J. Inst. Math. Jussieu (2018) **17**(4), 735–783 735
doi:10.1017/S1474748016000141

LA VARIANTE INFINITÉSIMALE DE LA FORMULE DES TRACES DE JACQUET-RALLIS POUR LES GROUPES LINÉAIRES

MICHAŁ ZYDOR

Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, P.O. Box 26, Rehovot 76100, Israel (michalz@weizmann.ac.il)

(Reçu le 12 mai 2015; révisé le 19 mars 2016; accepté le 19 mars 2016; premiére publication en ligne le 19 avril 2016)

Abstract We establish an infinitesimal version of the Jacquet-Rallis trace formula for general linear groups. Our formula is obtained by integrating a kernel truncated à la Arthur multiplied by the absolute value of the determinant to the power $s \in \mathbb{C}$. It has a geometric side which is a sum of distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ indexed by the invariants of the adjoint action of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ on $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathrm{F})$ as well as a «spectral side» consisting of the Fourier transforms of the aforementioned distributions. We prove that the distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ are invariant and depend only on the choice of the Haar measure on $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. For regular semi-simple classes $\mathfrak{o}$, $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ is a relative orbital integral of Jacquet-Rallis. For classes $\mathfrak{o}$ called relatively regular semi-simple, we express $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ in terms of relative orbital integrals regularised by means of zeta functions.

Résumé Nous établissons une variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires. Notre formule s'obtient par intégration d'un noyau tronqué à la Arthur multiplié par la valeur absolue du déterminant à la puissance $s \in \mathbb{C}$. Elle possède un côté géométrique qui est une somme de distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ indexées par les invariants de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ sur $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathrm{F})$ ainsi qu'un «côté spectral» formé des transformées de Fourier des distributions précédentes. On démontre que les distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ sont invariantes et ne dépendent que du choix de la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Pour des classes $\mathfrak{o}$ semi-simples régulières, $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ est une intégrale orbitale relative de Jacquet-Rallis. Pour les classes $\mathfrak{o}$ dites relativement semi-simples régulières, on exprime $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ en termes d'intégrales orbitales relatives régularisées à l'aide des fonctions zêta.

Table des matières

1. Introduction

1.1. Contexte

Dans [8], Jacquet et Rallis proposent une approche *via* une formule des traces relative à la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad (GGP) pour les groupes unitaires [4]. Ils proposent d'établir deux formules des traces relatives, une pour les groupes unitaires et une autre pour les groupes linéaires. Les deux formules ont des côtés géométriques et spectraux. La comparaison de côtés géométriques de ces deux formules doit mener aux résultats spectraux qui sont l'objet de la conjecture de Gan-Gross-Prasad. Une version simple de cette formule, c'est-à-dire une version valable pour une certaine classe de fonctions test, a été utilisée par Zhang pour démontrer une partie substantielle de la conjecture GGP [17, 18] ainsi que certains cas du raffinement de la conjecture GGP dû à Ichino et Ikeda [6] et Neal Harris [12].

1.2. Nos résultats

Afin que l'on puisse étendre les résultats de Zhang, il faut des formules des traces valables pour toutes les fonctions lisses à support compact. Cet article étudie la variante infinitésimale du côté géométrique de la formule des traces relative de Jacquet-Rallis pour les groupes linéaires et il est précédé par [19] où l'on étudie la variante infinitésimale du côté géométrique pour les groupes unitaires. Les côtés géométriques pour les groupes ainsi que les côtés spectraux sont présentés dans [20].

Soient E/F une extension quadratique de corps de nombres, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $\eta : \mathrm{F}^*\backslash\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}$ le caractère associé à l'extension E/F par la théorie de corps de classes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $G = \mathrm{GL}_n$ que l'on voit comme un sous-groupe de $\widetilde{G} = \mathrm{GL}_{n+1}$ par le plongement diagonal $g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}$. Soit S_{n+1} la F-sous-variété de $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{G}$ composée des $g \in \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{G}$ tels que $g\bar{g} = 1$ où $\bar{g}$ est le conjugué de g par l'élément non trivial du groupe de Galois de E/F. On voit G et $\widetilde{G}$ comme des F-sous-groupes de $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{G}$. L'action de G sur $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{G}$ stabilise alors S_{n+1}.

