COMPOSITIO MATHEMATICA

Opérateur de Lefschetz sur les tours de Drinfeld et Lubin–Tate

Jean-François Dat

Compositio Math. **148** (2012), 507–530.

doi:10.1112/S0010437X11007214

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

Compositio Math. 148 (2012) 507–530
doi:10.1112/S0010437X11007214

Opérateur de Lefschetz sur les tours de Drinfeld et Lubin–Tate

Jean-François Dat

Abstract

We define and study a Lefschetz operator on the equivariant cohomology complex of the Drinfeld and Lubin–Tate towers. For ℓ-adic coefficients we show how this operator induces a geometric realization of the Langlands correspondence composed with the Zelevinski involution for elliptic representations. Combined with our previous study of the monodromy operator, this suggests a possible extension of Arthur's philosophy for unitary representations occurring in the intersection cohomology of Shimura varieties to the possibly non-unitary representations occurring in the cohomology of Rapoport–Zink spaces. However, our motivation for studying the Lefschetz operator comes from the hope that its geometric nature will enable us to realize the *mod-ℓ Langlands correspondence* due to Vignéras. We discuss this problem and propose a conjecture.

Table des matières

1. Introduction

Soit K un corps local non-Archimédien de caractéristique résiduelle p, et d un entier non nul. Notons G le groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ et D l'algèbre à division de centre K et d'invariant $1/d$. Choisissons une clôture algébrique K^{ca} de K et notons W_K le groupe de Weil associé. La tour de Drinfeld $(\mathcal{M}_{Dr,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système projectif d'espaces analytiques sur $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$, étales au-dessus de l'espace symétrique de Drinfeld Ω^{d-1}. Le groupe G agit sur chaque étage continûment, et le groupe $D^\times$ agit sur tout le système. La tour de Lubin–Tate $(\mathcal{M}_{LT,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une tour d'espaces analytiques sur $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$, étales au-dessus de l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1}$. Le groupe $D^\times$ agit sur chaque étage continûment et le groupe G agit sur le système. L'action de $G\times D^\times$ sur chacune des deux tours se factorise par le quotient $GD := (G\times D^\times)/K^\times_{\mathrm{diag}}$ du produit $G\times D^\times$ par le sous-groupe $K^\times$ plongé diagonalement.

Received 1 June 2010, accepted in final form 1 July 2011, published online 25 January 2012.
2010 Mathematics Subject Classification 14G35, 11F70 (primary).
Keywords: Lubin–Tate spaces, local Langlands correspondence.
L'auteur remercie l'Institut Universitaire de France et l'Agence Nationale pour la Recherche (contrat ANR-10-BLANC 0114) pour leur soutien financier.

Soit ℓ un nombre premier distinct de p. Dans la section 3 de [Dat07], nous avons défini les complexes de cohomologie étale à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$:

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell) \quad \text{et} \quad R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell) \in D^b_{\mathbb{Z}_\ell}(GD \times W_K^{\mathrm{disc}})$$

dans la catégorie dérivée bornée des $\mathbb{Z}_\ell$-représentations de $GD \times W_K$ qui sont lisses pour l'action de GD.

1.1 Opérateurs de Lefschetz sur le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_\ell)$

Dans la première section de cet article nous définissons pour chacune des deux tours un 'opérateur de Lefschetz', c'est-à-dire un morphisme dans $D^b_{\mathbb{Z}_\ell}(G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}})$:

$$L_? : R\Gamma_c(\mathcal{M}_?^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}_?^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)[2](1) \quad \text{pour } ? = Dr \text{ ou } LT$$

donné par cup-produit par la classe de Chern d'un fibré inversible équivariant convenable. Du côté Lubin–Tate, le fibré inversible que nous choisissons est le tiré en arrière du fibré tautologique de l'espace des périodes $\mathbb{P}^{d-1}$. Du côté Drinfeld, on choisit le tiré en arrière de l'inverse du fibré tautologique de l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1}$ contenant Ω^{d-1}.

1.1.1 Améliorant des idées de Faltings, Fargues a montré dans [Far08] que les complexes $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ et $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont naturellement isomorphes, cf. [Dat07, 3.4] pour une brève explication. En reprenant la construction de l'isomorphisme, nous montrerons :

Théorème. *Les opérateurs L_{LT} et L_{Dr} coïncident via l'isomorphisme de Faltings–Fargues $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$.*

Dans la suite, nous noterons les deux complexes par le même symbole $R\Gamma_c(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_\ell)$ et L l'opérateur de Lefschetz. Nous verrons que cet opérateur est nul en cohomologie, mais qu'il est non trivial sur le complexe, et même intéressant, au moins après extension des scalaires à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

1.1.2 Soit C une extension algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ ou $\mathbb{F}_\ell$. Pour une C-représentation lisse irréductible π de G, on pose

$$R_\pi^* := \mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(R\Gamma_c(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_\ell), \pi)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^n_{CG}(R\Gamma_c(\mathcal{M}, C), \pi).$$

C'est un C-espace vectoriel gradué muni d'une action

$$\delta_\pi^* : D^\times \times W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{C-\mathrm{gr}}(R_\pi^*)$$

continue degré par degré pour la topologie ℓ-adique de R_π^* (qui est discrète si C est de caractéristique ℓ), et d'un morphisme

$$L_\pi^* : R_\pi^* \longrightarrow R_\pi^*[2](1)$$

induit par L, et commutant à l'action δ_π^*. Si l'on veut oublier la graduation, on note simplement R_π le C-espace vectoriel sans graduation, et

$$\delta_\pi : D^\times \times W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_C(R_\pi) \quad \text{et} \quad L_\pi : R_\pi \longrightarrow R_\pi(1).$$

Lorsque C est de caractéristique nulle, on voit que R_π est de dimension finie grâce à la finitude cohomologique pour les représentations lisses de G sur C. Pour C de caractéristique positive, on montre dans [Dat10, Proposition 2.1.5] que R_π est encore de dimension finie.

1.2 Coefficients ℓ-adiques : Lefschetz et Zelevinski

Nous supposons ici que C est de caractéristique nulle, et même que $C=\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Nous allons expliquer comment le triplet (R_π,δ_π,L_π) s'exprime en termes des correspondances de Langlands et Jacquet–Langlands, et de l'involution de Zelevinski.

Pour ce faire, il est commode de considérer le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ espace vectoriel

$$R'_\pi := \mathrm{Hom}_{D^\times}(\mathrm{LJ}_d(\pi),R_\pi)=\mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{GD}(R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell),\pi\otimes \mathrm{LJ}_d(\pi)^\vee)).$$

Voir [Dat07, Lemme 4.4.1] pour la deuxième égalité. Ici, $\mathrm{LJ}_d(\pi)$ désigne la représentation irréductible de $D^\times$ déduite de π par la correspondance de 'Langlands–Jacquet', cf. [Dat07, 2.1.5]. Par fonctorialité, R'_π hérite d'une action continue $\gamma_\pi : W_K \longrightarrow \mathrm{GL}(R'_\pi)$ et d'un opérateur de Lefschetz $L'_\pi : R'_\pi \longrightarrow R'_\pi(1)$, et l'évaluation fournit une application $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire $D^\times\times W_K$-équivariante et compatible aux opérateurs L :

$$\mathrm{LJ}_d(\pi)\otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(R'_\pi,\gamma_\pi,L'_\pi)\longrightarrow (R_\pi,\delta_\pi,L_\pi). \tag{1.2.0.1}$$

Fait. *L'application (1.2.0.1) est bijective.*

Bien-sûr, cette assertion est contenue dans le Théorème A de [Dat07], mais en fait elle découle simplement de la description de la cohomologie $H^*_c(\mathcal{M}_{LT},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ par Boyer dans [Boy09, Théorème 2.3.5] et du fait que deux représentations irréductibles de G n'ont pas d'extensions de Yoneda si elles n'ont pas le même support cuspidal.

1.2.1 *Opérateur N et correspondance de Langlands.* Dans [Dat07] nous avons utilisé les travaux de Boyer [Boy09] complétant ceux de Harris–Taylor [HT01] pour décrire explicitement le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans la catégorie $D^b_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(GD)$ ainsi que l'action naturelle de W_K, donnée par un morphisme

$$\gamma : W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{D^b(GD)}(R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

Pour comprendre cette action, nous avons défini en [Dat07, 4.3.2] un opérateur nilpotent

$$N : R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)(-1)$$

tel que, si l'on choisit un relèvement de Frobenius géométrique φ dans W_K, l'application

$$\begin{aligned}\gamma^\varphi : W_K &\to \mathrm{End}_{D^b(GD)}(R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell))^\times\\ w&\mapsto \gamma(w)\exp(-Nt_\ell(i_\varphi(w)))\quad \text{où } w=\varphi^{\nu(w)}i_\varphi(w)\end{aligned}$$

définit une action *localement constante* de W_K sur $R\Gamma_c(\mathcal{M},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Ici $t_\ell : I_K\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ est donné par l'action de I_K sur les racines ℓ^n-èmes d'une uniformisante, et $\nu : W_K\longrightarrow\mathbb{Z}$ envoie les Frobenius géométriques sur 1.

Par fonctorialité, on en déduit un couple $(\gamma_\pi^\varphi,N'_\pi)$ formé d'une action localement constante γ_π^φ de W_K sur R'_π et d'un opérateur nilpotent $N'_\pi : R'_\pi\longrightarrow R'_\pi(-1)$, à partir desquels on retrouve l'action γ_π en inversant la formule ci-dessus. Le théorème A de [Dat07] dit alors en substance :

Fait. *Le triplet $(R'_\pi,\gamma_\pi^\varphi,N'_\pi)$ est isomorphe à la représentation de Weil–Deligne associée à π par la correspondance de Langlands locale, convenablement normalisée.*

Deux mots sur la normalisation mentionnée : la correspondance de Langlands usuelle (pour les représentations complexes) $\pi\mapsto\sigma_d(\pi)=(\sigma_d^{\mathrm{ss}}(\pi),N_d(\pi))$ ne devient invariante par automorphismes de $\mathbb{C}$ qu'après torsion par le caractère $w\in W_K\mapsto |w|^{(d-1)/2}$, cf. [Dat07, Fait 2.2.3] par exemple. Ainsi pour la transférer sans ambiguïté à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, il faut la normaliser en posant $\sigma'_d(\pi):=\sigma_d(\pi)((d-1)/2)$. Notons que l'énoncé ci-dessus contient le fait que la

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

représentation γ_π^φ est semi-simple, et que l'espace R_π est non nul si et seulement si π est elliptique au sens de [Dat07, 2.1.6]. Bien-sûr, le cas où π est supercuspidale est dû à Harris–Taylor. Dans ce cas, π est un objet injectif parmi les représentations lisses à caractère central fixé de G, et il n'y a pas lieu d'utiliser le langage des catégories dérivées.

Afin de préparer notre énoncé sur l'opérateur de Lefschetz, il est utile de reformuler l'énoncé ci-dessus en termes de *L-paramètres*. Suivant Deligne [Del72], on peut considérer la représentation de Weil–Deligne $(\gamma_\pi^\varphi, N'_\pi)$ comme une représentation localement algébrique du groupe $W_K \ltimes_- \mathbb{G}_a$ (où w agit sur $\mathbb{G}_a$ par multiplication par $q^{-\nu(w)}$) sur R'_π, et on sait la prolonger de manière unique en un *L-paramètre*

$$\gamma_\pi^{\varphi,N} : W_K \times \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(R'_\pi)$$

grâce à Jacobson–Morozov. Ici le plongement $W_K \ltimes_- \mathbb{G}_a \hookrightarrow W_K \times \mathrm{SL}_2$ envoie $\mathbb{G}_a$ sur l'unipotent supérieur de SL_2 et $w \in W_K$ sur $\left(w, \begin{pmatrix} q^{-\nu(w)/2} & 0 \\ 0 & q^{\nu(w)/2} \end{pmatrix}\right)$. On peut alors reformuler l'énoncé précédent en :

FAIT. *La représentation $\gamma_\pi^{\varphi,N}$ est* le *L-paramètre de π (convenablement normalisé).*

1.2.2 *Opérateur L et correspondance de Zelevinski.* Partant de la description concrète de $R\Gamma_c(\mathcal{M}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, nous calculons explicitement l'opérateur L dans la section 3. Le point crucial consiste à utiliser la propriété d'uniformisation des revêtements de Drinfeld pour estimer l'ordre de nilpotence de L grâce au théorème de Lefschetz difficile en géométrie algébrique.

Le couple $(\gamma_\pi^\varphi, L'_\pi)$ n'est pas à proprement parler une représentation de Weil–Deligne puisque L'_π accroît les poids. Néanmoins, il définit une représentation algébrique du groupe $W_K \ltimes_+ \mathbb{G}_a$, où cette fois $w \in W_K$ agit sur $\mathbb{G}_a$ par multiplication par $q^{\nu(w)}$. À son tour, cette représentation se prolonge de manière unique en un L-paramètre

$$\gamma_\pi^{\varphi,L} : W_K \times \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(R'_\pi),$$

pour le plongement $W_K \ltimes_+ \mathbb{G}_a \hookrightarrow W_K \times \mathrm{SL}(2)$ qui sur W_K est défini comme ci-dessus mais qui envoie $\mathbb{G}_a$ sur l'unipotent inférieur. Notre calcul de L'_π s'interprète alors comme suit.

