceaux abéliens qui nous intéresse ici.

Soient k un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable de k, et ℓ un nombre premier distinct de $\operatorname{car} k$. Comme dans [**3**] nous abrégerons $H^i_{\text{ét}}(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ en $H^i_\ell(Y)$.

Proposition 2.1.1. *Soit $f : X \to S$ un schéma abélien sur une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps k. Soient q un entier naturel et ξ une section globale de $R^{2q} f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell(q)$ ($\ell \neq \operatorname{car} k$).*

Si pour un point $s \in S(k)$, $\xi_s \in H^{2q}_\ell(X_s)(q)$ est un cycle motivé sur X_s modelé sur $\mathcal{V}_k$, il en est de même pour tout point.

Démonstration. Voir [**3**, 7.2.1]. □

2.2. Le $\mathbb{Q}_\ell$-sous-espace V_f de $H_\ell(X)$ introduit dans [**3**, 5.2.1] n'est autre que la partie $H^{\text{pair}}(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell)$ dans le scindage canonique « à la Lieberman » de la filtration de Leray

$$H(X, \mathbb{Q}_\ell) = H^0(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^1(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell) \oplus H^2(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell)$$

(cf. [**3**, 6.2.1]).

Si $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, on sait que le projecteur de Künneth pair de X est algébrique [**12**], et il suit que le projecteur π_{V_f} sur $H^{\text{pair}}(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell)$ selon $H^1(S, \oplus R^j f_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell)$ est donné par une correspondance algébrique (cf. [**3**, 6.2.1]).

Selon [**3**, 7.1.2], on peut alors raffiner la proposition 2.1.1 en remplaçant « cycles motivés modelés sur $\mathcal{V}_k$ » par « cycles motivés modelés sur $\tilde{\mathcal{V}}_k$ », où $\tilde{\mathcal{V}}_k$ *contient* $(X_s, H_\ell(X_s))$ *pour tout* $s \in S(K)$ *et les* (X, V_f) *pour tout schéma abélien* $X \xrightarrow{f} S$ *sur une courbe projective lisse géométriquement connexe*. Nous renvoyons à [**3**] pour les définitions précises.

L'avantage est un meilleur contrôle de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\operatorname{End} \mathbf{1}$ dans la catégorie de motifs correspondante (cf. [**3**, 3.1]). Cette $\mathbb{Q}$-algèbre est engendrée par les « nombres » $\langle \alpha, *_H \alpha \rangle$, où α parcourent les classes de cycles algébriques sur X contenus dans V_f (pour tous les couples (X, V_f) comme ci-dessus), et $*_H$ est l'involution de Hodge sur X attachée à une quelconque polarisation du type $\eta = f^*$ (polarisation de S) + classe d'un fibré inversible relativement ample symétrique rigidifié le long de la section nulle.

On note $\mathbb{Q}_{(\ell)}$ *le corps des fractions de* $\operatorname{End} \mathbf{1}$. C'est un sous-corps dénombrable de $\mathbb{Q}_\ell$, conjecturalement égal à $\mathbb{Q}$.

2.3. On fixe désormais un nombre premier p.

Dans [**3**], nous avons appliqué la déformation des cycles motivés à l'étude de leur spécialisation en inégales caractéristiques $(0, p)$. En voici un corollaire, dans le cas particulier des pinceaux abéliens.

Soient $\mathfrak{o}$ un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, et K son corps de fractions (de caractéristique nulle).

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Proposition 2.3.1. *Soit $\mathfrak{S}$ un $\mathfrak{o}$-schéma en courbes, projectif et plat, à fibre générique lisse géométriquement connexe. Soit $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ un schéma abélien. Soient $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ deux $\mathfrak{o}$-points de $\mathfrak{S}$.*

Soient q un entier naturel et ξ une section globale de $R^{2q}(\mathfrak{f}_K)_{\text{ét}*}\mathbb{Q}_\ell(q)$ ($\ell \neq p$). On suppose que $\xi_{\mathfrak{s}_K} \in H^{2q}_\ell(\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_K})$ est un cycle algébrique.

Alors $\xi_{\mathfrak{t}_K} \in H^{2q}_\ell(\mathfrak{X}_{\mathfrak{t}_K})$ est un cycle motivé modelé sur $\mathcal{V}_K$, et sa spécialisation $\xi_{\mathfrak{t}_{\bar{\mathbb{F}}_p}} \in H^{2q}_\ell(\mathfrak{X}_{\mathfrak{t}_{\bar{\mathbb{F}}_p}})$ est un cycle motivé modelé sur $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$.

Démonstration. Voir [**3**, 9.2.1] (voir aussi la remarque 9.3.3 de [**3**]). □

2.4. Rappelons que si une variété abélienne A sur K a bonne réduction, c'est la fibre générique d'un $\mathfrak{o}$-schéma projectif lisse $\mathfrak{A}$, qui est unique à isomorphisme unique près, et qui admet une structure de schéma abélien [**6**, § 1.2]. Rappelons aussi que si A est de type CM, elle acquiert bonne réduction sur une extension finie (Serre–Tate). Par ailleurs, toute variété abélienne sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ est de type CM (Tate).

Théorème 2.4.1. *Soit A une variété abélienne de type CM ayant bonne réduction sur K. Soit $\theta \in H^{2r}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(r)$ un cycle motivé sur A. Alors sa spécialisation dans $H^{2r}_\ell(\mathfrak{A}_{\bar{\mathbb{F}}_p})(r)$ est un cycle motivé, modelé sur $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, sur la variété abélienne $\mathfrak{A}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$.*

Démonstration. La variété abélienne A est définie sur un certain corps de nombres $K_0 \subset K$ qu'on plonge dans $\mathbb{C}$. On peut remplacer librement K par une extension finie (et donc aussi K_0).

La seconde étape (1.4) du § 1 nous ramène au cas où le cycle motivé $\theta \in H^{2r}(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(r)$ est un cycle de Weil.

Dans la troisième étape (1.5) du § 1, nous avons construit un pinceau abélien $f : X \to S$ (sur une courbe projective lisse géométriquement connexe définie sur une extension finie de K_0), admettant une structure de niveau ν (qu'on suppose supérieure ou égale à 3 et non divisible par p), et deux points s et t de S (qu'on peut aussi supposer définis sur une extension finie de K_0), tels que

(i) X_s soit isogène à la puissance g-ième d'une courbe elliptique de type CM,

(ii) X_t soit isogène à A,

(iii) l'image inverse de θ sur X_t s'étende en une section globale ξ de

$$\Big(\bigwedge_E^{2q} R^1 f_*\mathbb{Q}\Big)(q) \subset R^{2q} f_*\mathbb{Q}(q),$$

(iv) la fibre de ξ en s soit algébrique.

Quitte à remplacer K_0 par une extension finie idoine et à compléter p-adiquement, on peut supposer que f est défini sur le corps complet K, et que s et t sont des K-points. Du fait de la multiplication complexe et de la présence de la structure de niveau, X_s et X_t ont bonne réduction sur $\mathfrak{o}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Pour appliquer la proposition 2.3.1, il s'agit de montrer que l'on peut choisir la courbe S ci-dessus (supposée définie sur K_0) de telle sorte qu'elle se prolonge en un $\mathfrak{o}$-schéma $\mathfrak{S}$ projectif et plat, et que le pinceau abélien f de base S se prolonge en un schéma abélien $\mathfrak{f}$ sur $\mathfrak{S}$ (le cas le plus délicat est lorsque p divise le discriminant de E^+, car la variété de Shimura connexe Sh^0 de type unitaire qui paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g de type Weil, munies de structure de niveau $\nu \geqslant 3$ non divisible par p, est lisse, mais n'a pas bonne réduction relativement à l'anneau des entiers $\mathfrak{o}$ d'un corps p-adique K assez gros).

