Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2008) **7**(4), 641–651 © Cambridge University Press 641
doi:10.1017/S1474748008000157 Printed in the United Kingdom

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО РАНГА МОРЛИ

АЛЕКСАНДР БОРОВИК

School of Mathematics, University of Manchester,
Oxford Street, Manchester M13 9PL, UK
(borovik@manchester.ac.uk)

(Поступила 24 февраля 2007; принята в печать 5 марта 2007)

Реферат Данная статья является кратким обзором недавних результатов и ряда открытых проблем, связанных с линейными группами конечного ранга Морли – области исследований, где Брюно Пуаза оказал особенно заметное влияние. Из уважения к его точке зрения – которую он выражает весьма категорично – что математические работы должны делаться, писаться и публиковаться только на родном языке непосредственного автора текста, я настаиваю на том, чтобы эта статья была на русском языке – даже если представленные в ней результаты принадлежат небольшому, но разноязыкому сообществу исследователей американского, британского, казахского, немецкого, русского, турецкого, французского произхождения. Чтобы еще сильнее подчернуть возникающие лингвистические тонкости, я использую британскую орфографию в английских фрагментах моего текста.

Заголовок статьи на английском языке: *Linear Groups of Finite Morley Rank.*

Abstract This paper is a brief survey of recent results and some open problems related to linear groups of finite Morley rank, an area of research where Bruno Poizat's impact is very prominent. As a sign of respect to his strongly expressed views that mathematics has to be done, written and published only in the native tongue of the immediate author—the scribe, in effect—of the text, I insist on writing my paper in Russian, even if the results presented belong to a small but multilingual community of researchers of American, British, French, German, Kazakh, Russian, Turkish origin. To emphasise even further the linguistic subtleties involved, I use British spelling in the English fragments of my text.

The English title of the paper: *Linear Groups of Finite Morley Rank.*

Ключевые слова: группа; простая группа; линейная группа; ранг Морли

Keywords: group; simple group; linear group; Morley rank

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 03C60
Secondary 20G15

1. Структурная теория линейных групп конечного ранга Морли

Естественной отправной точкой моего обзора является следующая теорема Брюно Пуаза, основанная, в свою очередь, на фундаментальных результатах Франка Вагнера о полях конечного ранга Морли. (Определения и обозначения могут быть найдены в [**16**].)

Теорема 1.1 (Пуаза [**25**]). Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 0$, и $G < GL(V)$ – бесконечная простая группа такая, что структура $(GL(V), G)$ имеет конечный ранг Морли. Тогда G – простая алгебраическая группа над K.

Доказательство этой замечательной теоремы, как оно было дано Пуаза, опиралось, в конечном итоге, на классификацию простых конечных групп [**5**, **21**]. Это случилось потому, что Пуаза, используя теорему Франка Вагнера о полях конечного ранга Морли [**27**], свел доказательство к случаю, когда поле K локально конечно, после чего утверждение об алгебраичности группы G мгновенно следовало из теоремы Саймона Томаса о локально конечных группах конечного ранга Морли [**26**] или из близкого по духу результату Виссариона Беляева о простых локально конечных линейных группах [**8**,**9**]. Теоремы Беляева и Томаса, в свою очередь, опирались на классификацию простых конечных групп.

Первое наблюдение, которое я хотел бы сделать в данной статье, касается нового статуса Теоремы 1.1: она больше не зависит от классификации простых конечных групп. Действительно, классификация простых периодических линейных групп над полями нечетной характеристики может быть достигнута без применения классификации простых конечных групп [**11**,**12**]; см. также более элегантное доказательство при дополнительном условии конечности ранга Морли [**13**]. Что же касается локально конечных полей четной характеристики, то в этом случае классификация линейных групп конечного ранга Морли вытекает из недавнего классификационного результата:

Теорема 1.2 (Алтинел, Боровик и Черлин [**2**])**.** Если простая группа G конечного ранга Морли содержит бесконечную абелеву подгруппу периода 2, то G является простой алгебраической группой над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

Заметим, далее, что теорема Пуаза может быть перенесена на случай произвольных связных линейных групп.

Теорема 1.3 (Ерулан Мустафин [**24**])**.** Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 0$, и $G < GL(V)$ – бесконечная группа такая, что структура $(GL(V), G)$ имеет конечный ранг Морли. Предположим дополнительно, что группа G связна.