THÉORÈME. *La représentation $\gamma_\pi^{\varphi,L}$ est le L-paramètre (convenablement normalisé) de la représentation $Z(\pi)$ image de π par l'involution de Zelevinski.*

Pour faire bref, nous appellerons *correspondance de Zelevinski* la composition de la correspondance de Langlands avec l'involution de Zelevinski. C'est aussi la correspondance naturellement fournie par la classification de Zelevinski (par opposition à la classification de Langlands). Nous renvoyons aux sections 9 et 10 de [Zel80] pour le lien entre ces deux classifications et l'involution.

On peut aussi utiliser L pour réaliser la correspondance de Langlands directement. Pour cela, introduisons

$$T'_\pi := \mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{GD}((\pi^\vee \otimes \mathrm{LJ}_d(\pi)), R\Gamma_c(\mathcal{M}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell))(d-1),$$

qui est aussi muni d'une action θ_π de W_K et d'un opérateur induit par L. Comme ci-dessus on en déduit deux L-paramètres $\theta_\pi^{\varphi,N}$ et $\theta_\pi^{\varphi,L}$.

COROLLAIRE. *La représentation $\theta_\pi^{\varphi,L}$ est le L-paramètre de π, et $\theta_\pi^{\varphi,N}$ est celui de $Z(\pi)$.*

On peut bien-sûr obtenir ce corollaire par un calcul explicite comme le théorème précédent, mais il est conceptuellement plus intéressant de remarquer qu'il découle du théorème via

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

de jolies propriétés de dualité cohomologique. Plus précisément, soit $\mathbb{D}$ l'anti-involution de $D^b_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(GD)$ induite par le foncteur $V \mapsto \mathrm{Hom}_{GD}(V, \mathcal{C}^\infty_c(GD))$. Alors d'une part on déduit de [SS95, III.3 et IV.5] qu'il existe un entier n_π tel que $\mathbb{D}(\pi^\vee \otimes \mathrm{LJ}_d(\pi)) = Z(\pi) \otimes \mathrm{LJ}_d(\pi)^\vee[n_\pi]$. D'autre part, d'après [Far07], on a $\mathbb{D}(R\Gamma_c(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_l)) = R\Gamma_c(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[2d-2](d-1)$. Il s'ensuit donc un isomorphisme $T'_\pi \simeq R'_{Z(\pi)}$ compatible à l'action de W_K et à l'opérateur de Lefschetz.

1.2.3 *Paramètres d'Arthur non unitaires.* Une question naturelle est de savoir si la représentation de $W_F \ltimes (\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)$ définie par le triplet $(\gamma^\varphi_\pi, N'_\pi, L'_\pi)$ se prolonge en un A-*paramètre*

$$\gamma^{\varphi,N,L}_\pi : W_K \times \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(R'_\pi).$$

Proposition. *Le triplet ci-dessus se prolonge en un A-paramètre $\gamma^{\varphi,N,L}_\pi$ si et seulement si π est unitarisable, i.e. est une série discrète ou une représentation de Speh. Dans ce cas $\gamma^{\varphi,N,L}_\pi$ est le paramètre d'Arthur de π.*

Lorsque π est unitaire, cette proposition illustre le principe général selon lequel 'l'involution de Zelevinski échange les deux SL(2) d'Arthur, celui de la monodromie et celui du Lefschetz'. Dans ce cas précis des variétés de Shimura uniformisées par les revêtements de Drinfeld, cela avait été observé par Harris et lui avait fait deviner la forme de la cohomologie de ces revêtements.

Lorsque π n'est pas unitaire, ce qui empêche le triplet $(\gamma^\varphi_\pi, N'_\pi, L'_\pi)$ de s'étendre en un A-paramètre est que le transposé ${}^tL'_\pi$ ne commute pas à N'_π. C'est là une différence notable avec ce qui se passe pour la cohomologie d'une variété algébrique *propre* et lisse, pour laquelle une conjecture standard de Grothendieck prévoit que ce transposé est d'origine géométrique. On a envie de penser aux triplets $(\gamma^\varphi_\pi, N'_\pi, L'_\pi)$ comme à des paramètres d'Arthur 'non unitaires'. Le théorème montre qu'ils possèdent la même propriété de symétrie vis-à-vis de l'involution de Zelevinski que les vrais paramètres d'Arthur. L'auteur ignore si de tels triplets pourraient être utiles à la description de la cohomologie des espaces de Rapoport–Zink, comme ceux d'Arthur le sont pour la cohomologie d'intersection des variétés de Shimura.

1.3 Coefficients ℓ-modulaires : une conjecture

On suppose maintenant que C est un corps de caractéristique ℓ, et pour simplifier on supposera $C = \bar{\mathbb{F}}_\ell$. Dans cette situation, l'auteur ne voit aucun moyen de définir un opérateur N sur le complexe comme ci-dessus. En d'autres termes, l'énoncé de 1.2.1 n'a très probablement pas d'analogue sur $\bar{\mathbb{F}}_\ell$. Par contre, l'opérateur L existe bel et bien, et l'auteur conjecture qu'il fournira une interprétation géométrique à la correspondance de Langlands–Vignéras; c'est même là notre principale motivation pour avoir introduit l'opérateur de Lefschetz. Commençons par quelques rappels sur cette correspondance.

1.3.1 *La correspondance de Langlands mod ℓ.* Dans [Vig01], Vignéras définit une bijection

$$\begin{array}{ccc} \{\bar{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. lisses irréd. de } G\}_{/\sim} & \xrightarrow{\sim} & \{\bar{\mathbb{F}}_\ell\text{-repr. de Weil–Deligne de dim. } d\}_{/\sim} \\ \pi & \mapsto & \sigma_d(\pi) = (\sigma^{\mathrm{ss}}_d(\pi), N_d(\pi)). \end{array}$$

Ici, comme dans le cas complexe, une représentation de Weil–Deligne est un couple $(\sigma^{\mathrm{ss}}, N)$ formé d'une représentation *semi-simple* σ^{ss} de W_F et d'un morphisme *nilpotent* $N : \sigma^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \sigma^{\mathrm{ss}}(-1)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

La partie semi-simple de cette correspondance est caractérisée par de jolies propriétés de compatibilité avec la partie semi-simple de la correspondance classique sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ via la réduction modulo ℓ, cf. [Vig01, 1.6]. La recette pour définir la partie 'nilpotente' est esquissée en [Vig01, 1.8] et repose sur une classification 'à la Zelevinski' des représentations de G décrite dans [Vig98]. Elle n'est caractérisée par aucune propriété de fonctions L ou facteurs ε et *n'est pas compatible à la réduction modulo* ℓ. Cependant, cette recette fait intervenir une involution de Zelevinski pour les $\bar{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de G, définie dans [Vig97], et il apparaît que la *correspondance de Zelevinski modulo* ℓ est un peu plus naturelle que celle 'de Langlands'. Elle est même compatible avec la réduction modulo ℓ, quoiqu'en un sens un peu compliqué lié à la théorie des dérivées de Gelfand, cf. [Vig01, 1.8].

Ainsi, en l'état actuel, la correspondance modulo ℓ complète (de Langlands ou de Zelevinski) résulte d'un travail de classification, et n'a pas de justification arithmétique claire. C'est ce qui nous a motivé pour en chercher une justification *géométrique*, similaire à celle obtenue dans [Dat07] dans le cas ℓ-adique. Cependant l'opérateur N sur $R\Gamma_c(\mathcal{M}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est défini de manière arithmétique en examinant la restriction de l'action de W_K à un sous-groupe ouvert arbitrairement petit. Ceci ne s'adapte pas aux coefficients modulo ℓ puisqu'un sous-groupe suffisamment petit agira trivialement. Il faudrait donc une définition géométrique du N. Une telle définition serait possible si l'on disposait de modèles semi-stables des $\mathcal{M}_{Dr,n}$ ou $\mathcal{M}_{LT,n}$. Cependant, de tels modèles ne sont pas près d'être disponibles. Pire, dans les cas où l'on en dispose ($n = 1$, cf. [Yos10]), les calculs que nous avons pu effectuer ne donnent pas le N de la correspondance de Langlands, ce qui n'est pas si étonnant, puisque celle-ci n'est pas compatible à la réduction modulo ℓ.

1.3.2 *L'homomorphisme* $\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}$. Si l'on veut un énoncé analogue à celui du théorème 1.2.2, il faut comprendre ce qu'il advient de l'action de $D^\times$. Pour cela, nous avons défini un transfert de Langlands–Jacquet pour les $\bar{\mathbb{F}}_\ell$-représentations dans [Dat12].

Soit $\mathcal{R}(D^\times, C)$ le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de $D^\times$ à coefficients dans le corps C. On dispose d'une application de décomposition $r_\ell : \mathcal{R}(D^\times, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \bar{\mathbb{F}}_\ell)$. Rappelons brièvement que pour définir $r_\ell(\rho)$, on choisit un sous-$\bar{\mathbb{Z}}_\ell[D^\times]$-module ω de type fini de ρ qui engendre ρ après inversion de ℓ, puis on montre que la semi-simplifiée de la réduction modulo l'idéal maximal de $\bar{\mathbb{Z}}_\ell$ de ω ne dépend pas du choix de ω. Notons que $r_\ell(\rho) = 0$ si le caractère central de ρ n'est pas entier. Par le même procédé, on peut définir une application $r_\ell : \mathcal{R}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(G, \bar{\mathbb{F}}_\ell)$, cf. [Vig96, II.5.11b].

FAIT [Dat12, Théorème 2.4.2]. *Il existe un unique homomorphisme* $\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell} : \mathcal{R}(G, \bar{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \bar{\mathbb{F}}_\ell)$ *compatible avec l'homorphisme* $\mathrm{LJ}_d : \mathcal{R}(G, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *de [Dat07, 2.1.5] via les applications de réduction* r_ℓ.

Dans [Dat12], il est conjecturé, et prouvé dans quelques cas, que l'application $\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}$ envoie les irréductibles sur des représentations *effectives au signe près*.

1.3.3 *Spéculations.* Soit π une $\bar{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G. Considérons comme plus haut l'espace vectoriel gradué $R^*_\pi = \mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_G(R\Gamma_c(\mathcal{M}, \bar{\mathbb{F}}_\ell), \pi))$ muni de l'action δ^*_π de $D^\times \times W_K$ et de l'opérateur $L^*_\pi : R^*_\pi \longrightarrow R^*_\pi[2](1)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

Par analogie avec le cas ℓ-adique, l'énoncé le plus optimiste que l'on peut attendre est le suivant, qui était conjecturé dans la version initialement soumise de cet article.

Énoncé optimiste. (i) *R^*_π est concentré en degrés tous pairs ou tous impairs.*

(ii) $\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$ *est effective au signe près. On note alors* $|\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)|$ *sa 'valeur absolue'.*

(iii) $(\delta^{\mathrm{ss}}_\pi, {}^tL_\pi) \simeq |\mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)| \otimes (\sigma_d(\pi), N^Z_d(\pi))((d-1)/2)$ *où* $N^Z_d(\pi)$ *est l'opérateur nilpotent associé à π par la correspondance de Vignéras–Zelevinski.*

Dans le dernier point, δ^{ss}_π désigne la semi-simplifiée de la représentation δ_π sur R_π, et ${}^tL_\pi : \delta^{\mathrm{ss}}_\pi \longrightarrow \delta^{\mathrm{ss}}_\pi(-1)$ désigne le 'transposé' de L_π, que l'on peut définir par exemple à l'aide de la filtration de Deligne (les détails de cette construction seront donnés ailleurs).

Depuis la version initialement soumise de cet article, l'auteur a étudié plus précisément cet énoncé. Dans [Dat10], il est prouvé lorsque π est cuspidale ; dans ce cas, R^*_π est concentré en degré $1-d$. Dans un travail en cours, nous le prouvons lorsque q est d'ordre d dans $\mathbb{F}^\times_\ell$ et π est unipotente. C'est le premier cas où la théorie des représentations est vraiment différente du cas ℓ-adique. L'auteur sait aussi le prouver pour π quelconque lorsque $n=2$.

Néanmoins, l'énoncé est pris en défaut lorsque $q \equiv 1[\ell]$ et $\ell > n$. Plus précisément, le point (ii) est vrai, cf. [Dat12, Corollaire 3.2.5], mais le point (i) est faux, cf. [Dat10, (2.2.7)]. Pour contourner cette difficulté, on peut définir un élément $[\delta^*_\pi, {}^tL^*_\pi]$ dans le groupe de Grothendieck des représentations de Weil–Deligne en prenant en compte la partie paire et la partie impaire de R^*_π. L'énoncé espéré prend alors la forme d'une égalité.

Conjecture. *On a dans le groupe de Grothendieck des représentations de Weil–Deligne l'égalité*

$$[\delta^*_\pi, {}^tL^*_\pi] = \mathrm{LJ}_{d,\bar{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \otimes [\sigma_d(\pi), N^Z_d(\pi)]\left(\frac{d-1}{2}\right).$$

Notons que dans [Dat10, Théorème 2], une telle égalité est prouvée *sans le L*, mais en toute généralité.