Le point clé sera de montrer que le « bord minimal » de cette réduction est de codimension au moins 2 pour $q > 1$.

On note comme d'habitude $\mathcal{A}_{g,\nu}$ le schéma de modules sur $\mathbb{Z}[1/\nu]$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g avec structure de niveau (non nécessairement symplectique) $\nu \geqslant 3$, et $\mathcal{A}^*_{g,\nu}$ la compactification minimale de $\mathcal{A}_{g,\nu}$ construite dans [**11**].

On note $\mathrm{Sh}^0 \to \mathcal{A}_{g,\nu} \otimes K$ le morphisme canonique, et $\mathcal{M}^{0,*}$ l'adhérence de l'image de Sh^0 dans $\mathcal{A}^*_{g,\nu} \otimes \mathfrak{o}$.

Proposition 2.4.2. *Supposons que $E = E^+.\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, et que p se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$.*

Alors le complémentaire de $(\mathcal{M}^{0,*} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p) \cap (\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p)$ dans $\mathcal{M}^{0,*} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est de codimension au moins 2.

La démonstration occupera le § 3.

2.5. Admettons la proposition 2.4.2 et poursuivons la démonstration du théorème 2.4.1. On note encore s et t les K-points de $(\mathcal{M}^{0,*} \otimes K) \cap (\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes K)$ définis par X_s et X_t. Comme ces variétés ont bonne réduction, ils s'étendent en fait en des $\mathfrak{o}$-points $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ de $\mathcal{M}^{0,*} \cap (\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathfrak{o})$.

Considérons l'éclaté $\bar{\mathfrak{M}}$ de $\mathcal{M}^{0,*}$ centré en le sous-schéma fermé défini par l'image de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$, et l'ouvert $\mathfrak{M}$ obtenu en retirant le transformé strict du bord $\mathcal{M}^{0,*} \setminus (\mathcal{M}^{0,*} \cap (\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathfrak{o}))$. La proposition 2.4.2 permet d'appliquer à cette situation le lemme suivant.

Lemme 2.5.1. *Soient $\bar{\mathfrak{M}}$ un $\mathfrak{o}$-schéma projectif plat de dimension relative $d > 1$, et $\mathfrak{M}$ un ouvert de $\bar{\mathfrak{M}}$ dense fibre à fibre. On suppose $\mathfrak{M} \otimes K$ lisse et géométriquement connexe, et que $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \setminus \mathfrak{M} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est de codimension au moins 2 dans $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$.*

Alors $\mathfrak{M} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est connexe. En outre, toute section linéaire assez générale de codimension relative $d-1$ dans un plongement projectif $\bar{\mathfrak{M}} \hookrightarrow \boldsymbol{P}^N_{\mathfrak{o}}$ définit un $\mathfrak{o}$-schéma en courbes $\mathfrak{S}$, projectif et plat, à fibre générique lisse géométriquement connexe, et contenu dans $\mathfrak{M}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{Gr}$ la $\mathfrak{o}$-grassmannienne des sous-variétés linéaires de codimension $d-1$ dans $\boldsymbol{P}^N_{\mathfrak{o}}$. Pour $\sigma_{\bar{\mathbb{F}}_p} \in \mathfrak{Gr}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ dans un ouvert dense, la section de $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ correspondant à $\sigma_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ est une courbe $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{F}}_p} \subset \mathfrak{M} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ qui coupe chaque composante connexe de $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$, et ne coupe pas le bord $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \setminus \mathfrak{M} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$. Pour $\sigma_K \in \mathfrak{Gr}(K)$ dans un ouvert dense, la section de $\bar{\mathfrak{M}} \otimes K$ correspondant à σ_K est une courbe $\mathfrak{S}_K \subset \mathfrak{M} \otimes K$

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

lisse et géométriquement connexe puisque $\mathfrak{M} \otimes K$ est lisse géométriquement connexe de dimension au moins 2. Cet ouvert contient un σ_K se spécialisant en $\sigma_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, de sorte que $\mathfrak{S}_K$ et $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ sont les fibres génériques et spéciales d'une $\mathfrak{o}$-courbe $\mathfrak{C}$ projective plate. Par le théorème de connexité de Zariski, $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ est connexe, et comme $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ coupe chaque composante connexe de $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$, $\bar{\mathfrak{M}} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est connexe. □

On est alors en situation d'appliquer la proposition 2.3.1 (raffinée en remplaçant $\mathcal{V}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ par $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$) à l'image inverse sur $\mathfrak{S}$ du schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_{g,\nu}$, en notant que l'image de $\mathfrak{S}$ dans $\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathfrak{o}$ contient l'image de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$, et on obtient la proposition 2.3.1. □

Remarques 2.5.2.

(1) Si l'on pouvait choisir $\mathfrak{S}$ lisse sur $\mathfrak{o}$, il n'y aurait pas lieu de faire appel au théorème de spécialisation de [**3**], on serait dans le cas facile où la variété auxiliaire intervenant dans l'écriture du cycle motivé considéré a aussi bonne réduction.

L'obstacle à la construction d'un schéma en courbes $\mathfrak{S}$ *lisse* sur $\mathfrak{o}$, dont l'image dans $\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathfrak{o}$ contienne l'image de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$, réside en ce que les réduction de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ ne sont pas nécessairement des points lisses de $\mathcal{M}^{0,*} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$.

(2) Pour étendre le théorème de spécialisation des cycles motivés théorème 2.4.1 au cas d'une variété abélienne quelconque (disons définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ pour simplifier), il suffirait, en suivant la même voie, de prouver qu'on peut choisir, dans la première étape (§ 1.3) de la preuve du théorème 1.2.1, la courbe S qui y apparaît (supposée définie sur K_0) de telle sorte qu'elle se prolonge en un $\mathfrak{o}$-schéma $\mathfrak{S}$ projectif et plat, et que le pinceau abélien f de base S se prolonge en un schéma abélien $\mathfrak{f}$ sur $\mathfrak{S}$. Pour ce faire, on est confronté à la question générale suivante sur les variétés de Shimura, que nous formulons de manière un peu vague.

Partons d'une variété de Shimura connexe paramétrant une famille (de variétés abéliennes) de type de Hodge associée à un groupe réductif (de Mumford–Tate spécial) G^1 donné, comme dans [**3**].

Question 2.5.3. *Est-ce que l'analogue de la proposition 2.4.2 vaut en remplaçant* Sh^0 *par la variété de Shimura connexe paramétrant une famille de type de Hodge associée au groupe* $R_{L^+/\mathbb{Q}}(G^1 \otimes_{\mathbb{Q}} L^+)$*, pour un corps quadratique réel, ou du moins pour un corps de nombres totalement réel* L^+ *convenable?*

2.6. Traduisons à présent le théorème de spécialisation 2.4.1 en termes de catégories de motifs (définis à l'aide de correspondances motivées).