Обозначим через $\hat{G}$ замыкание группы G в топологии Зарисского, а через $\hat{U}$ – унипотентный радикал группы $\hat{G}$. Далее, положим $U = \hat{U} \cap G$. Тогда

- U является унипотентным радикалом группы G, то есть множеством унипотентных элементов разрешимого радикала группы G.

- Если мы обозначим гомоморфные образы подгрупп из G в $\bar{G} = G/U$ при помощи символа $^{-}$, то группа $\bar{G}$ разлагается в центральное произведение

$$\bar{G} = L_1 * \cdots * L_m * F^\circ(\bar{G})$$

 определимых подгрупп $L_1, \ldots, L_m$, каждая из которых определимо изоморфна квазипростой алгебраической группе над K, и делимой абелевой группы $F^\circ(\bar{G})$, состоящей из полупростых элементов.

Один из деликатных моментов теоремы Мустафина – это то, что в ней возникает конфигурация, описываемая частным случаем теоремы Алтинела и Черлина о центральных расширениях простых алгебраических групп в категории групп конечного ранга Морли. Поскольку эта теорема может и сама по себе трактоваться как результат о линейности определенного класса групп, то будет полезно привести ее формулировку целиком.

Теорема 1.4 (Алтинел и Черлин [**1**])**.** Пусть G – группа конечного ранга Морли. Предположим, что G – квазипроста, то есть G совпадает со своим коммутантом, $[G, G] = G$, и имеет простой фактор $G/Z(G)$ по центру.

Если мы дополнительно предполагаем, что $G/Z(G)$ – простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K, то и сама группа G является алгебраической группой над K. В частности, ее центр $Z(G)$ конечен.

Переходя к линейным группам характеристики 0, мы снова должны отметить результат Брюно Пуаза.

Теорема 1.5 (Пуаза [**25**])**.** Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, и $G < GL(V)$ – бесконечная простая группа такая, что структура $(GL(V), G)$ имеет конечный ранг Морли. Предположим, что G не замкнута в топологии Зарисского. Тогда все элементы в G – полупростые.

Поскольку в условиях предыдущей теоремы все элементы в G полупросты, то *борелевские подгруппы* в G, то есть максимальные связные разрешимые подгруппы, являются абелевыми и каждая из них – пересечение G и некоторого тора (диагонализируемой подгруппы) из $GL(V)$. Более того, изящная лемма, принадлежащая Мустафину [**24**], показывает в этом случае, что борелевские подгруппы в G сопряжены.

Самый последний и недавний результат в этом ряду показывает, что простые и не алгебраические линейные группы конечного ранга Морли имеют свойства, делающими их очень похожими на *плохие группы*, введенные когда-то Брюно Пуаза как гипотетические препятствия к состоятельности гипотезы Зильбера-Черлина об алгебраичности простых групп конечного ранга Морли. Я привожу этот результат в суммарной формулировке, делающей более выпуклой аналогию с плохими группами.

Теорема 1.6 (Бёрджес и Боровик [**14**])**.** Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, и $G < GL(V)$ – бесконечная простая группа такая, что структура $(GL(V), G)$ имеет конечный ранг Морли. Предположим, что G не замкнута в топологии Зариского. Тогда выполняются следующие утверждения.

- Все элементы в G – полупростые.
- Борелевские подгруппы в G абелевы и сопряжены.
- Если B – борелевская подгруппа в G, то $N_G(B) = B$.

- G не содержит элементов порядка 2.
- Все конечные подгруппы в G абелевы.

Интересная черта доказательства этой теоремы состоит в том, что инволюции – элементы порядка 2 – убиваются при помощи теории Бахмана о “построении геометрии на основе понятия симметрии” [**6**], точно так же, как инволюции убивались в плохих группах ([**16**], Глава 8). Именно, в нашем доказательстве возникает изящная и неожиданная геометрическая конфигурация, проанализированная в следующей теореме.

Теорема 1.7 (Бахман [**6**]; [**16**], Теоремы 8.15 и 8.18)**.** Предположим, что множество I инволюций в группе G допускает структуру проективной плоскости, причем три инволюции лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их произведение снова является инволюцией.