2. Définition de l'opérateur de Lefschetz

2.1 Classes de Chern équivariantes-lisses

2.1.1 Soit X un espace analytique sur K muni d'une action continue d'un groupe topologique G. Berkovich a défini la notion de faisceau G-équivariant 'discret' sur X que nous avons exposée dans [Dat06, B.1]. Ces faisceaux forment un topos $\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)$.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Nous dirons qu'une G-linéarisation (i.e. une structure G-équivariante) sur $\mathcal{L}$ est 'continue' si l'action de G sur le fibré en droites $|\mathcal{L}|$ associé à $\mathcal{L}$ est continue. Dans cette situation, nous allons associer à $\mathcal{L}$ sa classe de Chern

$$c_{\Lambda G}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Ext}^2_G(\Lambda_X, \Lambda_X(1))$$

dans la catégorie $\mathrm{Mod}_\Lambda(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G))$ des Λ-modules dans $\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)$, où Λ désigne une $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre locale de torsion et Λ_X le faisceau 'constant' de germes Λ.

2.1.2 *Problème avec la définition classique.* Si l'on oublie l'action de G, la construction classique de [SGA5, Exposé VII] s'adapte sans problème aux espaces analytiques. On peut en effet se ramener à $\Lambda := \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, auquel cas la classe de Chern

$$c_\Lambda(\mathcal{L}) \in H^2(X, \Lambda(1)) = \mathrm{Ext}^2(\Lambda_X, \Lambda_X(1)) \tag{2.1.2.1}$$

est définie comme l'image de la classe de $\mathcal{L}$ dans $H^1(X, \mathbb{G}_m)$ par le morphisme bord associé à la suite exacte de Kummer $0 \mapsto \Lambda_X(1) \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^{\ell^n}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$ de faisceaux étales sur X. Cette construction fonctionne encore si on rajoute l'action de G mais en oubliant sa topologie. En effet, notons G^{disc} le groupe G muni de la topologie discrète. Alors le faisceau $\mathbb{G}_m$ est naturellement G^{disc}-équivariant et la classe de $\mathcal{L}$ définit une extension G^{disc}-équivariante de $\mathbb{G}_m$ par $\mathbb{Z}$. On en déduit donc une classe de Chern G^{disc}-équivariante

$$c_{\Lambda G^{\mathrm{disc}}}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Ext}^2_{G^{\mathrm{disc}}}(\Lambda_X, \Lambda_X(1)). \tag{2.1.2.2}$$

Le problème pour passer de G^{disc} à G vient de ce que le faisceau $\mathbb{G}_m$ n'est pas un objet de $\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)$. On pourrait peut-être élargir le topos $\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)$ en considérant des faisceaux continus d'espaces topologiques, mais nous préférons suivre une voix plus économique.

2.1.3 Notons $q : |\mathcal{L}| \longrightarrow X$ la projection naturelle, et $i : X \longrightarrow |\mathcal{L}|$ la section zéro. Par hypothèse, ce sont des morphismes équivariants d'espaces analytiques munis d'une action continue de G. Rappelons [Dat06, B.1.5] que les foncteurs 'image directe à supports propres' induisent des foncteurs

$$q_!^\infty : \widetilde{|\mathcal{L}|_{\mathrm{et}}}(G) \longrightarrow \widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G) \quad \text{et} \quad i_!^\infty = i_*^\infty : \widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G) \longrightarrow \widetilde{|\mathcal{L}|_{\mathrm{et}}}(G)$$

puis, en dérivant,

$$Rq_!^\infty : D^b_\Lambda(\widetilde{|\mathcal{L}|_{\mathrm{et}}}(G)) \longrightarrow D^b_\Lambda(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)) \quad \text{et} \quad i_!^\infty = i_*^\infty : D^b_\Lambda(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G)) \longrightarrow D^b_\Lambda(\widetilde{|\mathcal{L}|_{\mathrm{et}}}(G)).$$

Appliquant $Rq_!^\infty$ au morphisme d'adjonction $\Lambda_{|\mathcal{L}|} \longrightarrow i_*^\infty(\Lambda_X)$, on en déduit une flèche

$$Rq_!^\infty(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \longrightarrow \Lambda_X \tag{2.1.3.1}$$

dans $D^b_\Lambda(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G))$. Par ailleurs, la compatibilité cohomologique [Dat06, B.1.7] entre $q_!^\infty$ et $q_!$ montre que $Rq_!^\infty(\Lambda_{|\mathcal{L}|})$ est concentré en degré 2, puisque q est un fibré vectoriel de rang 1. Comme le morphisme trace relatif $R^2q_!(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_X(-1)$ de [Ber93, Theorem 7.2.1] est évidemment G-équivariant, il induit un isomorphisme

$$Rq_!^\infty(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_X[-2](-1) \tag{2.1.3.2}$$

dans $D^b_\Lambda(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G))$.

DÉFINITION 2.1.4. Dans la situation de 2.1.1 et avec les notations ci-dessus, on définit la classe de Chern $c_{\Lambda G}(\mathcal{L})$ comme la composée

$$\Lambda_X \xrightarrow{\sim} Rq_!^\infty(\Lambda_{|\mathcal{L}|})[2](1) \longrightarrow \Lambda_X[2](1)$$

de l'inverse de l'isomorphisme (2.1.3.2) et du morphisme (2.1.3.1) décalés de 2 et tordus par $\Lambda(1)$.

PROPOSITION 2.1.5. *Soit $c'_\Lambda(\mathcal{L})$ l'image de $c_{\Lambda G}(\mathcal{L})$ par le morphisme d'oubli de la structure G-équivariante $\mathrm{Ext}^2_G(\Lambda_X, \Lambda_X(1)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\Lambda_X, \Lambda_X(1))$, et soit $c_\Lambda(\mathcal{L})$ la classe de Chern 'classique' de (2.1.2.1). Alors on a l'égalité $c_\Lambda(\mathcal{L}) = c'_\Lambda(\mathcal{L})$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

Preuve. La suite de morphismes d'adjonctions $i_*i^!(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \longrightarrow \Lambda_{|\mathcal{L}|} \longrightarrow i_*i^*(\Lambda_{|\mathcal{L}|})$ à laquelle on applique $Rq_!$ s'insère dans un diagramme.

$$\begin{tikzcd} i^!(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \arrow[r, "a"] & Rq_!(\Lambda_{|\mathcal{L}|}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_q"] & \Lambda_X \\ \Lambda_X[-2](-1) \arrow[u, "\mathrm{Cl}_i"] & \Lambda_X[-2](-1) & \end{tikzcd}$$

Ici Tr_q est le morphisme trace, qui est un isomorphisme comme on l'a déjà vu, et Cl_i est l'isomorphisme de pureté cohomologique relative de [Ber93, Theorem 7.4.5] appliqué à la X-paire lisse $(X, |\mathcal{L}|)$. Comme $|\mathcal{L}|$ est l'analytification d'un schéma de type fini relativement compactifiable sur X, il résulte de la compatibilité GAGA de [Ber93, Theorem 7.1.4] que les deux propriétés suivantes dans le cas des schémas, cf. [SGA4$\frac{1}{2}$, Exp. VI, 2.1], restent vraies dans le contexte des espaces analytiques.

(i) L'isomorphisme Cl_i est l'image par i^* de la classe de Chern $c_\Lambda(\mathcal{O}_{|\mathcal{L}|}(X))$ vue comme morphisme $\Lambda_{|\mathcal{L}|}[-2](-1) \longrightarrow i_*i^!(\Lambda_{|\mathcal{L}|})$ dans $D^b(|\mathcal{L}|, \Lambda)$. (En effet, cette classe de Chern est par définition à support dans X, i.e. vit naturellement dans $H^2_X(|\mathcal{L}|, \Lambda(1)) = \mathrm{Ext}^2(\Lambda_{|\mathcal{L}|}, i_*i^!\Lambda_{|\mathcal{L}|}(1))$.)

(ii) La composée $\mathrm{Tr}_q \circ a \circ \mathrm{Cl}_i$ est l'identité. En effet, il suffit de le montrer sur les fibres géométriques (car la source et le but sont des complexes de faisceaux concentrés en un seul et même degré), or sur chaque fibre, c'est la 'compatibilité fondamentale' de [SGA4$\frac{1}{2}$, Exp. VI, 2.1.5].

On en déduit l'égalité suivante dans $\mathrm{Ext}^2(\Lambda_X, \Lambda_X(1))$:

$$c'_\Lambda(\mathcal{L}) = i^* c_\Lambda(\mathcal{O}_{|\mathcal{L}|}(X)).$$

Maintenant considérons l'espace total $|q^*\mathcal{L}| = |\mathcal{L}| \times_X |\mathcal{L}|$ du fibré inversible $q^*\mathcal{L}$ sur $|\mathcal{L}|$. La diagonale $|\mathcal{L}| \longrightarrow |\mathcal{L}| \times_X |\mathcal{L}|$ définit une section de $q^*\mathcal{L}$ qui s'annule sur X et induit donc un morphisme $\mathcal{O}_{|\mathcal{L}|}(X) \longrightarrow q^*\mathcal{L}$, lequel est tautologiquement un isomorphisme. Par compatibilité des classes de Chern au changement de base on a donc $c_\Lambda(\mathcal{O}_\mathcal{L}(X)) = q^* c_\Lambda(\mathcal{L})$ et par suite $c'_\Lambda(\mathcal{L}) = c_\Lambda(\mathcal{L})$. □

2.1.6 *Changement de base.* Soit $(f, \varphi) : (X, G) \longrightarrow (X', G')$ un morphisme de paires comme dans 2.1.1, et soit $\mathcal{L}'$ un faisceau inversible G'-equivariant continu sur X'. L'image inverse $\mathcal{L} := f^*(\varphi^*\mathcal{L}')$ du faisceau G-équivariant $\varphi^*\mathcal{L}'$ sur X' déduit de $\mathcal{L}'$ via φ est naturellement un faisceau G-equivariant continu sur X. Le théorème de changement de base pour $q_!$ et i_* [Ber93, Theorem 7.7.1] et la compatibilité du morphisme trace au changement de base [Ber93, Theorem 7.2.1(a)] montrent que la définition 2.1.4 est compatible au changement de base en le sens suivant :

$$c_{\Lambda G}(\mathcal{L}) = f^*(\varphi^* c_{\Lambda G'}(\mathcal{L}')). \tag{2.1.6.1}$$

Ici φ^* désigne le foncteur $\widetilde{X'_{\mathrm{et}}}(G') \longrightarrow \widetilde{X'_{\mathrm{et}}}(G)$ de restriction le long de φ.

Si l'on suppose de plus que f est étale, alors $Rf_! = f_!$ est adjoint à gauche de f^* et il s'ensuit que le diagramme suivant est commutatif dans $D^b_\Lambda(\widetilde{X'_{\mathrm{et}}}(G))$.

$$\begin{tikzcd} Rf_!\Lambda_X \arrow[r, "c_{\Lambda G}(\mathcal{L})"] \arrow[d] & Rf_!\Lambda_X[2](1) \arrow[d] \\ \Lambda_{X'} \arrow[r, "\varphi^* c_{\Lambda G'}(\mathcal{L}')"'] & \Lambda_{X'}[2](1) \end{tikzcd}$$

Appliquant le foncteur $R\Gamma^\infty_c(X', -)$ on en déduit un diagramme commutatif dans $D^b_\Lambda(G)$.

$$\begin{tikzcd} R\Gamma^\infty_c(X,\Lambda) \arrow[r, "c_{\Lambda G}(\mathcal{L})"] \arrow[d] & R\Gamma^\infty_c(X,\Lambda)[2](1) \arrow[d] \\ \varphi^* R\Gamma^\infty_c(X',\Lambda) \arrow[r, "\varphi^* c_{\Lambda G'}(\mathcal{L}')"'] & \varphi^* R\Gamma^\infty_c(X',\Lambda)[2](1) \end{tikzcd} \qquad (2.1.6.2)$$

2.1.7 *Passage au quotient.* Plaçons-nous encore dans la situation de 2.1.1 et supposons donné un sous-groupe discret Γ de G dont l'action sur X est libre et propre. On peut alors former l'espace analytique quotient X/Γ, et la projection $p: X \longrightarrow X/\Gamma$ est un revêtement analytique Galoisien de groupe Γ. En particulier, le morphisme d'image inverse p^* induit une équivalence de topoi $\widetilde{(X/\Gamma)}_{\mathrm{et}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X_{\mathrm{et}}}(\Gamma)$. Par ailleurs, l'action de Γ sur $|\mathcal{L}|$ est aussi propre et libre, et le quotient $|\mathcal{L}|/\Gamma$ est un fibré en droites sur X/Γ dont on note le faisceau inversible associé $\mathcal{L}_\Gamma$. On a un isomorphisme canonique $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} p^*\mathcal{L}_\Gamma$. Notons ι l'inclusion de Γ dans G. D'après le paragraphe précédent, on a alors les égalités suivantes dans $\mathrm{Ext}^2_\Gamma(\Lambda_X, \Lambda_X(1))$:

$$c_{\Lambda\Gamma}(\mathcal{L}) = \iota^* c_{\Lambda G}(\mathcal{L}) = p^* c_\Lambda(\mathcal{L}_\Gamma). \qquad (2.1.7.1)$$

Par ailleurs, faisant $X' = X/\Gamma$ et $G' = \{1\}$ dans le diagramme (2.1.6.2), on obtient par adjonction de φ^* et du foncteur des coinvariants sous Γ un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes^L_{\Lambda[\Gamma]} R\Gamma_c(X,\Lambda) \arrow[r, "c_{\Lambda\Gamma}(\mathcal{L})"] \arrow[d] & \Lambda \otimes^L_{\Lambda[\Gamma]} R\Gamma_c(X,\Lambda)[2](1) \arrow[d] \\ R\Gamma_c(X/\Gamma,\Lambda) \arrow[r, "c_\Lambda(\mathcal{L}_\Gamma)"'] & R\Gamma_c(X/\Gamma,\Lambda)[2](1) \end{tikzcd} \qquad (2.1.7.2)$$

Rappelons que dans cette situation, les flèches verticales sont des isomorphismes, d'après [Dat06, B.3.1].