Soit k un corps.

Notation 2.6.1. On note $\mathcal{W}_k$ la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des k-schémas projectifs lisses qui est stable par somme disjointe et qui contient les variétés abéliennes de type CM sur k.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Notons que $\mathcal{W}_k$ est stable par produit et passage aux composantes connexes, et est contenue dans $\mathcal{V}_k$. Si $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, $\mathcal{W}_k$ n'est autre que la catégorie des sommes disjointes de variétés abéliennes.

Si C est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, on dispose d'une part de la $\otimes$-catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{W}_C)_{\mathcal{V}_C}$ des motifs découpés (par des correspondances motivées modelées sur $\mathcal{V}_C$) sur les variétés abéliennes de type CM sur C. Nous la noterons simplement $\mathcal{M}(\mathcal{W}_C)$ pour abréger. C'est une catégorie tannakienne semi-simple sur $\mathbb{Q}$. En fait, il découle de la variante 1.5.1 qu'elle « ne dépend pas » de C : si l'on fixe des plongements $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$, les $\otimes$-foncteurs naturels

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{W}_{\mathbb{C}}), \qquad \mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p})$$

sont des équivalences.

Nous aurons besoin aussi de la variante $\mathcal{M}(\mathcal{W}_C)_{\mathcal{V}_C}[\mathbb{Q}_{(\ell)}]$ à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}_{(\ell)}$ (voir § 2.2), qui n'est autre que la catégorie tannakienne semi-simple $\mathcal{M}(\mathcal{W}_C) \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$ déduite de $\mathcal{M}(\mathcal{W}_C)$ (ici et plus loin, nous notons $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$ la $\mathbb{Q}_{(\ell)}$-catégorie tannakienne semi-simple déduite d'une $\mathbb{Q}$-catégorie tannakienne semi-simple $\mathcal{T}$ en tensorisant les morphismes par $\mathbb{Q}_{(\ell)}$ et en passant à l'enveloppe pseudo-abélienne).

Par ailleurs, on dispose de la $\otimes$-catégorie

$$\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})_{\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}}[\mathbb{Q}_{(\ell)}]$$

des motifs découpés sur les sommes disjointes de $\bar{\mathbb{F}}_p$-variétés abéliennes, modelés sur $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}_{(\ell)}$. Nous la noterons simplement $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$. C'est une $\otimes$-catégorie rigide $\mathbb{Q}_{(\ell)}$-linéaire, pseudo-abélienne, et dont les morphismes forment des $\mathbb{Q}_{(\ell)}$-espaces de dimension finie. Le quotient $\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ de $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ par son plus grand $\otimes$-idéal est une catégorie tannakienne semi-simple sur $\mathbb{Q}_{(\ell)}$, le foncteur passage au quotient étant conservatif (cf. [**3**, §§ 2.4, 3.3, 4.1]).

Corollaire 2.6.2. *Il existe un $\otimes$-foncteur fidèle canonique $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}) \to \mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$.* A fortiori, *on obtient un $\otimes$-foncteur fidèle exact canonique de catégories tannakiennes semi-simples, dit « de spécialisation » :*

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}) \to \bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}).$$

En outre, tout objet de $\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est facteur direct de l'image d'un objet de $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p})$.

Les deux premières assertions se déduisent du théorème 2.4.1 comme [**3**, 9.3.2] de [**3**, 9.2.1]. La dernière découle du théorème de Honda–Tate selon lequel les réductions des $\bar{\mathbb{Q}}_p$-variétés abéliennes de type CM rencontrent chaque classe d'isogénie sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ [**28**]. □

3. Certaines variétés de Shimura unitaires et leurs modèles locaux

L'objet de ce paragraphe est de prouver la proposition 2.4.2, ce qui complétera la démonstration des résultats du paragraphe précédent.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

3.1. On fixe un nombre premier p. Soient E^+ un corps de nombres totalement réel et E une extension quadratique totalement imaginaire de E^+. On suppose (pour simplifier) E galoisien sur $\mathbb{Q}$, de degré n. On suppose que

$$\text{chaque place } v \text{ de } E^+ \text{ au-dessus de } p \text{ se décompose dans } E. \tag{$*$}$$

Il découle de $(*)$ que
$$E \otimes \mathbb{Q}_p \cong (E^+ \otimes \mathbb{Q}_p)^2,$$
la conjugaison complexe induisant l'échange des deux facteurs. On fixe un tel isomorphisme de $E^+ \otimes \mathbb{Q}_p$-algèbres.

On considère E comme sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$, et on fixe un plongement complexe $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et un plongement p-adique $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$. Ceci sert à identifier $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \bar{\mathbb{Q}}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K \otimes \mathbb{Q}_p, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ pour tout sous-corps $K \subset \bar{\mathbb{Q}}$ (notamment $K = E$ ou E^+). En combinant avec l'identification $E \otimes \mathbb{Q}_p = (E^+ \otimes \mathbb{Q}_p)^2$ suivie de la première projection, on obtient alors une section
$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$
de l'application de restriction $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E^+, \mathbb{C})$.

On note F le complété de E^+ en la place induite par $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$, et m (respectivement, e) son degré (respectivement, son indice de ramification) sur $\mathbb{Q}_p$, F_0 le sous-corps de F non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ maximal, k le corps résiduel. Pour simplifier ultérieurement les notations, on fixe un isomorphisme entre F et le complété de E^+ en chaque place p-adique de E^+.

On fixe par ailleurs un élément purement imaginaire $\varepsilon \in \mathcal{O}_E$ de norme première à p (il en existe : $(*)$ assure que le noyau de la trace $\mathcal{O}_E/p \to \mathcal{O}_{E^+}/p$ contient une unité de $\mathcal{O}_E/p$, et se relève dans le noyau de la trace $\mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_{E^+}$). On suppose (pour simplifier) que
$$\text{pour tout } \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E^+, \mathbb{C}), \quad \mathrm{Im}\, \tilde{\varphi}(\varepsilon) > 0. \tag{$**$}$$

Remarque 3.1.1. Les conditions $(*)$ et $(**)$ sont remplies si $E = E^+.\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ avec p décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ et $\varepsilon = \sqrt{-D}$.

3.2. On se donne un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, muni d'une forme alternée non dégénérée $(\cdot\,,\cdot)$. On suppose V muni d'une structure de E-espace de telle sorte que

$$(\alpha v, w) = (v, \bar{\alpha} w), \quad v, w \in V,\ \alpha \in E. \tag{$***$}$$

On note d la dimension de V en tant que E-espace, et on pose

$$g = \tfrac{1}{2} nd.$$

La donnée de $(\cdot\,,\cdot)$ équivaut à celle d'une forme E-hermitienne $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, via la formule :

$$(v, w) = \mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}\, \varepsilon \langle v, w\rangle.$$

Lorsqu'on tensorise avec $\mathbb{Q}_p$, la donnée de $(\cdot\,,\cdot)$ revient à celle d'une décomposition

$$V \otimes \mathbb{Q}_p = W \oplus W^\vee$$

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

en un $E^+ \otimes \mathbb{Q}_p$-module libre $W = \bigoplus_{v|p} W_v$ de rang d et son dual (noter qu'en raison de $(*)$, $V \otimes \mathbb{Q}_p$ est un $(E^+ \otimes \mathbb{Q}_p)^2$-module libre et utiliser $(***)$).