Тогда $\langle I\rangle \simeq \mathrm{SO}_3(k,f)$ для некоторого поля k, интерпретируемого в G, и некоторой неизотропной квадратичной формы f. В частности, G не может иметь конечный ранг Морли.

2. А какие группы линейны?

Стоит вспомнить, что классическая гипотеза Зильбера и Черлина

> *бесконечная простая группа конечного ранга Морли изоморфна простой алгебраической группе над алгебраически замкнутым полем*

включает в себя предсказание, что простые группы конечного ранга Морли являются линейными. С другой стороны, только что обсужденные результаты о линейных группах показывают, что в этом классе гипотеза Зильбера и Черлина очень близка к подтверждению. Даже если мой читатель воспринимает гипотезу Зильбера и Черлина с основательной дозой скептицизма, он может оказаться более благосклонным к такой ее модификации:

Гипотеза 1. Бесконечная простая группа конечного ранга Морли либо

- изоморфна простой алгебраической группе над алгебраически замкнутым полем, либо
- является линейной группой, описываемой Теоремой 1.6.

Поэтому естественно попытаться заключить мой краткий обзор перечислением нескольких открытых проблем о линейности групп конечного ранга Морли.

Чтобы обобщить гипотезу Зильбера–Черлина и превратить ее в гипотезу о линейности достаточно широкого класс групп конечного ранга Морли, нам потребуются некоторые уточняющие определения.

Назовем связную группу G конечного ранга Морли *унипотентно редуцированной*, если выполены два следующих условия:

- $F(G) \leqslant [G,G]$, где $F(G)$, как обычно, – подгруппа Фиттинга группы G (то есть максимальная нормальная определимая нильпотентная подгруппа группы G), и

- G не содержит собственных определимых нормальных подгрупп H, таких, что факторгруппа G/H – нильпотентная группа ограниченного периода.

Гипотеза 2. Предположим, что G – связная и унипотентно редуцированная группа конечного ранга Морли. Тогда G допускает точное линейное представление

$$G \to GL_n(R)$$

над коммутативным кольцом R конечного ранга Морли. Более того, есть надежда, что кольцо R может быть сделано прямой суммой

$$R = K_1 \oplus \cdots \oplus K_r$$

алгебраически замкнутых полей.

Пожалуй, наступает пора провести более тонкое различие между несколькими вариантами определения линейного представления, как они естественно возникают в контексте групп конечного ранга Морли. В Гипотезе 2 проще всего желать существования *абстрактного* гомоморфизма $\phi : G \to GL_n(R)$. Следующая степень смелости желаний – это ожидать, что G, R и ϕ определимы в некоторой объемлющей структуре конечного ранга Морли; в таком случае мы будем говорить, что представление ϕ *определимо*.

В силу результатов из предыдущего параграфа, следующее усиление Гипотезы 2 представляется особенно заманчивым.

Вопрос 3. Можно ли усилить Гипотезу 2, потребовав в придачу, чтобы гомоморфизм $\phi : G \to GL_n(R)$ мог быть выбран определимым?

Вопрос 4. Можно ли усилить Гипотезу 2, потребовав, чтобы кольцо R (а равно и поля $K_1, \ldots, K_r$) были интерпретируемы в G – так же как и гомоморфизм

$$G \to GL_n(R)?$$

3. Откуда берутся поля?

Конечно, когда мы хотим добиться линейности разрешимых групп конечного ранга Морли, то мы рассчитываем, что поле появится в результате применения прославленной теоремы Зильбера об интерпретируемости алгебраически замкнутого поля в связной разрешимой ненильпотентой группе конечного ранга Морли. Но и в случае нильпотентых групп поле часто возникает самым естественным образом.

Теорема 3.1 (Зильбер [**28**])**.** Если нильпотентная группа G конечного ранга Морли и без кручения не может быть разложена в произведение $G = AB$ поэлементно коммутирующих, $[A,B] = 1$, собственных определимых подгрупп A и B, то группа G определимо изоморфна алгебраической группе над алгебраически замкнутым полем K, интерпретируемым в G.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000157 Published online by Cambridge University Press

Процесс появления поля в нильпотентной группе без кручения хорошо схвачен следующим результатом Джеффа Бёрджеса [**17**] и Оливье Фрекона [**20**], который я привожу в формулировке Бёрджеса [**17**].

