PROCEEDINGS OF THE
Cambridge Philosophical Society

VOL. 51 OCTOBER, 1955 PART 4

SUR LES ALGÈBRES DÉRIVÉES D'UNE ALGÈBRE DE LIE

PAR J. DIXMIER

Communicated by P. HALL

Received 28 October 1954

1. *Introduction.* Dans cet article, K désigne un corps commutatif quelconque. Toutes les algèbres de Lie considérées sont des algèbres de Lie de dimension finie sur K. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on désigne par $(\mathscr{D}^0\mathfrak{g}, \mathscr{D}^1\mathfrak{g}, \mathscr{D}^2\mathfrak{g}, \ldots)$ la suite des algèbres dérivées de $\mathfrak{g}$ ($\mathscr{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$; $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} = [\mathscr{D}^{i-1}\mathfrak{g}, \mathscr{D}^{i-1}\mathfrak{g}]$). Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et si $x \in \mathfrak{g}$, on désigne par $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x$ l'application $y \to [x, y]$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$.

Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente, i un entier* $\geqslant 0$. *Si* $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ *est non abélienne,* $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g}$ *est de dimension* $\geqslant 2^i + 1$.

Ce théorème entraîne le résultat suivant:

COROLLAIRE. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $(\mathscr{D}^0\mathfrak{g}, \mathscr{D}^1\mathfrak{g}, \ldots, \mathscr{D}^n\mathfrak{g})$ *la suite des algèbres dérivées distinctes* ($n \geqslant 0$). *Si K est de caractéristique* 0, *on a* $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} \geqslant 2^{i-1} + 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n-2$. (Ce corollaire ne donne de renseignement effectif que pour $n > 2$.)

Démonstration. Passant au quotient par $\mathscr{D}^n\mathfrak{g}$, on est ramené au cas où $\mathscr{D}^n\mathfrak{g} = 0$, auquel cas $\mathfrak{g}$ est résoluble. Alors, $\mathfrak{h} = \mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ est nilpotente puisque K est de caractéristique 0. On a $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = \mathscr{D}^{i-1}\mathfrak{h}/\mathscr{D}^i\mathfrak{h}$. D'autre part, $\mathscr{D}^i\mathfrak{h} \neq 0$ puisque $i \leqslant n-2$, donc $\mathscr{D}^{i-1}\mathfrak{h}$ est non abélienne. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.

Une hypothèse sur la caractéristique de K est indispensable, comme le prouve l'exemple suivant (que je dois à C. Chevalley). Supposons K de caractéristique 2. Alors, la table de multiplication suivante définit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 5:

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_3, x_4] = [x_2, x_5] = x_4, \quad [x_1, x_4] = [x_3, x_5] = x_5,$$

$$[x_1, x_3] = [x_2, x_3] = [x_2, x_4] = [x_1, x_5] = [x_4, x_5] = 0.$$

On a $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g} = 3$, $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 2$, $\dim \mathscr{D}^3\mathfrak{g} = 0$, donc l'inégalité $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} \geqslant 2$ du corollaire n'est pas vérifiée.

On peut se demander si l'inégalité du Théorème 1 est la meilleure possible. D'une manière précise:

(1) Existe-t-il, pour tout entier $i \geqslant 0$, une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ telle que $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = 2^i + 1$, $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ étant non abélienne?

Nous pouvons seulement répondre qu'il existe des algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}$ pour lesquelles $\dim \mathfrak{g}/\mathscr{D}^1\mathfrak{g} = 2$, $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 3$, $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 1$. Voici la table de multiplication de l'une d'entre elles (K est quelconque):

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5, \quad [x_2, x_5] = x_6, \quad [x_3, x_4] = -x_6,$$
$$[x_1, x_5] = [x_2, x_3] = [x_2, x_4] = [x_3, x_5] = [x_4, x_5] = [x_6, \mathfrak{g}] = 0.$$

(2) Existe-t-il une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ telle que $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = 2^i + 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$, n étant un entier donné ?

La réponse est négative, comme le montre le théorème suivant (qu'on aimerait englober dans un théorème plus général):

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur un corps* K *de caractéristique* $\neq 2$. *Si* $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 3$, $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ *est de dimension* 0 *ou* 1.

L'hypothèse que K est de caractéristique $\neq 2$ est indispensable, comme le prouve l'exemple suivant. Supposons K de caractéristique 2. Alors, la table de multiplication suivante définit une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 7:

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5, \quad [x_2, x_5] = [x_3, x_4] = x_6,$$
$$[x_1, x_6] = [x_3, x_5] = x_7, \quad [x_1, x_5] = [x_2, x_3] = [x_2, x_4] = [x_2, x_6] = [x_3, x_6]$$
$$= [x_4, x_5] = [x_4, x_6] = [x_5, x_6] = [x_7, \mathfrak{g}] = 0.$$

On a $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g} = 5$, $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 2$.