Soit $G \subset \mathrm{GSp}(V, (\cdot\,,\cdot))$ le $\mathbb{Q}$-sous-groupe fermé formé des similitudes symplectiques E-linéaires. On a donc une suite exacte

$$\{1\} \to R_{E^+/\mathbb{Q}} U(\langle\cdot\,,\cdot\rangle) \to G \to \mathbb{G}_m \to \{1\} \tag{3.1}$$

et il suit de ce qui précède que

$$G_{\mathbb{Q}_p} \cong (R_{F/\mathbb{Q}_p} GL_d)^{n/m} \times \mathbb{G}_{m\mathbb{Q}_p}.$$

3.3. Soit $h : R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{R}}$ un homomorphisme définissant sur V une structure de Hodge rationnelle de type $(1,0)+(0,1)$, et tel que $(v, h(\mathrm{i})w)$ soit une forme définie positive sur $V_{\mathbb{R}}$ (relations de Riemann). Quitte à changer h par un conjugué, on peut supposer, et on supposera que la décomposition

$$V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

est définie sur $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ ($V^{1,0}$ étant la partie sur laquelle $h(\mathrm{i})$ agit par i).

La structure de $E \otimes \bar{\mathbb{Q}}$-module de $V^{1,0}$ est décrite par le n-uplet $\boldsymbol{r} = (\ldots, r_\varphi, \ldots)$ d'entiers naturels $r_\varphi \leqslant d$ définis par

$$r_\varphi = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}} V^{1,0} \otimes_{E,\tilde{\varphi}} \bar{\mathbb{Q}}.$$

Que $v \otimes w \mapsto (v, h(\mathrm{i})w)$ soit une forme définie positive se traduit, compte tenu de $(**)$, par :

> la signature de la forme hermitienne $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ sur $V \otimes_{E^+,\varphi} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^d$ est $(r_\varphi, d - r_\varphi)$.

Par ailleurs, compte tenu de la définition de $\tilde{\varphi}$ et de W, on a aussi

$$W \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p = \oplus_\varphi V \otimes_{E,\tilde{\varphi}} \bar{\mathbb{Q}}_p$$

et

$$r_\varphi = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}_p} (V^{1,0} \otimes_{E,\tilde{\varphi}} \bar{\mathbb{Q}}_p) \cap (W \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p) \tag{3.2}$$

(en considérant $\tilde{\varphi}$ comme un plongement dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$). Pour tout plongement $\psi : F_0 \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ et toute place p-adique v de E^+, on note $\boldsymbol{r}_{v,\psi}$ le e-uplet des r_φ où φ, vu comme plongement $E^+ \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$, vérifie les deux conditions :

- il induit la place p-adique v,
- l'homomorphisme $F \cong E_v^+ \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ qui prolonge φ est compatible à ψ,

qu'on indique par l'abréviation $\varphi \to (v, \psi)$.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

3.4. Le couple (h, G) donne naissance à une (pro-)variété de Shimura « de type unitaire » $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g}$, définie sur E.* La variété de Shimura apparaissant au § 1.5 en est un quotient, sous les hypothèses de la proposition 2.4.2, pour les données $g = nq$, $d = 2q$, $\boldsymbol{r}$ étant le n-uplet $(q, \ldots, q)$.

On se donne un $\mathcal{O}_F$-réseau Λ_v de W_v, d'où un $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Q}_p$-réseau Λ de $V \otimes \mathbb{Q}_p$:

$$\Lambda = \bigoplus \Lambda_v \oplus \bigoplus \Lambda_v^\vee$$

où $\Lambda_v^\vee$ désigne le $\mathbb{Z}_p$-dual† de Λ_v. C'est un réseau auto-dual eu égard à $(\cdot\,,\cdot)$ puisque ε est une unité p-adique. Posons $C_p := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p} \Lambda \cap G(\mathbb{Q}_p)$.

Par ailleurs, on choisit un sous-groupe ouvert compact (assez petit) C^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$, où $\mathbb{A}_f^p$ désigne comme d'habitude l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ privées de leurs composantes à l'infini et en p. On suppose C^p contenu dans le sous-groupe de congruence principal de niveau ν assez grand premier à p.

Le groupe compact $C = C_p.C^p$ agit sur $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g}$, et on pose $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} := \mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g} / C$.

3.5. Considérons le problème de modules (foncteur) suivant : à tout $\mathcal{O}_F$-schéma S, on associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de données suivantes :

(I) un $\mathcal{O}_E$-schéma abélien‡ A sur S, de dimension relative nd, à isogénie d'ordre premier à p près ;

(II) une polarisation principale $\mathbb{Q}$-homogène de A ;

(III) une structure de niveau

$$H^1(A, \mathbb{A}_f^p) \cong V \otimes \mathbb{A}_f^p \mod C^p$$

qui respecte les formes bilinéaires à une constante $\in (\mathbb{A}_f^p)^*$ près.

Il est requis que

$$\det\nolimits_{\mathcal{O}_S}(\alpha \mid \mathrm{Lie}_S^\vee(A)) = \det\nolimits_{\bar{\mathbb{Q}}}(\alpha \mid V^{1,0})$$

comme fonction polynomiale de $\alpha \in \mathcal{O}_E$, c'est-à-dire

$$\det\nolimits_{\mathcal{O}_S}(\alpha \mid \mathrm{Lie}_S^\vee(A)) = \prod_{\varphi} \tilde{\varphi}(\alpha)^{r_\varphi} \bar{\varphi}^{\cdot}(\alpha)^{d-r_\varphi} \tag{3.3}$$

($\mathrm{Lie}_S^\vee(A)$ désigne le $\mathcal{O}_S$-dual de $\mathrm{Lie}_S A$).

Nous renvoyons à [**24**, Chapitre 6] pour la définition précise (assez longue) de ces notions.

Ce type de problème de modules sur un trait a d'abord été considéré par Kottwitz [**13**, § 5], dans le cas où F est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$.

* En fait sur le corps « reflex », qui en est un sous-corps puisque E est supposé galoisien sur $\mathbb{Q}$.

† C'est-à-dire, si l'on préfère, le $\mathcal{O}_F$-dual tensorisé avec la codifférente de $\mathcal{O}_F$.

‡ Plus précisément, un « $\mathcal{L}$-ensemble » de tels schémas abéliens, où $\mathcal{L}$ est l'ensemble (multi-chaîne polarisée) des réseaux Λ' obtenus comme Λ mais en changeant chaque Λ_v et $\Lambda^\vee$ par une homothétie de rapport arbitraire dans F^*. Dans le formalisme de [**24**], cela traduit le choix de la structure parahorique maximale.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3.5.1.

(1) *Le problème de modules ci-dessus est représentable par un $\mathcal{O}_F$-schéma quasi-projectif $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g}$. Il est lisse si F est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, mais non lisse ni même plat en général.*

(2) *$(\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g})_F$ s'identifie à $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} \otimes_E F$, où $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C}$ est la variété de Shimura associée à la situation.*

(3) *L'oubli de l'action de $\mathcal{O}_E$ (donnée I) induit un morphisme projectif*
$$f : \mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g} \to \mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathcal{O}_F,$$
et f_F est fini étale.