Теорема 3.2 (Бёрджес [**17**], Теорема 2.5 и Фрекон [**20**], Предложение 5.7)**.** Предположим, что G – нильпотентная группа конечного ранга Морли и без кручения, которая содержит бесконечное равномерно определимое семейство $\mathcal{F}$ попарно различных определимых подгрупп. Тогда в G можно проинтерпретировать алгебраически замкнутое поле K. Более того, в G есть определимая секция H/N, определимо изоморфная векторному пространству над K, причем семейство

$$\{(H \cap F)N/N \mid F \in \mathcal{F}\}$$

содержит бесконечное равномерно определимое подсемейство попарно различных векторных подпространств.

Тема равномерно определимых семейств подгрупп и их влияния на строение группы детально развита Оливье Фреконом в его статье [**20**] в этом же томе, куда я и отсылаю читателя.

В случае нильпотентных групп с кручением поле, к сожалению, не всегда определимо. Контрпримером являются построенные Андреасом Баудишом несчетно категоричные p-группы B простого периода $p > 2$, ранга Морли 2 и ступени нильпотентности 2 [**7**]. Из них же легко строится контрпример к версии Теоремы 3.2 для нильпотентных групп с кручением. Следующая конструкция полезна тем, что объясняет, как равномерно определимые семейства подгрупп возникают в нильпотентных группах.

Действительно, пусть B – группа Баудиша периода p. Рассмотрим абелеву группу

$$A = (B/Z(B)) \times Z(B).$$

Напомним, что B имеет класс нильпотентости 2, поэтому коммутирование

$$x \mapsto [x, b]$$

произвольного элемента $x \in B$ с фиксированным элементом $b \in B$ определяет отображение $\gamma_b : B \to Z(B)$, которое фильтруется через фактор $B/Z(B)$, становясь линейным отображением

$$\bar{\gamma}_b : B/Z(B) \to Z(B).$$

Если теперь $\Gamma_b \subset (B/Z(B)) \times Z(B)$ – график отображения $\bar{\gamma}_b$, то в семействе определимых подгрупп

$$\mathcal{G} = \{\Gamma_b \mid b \in B\}$$

из группы A можно найти бесконечного много попарно различных подгрупп.

Поскольку группа Баудиша не интерпретирует бесконечного поля, то структура, состоящая из абелевой группы A и равномерно определимого семейства $\mathcal{G}$, так же не может интерпретировать никакого бесконечного поля.

Вопрос 5. Проверить, что группы Баудиша не являются линейными.

Возвращаясь к теореме Зильбера (Теорема 3.1) об интерпретируемости поля в разрешимой, но ненильпотентной связной группе, естественно задаться вопросом о линейности разрешимых групп конечного ранга Морли.

Вопрос 6. Верно ли, что связная разрешимая группа G с тривиальным центром, $Z(G) = 1$, имеет определимое точное матричное представление

$$G \to GL(n, R)$$

над коммутативным кольцом R конечного ранга Морли?

Конечно, ограничение $Z(G) = 1$ включено в этот вопрос в надежде, что оно устранит все осложнения, связанные с группами Баудиша. Тем не менее, оно не добавляет слишком много поводов для оптимизма, поскольку Оливье Фрекон заметил, что Вопрос 6 остается открытым даже в случае очень маленьких групп сравнительно простого строения.

Вопрос 7 (Оливье Фрекон)**.** Предположим, что G – связная разрешимая группа ранга Морли 3 и с тривиальным центром. Кроме того, предположим, что G содержит определимую абелеву нормальную подгруппу A ранга Морли 2 и без кручения. Верно ли, что G – линейная группа?

Поэтому следующий вопрос задан с несколько более пессимистических позиций.

Вопрос 8 (Джефф Бёрджес)**.** Пусть G – связная разрешимая группа конечного ранга Морли без *унипотентного кручения*, то есть без бесконечных абелевых подгрупп ограниченного периода.

Верно ли, что в таком случае G содержит конечное число таких определимых подгрупп $G_1, \dots, G_n$, что каждая подгруппа G_i определимо линейна над алгебраически замкнутым полем k_i, определимым в G_i, $i = 1, \dots, n$, и $G = G_1 \cdots G_n$?