Du côté géométrique de la formule des traces relative de Jacquet-Rallis pour le groupe linéaire, on étudie l'intégrale formelle

$$\int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} k_f(x)\eta(\det x)\, dx \tag{1.1}$$

où $f \in C_c^\infty(S_{n+1}(\mathbb{A}))$ est une fonction lisse à support compact sur $S_{n+1}(\mathbb{A})$ et $k_f(x)$ égale $\sum_{\gamma\in S_{n+1}(\mathrm{F})} f(x^{-1}\gamma x)$ pour $x \in G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})$. Cette intégrale n'est pas bien définie pour toutes les fonctions f. Zhang utilise cette intégrale pour des fonctions vérifiant certaines conditions de support local pour lesquelles elle converge et admet une décomposition en une somme d'intégrales orbitales relatives.

Dans cet article, on s'intéresse à la version infinitésimale de l'intégrale (1.1). Soient $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}(\widetilde{G})$ et $\mathfrak{s}_{n+1}$ l'espace tangent à l'identité de S_{n+1}. Alors, $\mathfrak{s}_{n+1}$, vu comme un sous-espace de $\mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{\mathfrak{g}}$, est :

$$\mathfrak{s}_{n+1} = \{X \in \mathrm{Res}_{\mathrm{E/F}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{n+1} | X + \overline{X} = 0\}.$$

Si l'on choisit un $\tau \in \mathrm{E}$ tel que $\overline{\tau} = -\tau$, la multiplication par τ induit un isomorphisme entre $\mathfrak{s}_{n+1}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Le groupe G agit sur $\mathfrak{s}_{n+1}$ et sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par adjonction. Cette identification est alors G-équivariante. Soit $s \in \mathbb{C}$. L'analogue infinitésimal de l'intégrale (1.1) que l'on considère est

$$I(s, f) = \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} k_f(x)|\det x|_{\mathbb{A}}^s \eta(\det x)\, dx, \quad k_f(x) = \sum_{\xi\in\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})} f(x^{-1}\xi x), \quad f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})),$$

où $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ est la valeur absolue standard sur le groupe des idèles de $\mathbb{A}$ et $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ est l'espace des fonctions de type Bruhat-Schwartz sur $\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})$. Dans cet article, on définit une régularisation de cette intégrale par un processus de troncature à la Arthur et on étudie les propriétés de la distribution ainsi obtenue. Décrivons brièvement cette troncature maintenant.

Fixons B un sous-groupe de Borel de G ainsi que sa décomposition de Levi $B = M_0N_0$ avec M_0 une partie de Levi de B et N_0 son radical unipotent. On note $\mathcal{F}(B)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant B. Tout $P \in \mathcal{F}(B)$ admet alors une unique décomposition de Levi $P = M_PN_P$. Soit $M_{\widetilde{0}}$ l'unique sous-groupe de Levi minimal de $\widetilde{G}$ contenant M_0. On note $\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

$\widetilde{G}$ contenant B. Tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ admet alors une unique décomposition de Levi $\widetilde{P} = M_{\widetilde{P}} N_{\widetilde{P}}$ où $M_0 \subseteq M_{\widetilde{P}}$. Pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, on a $\widetilde{P} \cap G \in \mathcal{F}(B)$. On note alors $P := \widetilde{P} \cap G$.

Au début de la section 3, on introduit une décomposition de $\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$ en classes géométriques, dont on note l'ensemble $\mathcal{O}$, qui sont stables par action adjointe de $G(\mathrm{F})$. Pour tous $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, on pose

$$k_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi + U)x)\, dU, \quad x \in M_P(\mathrm{F}) N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Le noyau tronqué est défini alors comme

$$k^T_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}} - d_{\widetilde{G}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \backslash G(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T) k_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A}),$$

où, si l'on pose $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_{\widetilde{P}}, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$, alors $H_{\widetilde{P}} : \widetilde{G}(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ est l'application de Harish-Chandra, $\hat{\tau}_{\widetilde{P}}$ est la fonction caractéristique d'un cône obtus dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$, $d_{\widetilde{P}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ et T est un paramètre dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_{\widetilde{0}}, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$ (voir le paragraphe 2.1). Notre premier résultat, démontré dans le paragraphe 3.2, est alors le suivant.

Théorème 1.1 (cf. théorème 3.6). *Pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ et tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} |k^T_{f,\mathfrak{o}}(x)| |\det x|^{\sigma}_{\mathbb{A}}\, dx < \infty.$$

Ici $\mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ est un cône aigu dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$ (une chambre de Weyl positive fixée) et $T_+ \in \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ est précisé dans le paragraphe 2.8.