(1) Voir [**24**, p. 279] (et [**23**] pour la non-platitude en général).

(2) D'après la classification de Landherr des formes E-hermitiennes (cf. [**25**, **26**]), le principe de Hasse vaut pour ces dernières, et l'on en déduit comme dans [**24**, pp. 296, 300, 301] que $\mathcal{M}_F = \mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} \otimes_E F$.

(3) L'oubli de l'action de $\mathcal{O}_E$ (et aussi des $\mathbb{Z}_p$-réseaux Λ' de $\mathcal{L}$ qui ne sont pas de la forme $p^{\mathbb{Z}}\Lambda$) induit un morphisme entre le foncteur représenté par $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g}$ et le foncteur analogue où $\mathcal{O}_E$ est remplacé par $\mathbb{Z}$ et C^p par le sous-groupe de congruence principal de niveau ν dans $\mathrm{GSp}(\mathbb{A}_f^p)$. Or il est facile de voir que ce dernier foncteur est représenté par $\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \mathcal{O}_F$, via le choix d'un $\mathbb{Z}[1/p]$-réseau auto-dual de V.

Une application directe du critère valuatif de propreté montre que le morphisme f ainsi obtenu entre $\mathcal{O}_F$-schémas quasi-projectifs est propre, donc projectif. En outre, il est bien connu que le morphisme naturel entre variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} \to \mathcal{A}_{g,\nu} \otimes E$ est fini étale, et après tensorisation avec F, on obtient que f_F est fini étale. $\square$

3.6. La structure locale de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g}$, pour la topologie étale, est donnée par les « modèles locaux » étudiés en plus grande généralité dans [**23**]. Cette construction repose sur le théorème de Grothendieck–Messing, selon lequel les déformations de A sont « contrôlées » par le facteur direct local $\mathrm{Lie}^\vee A$ de $H^1_{\mathrm{DR}}(A)$.

Localement sur le $\mathcal{O}_F$-schéma S, on peut identifier $H^1_{\mathrm{DR}}(A)$ à
$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \cong \bigoplus (\Lambda_v \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S) \oplus \bigoplus (\Lambda_v^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S)$$
et on a une décomposition correspondante
$$\mathrm{Lie}^\vee A = \bigoplus_v \mathcal{F}_v \oplus \bigoplus_v ((\Lambda_v \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S)/\mathcal{F}_v)^\vee.$$
Par ailleurs, on a la décomposition « suivant ψ » :
$$(\Lambda_v \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S) = \bigoplus_{\psi : F_0 \hookrightarrow F \subset \bar{\mathbb{Q}}_p} \Lambda_{v,\psi},$$
où $\Lambda_{v,\psi} := \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0},\psi} \mathcal{O}_S$ ($\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0},\psi} \mathcal{O}_S$-module localement libre de rang d),

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

et on a une décomposition correspondante

$$\mathcal{F}_v = \bigoplus_{\psi : F_0 \hookrightarrow F \subset \bar{\mathbb{Q}}_p} \mathcal{F}_{v,\psi}$$

où, en vertu de (3.2) et (3.3),

$$\det_{\mathcal{O}_S}(\alpha \mid \mathcal{F}_{v,\psi}) = \prod_{\varphi \to (v,\psi)} \varphi(\alpha)^{r_\varphi}.$$

Notons qu'en raison de la ramification éventuelle de F, $\mathcal{F}_{v,\psi}$ n'est pas nécessairement localement facteur direct de $\Lambda_{v,\psi}$ en tant que $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0},\psi} \mathcal{O}_S$-module (mais seulement comme $\mathcal{O}_S$-module).

Il découle de ce qui précède qu'un modèle local pour $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g}$ est donné par le $\mathcal{O}_F$-schéma produit

$$\prod_{(v,\psi)} M(\Lambda_{v,\psi}, \boldsymbol{r}_{v,\psi})$$

où $M(\Lambda_{v,\psi}, \boldsymbol{r}_{v,\psi})$ désigne le $\mathcal{O}_F$-schéma qui représente le foncteur

$$S \mapsto \Big\{ \mathcal{F} \subset \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S,\ \text{sous-}\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S\text{-module localement facteur direct,}$$
$$\text{comme } \mathcal{O}_S\text{-module, avec } \det_{\mathcal{O}_S}(\alpha \mid \mathcal{F}) = \prod_{\varphi \to (v,\psi)} \varphi(\alpha)^{r_\varphi} \Big\}.$$

C'est un $\mathcal{O}_F$-schéma projectif étudié en détail dans [**23**]. Sa fibre générique est un produit de grassmanniennes, donc lisse. Sa fibre spéciale est singulière ; elle admet une partition en « cellules de Schubert affines ».

Proposition 3.6.1. $\dim_F \mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g} \otimes F = \dim_E \mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} = n \sum r_\varphi (d - r_\varphi)$ *et*

$$\dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} \mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \leqslant n.(\tfrac{1}{2}d)^2 = \tfrac{1}{2}gd.$$

En effet, [**23**, 3.1] dit que $M(\Lambda_{v,\psi}, \boldsymbol{r}_{v,\psi}) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est irréductible de dimension

$$d|\boldsymbol{r}_{v,\psi}| - e\left[\frac{|\boldsymbol{r}_{v,\psi}|}{e}\right]^2 - \left(2\left[\frac{|\boldsymbol{r}_{v,\psi}|}{e}\right] + 1\right)\left(|\boldsymbol{r}_{v,\psi}| - e\left[\frac{|\boldsymbol{r}_{v,\psi}|}{e}\right]\right)$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière et $|\boldsymbol{r}_{v,\psi}| = \sum_{\varphi \to (v,\psi)} r_\varphi$.

Cette dimension est

$$\leqslant |\boldsymbol{r}_{v,\psi}|\left(d - \frac{|\boldsymbol{r}_{v,\psi}|}{e}\right) \leqslant e(\tfrac{1}{2}d)^2,$$

d'où l'on déduit la borne de (1) puisqu'il y a n/e couples (v,ψ). $\square$

3.7. Revenons à la preuve de la proposition 2.4.2. La variété de Shimura connexe Sh^0 considérée en la proposition 2.4.2 est une composante connexe d'une variété de Shimura du type $\mathrm{Sh}_{\boldsymbol{r},g,C} \otimes F$, dans le cas où $d = 2q$ est pair et où tous les r_φ sont égaux à q. La

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

dimension des fibres du modèle $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g}$ est alors constante, égale à $nq^2 = \frac{1}{2}gd$, ce qui est d'ailleurs la valeur *maximale* selon la proposition 3.6.1.

Pour prouver la proposition 2.4.2, il suffit donc de prouver que le bord de l'adhérence de l'image de

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \to \mathcal{A}^*_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$$

est de codimension au moins 2 lorsque $d = 2q$ est pair et tous les r_φ sont égaux à $q > 1$.

Par ailleurs, Chai et Faltings [**11**, Chapitres V, VI] ont construit des compactifications toroïdales lisses $\bar{\mathcal{A}}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ de $\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ et un schéma semi-abélien G sur $\bar{\mathcal{A}}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ prolongeant le schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$, ainsi qu'un morphisme projectif surjectif $\bar{\pi} : \bar{\mathcal{A}}_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \to \mathcal{A}^*_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$. Le bord de $\mathcal{A}^*_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ est stratifié par des strates isomorphes à $\mathcal{A}_{g',\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ pour $g' < g$, dont les points géométriques $\bar{\pi}(\bar{x})$ paramètrent la partie abélienne des variétés semi-abéliennes $G_{\bar{x}}$ (cette partie abélienne ne dépend pas de $\bar{x}$ dans la fibre de $\bar{\pi}$) munie d'une structure de niveau ν décrite dans [**11**, VI.2.3.5].