4. Генерически n-транзитивные группы

Следующая группа вопросов связана со статьей Боровика и Черлина [**15**] о группах подстановок. Напомним, что определимое действие группы G конечного ранга Морли на множестве X называется *генерически n-транзитивным*, $n = 1, 2, \dots$, если G имеет на X^n генерическую орбиту (или орбиту *общего положения*), то есть орбиту $\bar{x}^G$, $\bar{x} \in X^n$, такую, что $\operatorname{rk} \bar{x}^G = \operatorname{rk} X^n$.

Вопрос 9. Предположим, что связная группа G конечного ранга Морли действует точно, определимо и генерически t-транзитивно на абелевой группе A ранга Морли n. Верно ли, что $t \leqslant n$?

Этот вопрос особенно интересен в своем предположительном предельном случае $t = n$. Действительно, есть надежда, что он ведет к следующей характеризации полных линейных групп.

https://doi.org/10.1017/S1474748008000157 Published online by Cambridge University Press

Гипотеза 10. Предположим, что связная группа G конечного ранга Морли действует точно, определимо и генерически n-транзитивно на связной абелевой группе V ранга Морли n.

Тогда V имеет структуру векторного пространства размерности n над некоторым алгебраически замкнутым полем F ранга Морли 1 и G совпадает с $\mathrm{GL}_n(F)$ в ее естественном действии на $V = F^n$.

Основание индукции в возможном индуктивном (по n) доказательстве Гипотезы 10 само по себе является открытой проблемой:

Гипотеза 11. Предположим, что связная группа G конечного ранга Морли действует точно, определимо и неприводимо на абелевой группе V ранга Морли 2 или 3. В таком случае выполняется одно из следующих утверждений.

- $\mathrm{rk}(V) = 2$, и G совпадает с одной из групп $\mathrm{SL}_2(F)$ или $\mathrm{GL}_2(F)$ в ее естественном действии на $V = F^2$, или
- $\mathrm{rk}(V) = 3$, V имеет конечную экспоненту p^n для $p > 2$, и G – простая p-группа (и тем самым является "плохой" группой в терминологии Пуаза), или
- $\mathrm{rk}(V) = 3$, $G = Z(G) * L$, где $*$ обозначает центральное произведение групп, и L совпадает с одной из групп $\mathrm{PSL}_2(F)$ или $\mathrm{SL}_3(F)$.

Помимо своей роли как основания индукции, Гипотеза 11 полезна как своего рода испытательный полигон для методов, разрабатываемых моими коллегами Алтинелом, Бёрджесом, Делоро, Жалиго для классификации "маленьких" простых групп конечного ранга Морли и нечетного типа. "Нечетный" тип понимается здесь как параллель "четного"; простая группа конечного ранга Морли имеет *нечетный тип*, если она содержит инволюцию, но не является группой четного типа. Есть еще и гипотетический класс простых групп "вырожденного типа", вовсе не содержащих инволюций; про этот класс так и неизвестно, пуст он или нет. В то же время простые алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями нечетной характеристики или характеристики ноль являются группами нечетного типа. Несмотря на существенный прогресс, доказательство гипотезы Зильбера-Черлина для групп нечетного типа далеко от завершения, и главным камнем преткновения являются как раз "маленькие" группы.

Очень вероятно, что доказательство Гипотезы 11 потребует систематизации всех имеющихся результатов о "маленьких" группах нечетного типа, начиная с работы Кристины Альтцаймер о характеризации групп PSL_3 централизаторами инволюций [**3**]. Что касается группы $\mathrm{PSL}_2(F)$, то она, скорее всего, будет возникать в Гипотезе 11 из конфигурации, покрытой недавней теоремой Адриена Делоро [**18**].

Теорема 4.1 (Делоро [**18**])**.** Пусть G – минимальная простая группа (что означает, что все собственные определимые связные подгруппы разрешимы) конечного ранга Морли и нечетного типа. Предположим, что максимальные делимые 2-подгруппы (2-торы, в терминологии Пуаза) из G изоморфны квазициклической 2-группе $\mathbb{Z}_{2^\infty}$.

Пусть t – инволюция, содержащаяся в 2-торе из G. Предположим, далее, что связная компонента $C_G^\circ(t)$ централизатора $C_G(t)$ инволюции t не является максимальной связной разрешимой подгруппой в G.