Ensuite, on s'intéresse au comportement de l'application $T \mapsto \int_{G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} k^T_{f,\mathfrak{o}}(x) |\det x|^s_{\mathbb{A}} \eta(\det x)\, dx$. Dans le paragraphe 4.3, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.2 (cf. théorème 4.8). *Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $s \in \mathbb{C}$. La fonction*

$$T \mapsto I^T_{\mathfrak{o}}(s, f) := \int_{G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} k^T_{f,\mathfrak{o}}(x) |\det x|^s_{\mathbb{A}} \eta(\det x)\, dx,$$

où T parcourt $T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$, est un polynôme-exponentielle dont la partie purement polynomiale est constante si $s \neq -1, 1$.

On note $I_{\mathfrak{o}}(s, f)$ la partie constante du polynôme-exponentielle $I^T_{\mathfrak{o}}(s, f)$ pour $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$. Il s'avère que la distribution $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ a des propriétés remarquables. On obtient le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$.*

(cf. théorème 4.11). Pour $y \in G(\mathbb{A})$, notons $\phi^y \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ la fonction définie par $\phi^y(X) = \phi(\mathrm{Ad}(y)X)$. On a alors

$$I_{\mathfrak{o}}(s, f^y) = |\det y|^s_{\mathbb{A}} \eta(\det y) I_{\mathfrak{o}}(s, f)$$

(*cf. paragraphe 4.5*). *La distribution $I_{\mathfrak{o}}(s,\cdot)$ ne dépend que des choix des mesures de Haar.*

Dans le paragraphe 4.6, on constate que pour les classes $\mathfrak{o}$ dites semi-simples régulières, sur lesquelles $G(\mathrm{F})$ opère fidèlement et transitivement, la distribution $I_{\mathfrak{o}}^T(s,\cdot)$ ne dépend pas de T et $I_{\mathfrak{o}}^T(s,f)$ égale une intégrale orbitale relative qui apparaît déjà dans [8].

Dans la section 5, on démontre la version infinitésimale de la formule des traces relative pour les groupes linéaires

.

Théorème 1.4 (cf. théorème 5.1). *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et tout $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1,1\}$, on a*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(s,f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(s,\hat{f}).$$

Ici $\hat{f}$ est une transformée de Fourier (on en considère plusieurs) de f.

Notre dernier résultat, démontré dans la section 6, concerne des formules explicites pour certaines nouvelles distributions $I_{\mathfrak{o}}(s,\cdot)$. Tout $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$ s'écrit $\begin{pmatrix} \xi & u \\ v & d \end{pmatrix}$ où $\xi \in \mathrm{Lie}(G)(\mathrm{F})$, $u, v \in \mathrm{F}^n$ et $d \in \mathrm{F}$. On écrit alors $\xi_X := \xi$. Soient $P \in \mathcal{F}(B)$ et $\xi \in \mathrm{Lie}(M_P)(\mathrm{F})$ un élément elliptique (qui n'est contenu dans aucune sous-algèbre parabolique propre de $\mathrm{Lie}(M_P)$). Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ une classe contenant un élément X tel que $\xi_X = \xi$. Alors, $\mathfrak{o}$ est une réunion finie d'orbites pour l'action de $G(\mathrm{F})$. De plus, les orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{o}$ ont des centralisateurs triviaux. Fixons un représentant X_0 de l'orbite fermée dans $\mathfrak{o}$ tel que $\xi_{X_0} = \xi$ et choisissons un ensemble $\mathrm{O}_{\mathfrak{o}} \subseteq \mathfrak{o}$ de représentants des orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{o}$ de sorte que tout $X \in \mathrm{O}_{\mathfrak{o}}$ vérifie $\xi_X = \xi$. Soit T_0 le centralisateur de X_0 dans G. Pour $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $X \in \mathrm{O}_{\mathfrak{o}}$, on pose :

$$\zeta_X(f)(\lambda) = \int_{G(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)e^{\lambda(H_P(x))}\eta(\det x)\,dx,$$

où $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(T_0, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} =: \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ que l'on peut voir naturellement comme un sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_P, \mathbb{C})$. L'intégrale définissant $\zeta_X(f)$ converge sur un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ qui dépend de X et admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ noté aussi $\zeta_X(f)$. Notons que le déterminant est naturellement un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(T_0, \mathbb{G}_m)$, on a donc un élément associé $\det \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 1.5 (cf. théorème 6.12). *Soit $\mathfrak{o}$ comme ci-dessus. Alors, la droite $\{s\det \mid s \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ n'est contenue dans aucun hyperplan singulier de la fonction méromorphe*