2.1.8 Supposons maintenant que Λ est une extension finie et plate de $\mathbb{Z}_\ell$. On lui associe un pro-anneau $\Lambda_\bullet = (\Lambda/\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un $\Lambda_\bullet$-module dans un topos $\mathcal{T}$ est un système projectif $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Λ-modules tels que $\ell^n\mathcal{F}_n = 0$. La définition 2.1.4 s'adapte immédiatement aux $\Lambda_\bullet$-modules et fournit donc une classe de Chern

$$c_{\Lambda_\bullet G}(\mathcal{L}) \in \mathrm{Hom}_{D^b_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{X_{\mathrm{et}}}(G))}(\Lambda_{\bullet,X}, \Lambda_{\bullet,X}[2](1)).$$

Les propriétés des paragraphes 2.1.6 et 2.1.7 s'appliquent encore.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

2.2 Opérateurs de Lefschetz sur les tours

2.2.1 *Rappels et correction de la définition de* $R\Gamma_c(\mathcal{M}, \Lambda)$. Nous utilisons librement les notations des paragraphes 3.1, 3.2 et 3.3 de [Dat07] et en profitons pour corriger une erreur dans le paragraphe 3.3. Pour traiter simultanément les deux tours, on note $\mathcal{P}$ l'espace des périodes, qui est muni de l'action continue du groupe J triviale sur le centre $K^\times$. Dans le cas Lubin–Tate, $\mathcal{P}$ est la variété de Severi–Brauer d'invariant $1/d$ et $J = D^\times$. Dans le cas Drinfeld, $\mathcal{P}$ est l'espace symétrique de Drinfeld Ω_K^{d-1} et $J = \mathrm{GL}_d(K)$. Dans chacun des cas nous avons *presque* défini en [Dat07, 3.3.1] un foncteur 'sections à supports compacts sur la tour'

$$\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, -) : \widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times) \longrightarrow (\widetilde{GD \times W_K}), \tag{2.2.1.1}$$

où le terme de droite désigne le topos des $GD \times W_K$-ensembles qui sont discrets pour l'action de $GD \times W_K$. En fait la source considérée dans [Dat07, 3.3.1] est le topos J-équivariant $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J)$. Mais celui-ci donne plutôt naissance à un foncteur (voir aussi [Far08, IV.13])

$$\Gamma_c^\times(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, -) : \widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J) \longrightarrow (\widetilde{G \times D^\times \times W_K}) \tag{2.2.1.2}$$

qui forme avec le précédent et les foncteurs d'inflation un carré commutatif évident. Une fois corrigée la construction du complexe en remplaçant topos J-équivariant par topos $J/K^\times$-équivariant, le reste de l'article [Dat07] ne nécessite pas de changement supplémentaire. En particulier le théorème de comparaison IV.13.1 de [Far08] entre les deux tours reste vrai avec les topos $J/K^\times$-équivariants, et ce avec la même preuve. Cependant dans le présent article, nous allons constater que les classes de Chern les plus 'naturelles' sont J-équivariantes et pas $J/K^\times$-équivariantes et pour cela nous devrons surtout utiliser le foncteur (2.2.1.2), et même une modification (2.2.3.1) donnée plus loin.

Lorsque Λ est de torsion, le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \Lambda)$ de [Dat07] est obtenu simplement en évaluant le foncteur dérivé

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, -) : D^b_\Lambda(\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times)) \longrightarrow D^b_\Lambda(GD \times W_K)$$

en le faisceau $\Lambda_{\mathcal{P}}$. Lorsque Λ est une extension finie plate de $\mathbb{Z}_\ell$, on note $\Lambda_\bullet$ le pro-anneau $(\Lambda/l^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors défini $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \Lambda)$ comme l'évaluation en le $\Lambda_\bullet$-module $\Lambda_{\bullet,\mathcal{P}}$ de $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times)$ du foncteur dérivé

$$R\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, -) : D^b_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times)) \longrightarrow D^b_\Lambda(GD \times W_K^{\mathrm{disc}})$$

du foncteur

$$\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \,) := \Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, -) \circ \varprojlim{}^{\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times)} : \mathrm{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J/K^\times)) \longrightarrow \mathrm{Mod}_\Lambda(GD \times W_K^{\mathrm{disc}})$$

de [Dat07, p. 108, l.7].

2.2.2 *Classes de Chern canoniques.* Soit $\mathcal{K}$ le faisceau *canonique* de $\mathcal{P}$, i.e. le déterminant de son fibré cotangent sur le corps de base K. Il est canoniquement $J/K^\times$-équivariant, donc la classe de Chern $c_{\Lambda J}(\mathcal{K})$ de la définition 2.1.4, respectivement $c_{\Lambda_\bullet J}(\mathcal{K})$ de 2.1.8, induit un morphisme dans $D^b_\Lambda(GD \times W_K^{\mathrm{disc}})$

$$K : R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \Lambda)[2](1). \tag{2.2.2.1}$$

Les classes de Chern K_{LT} et K_{Dr} ainsi obtenues ont deux inconvénients. D'une part, ce ne sont pas les 'moins divisibles' possible, ce qui pourra être gênant lorsqu'on s'intéressera au cas $\Lambda = \mathbb{F}_\ell$. D'autre part, elles ne sont pas faciles à comparer à travers l'isomorphisme de Faltings et Fargues.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

2.2.3 *Modification de la construction du complexe.* Les classes de Chern que nous voulons maintenant définir ne seront pas GD-équivariantes mais seulement $G\times D^\times$-équivariantes. De plus, pour une raison technique qui apparaitra au paragraphe suivant, nous devons modifier un peu la définition du complexe en changeant simplement la source du foncteur $\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},-)$. Pour cela fixons un progénérateur φ de $\mathrm{Gal}(\widehat{K^{\mathrm{nr}}}|K)$ et considérons le topos $\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{et}}}(J\times\varphi)$ des faisceaux étales J-équivariants continus sur $\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}:=\mathcal{P}\mathbin{\widehat{\otimes}_K}\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$, munis d'une donnée de descente à la Weil (i.e. φ-équivariants). La même construction que dans [Dat07, 3.3.1] fournit un foncteur

$$\Gamma_c^\times(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},-):\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{et}}}(J\times\varphi)\longrightarrow(G\times\widetilde{D^\times\times W_K}),\tag{2.2.3.1}$$

qui factorise le foncteur (2.2.1.2) à travers le foncteur d'extension des scalaires $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathrm{et}}}(J)\longrightarrow\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{et}}}(J\times\varphi)$. Comme ce dernier foncteur est exact et envoie faisceaux mous sur faisceaux mous, on voit que l'objet $R\Gamma_c^\times(\mathcal{M},\Lambda)$ défini comme l'évaluation en $\Lambda_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}}$, respectivement $\Lambda_{\bullet,\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}}$ du foncteur dérivé

$$R\Gamma_c^\times(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},-):D^b_\Lambda(\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{et}}}(J\times\varphi))\longrightarrow D^b_\Lambda(G\times D^\times\times W_K),$$

respectivement du foncteur dérivé

$$R\Gamma_{c,\bullet}^\times(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},-):D^b_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{et}}}(J\times\varphi))\longrightarrow D^b_\Lambda(G\times D^\times\times W_K^{\mathrm{disc}})$$

coïncide avec l'image par le foncteur d'inflation $\mathrm{Mod}_\Lambda(GD)\longrightarrow\mathrm{Mod}_\Lambda(G\times D^\times)$ du complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},\Lambda)$ de [Dat07] et du premier paragraphe.

Notation. Nous noterons simplement $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},\Lambda)$ le complexe $R\Gamma_c^\times(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},\Lambda)$. Pour éviter toute confusion, nous préciserons toujours dans quelle catégorie dérivée on le considère.

2.2.4 *Classes de Chern tautologiques.* Supposons donné un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}$, muni d'une action continue de J et d'une donnée de descente à la Weil. La classe de Chern $c_{\Lambda J\times\varphi}(\mathcal{L})$ de la définition 2.1.4, respectivement $c_{\Lambda_\bullet J\times\varphi}$ de 2.1.8, induit alors un morphisme

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},\Lambda)\longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},\Lambda)[2](1)\quad\text{dans } D^b_\Lambda(G\times D^\times\times W_K^{\mathrm{disc}}).\tag{2.2.4.1}$$

Voici les faisceaux que nous considèrerons par la suite.

Dans le cas Lubin–Tate, on rappelle que $\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}=\mathbb{P}(\mathbb{M})$ est l'espace projectif des droites quotients du module de Dieudonné rationnel $\mathbb{M}:=\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ (ou du module de coordonnées si $\mathrm{car}(K)>0$) du $\mathcal{O}$-module formel $\mathbb{H}$ que l'on déforme, voir [Dat07, 3.2.8]. Le module $\mathbb{M}$ est un $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$-espace vectoriel de dimension d muni d'un endomorphisme φ-linéaire inversible de pente $1/d$. Celui-ci induit une donnée de descente *effective* sur $\mathbb{P}(\mathbb{M})$ et l'espace descendu est la variété de Severi–Brauer d'invariant $1/d$. Il induit aussi une donnée de descente sur le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{M})}(1)$ mais cette dernière *n'est pas effective*. C'est la raison pour laquelle nous avons modifié la source du foncteur $\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}},-)$ dans le paragraphe précédent. Par ailleurs le commutant $J=\mathrm{GL}(\mathbb{M})^\varphi$ s'identifie à $D^\times$ et agit continûment sur $\mathbb{P}(\mathbb{M})$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{M})}(1)$. Remarquons que l'action sur $\mathbb{P}(\mathbb{M})$ se factorise par $J/K^\times$, mais pas celle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{M})}(1)$.

Du côté Drinfeld, on a un morphisme de périodes $\mathcal{M}_{Dr,0}\longrightarrow\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$ où $\mathbb{N}_0$ est un certain facteur direct du module de Dieudonné $\mathbb{N}=\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$ (ou du module de coordonnées) du $\mathcal{O}_D$-module formel spécial $\mathbb{G}$ que l'on 'déforme'. Plus précisément, $\mathbb{N}_0$ est un $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$-espace vectoriel de dimension d, muni d'un endomorphisme φ-linéaire de pente 1. À nouveau celui-ci induit une donnée de descente *effective* sur $\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$ qui permet d'identifier l'espace des périodes $\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}$ au lieu 'faiblement admissible' $\Omega_K^{d-1,\mathrm{nr}}$ complémentaire de la réunion des hyperplans K-rationnels dans $\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$. Par contre la donnée de descente induite sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)}(1)$ *n'est pas effective*. Par ailleurs le

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

commutant $J = \mathrm{GL}(\mathbb{N}_0)^\varphi$ s'identifie à $G = \mathrm{GL}_d(K)$ et agit continûment sur $\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)}(1)$. Ici encore l'action sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)}(1)$ n'est pas triviale sur le centre $K^\times$.

Définition. Avec les notations ci-dessus :

– l'opérateur de Lefschetz $L_{LT} : R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{LT}, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{LT}, \Lambda)[2](1)$ est le morphisme (2.2.4.1) induit par la classe de Chern de $\mathcal{L}_{LT} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{M})}(1)$;
– l'opérateur de Lefschetz $L_{Dr} : R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{Dr}, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{Dr}, \Lambda)[2](1)$ est le morphisme (2.2.4.1) induit par la classe de Chern de $\mathcal{L}_{Dr} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{N}_0)}(-1)_{|\Omega_K^{d-1,\mathrm{nr}}}$.

Nous comparerons ces classes de Chern tautologiques à celles de (2.2.2.1) au paragraphe 2.2.6. En attendant, voici la motivation principale pour les préférer.

2.2.5 *Comparaison entre L_{LT} et L_{Dr}.* Dans le théorème IV.13.1 de [Far08] est construite une équivalence de topos $\mathrm{JL} : \widetilde{\mathcal{P}_{LT,\mathrm{et}}}(D^\times) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{P}_{Dr,\mathrm{et}}}(G)$ qui entrelace les foncteurs 'sections à supports compacts sur la tour', au sens où $\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{Dr}, -) = \Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{LT}, -) \circ \mathrm{JL}$. La preuve établit aussi une équivalence

$$\mathrm{JL} : \widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{LT,\mathrm{et}}}(D^\times \times \varphi) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{Dr,\mathrm{et}}}(G \times \varphi) \tag{2.2.5.1}$$

qui entrelace les foncteurs 'sections à supports compacts sur la tour' du paragraphe 2.2.3. Cela induit formellement l'isomorphisme dans $D^b_\Lambda(G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}})$

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{LT}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}_{Dr}, \Lambda), \tag{2.2.5.2}$$

déjà mentionné dans l'introduction. Il nous faut maintenant comparer les classes de Chern utilisées dans la définition 2.2.4.