Тогда $G \simeq \mathrm{PSL}_2(F)$ для алгебраически замкнутого поля F.

Еще более полезной для доказательства Гипотезы 11 является следующая теорема Адриена Делоро и Эрика Жалиго [**19**], усиливающая предыдущий результат Делоро. Нам потребуется одно определение из [**19**]: мы будем говорить, что группа G конечного ранга Морли является *локально разрешимой*$^\circ$, если нормализатор $N_G(A)$ любой нетривиальной определимой подгруппы A из G *почти разрешим*, т.е. имеет разрешимую связную компоненту $N_G^\circ(A)$. В условиях Гипотезы 11 группа G довольно часто будет оказываться локально разрешимой$^\circ$.

Теорема 4.2 (Делоро и Жалиго [**19**])**.** Пусть G – простая локально разрешимая$^\circ$ группа конечного ранга Морли и нечетного типа. Предположим, что 2-торы из G изоморфны квазициклической 2-группе $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Предположим, что t – инволюция, содержащаяся в 2-торе из G. Предположим, далее, что $C_G^\circ(t)$ не является максимальной связной разрешимой подгруппой в G. Тогда $G \simeq \mathrm{PSL}_2(F)$ для алгебраически замкнутого поля F.

Замысловатые формулировки двух трудных теорем приводятся здесь только для того, чтобы показать читателю, насколько быстро наша теория становится крайне технической и перестает вмещаться в рамки элементарного обзора. Мне остается только заверить читателя, что техника у нас есть.

5. Группы псевдоотражений

Следующая гипотеза, хотя и выглядит очень технической, может оказаться решающим звеном доказательства Гипотезы 10. Она описывает конфигурацию, которая играет важную роль в классификации групп конечного ранга Морли и четного типа. Ее подтверждение в общем случае может стать одним из ключевых структурных результатов о группах конечного ранга Морли в целом.

Гипотеза 12. Предположим, что связная группа G конечного ранга Морли действует точно, определимо и неприводимо на связной абелевой группе V конечного ранга Морли. Для удобства, будем использовать аддитивные обезначения для операций в V. Предположим, что G содержит *подгруппу псевдоотражений*, то есть абелеву подгруппу R такую, что $V = [V, R] \oplus C_V(R)$ и R действует транзитивно на множестве ненулевых элементов из $[V, R]$.

В таком случае V допускает структуру векторного пространства над алгебраически замкнутым полем F, причем $[V, R]$ оказывается одномерным подпространством и R действует на $[V, R]$ как мультипликативная группа поля F. В довершение всего, $G = \mathrm{GL}(V)$.

В случае, когда V – абелева 2-группа, Гипотеза 12 доказана как Теорема IV.5.3 из [**2**].

Заметим, что в частном случае, когда $\mathrm{rk}\,([V,R]) = 1$ (а это единственный случай, нужный для подтверждения Гипотезы 10), Гипотеза 12 скорее всего является относительно простым следствием Гипотезы 11 и может быть доказана при помощи техники, развитой Айше Беркман [**10**]. Но при этом мы оказываемся на развилке, где в наш сценарий вливается тема *классических инволюций*.

Действительно, для любой сопряженной группы R^g группы R, группа $L = \langle R, R^g\rangle$ централизует $U = C_V(R) \cap C_V(R^g)$ и действует на V/U. Но $\mathrm{rk}\,V/U \leqslant 2$; поэтому возникает естественное желание использовать Гипотезу 11 и найти такую подгруппу L, что $\bar{L} = L/C_L(V/U)$ изоморфна $\mathrm{GL}_2(F)$, а R и R^g оказываются ее одномерными алгебраическими торами. Если мы положим $J = [L,L]$, то $J \simeq \mathrm{SL}_2(F)$ и обладает замечательным свойством: если z – инволюция из $Z(J)$, то $J \lhd C_G(z)$.

Тем самым инволюция z является *классической инволюцией* из G в смысле Майкла Ашбахера [**4**] и Айше Беркман [**10**]. Было бы очень интересно попытаться доказать Гипотезу 12, используя методы статьи Беркман [**10**].