(On peut aussi montrer, par de longs calculs, que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente sur un corps de caractéristique 0, telle que $\dim \mathfrak{g}/\mathscr{D}^1\mathfrak{g} = 2$, $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 4$, $\mathscr{D}^3\mathfrak{g} \neq 0$, alors $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g}/\mathscr{D}^3\mathfrak{g} \geqslant 6$.)

COROLLAIRE. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* K *de caractéristique* 0. *Si* $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g}/\mathscr{D}^3\mathfrak{g} = 3$, $\mathscr{D}^3\mathfrak{g}/\mathscr{D}^4\mathfrak{g}$ *est de dimension* 0 *ou* 1, *et* $\mathscr{D}^4\mathfrak{g} = \mathscr{D}^5\mathfrak{g} = \ldots$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathscr{D}^4\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = \mathscr{D}^1\mathfrak{g}'$. Puisque K est de caractéristique 0, $\mathfrak{h}$ est nilpotente. On a $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{h}/\mathscr{D}^2\mathfrak{h} = 3$. D'après le Théorème 2, $\mathscr{D}^2\mathfrak{h} = \mathscr{D}^3\mathfrak{g}/\mathscr{D}^4\mathfrak{g}$ est de dimension 0 ou 1. Le corollaire du Théorème 1 prouve alors que la suite des dérivées distinctes de $\mathfrak{g}$ s'arrête à $\mathscr{D}^3\mathfrak{g}$ ou $\mathscr{D}^4\mathfrak{g}$.

Le Théorème 1 est l'analogue exact d'un théorème de Hall pour les p-groupes finis ((1), Théorème 2·57), et la démonstration utilisée ici est très voisine de celle de Hall. M. Hall, à qui j'ai communiqué le Théorème 2, a établi le résultat correspondant pour les p-groupes finis lorsque p est impair et obtenu un contre-exemple pour $p = 2$. La méthode utilisée ci-dessous est d'ailleurs celle de Hall, beaucoup plus simple que ma méthode initiale (laquelle supposait en outre K infini).

2. *Démonstration du Théorème* 1. Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 1. *Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents de* V. *Il existe une suite* $(V_r)_{0 \leqslant r \leqslant n}$ *de sous-espaces vectoriels décroissants de* V, *avec* $V_0 = V$, $V_n = 0$, $\dim V_r/V_{r+1} = 1$ *et* $\mathfrak{g}(V_r) \subset V_{r+1}$ *pour* $r = 0, 1, \ldots, n-1$.

Démonstration. Soit $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n = 0$ une suite de Jordan-Hölder de l'espace V muni des endomorphismes de $\mathfrak{g}$. Les endomorphismes de V_r/V_{r+1} déduits de ceux de $\mathfrak{g}$ par restriction à V_r et passages aux quotients sont nilpotents. Ils admettent donc un zéro commun (théorème d'Engel). Puisque V_r/V_{r+1} est simple (en tant que groupe à opérateurs), ces endomorphismes sont nuls, et $\dim V_r/V_{r+1} = 1$. Ceci établit le lemme.

LEMME 2. *Conservons les notations du Lemme* 1. *Soit i un entier* $\geqslant 0$. *Si* $\dim V \geqslant 2^i$, *le sous-espace des éléments de V annulés par* $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ *est de dimension* $\geqslant 2^i$. *Si* $\dim V \leqslant 2^i$, $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} = 0$.

Démonstration. Montrons, par récurrence sur i, que

$$(\mathscr{D}^i\mathfrak{g})(V_r) \subset V_{r+2^i} \tag{1}$$

(on pose $V_r = 0$ pour $r = n+1, n+2, \ldots$). C'est vrai pour $i = 0$. Supposons (1) établi pour i. Si $u \in \mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ et $v \in \mathscr{D}^i\mathfrak{g}$, on a

$$[u, v](V_r) \subset u(v(V_r)) + v(u(V_r)) \subset u(V_{r+2^i}) + v(V_{r+2^i}) \subset V_{r+2^{i+1}};$$

donc $(\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g})(V_r) \subset V_{r+2^{i+1}}$. Ceci prouve (1). En particulier, si $\dim V \geqslant 2^i$,

$$(\mathscr{D}^i\mathfrak{g})(V_{n-2^i}) \subset V_n = 0,$$

et V_{n-2^i} est de dimension 2^i. Si $\dim V \leqslant 2^i$, $(\mathscr{D}^i\mathfrak{g})(V) \subset V_{2^i} = 0$.