Si $\mathcal{O}_E$ agit par endomorphismes sur un schéma abélien A, cette action se prolonge à tout schéma semi-abélien prolongeant A sur une base normale (cf. [**11**, I.2.7]). Par ailleurs, si $\mathcal{O}_E$ agit sur une variété semi-abélienne, il induit aussi une action sur la partie abélienne. On en déduit que les composantes du bord de l'adhérence de l'image de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \to \mathcal{A}^*_{g,\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ admettent chacune un ouvert dense contenu dans l'image du morphisme canonique $\mathcal{M}_{\boldsymbol{r},g'} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p \to \mathcal{A}_{g',\nu} \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ pour $g' < g$ et $\boldsymbol{r}$ convenables. D'après la proposition précédente, ce bord est donc de dimension $\leqslant \frac{1}{2}g'd = g'q$, qui est $\leqslant \frac{1}{2}gd - 2$ puisque $q > 1$. □

4. Les pro-tores de Serre, Weil et Milne

4.1. Les pro-tores de Serre et Weil, sur $\mathbb{Q}$, sont définis comme suit par leurs groupes de caractères munis de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

- $X(T_{\mathrm{Serre}})$ est le groupe des types CM. Rappelons leur définition.

  Soit $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}/\mathbb{Q})$ le plus grand quotient de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans lequel la conjugaison complexe c soit centrale ; un type CM est une fonction localement constante

  $$f : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}$$

  telle que $f(\sigma) + f(c \circ \sigma)$ soit indépendant de σ.

- $X(T_{\mathrm{Weil}})$ est le groupe des p-nombres de Weil modulo torsion. Rappelons qu'un p-nombre de Weil est un nombre algébrique dont les valeurs absolues archimédiennes sont toutes égales à une même puissance entière de $\sqrt{p}$, et dont toutes les valeurs absolues non archimédiennes non p-adiques valent 1.

Nous renvoyons à [**16**] pour une étude détaillée de ces pro-tores.

4.2. Il est bien connu que T_{Serre} est le groupe tannakien attaché à la catégorie $\mathrm{Hod}_{\mathrm{CM}}$ des structures de Hodge « de type CM »* (cf. [**18**, p. 57]). En voici une interprétation motivique, en reprenant les notations du § 2.6.

* Ce sont les structures de Hodge polarisables dont le groupe de Mumford–Tate est abélien.

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Théorème 4.2.1. T_{Serre} *est le groupe tannakien de la catégorie* $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p})$.

En effet, le $\otimes$-foncteur évident $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathrm{Hod}_{\mathrm{CM}}$ est une équivalence : cela découle du fait que le groupe des types CM est engendré par ceux prenant les valeurs 0 et 1 (types CM de variétés abéliennes), et de ce que tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est motivé, modelé sur $\mathcal{V}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ (Variante 1.5.1). En outre, le $\otimes$-foncteur $\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}_p})$ est une équivalence. □

4.3. Nous démontrerons que $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est tannakienne semi-simple de groupe $T_{\mathrm{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$ (Théorème 5.1.1 ci-dessous). Faute de savoir déjà que $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est semi-simple, nous travaillerons avec le quotient $\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ de la catégorie $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ par son plus grand $\otimes$-idéal, qui est une catégorie tannakienne semi-simple sur $\mathbb{Q}_{(\ell)}$, le foncteur passage au quotient étant conservatif.

Notons $T_{(\ell)}$ son groupe tannakien au sens de [**9**] : *a priori*, il s'agit d'un schéma en groupes interne à la catégorie (Ind-)$\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$, mais du fait que les objets de $\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ ont « beaucoup d'endomorphismes », ce schéma en groupes est abélien (voir [**18**, p. 53]), ce qui permet de le considérer comme schéma en groupes affine usuel sur $\mathbb{Q}_{(\ell)}$.

Le $\otimes$-foncteur de spécialisation du corollaire 2.6.2

$$\mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{K}}) \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \to \bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$$

entre $\mathbb{Q}_{(\ell)}$-catégories tannakiennes semi-simples est conservatif, donc automatiquement fidèle exact, et tout objet du but est facteur de l'image d'un objet de la source. Ce foncteur correspond donc à un monomorphisme*

$$T_{(\ell)} \hookrightarrow T_{\mathrm{Serre}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}.$$

4.4. On a un homomorphisme canonique

$$T_{\mathrm{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \hookrightarrow T_{(\ell)}$$

qui se construit au niveau des caractères, comme ceci. Pour tout $X \in \mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, choisissons un corps $\mathbb{F}_{p^m}$ de définition, et notons $\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}$ le Frobenius d'un modèle $\boldsymbol{X}$ de X sur $\mathbb{F}_{p^m}$. Notons $T^X_{(\ell)}$ le quotient de $T_{(\ell)}$ attaché à la sous-catégorie tannakienne engendrée par $\mathfrak{h}(X)$. Alors quitte à remplacer m par un multiple, $\mathrm{Fr}^*_{\boldsymbol{X}}$ définit un élément de $T^X_{(\ell)}(\mathbb{Q}_{(\ell)})$, et pour tout caractère χ de $T^X_{(\ell)}$, $\chi(\mathrm{Fr}^*_{\boldsymbol{X}})$ est un p-nombre de Weil, d'où l'homomorphisme cherché.

4.5. Dans [**17**, **18**], Milne construit, par analogie avec les catégories de motifs numériques découpés sur $\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ respectivement, une catégorie† $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}})$ et une catégorie

* Rappelons qu'un $\otimes$-foncteur exact fidèle $\phi : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ entre catégories tannakiennes induit un homomorphisme dans l'autre sens entre groupes tannakiens associés au sens de [**9**], et que cet homomorphisme est un monomorphisme (une immersion fermée) si et seulement si tout objet de $\mathcal{T}$ est sous-quotient de l'image par ϕ d'un objet de $\mathcal{T}'$.

† Notée $\mathrm{LCM}(\bar{\mathbb{Q}})$ dans [**18**].

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ où correspondances algébriques sont remplacées par « correspondances de Lefschetz », définies comme combinaisons linéaires d'intersections de classes de diviseurs sur des variétés produits.

Il montre que ce sont en fait des catégories tannakiennes semi-simples sur $\mathbb{Q}$. Nous noterons $T^{\bar{\mathbb{Q}}}_{\mathrm{Milne}}$ et $T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\mathrm{Milne}}$ leurs groupes tannakiens respectifs. Ce sont des pro-tores, dont les caractères sont explicitement décrits dans [**18**].