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda \mapsto \left(\sum_{X\in \mathrm{O}_{\mathfrak{o}}} \zeta_X(f)\right)(\lambda).$$

De plus, la fonction méromorphe

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto \left(\sum_{X\in \mathrm{O}_{\mathfrak{o}}} \zeta_X(f)\right)(s\det)$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

est holomorphe pour $s \neq -1, 1$ et l'on a :

$$I_{\mathfrak{o}}(s, f) = \left(\sum_{X \in \mathrm{O}_{\mathfrak{o}}} \zeta_X(f) \right)(s \det), \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Dans la section 6 de [19], on obtient un résultat complètement analogue pour les groupes unitaires.

Commentons finalement l'apparition du déterminant à la puissance complexe dans la définition de la distribution $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$. On ajoute ce terme en vue de possibles applications aux dérivées des intégrales orbitales relatives de Jacquet-Rallis. Pour les classes semi-simples régulières, les dérivées des analogues locaux des distributions $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ définies sur la variété S_{n+1} ont d'abord été introduites dans [16] et ensuite étudiées dans [13, 14] pour des fonctions test particulières. Ces travaux lient ces dérivées à des nombres d'intersection sur certains espaces de Rapoport-Zink et s'inscrivent dans le cadre de la variante arithmétique de la conjecture de Gan-Gross-Prasad. Récemment, dans [11], les dérivées des analogues locaux des distributions infinitésimales $I_{\mathfrak{o}}(s, \cdot)$ ont aussi été étudiées. On espère que notre formule aura un intérêt pour ces questions.

2. Prolégomènes

2.1. Préliminaires pour la formule des traces

Soient F un corps de nombres et G un F-groupe algébrique réductif que l'on suppose déployé sur F. Pour tout F-sous-groupe de Levi M de G (c'est-à-dire un facteur de Levi d'un F-sous-groupe parabolique de G), soient $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble de F-sous-groupes paraboliques de G contenant M et $\mathcal{P}(M)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(M)$ composé de sous-groupes paraboliques admettant M comme facteur de Levi. On fixe un sous-groupe de Levi minimal M_0 de G. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(M_0)$ les sous-groupes paraboliques semi-standards et les éléments de $\mathcal{P}(M_0)$ les sous-groupes de Borel. On utilisera toujours le symbole P, avec des indices éventuellement, pour noter un sous-groupe parabolique semi-standard. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, soient N_P le radical unipotent de P et M_P le facteur de Levi de P contenant M_0. On a alors $P = M_P N_P$. On note A_P le tore central de M_P déployé sur F et maximal pour cette propriété. Si P est un sous-groupe de Borel, on a alors $A_P = M_0$ et on pose dans ce cas $A_0 := A_P = M_P$. Pour $P_1 \in \mathcal{F}(M_0)$, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira N_1 au lieu de N_{P_1}, M_1 au lieu de M_{P_1}, etc.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. On définit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{a}_P := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$, isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(A_P, \mathbb{G}_m), \mathbb{R})$ grâce à l'inclusion $A_P \hookrightarrow M_P$, ainsi que son espace dual $\mathfrak{a}_P^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on pose

$$d_P = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_P, \quad d_Q^P = d_Q - d_P, \quad Q \subseteq P. \tag{2.1}$$

Si $P_1 \subseteq P_2$, on a un homomorphisme injectif canonique $\mathfrak{a}_2^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_1^*$ qui donne la projection $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, dont on note $\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_{P_2}^{P_2}$ le noyau. On a aussi l'inclusion $\mathfrak{a}_2 \hookrightarrow \mathfrak{a}_1$, qui est une section de $\mathfrak{a}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_2$, grâce à la restriction des caractères de A_1 à A_2. Il s'ensuit que si $P_1 \subseteq P_2$, alors