Théorème. *Les opérateurs L_{LT} et L_{Dr} de la définition 2.2.4 se correspondent via l'isomorphisme (2.2.5.2).*

Preuve. Nous devons rappeler quelques détails sur la construction de l'isomorphisme (2.2.5.1) dans [Far08]. Notons $\widetilde{\mathcal{M}_{LT,\mathrm{et}}}(G \times D^\times)$, respectivement $\widetilde{\mathcal{M}_{Dr,\mathrm{et}}}(G \times D^\times)$, le topos des faisceaux étales cartésiens $D^\times$-équivariants sur la tour de Lubin–Tate, respectivement G-équivariants sur la tour de Drinfeld. On renvoie à [Far08, IV.11] pour la définition de ces objets et plus précisément à [Far08, Proposition IV.11.20] pour la vérification du fait que ces topoi s'identifient naturellement à $\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{LT,\mathrm{et}}}(D^\times)$, respectivement $\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{Dr,\mathrm{et}}}(G)$. L'isomorphisme (2.2.5.1) provient en fait d'un isomorphisme

$$\widetilde{\mathcal{M}_{LT,\mathrm{et}}}(G \times D^\times) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}_{Dr,\mathrm{et}}}(G \times D^\times) \tag{2.2.5.3}$$

à la donnée de descente près, que nous négligeons ici pour simplifier l'exposition.

Maintenant, le faisceau inversible $D^\times$-équivariant $\mathcal{L}_{LT}$ sur $\widetilde{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}_{LT}}$ donne naissance à une tour $(|\mathcal{L}|_{LT,n})_{n\in\mathbb{N}}$ au-dessus de la tour de Lubin–Tate, et on note $\widetilde{|\mathcal{L}|_{LT,\mathrm{et}}}(G \times D^\times)$ le topos cartésien équivariant correspondant. Idem du côté Drinfeld. Vu la définition 2.1.4 de la classe de Chern, pour prouver la proposition il nous suffira de compléter le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{|\mathcal{L}|_{LT,\mathrm{et}}}(G \times D^\times) \arrow[r, dotted, "\sim"] \arrow[d, "q_{LT}"'] & \widetilde{|\mathcal{L}|_{Dr,\mathrm{et}}}(G \times D^\times) \arrow[d, "q_{Dr}"] \\
\widetilde{\mathcal{M}_{LT,\mathrm{et}}}(G \times D^\times) \arrow[r, "\sim"] & \widetilde{\mathcal{M}_{Dr,\mathrm{et}}}(G \times D^\times)
\end{tikzcd} \tag{2.2.5.4}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

où l'isomorphisme du bas est celui de (2.2.5.3). Pour des raisons techniques qui apparaitront plus bas, il est utile de reformuler le problème de la façon suivante. Pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur un espace analytique X notons $\mathcal{P}(\mathcal{L}) := \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X)$, un fibré projectif de rang 1, muni de la section 'infini' $i : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ donnée par la projection $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Le morphisme de topos $\widetilde{|\mathcal{L}|_{\text{et}}} \xrightarrow{q} \widetilde{X_{\text{et}}}$ s'obtient par restriction du morphisme de topos $\widetilde{\mathcal{P}(\mathcal{L})_{\text{et}}} \xrightarrow{p} \widetilde{X_{\text{et}}}$ au sous-topos ouvert de $\widetilde{\mathcal{P}(\mathcal{L})_{\text{et}}}$ formé des faisceaux dont la restriction le long de la section infini i est nulle. Appliquant ceci aux tours $(\mathcal{P}(\mathcal{L})_{LT,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{P}(\mathcal{L})_{Dr,n})_{n\in\mathbb{N}}$ associées, respectivement à $\mathcal{L}_{LT}$ et $\mathcal{L}_{Dr}$, on voit qu'il suffira de compléter le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{P}(\mathcal{L})_{LT,\text{et}}}(G \times D^\times) \arrow[r, dotted, "\sim"] \arrow[d, shift left, "p_{LT}"] & \widetilde{\mathcal{P}(\mathcal{L})_{Dr,\text{et}}}(G \times D^\times) \arrow[d, shift left, "p_{Dr}"] \\ \widetilde{\mathcal{M}_{LT,\text{et}}}(G \times D^\times) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, shift left, "i_{LT}"] & \widetilde{\mathcal{M}_{Dr,\text{et}}}(G \times D^\times) \arrow[u, shift left, "i_{Dr}"] \end{tikzcd} \tag{2.2.5.5}$$

Pour cela, il faut rappeler quelques aspects de la construction de l'isomorphisme (2.2.5.3).

Dans le chapitre I et la section III.1 de [Far08], Fargues construit deux schémas formels ϖ-adiques sans ϖ-torsion $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}$ et $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,\infty}$ sur $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$, notés respectivement $\mathfrak{X}_\infty$ et $\mathcal{Y}_\infty$ dans [Far08], et munis d'une action de $G \times D^\times$. Ces schémas formels n'ont pas les conditions de finitude requises dans la théorie de Raynaud, mais Fargues leur associe tout de même un topos '$\mathcal{E}$-rig-étale' et montre dans les théorèmes IV.12.3 et IV.13.1 que le topos $\widetilde{\mathcal{M}_{LT,\text{et}}}(G \times D^\times)$ s'identifie à celui des faisceaux '$\mathcal{E}$-rig-étales surconvergents' $G \times D^\times$-équivariants sur $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}$ et de même du côté Dr.

Un point technique. Comme il est expliqué dans la remarque IV.6.4 de [Far08], un morphisme $\mathfrak{Y} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$ de schémas formels ϖ-adiques sans ϖ-torsion n'induit *pas toujours* un morphisme $\widetilde{\mathfrak{Y}_{\mathcal{E}-\mathrm{rig}-\mathrm{et}}} \xrightarrow{\widetilde{f}} \widetilde{\mathfrak{X}_{\mathcal{E}-\mathrm{rig}-\mathrm{et}}}$ des topos $\mathcal{E}$-rig-étales associés. Cependant, il découle du théorème de changement de base propre et du théorème de décomplétion [Far08, IV.6.7] que si $\mathfrak{X}$ peut s'écrire comme limite projective $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}_i$ de schémas formels admissibles quasicompacts à morphismes de transition affines, et si $\mathfrak{Y}$ est de la forme $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}}(\mathfrak{Y}_0 \times_{\mathfrak{X}_0} \mathfrak{X}_i)$ pour un morphisme propre $\mathfrak{Y}_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{X}_0$ de schémas formels admissibles, *alors f induit bien un morphisme de topos $\widetilde{f}$ comme ci-dessus.* Cela est le cas en particulier lorsque f est un éclatement admissible. Dans ce cas, *$\widetilde{f}$ est un isomorphisme.*

Dans le chapitre III de [Far08], Fargues construit deux éclatements admissibles $G \times D^\times$-équivariants $\widehat{\mathcal{M}}'_{LT,\infty}$ et $\widehat{\mathcal{M}}'_{Dr,\infty}$, respectivement notés $\widetilde{\mathfrak{X}}^{(2)}_\infty$ et $\widetilde{\mathfrak{Y}}^{(3)}_\infty$ dans [Far08], ainsi qu'un isomorphisme $G \times D^\times$-equivariant

$$\widehat{\mathcal{M}}'_{LT,\infty} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}'_{Dr,\infty}. \tag{2.2.5.6}$$

L'isomorphisme (2.2.5.3) est induit par celui-ci.

Pour compléter le diagramme (2.2.5.5), nous utiliserons le lemme suivant. Pour un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible λ sur un schéma formel $\mathfrak{X}$, on note $\mathcal{P}(\lambda)$ le schéma formel qui classifie les quotients $\lambda \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \twoheadrightarrow \kappa$ avec κ un module inversible. Comme plus haut on a un diagramme $\mathcal{P}(\lambda) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathfrak{X}$ où p est la projection canonique et i la section 'infini'. Notons que p et i induisent des morphismes de topos $\widetilde{p}$ et $\widetilde{i}$ puisque, localement sur $\mathfrak{X}$, ils vérifient les conditions mentionnées ci-dessus.

Lemme. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel ϖ-adique sans ϖ-torsion, λ_1 et λ_2 deux $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules inversibles sur $\mathfrak{X}$ et $\varphi : \lambda_1[1/\varpi] \xrightarrow{\sim} \lambda_2[1/\varpi]$ un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[1/\varpi]$-modules. Alors le foncteur qui à un $\mathfrak{X}$-schéma formel ϖ-adique sans ϖ-torsion $\mathfrak{Y} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$ associe l'ensemble des paires $f^*\lambda_i \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \overset{\beta_i}{\twoheadrightarrow} \kappa_i$, $i = 1, 2$ avec κ_i des $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules inversibles, et s'inscrivant dans un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(f^*\lambda_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})[1/\varpi] \arrow[r, "f^*\varphi\oplus\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\beta_1"'] & (f^*\lambda_2 \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})[1/\varpi] \arrow[d, "\beta_2"] \\
\kappa_1[1/\varpi] \arrow[r, dotted, "\sim"] & \kappa_2[1/\varpi]
\end{tikzcd}$$

est représentable par un schéma formel ϖ-adique sans ϖ-torsion, noté $\mathcal{P}(\varphi)$. De plus, les projections évidentes $\mathcal{P}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ sont des éclatements admissibles de support disjoint de la section infini. En particulier, le morphisme φ induit canoniquement un isomorphisme $\widehat{\mathcal{P}}(\lambda_1)_{\mathcal{E}\text{-rig-et}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{P}}(\lambda_2)_{\mathcal{E}\text{-rig-et}}$ des topos $\mathcal{E}$-rig-étales, compatible aux projections $\widetilde{p_i}$ et aux sections infini $\widetilde{i_i}$.

Preuve. Le problème étant local pour la topologie de Zariski sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer ce dernier quasicompact, et choisir ainsi un entier k tel que $\varpi^k\varphi(\lambda_1) \subset \lambda_2$. Mais alors, pour tout $(\mathfrak{Y}, f)$ schéma formel ϖ-adique sans ϖ-torsion au-dessus de $\mathfrak{X}$, une paire d'épimorphismes $f^*\lambda_i \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \overset{\beta_i}{\twoheadrightarrow} \kappa_i, i = 1, 2$ s'inscrit dans un diagramme commutatif comme dans l'énoncé si et seulement si elle s'inscrit dans un diagramme commutatif du type

$$\begin{tikzcd}
(f^*\lambda_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \arrow[r, "\varpi^k(f^*\varphi\oplus\mathrm{Id})"] \arrow[d, "\beta_1"'] & (f^*\lambda_2 \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \arrow[d, "\beta_2"] \\
\kappa_1 \arrow[r, hook, dotted] & \kappa_2
\end{tikzcd} \tag{2.2.5.7}$$

Notons $\pi_2 : \mathcal{P}(\lambda_2) \longrightarrow \mathfrak{X}$ la projection canonique, et $\beta_2^{\mathrm{un}} : \pi_2^*(\lambda_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{P}(\lambda_2)} \twoheadrightarrow \kappa_2^{\mathrm{un}}$ l'épimorphisme universel de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\lambda_2)}$-modules. Considérons l'idéal

$$\mathcal{I}_{k,\varphi} := \beta_2^{\mathrm{un}}(\pi_2^*(\varpi^k\lambda_1) \oplus \varpi^k\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\lambda_2)}) \otimes (\kappa_2^{\mathrm{un}})^{\otimes -1} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{P}(\lambda_2)}.$$

C'est un idéal admissible au sens de [Far08, Définition IV.1.23]. Soit $\mathcal{P}_k(\varphi)$ l'éclatement de $\mathcal{P}(\lambda_2)$ le long de $\mathcal{I}_{k,\varphi}$, et soit $\pi : \mathcal{Q}_{k,\lambda} \longrightarrow \mathfrak{X}$ le morphisme vers $\mathfrak{X}$. Notons encore β_2^{un} le pull-back de β_2^{un} sur $\mathcal{P}_k(\varphi)$. Par construction l'image du morphisme $\beta_1^{\mathrm{un}} := \beta_2^{\mathrm{un}} \circ \varpi^k(\pi^*\varphi \oplus \mathrm{Id})$ est un sous-faisceau inversible de κ_2^{un}. Notons-le κ_1^{un}. On dispose donc d'une paire $(\beta_2^{\mathrm{un}}, \beta_1^{\mathrm{un}})$ sur $\mathcal{P}_k(\varphi)$ s'inscrivant dans un diagramme du type (2.2.5.7). Par pull-back, tout morphisme $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathcal{P}_k(\varphi)$ fournit une paire β_1, β_2 s'inscrivant dans un diagramme du type (2.2.5.7) ; en effet, l'injectivité de la fèche du bas résulte de l'absence de ϖ-torsion dans $\mathfrak{Y}$ et du fait que le conoyau de $\kappa_1^{\mathrm{un}} \longrightarrow \kappa_2^{\mathrm{un}}$ est de ϖ-torsion. Réciproquement, la propriété universelle des éclatements montre que toute paire (β_1, β_2) sur un $(\mathfrak{Y}, f)$ s'inscrivant dans un diagramme du type (2.2.5.7) provient par pull-back d'un unique morphisme $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathcal{P}_k(\varphi)$. Finalement, on constate que $\mathcal{P}_k(\varphi)$ est indépendant du choix de k et représente le foncteur de l'énoncé.