4.6. On a un $\otimes$-foncteur de spécialisation $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$, qui donne lieu à un monomorphisme

$$T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\mathrm{Milne}} \hookrightarrow T^{\bar{\mathbb{Q}}}_{\mathrm{Milne}},$$

et un $\otimes$-foncteur naturel $\mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \to \mathrm{Hod}_{\mathrm{CM}}$, qui donne lieu à un monomorphisme

$$T_{\mathrm{Serre}} \hookrightarrow T^{\bar{\mathbb{Q}}}_{\mathrm{Milne}}.$$

4.7. Par ailleurs, une construction analogue à celle du § 4.4 donne lieu à un monomorphisme canonique

$$T_{\mathrm{Weil}} \hookrightarrow T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\mathrm{Milne}},$$

et en s'appuyant sur la théorie de Shimura–Taniyama, Milne montre que T_{Weil} est aussi contenu dans T_{Serre} [**18**, § 5]. Le résultat suivant est crucial pour la suite.

Théorème 4.7.1 ([18, Théorème 6.1]). $T_{\mathrm{Weil}} = T_{\mathrm{Serre}} \cap T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\mathrm{Milne}}$ *dans* $T^{\bar{\mathbb{Q}}}_{\mathrm{Milne}}$. □

5. Cycles de Tate et cycles motivés sur les variétés abéliennes sur un corps fini

5.1. On a un carré commutatif naturel de $\otimes$-foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}) & \longleftarrow & \mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}) \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} & \longleftarrow & \mathcal{L}(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \end{array}$$

qui induit un carré commutatif naturel de monomorphismes de pro-tores

$$\begin{array}{ccc} T_{(\ell)} & \longrightarrow & T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\mathrm{Milne}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\mathrm{Serre}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} & \longrightarrow & T^{\bar{\mathbb{Q}}}_{\mathrm{Milne}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \end{array}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Par le théorème précédent, on en déduit $T_{(\ell)} \subset T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$. Par ailleurs, le parallélisme des constructions des §§ 4.4 et 4.7 montre que le monomorphisme canonique

$$T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \hookrightarrow T^{\bar{\mathbb{F}}_p}_{\text{Milne}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$$

se factorise par $T_{(\ell)}$; autrement dit, on a l'inclusion dans l'autre sens

$$T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)} \subset T_{(\ell)},$$

d'où finalement :

Théorème 5.1.1. $T_{(\ell)} = T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$. □

5.2. Déduisons-en, dans un premier temps, que la catégorie $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est tannakienne semi-simple.

Proposition 5.2.1. $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}) = \bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$. *En particulier,* $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ *est abélienne semi-simple.*

Démonstration. La preuve repose sur un argument de Tate [**27**] repris dans [**18**, p. 75]. Pour tout $X \in \mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, choisissons un modèle $\boldsymbol{X}$ de X sur un corps fini $\mathbb{F}_{p^m}$. Posons $M = \mathfrak{h}(X) \in \mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ et notons $\bar{M}$ son image dans $\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$. Il s'agit de montrer que $\operatorname{End} M = \operatorname{End} \bar{M}$, ou, ce qui revient au même, que l'inégalité $\dim_{\mathbb{Q}_{(\ell)}} \operatorname{End} M \geqslant \dim_{\mathbb{Q}_{(\ell)}} \operatorname{End} \bar{M}$ est une égalité.

Considérons $\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}$ comme un endomorphisme de M, et notons $\overline{\mathrm{Fr}}_{\boldsymbol{X}}$ l'endomorphisme correspondant de $\bar{M}$. Puisque $\boldsymbol{X}$ est une variété abélienne, on sait que $\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}$ agit de manière semi-simple sur $H_\ell(X)$. De plus, pour tout foncteur fibre $\bar{H}$ sur $\bar{\mathcal{M}}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$, le polynôme caractéristique de $\overline{\mathrm{Fr}}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\bar{H}(\bar{M})$ coïncide avec le polynôme caractéristique de $\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}$ sur $H_\ell(X)$.

Quitte à remplacer m par un multiple, on a d'une part

$$\dim_{\mathbb{Q}_{(\ell)}} \operatorname{End} \bar{M} \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \operatorname{End}_{\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}} H_\ell(X),$$

et d'autre part (d'après le théorème 5.1.1)

$$\dim_{\mathbb{Q}_{(\ell)}} \operatorname{End} \bar{M} = \dim \operatorname{End}_{\overline{\mathrm{Fr}}_{\boldsymbol{X}}} \bar{H}(\bar{M}).$$

Or la dimension de $\operatorname{End}_{\overline{\mathrm{Fr}}_{\boldsymbol{X}}} \bar{H}(\bar{M})$ est aussi celle de $\operatorname{End}_{\mathrm{Fr}_{\boldsymbol{X}}} H_\ell(X)$ en vertu d'un lemme de Tate (cf. [**18**, p. 75]) : la dimension du commutant en question ne dépend que du polynôme caractéristique. □

Corollaire 5.2.2. *Tout cycle de Tate ℓ-adique sur une variété abélienne sur un corps fini $\mathbb{F}_{p^m}$ ($\ell \neq p$) est combinaison $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire de cycles motivés modelés sur $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{\mathbb{F}}_p}$.*

Démonstration. Par les résultats précédents, $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_{(\ell)}$ de groupe tannakien $T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_{(\ell)}$. Comme une classe de cohomologie ℓ-adique est fixée par $T_{\text{Weil}} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ si et seulement si elle est fixée par Frobenius, le théorème s'ensuit immédiatement. □

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

Remarques 5.2.3.

(1) Si l'on arrivait à prouver que $\mathbb{Q}_{(\ell)} = \mathbb{Q}$, il s'ensuivrait que $T_{(\ell)} = T_{\mathrm{Weil}}$, et en fait que $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ est équivalente à la catégorie tannakienne construite « abstraitement » par Langlands–Rapoport [**15**] (cf. [**16**, § 3.31] et [**20**]) (l'équivalence en question étant unique à isomorphisme près). *A fortiori*, $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ serait indépendante de ℓ.

(2) L'égalité $\mathbb{Q}_{(\ell)} = \mathbb{Q}$ jointe à une réponse positive à la question 2.5.3 sur la réduction des variétés de Shimura permettrait aussi de répondre positivement à une question soulevée par Deligne [**10**, § 6] : deux variétés abéliennes définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$ ayant même réduction A sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ étant données, de même qu'un cycle de Hodge sur chacune d'elles, on peut interpréter ces cycles comme des classes de cohomologie ℓ-adique sur la réduction commune A ; leur nombre d'intersection est-il rationnel?

(3) Savoir que $\mathbb{Q}_{(\ell)}$ est formellement réel serait déjà très intéressant (voir aussi [**20**, 7.7]) : $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ aurait une polarisation canonique (cf. [**16**, § 2]), et en adaptant les arguments de [**19**], on obtiendrait que les formes de Weil standard sont positives pour la polarisation canonique. *A fortiori*, la conjecture standard de type Hodge serait vraie pour les variétés abéliennes sur les corps finis.

Remarque 5.2.4. Il suit de [**2**] que *la conjecture standard de type Lefschetz en caractéristique* 0 pour certaines variétés fibrées en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse implique la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes complexes, donc la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis via [**18**].

De même, il découle des résultats ci-dessus que *la conjecture standard de type Lefschetz sur* $\bar{\mathbb{F}}_p$ pour certaines variétés fibrées en variétés abéliennes sur une courbe projective lisse implique la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis de caractéristique p, et selon [**19**], toutes les conjectures standard pour ces variétés abéliennes (à présent, on ne dispose que du résultat partiel [**7**]).