LEMME 3. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente, i un entier* $\geqslant 0$. *Si* $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} > 2^i + 1$, *le centre de* $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ *est de dimension* $\geqslant 2^i$. *Si* $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} \leqslant 2^i + 1$, $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ *est abélienne.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, considérons la restriction de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ à $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$. On obtient une algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents de l'espace $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$, à laquelle il suffit d'appliquer le Lemme 2: on obtient toutes les assertions du lemme, sauf dans le cas où $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} = 2^i + 1$; dans ce cas, on a $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ est de dimension 1 et $\mathfrak{h}$ contenu dans le centre de $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$, d'où aussitôt $\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = 0$, de sorte que $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ est abélienne.

Démonstration du Théorème 1. Il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a} \subset \mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g}$, $\dim \mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 1$. (On le voit en appliquant le Lemme 1 à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g}$.) Passant au quotient par $\mathfrak{a}$, on est ramené au cas où $\dim \mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = 1$. Si $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} \leqslant 2^i$, on a $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} \leqslant 2^i + 1$, donc $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ est abélienne (Lemme 3), d'où absurdité.

3. *Démonstration du Théorème* 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Supposons $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} > 1$. Il s'agit de prouver que K est de caractéristique 2. Appliquant le Lemme 1, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ tel que $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 2$. Passant au quotient par $\mathfrak{a}$, on est ramené au cas où $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 2$, ce que nous supposons désormais.

Analysons d'abord la structure de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$. Les Lemmes 1 et 2 prouvent que $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ est contenu dans le centre de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$. Donc l'application $(x, y) \rightarrow [x, y]$ de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g} \times \mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ définit, par passage aux quotients, une application bilinéaire alternée de $(\mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g}) \times (\mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$, et par suite une application linéaire de $\Lambda^2(\mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$. (Si V est un espace vectoriel sur K, on désigne par $\Lambda^2 V$ l'espace des éléments homogènes de degré 2 dans l'algèbre extérieure de V.) Puisque $\dim \mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathscr{D}^2\mathfrak{g} = 2$, cette application a un noyau non nul; autrement dit, il existe un hyperplan $\mathfrak{h}$ de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ contenant $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ sur lequel le crochet s'annule. Soient x_1, x_2, x_3 des éléments de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ dont les classes dans $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ forment une base de l'espace $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}/\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$, x_2 et x_3 étant contenus dans $\mathfrak{h}$. Alors, $[x_1, x_2] = x_4$ et $[x_1, x_3] = x_5$ doivent engendrer $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$, et forment donc une base de $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$. Ainsi, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, forment une base de

https://doi.org/10.1017/S0305004100030619 Published online by Cambridge University Press

$\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$, et les seuls crochets non nuls de ces éléments sont $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1] = x_4$ et $[x_1, x_3] = -[x_3, x_1] = x_5$. On vérifie aussitôt que le centre de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ est $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$.

Etudions maintenant la structure de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit D une dérivation de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$; posons $Dx_2 = \lambda x_1 + y$, $Dx_3 = \mu x_1 + z$, où $y \in \mathfrak{h}$, $z \in \mathfrak{h}$; on a

$$0 = D([x_2, x_3]) = [Dx_2, x_3] + [x_2, Dx_3] = [\lambda x_1, x_3] + [x_2, \mu x_1] = \lambda x_5 - \mu x_4;$$

donc $\lambda = \mu = 0$; donc $Dx_2 \in \mathfrak{h}$, $Dx_3 \in \mathfrak{h}$; par ailleurs, le centre $\mathscr{D}^2\mathfrak{g}$ de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$ est stable pour toute dérivation de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$; donc $\mathfrak{h}$ est stable pour toute dérivation de $\mathscr{D}^1\mathfrak{g}$, et est par suite un idéal de $\mathfrak{g}$. Appliquant le Lemme 1, il existe un idéal $\mathfrak{k}$ de dimension 3 de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathscr{D}^2\mathfrak{g} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$. On peut supposer que $x_3 \in \mathfrak{k}$. Alors, $\mathfrak{l} = [\mathscr{D}^1\mathfrak{g}, \mathfrak{k}]$ est un idéal de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ engendré par x_5. On a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}] \subset \mathscr{D}^2\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathscr{D}^2\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{l}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{l}] = 0$.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x$ par rapport à la base x_2, x_3, x_4, x_5, a la forme suivante:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x_1$ est

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, $[x, x_1] \in \mathfrak{h}$, donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}([x, x_1]) = 0$, donc X et X_1 sont permutables, ce qui donne la condition $a = f$. Mais alors, un calcul immédiat montre que le crochet de deux matrices telles que X est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ h & -g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x$, pour $x \in \mathscr{D}^1\mathfrak{g}$, est de la forme Y. Appliquant ceci à $x = x_1$, on voit que $1 = -1$ dans K, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

(1) HALL, P. A contribution to the theory of groups of prime-power order. *Proc. Lond. math. Soc.* (2), 36 (1932), 29–95.

DIJON

https://doi.org/10.1017/S0305004100030619 Published online by Cambridge University Press