C'est bien un éclatement de $\mathcal{P}(\lambda_2)$ par construction. De plus, au-dessus de la section infini, on éclate l'idéal $\varpi^k\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ qui est inversible, donc le support de l'éclatement est bien disjoint de la section infini. Le fait que $\mathcal{P}(\lambda)$ est aussi un éclatement formel de $\mathcal{P}(\lambda_1)$ se déduit par symétrie. Enfin, la conséquence toposique découle de l'invariance du topos $\mathcal{E}$-rig-étale par éclatements admissibles. □

Nous utiliserons les deux conséquences suivantes de ce lemme :

(i) supposons $\mathfrak{X}$ muni d'une action d'un groupe Γ et $\lambda[1/\varpi]$ d'une structure Γ-équivariante. Alors on peut parler de faisceau Γ-équivariant dans $\widetilde{\mathcal{P}(\lambda)}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}}$. Ces derniers forment un topos et $\widetilde{p}, \widetilde{i}$ sont naturellement Γ-équivariants ;

(ii) supposons que $\mathfrak{X}$ est réunion de deux ouverts $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$, munis de modules inversibles λ_1, λ_2. Alors tout isomorphisme $\lambda_1[1/\varpi] \xrightarrow{\sim} \lambda_2[1/\varpi]$ induit une donnée de recollement des topos $\widetilde{\mathcal{P}(\lambda_1)}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}}$ et $\widetilde{\mathcal{P}(\lambda_2)}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}}$.

Revenons à la preuve du théorème 2.2.5 et commençons à travailler du côté Drinfeld. Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,\infty}$ est défini comme la limite projective des normalisés $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,n}$ du schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ dans les revêtements rigides $\mathcal{M}_{Dr,n}$. Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ classifie des $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux rigidifiés. Il est muni d'une action continue de $G \times D^\times$ triviale sur $\mathcal{O}_D^\times$ et d'un objet universel, noté G_u, équivariant sous $G \times D^\times$. Le dual ω_{G_u} de l'algèbre de Lie de G_u est un faisceau localement libre G-équivariant de rang d. Il se décompose en une somme $\omega_{G_u} = \sum_{j\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \omega_{G_u,j}$ de faisceaux inversibles G-équivariants. Le morphisme de périodes $\mathcal{M}_{Dr,0} \xrightarrow{\pi_0} \Omega_K^{d-1,\mathrm{nr}}$ provient d'un morphisme de schémas formels $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0} \longrightarrow \widehat{\Omega}_K^{d-1,\mathrm{nr}}$ dû à Drinfeld, de but le modèle formel de Deligne–Drinfeld de $\Omega_K^{d-1,\mathrm{nr}}$. Le faisceau inversible $\mathcal{L}_{Dr}$ sur $\Omega_K^{d-1,\mathrm{nr}}$ provient d'un faisceau inversible encore noté $\mathcal{L}_{Dr}$ sur l'espace annelé $(\widehat{\Omega}_K^{d-1,\mathrm{nr}}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_K^{d-1,\mathrm{nr}}}[1/p])$ (voir par exemple [Far08, Remarque III.2.6]). De plus, par définition du morphisme de périodes, pour tout $j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on a une égalité

$$\omega_{G_u,j}[1/\varpi] = \pi_0^*(\mathcal{L}_{Dr}) \text{ en tant que } \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}}[1/\varpi]\text{-modules inversibles.}$$

Notons que $\pi_0^*(\mathcal{L}_{Dr})$ est naturellement muni d'une action de $G \times D^\times$ triviale sur $\mathcal{O}_D^\times$. Le faisceau $\omega_{G_u,j}$ est donc un modèle entier $G \times \mathcal{O}_D^\times$-équivariant de $\pi_0^*(\mathcal{L}_{Dr})$. Ce modèle entier n'est pas stable sous $G \times D^\times$ puisque l'action de l'élément central (ϖ, ϖ^{-1}) est la multiplication par ϖ sur les fibres. Considérons maintenant le tiré en arrière ω_∞ de $\omega_{G_u,0}$ sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,\infty}$. Il est donc $G \times \mathcal{O}_D^\times$-équivariant. Comme plus haut, ω_∞ définit un diagramme

$$\mathcal{P}(\omega_\infty) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \widehat{\mathcal{M}}_{Dr,\infty} \tag{2.2.5.8}$$

où p est un fibré de rang 1 et i sa section 'infini'. Ce diagramme est seulement $G \times \mathcal{O}_D^\times$-équivariant, mais grâce au lemme 2.2.5, on peut prendre les topos $G \times D^\times$-équivariants. Les techniques amenant au théorème IV.12.3 de Fargues dans [Far08] montrent alors que le côté droit du diagramme (2.2.5.5) s'obtient en prenant le topos '$\mathcal{E}$-rig-étale surconvergent $G \times D^\times$-équivariant' du diagramme (2.2.5.8).

Passons maintenant du côté Lubin–Tate. Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}$ est un recollement de cellules quasi-compactes $\mathbb{D}_{a,\infty}$ indexées par les sommets $a = [\Lambda, M]$ de l'immeuble de GD, chacune étant stabilisée par le fixateur $(G \times D^\times)_a = \mathrm{GL}(\Lambda) \times \mathcal{O}_D^\times$ de a dans $G \times D^\times$. Chaque cellule est une limite projective de cellules 'en niveau fini' $\mathbb{D}_{a,n}$, $n \in \mathbb{N}$. La cellule $\mathbb{D}_{a,0}$ classifie des $\mathcal{O}$-modules formels de dimension un rigidifiés et satisfaisant certaines conditions de ramification. Soit H_a le $\mathcal{O}$-module formel universel sur $\mathbb{D}_{a,0}$ et soit $\lambda_{a,0}$ son algèbre de Lie. Le morphisme de périodes $\mathbb{D}_{a,0}^{an} \xrightarrow{\pi_{a,0}} \mathbb{P}(\mathbb{M})$ est la restriction d'un morphisme de schémas formels $\mathbb{D}_{a,0} \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))$ et on a une égalité

$$\lambda_{a,0}[1/\varpi] = \pi_{a,0}^*(\mathcal{L}_{LT}) \text{ en tant que } \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,0}}[1/\varpi]\text{-modules inversibles.} \tag{2.2.5.9}$$

Notons alors $\lambda_{a,\infty}$ le tiré en arrière de $\lambda_{a,0}$ sur $\mathbb{D}_{a,\infty}$. C'est un faisceau inversible $(G\times D^\times)_a$-équivariant qui définit un diagramme

$$\mathcal{P}(\lambda_{a,\infty}) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}_{a,\infty}$$

comme plus haut. Notons que les $\lambda_{a,\infty}$ ne se recollent pas en un faisceau inversible sur $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}$, mais l'égalité (2.2.5.9) montre que les $\lambda_{a,\infty}[1/\varpi]$ se recollent en un $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}}[1/\varpi]$-module inversible $G\times D^\times$-équivariant. Grâce au lemme 2.2.5, on peut recoller les topos $\widetilde{\mathcal{P}(\lambda_{a,\infty})}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}}$ pour obtenir un diagramme.

$$\widetilde{\mathcal{P}(\lambda_\infty)}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}} \underset{\widetilde{i}}{\overset{\widetilde{p}}{\rightleftarrows}} \widetilde{\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\infty}}_{\mathcal{E}\text{-rig-et}} \tag{2.2.5.10}$$

Les techniques développées par Fargues dans sa preuve du théorème IV.12.2 de [Far08] montrent alors le côté gauche du diagramme (2.2.5.5) s'obtient en prenant les objets $G\times D^\times$-équivariants continus dans le diagramme (2.2.5.10).

Comparons maintenant les deux côtés via l'isomorphisme (2.2.5.6). On a donc, au-dessus de la cellule éclatée $\mathbb{D}'_{a,\infty}$, deux faisceaux inversibles $(G\times D^\times)_a$-équivariants $\lambda_{a,\infty}$ et ω_∞. Or, il résulte de la construction même de l'isomorphisme (2.2.5.6), et plus précisément de la définition du morphisme des 'périodes de Hodge–Tate' $\mathbb{D}'_{a,\infty}\longrightarrow \widehat{\Omega}^{d-1,\mathrm{nr}}_K$ de [Far08, III.2], que ces faisceaux coincident après inversion de p. Par le lemme 2.2.5, le diagramme (2.2.5.5) est donc complété. □

2.2.6 *Comparaison entre classes de Chern canoniques et tautologiques.* Considérons le faisceau inversible trivial sur le point $\mathcal{M}(\widehat{K^{\mathrm{nr}}})$ et munissons-le de l'action continue du groupe $K^\times$ donnée par l'inclusion $K^\times\hookrightarrow \widehat{K^{\mathrm{nr}}}^\times$. Sa classe de Chern $c_{\Lambda K^\times}$ est un élément de $\mathrm{Ext}^2_{K^\times}(\Lambda_{\mathcal{M}(\widehat{K^{\mathrm{nr}}})},\Lambda_{\mathcal{M}(\widehat{K^{\mathrm{nr}}})}(1))\simeq H^2(K^\times\times I_K,\Lambda(1))$, où I_K désigne le groupe de Galois absolu de $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$. Par ailleurs, reprenant les notations 'génériques' $\mathcal{P}$, J de 2.2.1 et notant $J\xrightarrow{\det}K^\times$ le morphisme déterminant ou norme réduite selon le cas, on dispose d'une application de pull-back

$$\xi^*: H^2(K^\times\times I_K,\Lambda(1))\xrightarrow{\det^*}H^2(J\times I_K,\Lambda(1))\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_J(\Lambda_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}},\Lambda_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}}(1)).$$

Proposition. *Dans $\mathrm{Ext}^2_J(\Lambda_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}},\Lambda_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}}(1))$, on a l'égalité de classes de Chern*

$$c_{\Lambda J}(\mathcal{K})=-d\cdot c_{\Lambda J}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}^{\mathrm{nr}}}(1))+\xi^*c_{\Lambda K^\times}.$$

Preuve. Soit k un corps, V un k-espace vectoriel de dimension d et $S^\bullet(V^*)$ l'algèbre symétrique du k-dual de V munie de sa graduation usuelle. Alors le faisceau canonique $\mathcal{K}_{\mathbb{P}(V)}$ de $\mathbb{P}(V)$ est associé au $S^\bullet(V)$-module gradué $\bigwedge^d V^*\otimes_k S^\bullet(V^*)$ où $\bigwedge^d V^*$ est placé en degré d. Ainsi, $\mathcal{K}_{\mathbb{P}(V)}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-d)$ en tant que faisceau inversible, mais l'action de $\mathrm{Aut}_k(V)$ est tordue par le déterminant. Plus précisément, notant $\pi:\mathbb{P}(V)\longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural, on a un isomorphisme $\mathrm{Aut}_k(V)$-équivariant $\mathcal{K}_{\mathbb{P}(V)}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-d)\otimes\pi^*(k,\det)$, où la notation $(k,\det)$ désigne l'action de $\mathrm{Aut}_k(V)$ sur k par le déterminant. Il suffit maintenant d'appliquer ces remarques à $k=\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$ et $V=\mathbb{M}$ ou $V=\mathbb{N}_0$ (notations de 2.2.4). □

Notons maintenant c_{LT} et c_{Dr} les opérateurs $R\Gamma_c\longrightarrow R\Gamma_c[2](1)$ induits par les classes de Chern $\xi^*_{\mathrm{LT}}(c_{\Lambda K^\times})$ et $\xi^*_{\mathrm{Dr}}(c_{\Lambda K^\times})$.

Corollaire. *Dans $\mathrm{Hom}_{D^b_\Lambda(G\times D^\times\times W_K^{\mathrm{disc}})}(R\Gamma_c,R\Gamma_c[2](1))$, on a les égalités*

$$K_{\mathrm{LT}}=-d\cdot L_{\mathrm{LT}}+c_{\mathrm{LT}}\quad \textit{et}\quad K_{\mathrm{Dr}}=d\cdot L_{\mathrm{Dr}}+c_{\mathrm{Dr}}.$$

De plus, on a $c_{\mathrm{LT}} = c_{\mathrm{Dr}} = 0$ si $q-1$ est inversible dans Λ. Ici q est le cardinal du corps résiduel de K.