6. Cycles de Tate sur les variétés abéliennes sur un corps de type fini sur un corps fini

6.1. Soient k un corps de type fini sur $\mathbb{F}_p$, et $\bar{k} \supset \bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture séparable fixée de k.

Soit A une variété abélienne sur k. On suppose que A est fibre générique d'un schéma abélien

$$\bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} \bar{S}$$

sur variété $\bar{S}$ projective normale géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_{p^m}$.

Théorème 6.1.1. *Tout cycle de Tate ℓ-adique sur A est combinaison $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire de cycles motivés modelés sur $\tilde{\mathcal{V}}_{\bar{k}}$. En outre la sous-$\otimes$-catégorie rigide de $\mathcal{M}_\ell(\mathcal{W}_k)$ engendrée par A est tannakienne semi-simple.*

Démonstration. On peut trouver un ouvert lisse $S \subset \bar{S}$ dont le complémentaire est de codimension au moins 2. On note $X \xrightarrow{f} S$ la restriction de $\bar{f}$. Soient s un $\bar{k}$-point de S d'image le point générique, et s_0 un $\bar{k}$-point d'image un point fermé de S. On est dans

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

la situation d'appliquer le théorème 8.4.1 de [**3**] (dans le cas (a′), et avec la concordance de notations : $K = \bar{k}$, $K_0 = \bar{\mathbb{F}}_p$) et son corollaire 8.4.3. Ce corollaire implique la seconde assertion, compte tenu de la proposition 5.2.1. Notons G_{X_s} et $G_{X_{s_0}}$ les groupes de Galois motiviques de $X_s = A_{\bar{k}}$ et X_{s_0} respectivement. D'après le théorème 5.1.1, $G_{X_{s_0}}$ est un tore, et la représentation de monodromie arithmétique

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_{p^n}) \to G_{X_{s_0}}$$

(pour $n \geqslant m$ assez grand) est d'image Zariski-dense. Notons H_{X_s} et $H_{X_{s_0}}$ le groupe de monodromie géométrique connexe de $f_{\bar{k}}$ pointé en s et en s_0 respectivement. Quitte à remplacer S par un revêtement étale fini, on peut supposer, et on supposera, que le groupe de monodromie est connexe ; H_{X_s} est alors autre l'adhérence de Zariski de la représentation de monodromie géométrique

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k\bar{\mathbb{F}}_p) \to G_{X_s}.$$

D'après [**3**, 8.4.1.3], on a une suite exacte

$$\{1\} \to H_{X_s} \to G_{X_s} \to T \to \{1\}$$

où T est le tore quotient $G_{X_{s_0}}/(G_{X_{s_0}} \cap H_{X_{s_0}})$. Il est facile d'en déduire que la représentation de monodromie arithmétique

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k\mathbb{F}_{p^n}) \to G_{X_s}$$

est d'image Zariski-dense dans G_{X_s}, ce qui établit le théorème. □

6.2. Pour s'affranchir de l'hypothèse de bonne réduction, il conviendrait d'appliquer [**3**, 8.4.1] et [**3**, 8.4.3] dans le cas (b′) de [**3**], ce qui nous ramène à question 6.3.1 de [**3**] sur les compactifications de Künnemann.

Remerciements. Je remercie vivement Ofer Gabber de m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure de ce texte, à propos de la spécialisation des cycles motivés ; la corriger m'a amené à rédiger [**3**]. Je remercie aussi Ngô Bau Chau d'une discussion sur les modèles locaux au cours de laquelle il m'a notamment indiqué la référence [**23**].

Références

1. Y. André, Une remarque à propos des cycles de Hodge de type CM, in *Séminaires de théorie des nombres de Paris, 1989–1990* (ed. S. David), Progress in Mathematics, Volume 102, pp. 1–7 (Birkhäuser, Boston, MA, 1992).
2. Y. André, Pour une théorie inconditionnelle des motifs, *Publ. Math. IHES* **83** (1996), 5–49.
3. Y. André, Déformation et spécialisation de cycles motivés, *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), 563–604.
4. Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, dans la collection *Panoramas et synthèses* (Société Mathematique de France, Paris, 2004).

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

5. Y. André et B. Kahn, Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **331** (2002), 989–994.
6. S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron models*, Springer Ergebnisse, Volume 21 (Springer, 1990).
7. L. Clozel, Équivalence numérique et équivalence homologique pour les variétés abéliennes sur les corps finis, *Ann. Math.* **150** (1999), 151–163.
8. P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties (notes by J. S. Milne)*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Volume 900, pp. 9–100 (Springer, 1982).
9. P. Deligne, Catégories tannakiennes, in *Grothendieck Festschrift II*, Progress in Mathematics, Volume 87, pp. 111–198 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990).
10. P. Deligne, The Hodge conjecture (présentation des problèmes du Clay Institute (2000), www.claymath.org/millennium.prize.problems).
11. G. Faltings et C. L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Springer Ergebnisse, Volume 22 (Springer, 1990).
12. N. Katz et W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.* **23** (1974), 73–77.
13. R. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Am. Math. Soc.* **5** (1992), 373–444.
14. V. Kumar Murty, Computing the Hodge group of an abelian variety, in *Séminaires de théorie des nombres de Paris 1988–89* (ed. C. Goldstein), Progress in Mathematics, Volume 91, pp. 141–158 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990).
15. R. Langlands et M. Rapoport, Shimuravarietäten und Gerben, *J. Reine Angew. Math.* **378** (1987), 113–220.
16. J. Milne, Motives over finite fields, in *Motives*, Part 1, pp. 401–459, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 55 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1994).
17. J. Milne, Lefschetz classes on abelian varieties, *Duke Math. J.* **96** (1999), 639–675.
18. J. Milne, Lefschetz motives and the Tate conjecture, *Compositio Math.* **117** (1999), 45–76.
19. J. Milne, Polarizations and Grothendieck's standard conjectures, *Ann. Math. (2)* **155**(2) (2002), 599–610 (erratum: http://www.jmilne.org/math/index.html).
20. J. Milne, Gerbes and abelian motives, manuscrit disponible sur ArXiv AG/03011304.
21. B. Moonen et Yu. Zarhin, Weil classes on abelian varieties, *J. Reine Angew. Math.* **496** (1998), 83–92.
22. D. Mumford, A note on Shimura's paper 'Discontinuous groups and abelian varieties', *Math. Ann.* **181** (1969), 345–374.
23. G. Pappas et M. Rapoport, Local models in the ramified case, I, The EL case, *J. Alg. Geom.* **12**(1) (2003), 107–145.
24. M. Rapoport et T. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, Volume 141 (Princeton University Press, 1996).
25. W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Volume 270 (Springer, 1985).
26. W. Scharlau, *Landherrs Klassifikation der hermiteschen Formen*, Rostocker Mathematisches Kolloquium, Volume 27, pp. 31–40 (Institut für Mathematik, Universität Rostock, 1985).
27. J. Tate, Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.* **2** (1966), 134–144.
28. J. Tate, *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)*, Séminaire Bourbaki, Volume 352 (1968/1969).
29. A. Weil, Abelian varieties and the Hodge ring, 1977e, in *Oeuvres scientifiques*, Volume 3 (Springer, 1980).

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press

https://doi.org/10.1017/S1474748005000277 Published online by Cambridge University Press