Остается добавить, что когда группа $\langle J^g \mid g \in G\rangle$ уже отождествлена со специальной линейной группой $\mathrm{SL}_n(F)$, то существование на V структуры векторного пространства над полем F вытекает из принадлежащего Ульриху Майерфранкенфельду результата, характеризующего естественные модули классических групп [**23**].

Благодарности. Автор выражает признательность анонимному рецензенту за систематическую перестановку запятых в первоначальном тексте статьи.

Данная статья появилась только благодаря конференции “Логика по-лионски”, проведенной в Лионе, Франция, в июне 2006 года; автор искренне благодарен ее организаторам.

Список литературы

1. T. Altinel and G. Cherlin, On central extensions of algebraic groups, *J. Symb. Logic* **64**(1) (1999), 68–74.
2. T. Altinel, A. V. Borovik and G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2007).
3. C. Altseimer, PSL_3, preprint (1999).
4. M. Aschbacher, A characterization of Chevalley groups over fields of odd order, I, II, *Annals Math.* **106** (1977), 353–468 (correction: *Annals Math.* **111** (1980), 411–414).
5. M. Aschbacher, The status of the classification of the finite simple groups, *Am. Math. Soc. Notices* **51** (2004), 736–740.
6. F. Bachman, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Die Grundleheren der mathematischen Wissenschaften, Volume 96 (Springer, 1959); Русский перевод: Ф. М. Бахман, Построение геометрии на основе понятия симметрии (Москва, 1969).
7. A. Baudisch, A new uncountably categorical group. *Trans. Am. Math. Soc.* **348** (1996), 3889–3940.
8. V. V. Belyaev, On locally finite Chevalley groups, in *17th All-Union Algebraic Conference, Leningrad, 1981*, Part 2, p. 17 (in Russian).
9. V. V. Belyaev, Locally finite Chevalley groups, in *Investigations in Group Theory, Urals Scientific Centre, Sverdlovsk, 1984*, pp. 39–50 (in Russian).
10. A. Berkman, The classical involution theorem for groups of finite Morley rank, *J. Alg.* **243** (2001), 361–384.

11. A. V. Borovik, Periodic linear groups of odd characteristic, *Soviet Math. Dokl.* **26** (1982), 484–486.
12. A. V. Borovik, Classification of periodic linear groups over fields of odd characteristic, *Siberian Math. J.* **25** (1984), 221–235.
13. A. V. Borovik, Simple locally finite groups of finite Morley rank and odd type, in *Finite and Locally Finite Groups, Istanbul, 1994*, pp. 247–284, NATO Advanced Science Institutes, Series C, Mathematical and Physical Sciences, Volume 471 (Kluwer, Dordrecht, 1995).
14. A. V. Borovik and J. Burdges, Linear groups of finite Morley rank, in preparation.
15. A. V. Borovik and G. Cherlin, Permutation groups of finite Morley rank, to appear.
16. A. V. Borovik and A. Nesin, *Groups of finite Morley rank* (Clarendon Press, Oxford, 1994).
17. J. Burdges, Interpretability of fields in Cartan subgroups, manuscript (2006).
18. A. Deloro, Groupes simples connexes minimaux algébriques de type impair, *J. Alg.*, in press.
19. A. Deloro and E. Jaligot, Groups of finite Morley rank with solvable local subgroups, in preparation.
20. O. Frécon, Groupes géométriques de rang de Morley fini, *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), 753–794.
21. D. Gorenstein, R. Lyons and R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Mathematical Surveys and Monographs, Volumes 40.1–6 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1994–2005).
22. D. Macpherson and A. Pillay, Primitive permutation groups of finite Morley rank, *Proc. Lond. Math. Soc.* **70** (1995), 481–554.
23. U. Meierfrankenfeld, A characterization of the natural module for classical groups, preprint (circa 1990).
24. Y. Mustafin, Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini, *J. Alg.* **281**(2) (2004), 753–773.
25. B. Poizat, Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résult surpenant de Monsieur Frank Olaf Wagner, *J. Symb. Logic* **66**(4) (2001), 1637–1646.
26. S. Thomas, The classification of simple periodic linear groups, *Arch. Math.* **41** (1983), 103–116.
27. F. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symb. Logic* **66** (2001), 703–706.
28. B. I. Zilber, Uncountable categorical nilpotent groups and Lie algebras, *Soviet Math. Izv. VUZ* **26** (1982), 98–99.