Preuve. La première assertion découle immédiatement des définitions et de la proposition ci-dessus. Pour la deuxième assertion, remarquons d'abord que c_{LT} et c_{Dr} ne dépendent par définition que de l'image de $c_{\Lambda K^\times}$ dans $H^2(K^\times, \Lambda(1))$ (classe de Chern 'absolue'). Écrivons alors $K^\times \simeq (1+\varpi\mathcal{O}) \times \mu_{q-1} \times \mathbb{Z}$ avec $\mu_{q-1} \simeq \mathbb{F}_q^\times$ le groupe des racines $q-1$-èmes de l'unité. Le groupe $(1+\varpi\mathcal{O})$ est pro-p, donc $H^2(K^\times, \Lambda(1)) \simeq H^2(\mu_{q-1} \times \mathbb{Z}, \Lambda(1))$. Le groupe $\mathbb{Z}$ étant de dimension cohomologique 1 avec $H^1(\mathbb{Z}, \Lambda) = \Lambda$, on a $H^2(\mu_{q-1} \times \mathbb{Z}, \Lambda(1)) \simeq H^1(\mu_{q-1}, \Lambda(1)) \oplus H^2(\mu_{q-1}, \Lambda(1))$. Mais ce dernier groupe est annulé par l'ordre de μ_{q-1}. $\square$

Remarque. Avec les notations de la preuve ci-dessus, on peut calculer explicitement la composante de $c_{\Lambda K^\times}$ dans $H^2(\mu_{q-1}, \Lambda)$. Pour cela, remarquons d'abord que le complexe $R\Gamma_c(\mathbb{G}_m^{\mathrm{ca}}, \Lambda)$ dans $D^b_\Lambda(\mu_{q-1})$ est parfait, de cohomologie $H^1 = \Lambda$ et $H^2 = \Lambda$, donc est homotope à $0 \longrightarrow \Lambda[\mu_{q-1}] \xrightarrow{\times(1-x)} \Lambda[\mu_{q-1}] \longrightarrow 0$ où x désigne un générateur de μ_{q-1}. Il s'ensuit (exercice sur la définition 2.1.4) que la composante cherchée est explicitement donnée par l'extension de Yoneda

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda[\mu_{q-1}] \xrightarrow{\times(1-x)} \Lambda[\mu_{q-1}] \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0,$$

qui est un générateur du groupe $H^2(\mu_{q-1}, \Lambda) \simeq \Lambda/(q-1)\Lambda$. En particulier, si $q-1$ n'est pas inversible dans Λ, la classe $c_{\Lambda K^\times}$ n'est pas nulle.

3. Description explicite dans le cas ℓ-adique

Dans cette section nous fixons un nombre premier $\ell \neq p$ et nous noterons simplement $R\Gamma_c$ le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{\mathrm{ca}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans la catégorie $D^b_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(GD \times W_K^{\mathrm{disc}})$. Toutes les représentations qui interviendront seront implicitement supposées être à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

3.1 Description de l'opérateur de Lefschetz

3.1.1 *Décomposition de $R\Gamma_c$.* Rappelons que la cohomologie de $R\Gamma_c$ n'est pas admissible, mais seulement admissible 'modulo le centre'. Plus précisément, pour tout sous-groupe ouvert compact $H \subset G$, les $\mathcal{H}^i(R\Gamma_c)^H$ sont des représentations projectives de type fini du centre $K^\times$ de G. Fixons donc un caractère lisse $\omega : K^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et considérons le complexe

$$R\Gamma_{c,\omega} := R\Gamma_c \otimes^L_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell K^\times} (\bar{\mathbb{Q}}_\ell)_\omega \in D^b_{\omega,\omega^{-1}}(G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}}).$$

Le produit tensoriel est pris pour l'action de $K^\times$ identifié au centre de G. La catégorie dérivée est donc celle des $GD \times W_K^{\mathrm{disc}}$-représentations lisses telles que le centre $K^\times$ de G agisse via le caractère ω, c'est-à-dire des $G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}}$-représentations lisses telles que le centre de G agisse via ω et celui de $D^\times$ via ω^{-1}. Comme la catégorie $\mathrm{Mod}_{\omega^{-1}}(D^\times)$ des représentations lisses de $D^\times$ de caractère central ω^{-1} est semi-simple, on a une décomposition

$$R\Gamma_{c,\omega} = \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}_\omega(D^\times)} \rho^\vee \otimes R\Gamma_c[\rho], \tag{3.1.1.1}$$

où l'on a posé

$$R\Gamma_c[\rho] := \mathrm{Hom}_{D^b_{\omega^{-1}}(D^\times)}(\rho^\vee, R\Gamma_{c,\omega}) \in D^b_\omega(G \times W_K^{\mathrm{disc}}).$$

Comme le suggère la notation, $R\Gamma_c[\rho]$ peut s'obtenir sans réduction préalable modulo ω. En fait, d'après le lemme suivant ce complexe coïncide avec celui noté aussi $R\Gamma_c[\rho]$ à la p. 115 de [Dat07].

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

Lemme 3.1.2. *Il y a un isomorphisme naturel* $R\Gamma_c[\rho] \simeq R\Gamma_c \otimes^L_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell D^\times} \rho$ *dans* $D^b_\omega(G \times W_K^{\mathrm{disc}})$.

Preuve. Cela résulte des deux observations suivantes.

(i) Pour tout $M \in \mathrm{Mod}(D^\times)$, on a

$$M \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell D^\times} \rho = ((M \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell K^\times} (\bar{\mathbb{Q}}_\ell)_{\omega^{-1}}) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \rho)_{D^\times}.$$

(ii) Pour tout $N \in \mathrm{Mod}_{\omega^{-1}}(D^\times)$, l'application $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaire canonique

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho^\vee, N) = (N \otimes \rho)^{D^\times} \longrightarrow (N \otimes \rho)_{D^\times}$$

est bijective. □

3.1.3 *Décomposition de L.* Par fonctorialité, l'opérateur L induit un morphisme

$$L_\omega \in \mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}})}(R\Gamma_{c,\omega}, R\Gamma_{c,\omega}[2](1)).$$

Noter ici qu'il n'y a plus de condition de caractère central pour l'action de $D^\times$. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(D^\times)$ n'est pas semi-simple, mais on a tout de même $R\,\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, \rho') = 0$ pour toute paire de représentations irréductibles ρ, ρ' non isomorphes. Il s'ensuit que L_ω se décompose en une somme $L_\omega = \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}_{\omega^{-1}}(D^\times)} L_\rho$ avec

$$L_\rho \in \mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G \times D^\times \times W_K^{\mathrm{disc}})}(\rho^\vee \otimes R\Gamma_c[\rho], \rho^\vee \otimes R\Gamma_c[\rho][2](1)).$$

Nous ne décrirons pas précisément cet opérateur mais plutôt son image, encore notée L_ρ dans

$$\mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(\rho^\vee \otimes R\Gamma_c[\rho], \rho^\vee \otimes R\Gamma_c[\rho][2](1))^{D^\times \times W_K} = \mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(R\Gamma_c[\rho], R\Gamma_c[\rho][2](1))^{W_K}.$$

Pour cela nous devons d'abord calculer le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel ci-dessus.

3.1.4 *Rappel de la description de* $R\Gamma_c[\rho]$. Il est ici commode de choisir une racine carrée de p dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Celle-ci permet de parler de puissances demi-entières du caractère de Tate de W_K et des caractères $|\det|_K$ des groupes linéaires, d'utiliser l'induction parabolique normalisée, et de définir une correspondance de Langlands 'non convenablement normalisée', cf. paragraphe 1.2.1 et [Dat07, commentaire après 2.2.3]. Comme dans [Dat07, 2.1.10] nous notons d_ρ l'unique diviseur de d et π_ρ l'unique représentation supercuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_{d/d_\rho}(K)$ tels que la correspondante de Jacquet–Langlands $\mathrm{JL}_d(\rho)$ de ρ apparaisse dans l'induite parabolique normalisée $|\det|^{(1-d_\rho)/2}\pi_\rho \times \cdots \times |\det|^{(d_\rho-1)/2}\pi_\rho$. Dans [Dat07, 2.1.6 et 4.1.1] nous avons introduit la terminologie de 'représentations elliptiques de type ρ' pour désigner les représentations de G ayant le même support supercuspidal que $\mathrm{JL}_d(\rho)$. Ces représentations sont paramétrées

$$I \subset \{1, \ldots, d_\rho - 1\} \mapsto \pi_\rho^I \in \mathrm{Irr}(G)$$

par les sous-ensembles de $\{1, \ldots, d_\rho - 1\}$. Comme dans [Dat07, 4.1.1] il est commode de noter $\pi_\rho^{\leqslant i}$ pour $\pi_\rho^{\{1,\ldots,i\}}$, avec la convention que $\pi_\rho^{\leqslant 0} = \pi_\rho^{\emptyset}$. Grâce aux résultats de Boyer [Dat07, 4.1.2] et quelques remarques cohomologiques [Dat07, 4.2.1], on sait qu'il existe dans $D^b_\omega(G)$ des isomorphismes

$$R\Gamma_c[\rho] \simeq \left(\bigoplus_{i=0}^{d_\rho - 1} \pi_\rho^{\leqslant i} \otimes \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho^\vee)(-i)[-i]\right)[1-d]\left(\frac{d_\rho - d}{2}\right).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

Un tel isomorphisme induit à son tour une application linéaire W_K-équivariante bijective

$$\mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(R\Gamma_c[\rho], R\Gamma_c[\rho][2](1)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i,j=0}^{d_\rho-1} \mathrm{Ext}^{i-j+2}(\pi_\rho^{\leqslant i}, \pi_\rho^{\leqslant j}) \otimes \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho^\vee))(i-j+1).$$

D'après les calculs d'extensions de [Dat07, 2.1.17], cette dernière se simplifie en

$$\mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(R\Gamma_c[\rho], R\Gamma_c[\rho][2](1)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \mathrm{Ext}^1_{G,\omega}(\pi_\rho^{\leqslant i}, \pi_\rho^{\leqslant i+1}) \otimes \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho^\vee))$$

et par conséquent induit l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(R\Gamma_c[\rho], R\Gamma_c[\rho][2](1))^{W_K} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \mathrm{Ext}^1_{G,\omega}(\pi_\rho^{\leqslant i}, \pi_\rho^{\leqslant i+1}) \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell^{d_\rho}. \tag{3.1.4.1}$$

On peut donc décomposer l'opérateur L_ρ en une somme $\bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} L_{\rho,i}$ avec

$$L_{\rho,i} \in \mathrm{Ext}^1_{G,\omega}(\pi_\rho^{\leqslant i}, \pi_\rho^{\leqslant i+1}) \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Proposition 3.1.5. *Les $L_{\rho,i}$ sont non nuls. De manière équivalente, l'opérateur*

$$L_\rho^{(d_\rho-1)} := L_\rho[2d_\rho-4] \circ \cdots \circ L_\rho[2] \circ L_\rho \in \mathrm{Hom}_{D^b_\omega(G)}(R\Gamma_c[\rho], R\Gamma_c[\rho][2d_\rho-2](d_\rho-1))^{W_K}$$

est non nul.

Preuve. Le fait que les deux assertions sont équivalentes découle de la formule pour les cup-produits de [Dat07, 2.1.17(ii)]. Nous allons prouver la deuxième en utilisant la propriété d'uniformisation p-adique de la tour de Drinfeld. Notons pour cela que l'énoncé est insensible à la torsion de ρ par un caractère non ramifié. On peut en particulier supposer ω trivial.

Soit Γ un sous-groupe discret cocompact et sans torsion de G. Un tel sous-groupe agit librement sur chaque $\mathcal{M}_{Dr,n}$ et on sait d'après de nombreux travaux (Kurihara, Mustaphin etc) que le quotient $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma$ est algébrisable en une variété propre et lisse sur $\widehat{K^{\mathrm{nr}}}$. On obtient ainsi une tour $(S_{\Gamma,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de variétés algébriques munie d'une action de $D^\times$ triviale sur $(\Gamma\cap K^\times)$. Comme dans le paragraphe 2.1.7, le faisceau inversible $\mathcal{L}_{Dr}$ induit sur chacun de ces quotients un faisceau inversible, qui par GAGA [Ber90, Proposition 3.4.11] provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}_{\Gamma,n}$ sur $S_{\Gamma,n}$. De plus, la classe de Chern $L_{\Gamma,n} : H^*(S_{\Gamma,n}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^{*+2}(S_{\Gamma,n}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(1)$ est induite par L_{Dr} via le diagramme (2.1.7.2). Notons que cette classe de Chern commute à l'action de $\mathcal{O}_D^\times$.

Supposons que Γ se décompose en un produit $(\Gamma\cap K^\times)(\Gamma\cap \mathrm{SL}_d(K))$. Alors d'après [Kur80, 2.2.4] le faisceau inversible $\mathcal{L}_{\Gamma,0}$ est ample sur $S_{\Gamma,0}$. Comme $S_{\Gamma,n}$ est fini sur $S_{\Gamma,0}$, il s'ensuit que $\mathcal{L}_{\Gamma,n}$ est ample sur $S_{\Gamma,n}$ pour tout n.

Soit n tel que $\rho_{|1+\varpi^n\mathcal{O}_D}$ soit triviale. D'après le calcul fait page 140 de [Dat07], la partie ρ-isotypique $H^*(S_{\Gamma,n}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)[\rho]$ de la cohomologie de $S_{\Gamma,n}$ est non nulle en degrés $d-d_\rho$. Comme le degré médian est ici $d-1=\dim(S_{\Gamma,n})$, on déduit donc du théorème de Lefschetz difficile que $L_{\Gamma,n}^{(d_\rho-1)}$ est non nul sur la partie ρ-isotypique, et par conséquent que $L_\rho^{(d_\rho-1)} \neq 0$ comme voulu. □

3.2 Opérateur de Lefschetz et correspondance de Zelevinski

Nous allons décrire et interpréter l'action de l'opérateur de Lefschetz sur la $D^\times \times W_K$-représentation graduée $R^*_\pi := \mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_G(R\Gamma_c, \pi))$ de l'introduction. Notons que cet espace est nul si π n'est pas elliptique. Nous supposerons donc π de la forme π_ρ^I comme dans le paragraphe

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

précédent, et pour un sous-ensemble $I=\{i_1,\ldots,i_{|I|}\}\subset\{1,\ldots,d_\rho-1\}$. Nous poserons aussi $i_0:=0$ et $i_{|I|+1}:=d_\rho$. Enfin nous noterons $d_k:=i_{k+1}-i_k$ pour $k=0,\ldots,|I|$.

3.2.1 Dans le paragraphe 4.4 de [Dat07], voir notamment la remarque 4.4.2, on a construit un isomorphisme $D^\times\times W_K$-équivariant gradué

$$R^*_{\pi^I_\rho}\xrightarrow{\sim}\rho\otimes\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho)\otimes\left(\bigoplus_{k=0}^{|I|}\tau_{d_k}(i_k)[2k]\right)[-|I|]\left(\frac{d-d_\rho}{2}\right),$$

où τ_{d_k} est la représentation 'spéciale' de dimension d_k, c'est-à-dire l'unique représentation indécomposable de W_K de dimension d_k et de poids $0,\ldots,d_k-1$. En particulier, on a donc

$$\mathrm{Hom}_{D^\times\times W_K}(R^*_{\pi^I_\rho},R^*_{\pi^I_\rho}[2](1))\simeq\bigoplus_{k=0}^{|I|-1}\mathrm{Hom}_{W_K}(\tau_{d_k}(i_k),\tau_{d_{k+1}}(i_{k+1}-1))\simeq\mathbb{Q}_l^{|I|}.$$

Le deuxième isomorphisme provient du fait que le seul poids commun à $\tau_{d_k}(i_k)$ et $\tau_{d_{k+1}}(i_{k+1}-1)$ est $d_k-1+i_k=i_{k+1}-1$, et que ce poids intervient dans le socle de $\tau_{d_{k+1}}(i_{k+1}-1)$ et le cosocle de $\tau_{d_k}(i_k)$.

L'opérateur de Lefschetz $L_{\pi^I_\rho}$ se décompose donc en une somme $\bigoplus_{k=0}^{|I|-1}L_{\pi^I_\rho,k}$.

Proposition 3.2.2. *Chacun des $L_{\pi^I_\rho,k}$ est non nul.*

Preuve. Cela découle de la proposition 3.1.5 par le même argument que celui utilisé pour expliciter l'action de W_K dans [Dat07, 4.4]. En effet, avec les notations de [Dat07], il s'agit ici de déterminer quand le cup-produit sur $\mathrm{Ext}^{\delta(i,I)}_{G,\omega}(\pi_\rho^{\leqslant i},\pi^I_\rho)$ par l'élément non nul $L_{\rho,i-1}\in\mathrm{Ext}^1(\pi_\rho^{\leqslant i-1},\pi_\rho^{\leqslant i})$ de la proposition 3.1.5 est non nul. Par [Dat07, 2.1.17], cela revient à demander que $\delta(i-1,I)=\delta(i,I)+1$, ou encore, que $i-1-\delta(i-1,I)=(i-\delta(i,I))-2$. D'après le lemme [Dat06, 4.4.1], cela équivaut à $i=i_k$ pour un certain k, c'est-à-dire $i\in I$. □

3.2.3 *Preuve du théorème 1.2.2.* L'espace $R'_{\pi^I_\rho}$ muni de l'action lissifiée $\gamma^\varphi_{\pi^I_\rho}$ de W_K introduite dans la section 1.2.2 est isomorphe à

$$(R'_{\pi^I_\rho},\gamma^\varphi_{\pi^I_\rho})\simeq\bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1}\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho)\left(\frac{d-d_\rho}{2}\right)(i),\tag{3.2.3.1}$$

et une fois choisi un tel isomorphisme, on peut écrire

$$\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(R'_{\pi^I_\rho})=\mathcal{M}_{d_\rho}(\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho))),$$

où le terme de droite désigne les matrices de tailles d_ρ à coefficients dans $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho))$. Une telle matrice $A=(A_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant d_\rho-1}$ est dans l'espace

$$\mathrm{Hom}_{W_K}(R'_\pi,R'_\pi(1))=\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho))(1)^{W_K}$$

si et seulement si $A_{i,j}$ est scalaire pour tout i,j, et nulle si $j\neq i+1$. Dans ce cas, la matrice transposée ${}^tA$ est dans l'espace

$$\mathrm{Hom}_{W_K}(R'_\pi,R'_\pi(-1))=\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho))(-1)^{W_K}.$$

Ceci s'applique en particulier à l'opérateur $L_{\pi^I_\rho}$. D'après la proposition précédente, le bloc $L_{i,i+1}$ de sa matrice est non nul si et seulement si $i+1\in I$. Quitte à multiplier l'isomorphisme (3.2.3.1) par une matrice diagonale inversible on peut supposer que $L_{i,i+1}=\mathrm{Id}_{\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho)}$. D'après la forme

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press

explicite de la correspondance de Langlands pour les représentations elliptiques donnée dans le lemme 2.2.8 de [Dat07], et en raisonnant comme au-dessus de la remarque 4.4.2 de [Dat07], on en déduit que

$$(R'_{\pi_\rho^I}, \gamma^{\varphi}_{\pi_\rho^I}, {}^tL_{\pi_\rho^I}) = \sigma_d(\pi_\rho^{{}^cI})\left(\frac{d-1}{2}\right) = \sigma'_d(\pi_\rho^{{}^cI}),$$

où ${}^cI$ désigne le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, d_\rho - 1\}$. Notons que la paire $(R'_{\pi_\rho^I}, {}^tL_{\pi_\rho^I})$ est l'unique paire de Weil–Deligne dont le prolongement de Jacobson–Morozov coïncide avec celui de la paire $(R'_{\pi_\rho^I}, L_{\pi_\rho^I})$ que nous avons noté $\gamma^{\varphi,L}_{\pi_\rho^I}$ dans le théorème 1.2.2. Ainsi, ce théorème découle de la proposition suivante.

Proposition 3.2.4. *L'image $Z(\pi_\rho^I)$ de π_ρ^I par l'involution de Zelevinski est la représentation $\pi_\rho^{{}^cI}$.*

Preuve. Nous utiliserons la définition de Schneider et Stuhler de l'involution de Zelevinski. Soit $\mathrm{Mod}_\rho(G)$ la catégorie abélienne des représentations de longueur finie de G dont tous les sous-quotients irréductibles sont elliptiques de type ρ. Notons $\widetilde{\mathcal{E}}_\rho$ la composée de la contragrédiente avec le foncteur contravariant noté $\mathcal{E}^{d_\rho-1}$ ou simplement $\mathcal{E}$ dans [SS95, III.3]. D'après le théorème III.2.2 de [SS95] et en raisonnant comme dans la preuve de leur théorème III.3.1, on voit que ce foncteur $\widetilde{\mathcal{E}}$ se restreint en un endofoncteur covariant involutif de $\mathrm{Mod}_\rho(G)$. L'involution de Zelevinski de π_ρ^I est alors donnée par $Z(\pi_\rho^I) = \widetilde{\mathcal{E}}_\rho(\pi_\rho^I)$, cf. [SS95, IV.5].

La théorie de Bushnell–Kutzko fournit une équivalence de catégories $\mathrm{Mod}_\rho(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_1(G')$ pour un groupe $G' = \mathrm{GL}_{d'}(K')$, cf. [Dat07, 2.1.9]. Cette équivalence échange les involutions respectives $\widetilde{\mathcal{E}}_\rho$ et $\widetilde{\mathcal{E}}'_1$. En effet, si τ est un type pour le bloc de Bernstein associé à $(M_\rho, \vec{\pi}_\rho)$, $\mathcal{H}_\tau$ son algèbre de Hecke, alors l'équivalence $\mathrm{Hom}(\tau, -)$ entre ce bloc et la catégorie des $\mathcal{H}_\tau$-modules transforme le foncteur $\widetilde{\mathcal{E}}$ en le foncteur $M \mapsto \mathrm{Ext}^{d_\rho-1}_{\mathcal{H}_\tau}(M, \mathcal{H}_\tau)$. Cela découle de la définition de $\mathcal{E}$ dans [SS95, III.1].

On est ainsi ramené au cas où $\rho = 1$. Dans ce cas, soit B^+ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, δ_{B^+} son caractère module et $\delta := \delta_{B^+}^{-1/2}$. Identifions $\{1, \ldots, d-1\}$ à l'ensemble des racines simples du tore diagonal dans $\mathrm{Lie}(B_+)$ en les numérotant de haut en bas. Par définition, [Dat06, 2.3.3], π_1^I est l'unique quotient irréductible d'une induite parabolique normalisée $i_B^G(\delta)$ où B est n'importe quel sous-groupe de Borel dont la chambre de Weyl est contenue dans l'ensemble X_I défini en [Dat06, 2.2.3]. Rappelons que si w est un élément du groupe de Weyl tel que ${}^w(B) = B_+$, alors $i_B^G(\delta) = i_{B_+}^G({}^w\delta)$. De [SS95, Theorem II.2.2] et de l'exactitude de $\widetilde{\mathcal{E}}$, on déduit que $\widetilde{\mathcal{E}}(\pi_1^I)$ est l'unique quotient irréductible de $i_{B_+}^G({}^{w_0w}\delta)$. Cette derniére induite s'indentifie à $i_{B'}^G(\delta)$ pour $B' = w^{-1}w_0^{-1}(B_+)$. Remarquons que B' est le Borel opposé à B, et donc sa chambre de Weyl est contenue dans $-X_I = X_{{}^cI}$. □

3.2.5 *Preuve de la proposition 1.2.3.* Considérons le triplet $(\gamma^{\varphi}_{\pi_\rho^I}, N_{\pi_\rho^I}, L_{\pi_\rho^I})$ sur l'espace $R'_{\pi_\rho^I}$. Il donne naissance aux deux paramètres $\gamma^{\varphi,N}_{\pi_\rho^I}, \gamma^{\varphi,L}_{\pi_\rho^I} : W_F \times \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(R'_{\pi_\rho^I})$ du paragraphe 1.2.2. Ces deux paramètres se prolongent en un paramètre d'Arthur si et seulement si les deux actions de SL_2 commutent, et ceci se produit si et seulement si $N_{\pi_\rho^I}$ commute au transposé ${}^tL_{\pi_\rho^I}$ défini au paragraphe 3.2.3. Or ces opérateurs sont données par des matrices de Jordan de supports complémentaires. De telles matrices ne commutent que si l'un des support est vide.

Remerciements

Je remercie Laurent Fargues pour son aide dans la preuve du théorème 2.2.5, et Pierre Deligne pour sa suggestion d'étudier aussi les classes de Chern canoniques sur les tours.

Références

Ber90 V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1990).

Ber93 V. G. Berkovich, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **78** (1993), 1–159.

Boy09 P. Boyer, *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples*, Invent. Math. **177** (2009), 239–280.

Dat06 J.-F. Dat, *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **39** (2006), 1–74.

Dat07 J.-F. Dat, *Théorie de Lubin–Tate non-abélienne et représentations elliptiques*, Invent. Math. **169** (2007), 75–152.

Dat10 J.-F. Dat, *Théorie de Lubin–Tate non-abélienne ℓ-entière, Preprint disponible à l'adresse* (2010), http://www.math.jussieu.fr/∼dat/recherche/travaux.html, Duke Math. J., to appear.

Dat12 J.-F. Dat, *Un cas simple de correspondance de Jacquet–Langlands modulo ℓ*, Proc. London Math. Soc. (2012), doi:10.1112/plms/pdr043, published online 7 December 2011.

Del72 P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, in *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 349 (Springer, New York, 1972), 501–597.

Far07 L. Fargues, *Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie équivariante des espaces rigides* (2007), http://www.math.u-psud.fr/∼fargues/Prepublications.html.

Far08 L. Fargues, *L'isomorphisme entre les tours de Lubin–Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques*, in *L'isomorphisme entre les tours de Lubin–Tate et de Drinfeld*, Progress in Mathematics, vol. 262 (Birkhäuser, Basel, 2008), 1–321.

HT01 M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001).

Kur80 A. Kurihara, *Construction of p-adic unit balls and the Hirzebruch proportionality*, Amer. J. Math. **102** (1980), 565–648.

SS95 P. Schneider and U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **85** (1995), 97–191.

SGA4$\frac{1}{2}$ *Cohomologie étale*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois–Marie SGA4$\frac{1}{2}$, P. Deligne, avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 569 (Springer, Berlin, 1977).

SGA5 *Cohomologie l-adique et fonctions L*, in *Séminaire de géometrie algébrique du Bois–Marie 1965–1966 (SGA5), edité par L. Illusie*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 589 (Springer, Berlin, 1977).

Vig96 M. F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p*, Progress in Mathematics, vol. 137 (Birkhäuser, Basel, 1996).

Vig97 M.-F. Vignéras, *Cohomology of sheaves on the building and R-representations*, Invent. Math. **127** (1997), 349–373.

Vig98 M.-F. Vignéras, *Induced R-representations of p-adic reductive groups*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), 549–623.

Vig01 M.-F. Vignéras, *Correspondance de Langlands semi-simple pour* $\mathrm{GL}(n, F)$ *modulo* $\ell \neq p$, Invent. Math. **144** (2001), 177–223.

Yos10 T. Yoshida, *On non-abelian Lubin–Tate theory via vanishing cycles*, in *Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007)*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 58 (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2010), 361–402.

Zel80 A. V. Zelevinski, *Induced representations on reductive p-adic groups II*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **13** (1980), 165–210.

Jean-François Dat dat@math.jussieu.fr
Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75005, Paris, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X11007214 Published online by Cambridge University Press