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^2 \oplus \mathfrak{a}_2. \tag{2.2}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Conformément à cette décomposition, on pose aussi $(\mathfrak{a}_1^2)^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_1^* | \lambda(H) = 0 \ \forall H \in \mathfrak{a}_2\}$. On aura besoin aussi de $(\mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^2)^* := (\mathfrak{a}_1^2)^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et de $\mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_1^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Si $P \subseteq Q$ sont des sous-groupes paraboliques semi-standards où P est un sous-groupe de Borel, on note simplement $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_P$, $\mathfrak{a}_0^Q = \mathfrak{a}_P^Q$, $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_P^*$, etc. Cela ne dépend pas du choix de P. En général donc, si $P_1 \subseteq P_2$, grâce à la décomposition (2.2) ci-dessus, on considère les espaces $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_1^2$ (resp. $\mathfrak{a}_1^*$ et $(\mathfrak{a}_1^2)^*$) comme des sous-espaces de $\mathfrak{a}_0$ (resp. $\mathfrak{a}_0^*$).

Notons $\Delta_P^G = \Delta_P$ l'ensemble de racines simples pour l'action de A_P sur N_P. Il y a une correspondance bijective entre les sous-groupes paraboliques P_2 contenant P_1 et les sous-ensembles $\Delta_1^2 = \Delta_{P_1}^{P_2}$ de $\Delta_1 = \Delta_{P_1}$. En réalité, Δ_1^2 est l'ensemble de racines simples pour l'action de A_1 sur $N_1 \cap M_2$ et l'on a

$$\mathfrak{a}_2 = \{H \in \mathfrak{a}_1 | \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1^2\}.$$

De plus, Δ_1^2 (les restrictions de ses éléments à $\mathfrak{a}_1^2$) est une base de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$.

Fixons $P_1 \subseteq P_2$ et soit $B \in \mathcal{P}(M_0)$ contenu dans P_1. On a alors l'ensemble

$$\Delta_B^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0 | \alpha \in \Delta_B\}$$

de coracines simples associées aux racines simples Δ_B. Soit $(\Delta_1^2)^\vee$ l'ensemble de projections d'éléments de $\Delta_B^\vee$ dans $\mathfrak{a}_1^2$ privé de zéro. Cela ne dépend pas du choix de B. L'ensemble Δ_1^2 est en bijection canonique avec $(\Delta_1^2)^\vee$, la bijection étant : à $\alpha \in \Delta_1^2$, on associe l'unique $\alpha^\vee \in (\Delta_1^2)^\vee$ tel que $\alpha(\alpha^\vee) > 0$. Notons également $\widehat{\Delta}_1^2$ et $(\widehat{\Delta}_1^2)^\vee$ les bases de $(\mathfrak{a}_1^2)^*$ et $\mathfrak{a}_1^2$ duales à $(\Delta_1^2)^\vee$ et Δ_1^2 respectivement. Si $P_2 = G$, on note simplement Δ_1, $\Delta_1^\vee$ etc.

Soient $P, P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$, on note

$$\mathfrak{a}_P^+ = \{H \in \mathfrak{a}_P | \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P\}$$

et si $P_1 \subseteq P_2$, notons τ_1^2, $\hat{\tau}_1^2$ les fonctions caractéristiques de

$$\{H \in \mathfrak{a}_0 | \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1^2\}, \quad \{H \in \mathfrak{a}_0 | \varpi(H) > 0 \ \forall \varpi \in \widehat{\Delta}_1^2\}$$

respectivement. On note τ_P pour τ_P^G et $\hat{\tau}_P$ pour $\hat{\tau}_P^G$.

Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{F}}$ l'anneau des adèles de F et soit $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ la valeur absolue standard sur le groupe des idèles $\mathbb{A}^*$. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, posons $H_P : M_P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ défini comme

$$\langle H_P(m), \chi \rangle = \log(|\chi(m)|_{\mathbb{A}}), \quad \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(M_P, \mathbb{G}_m), \ m \in M_P(\mathbb{A}).$$

C'est un homomorphisme continu et surjectif, donc si l'on note $M_P(\mathbb{A})^1$ son noyau, on obtient la suite exacte suivante

$$1 \to M_P(\mathbb{A})^1 \to M_P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P \to 0.$$

Soit A_P^∞ la composante neutre du groupe des $\mathbb{R}$-points du tore déployé et défini sur $\mathbb{Q}$ maximal pour cette propriété dans le $\mathbb{Q}$-tore $\mathrm{Res}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}} A_P$. Alors, comme $\mathrm{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ s'injecte dans $\mathbb{A}$, on a naturellement $A_P^\infty \hookrightarrow A_P(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_P(\mathbb{A})$. De plus, la restriction de H_P à A_P^∞ est un isomorphisme donc $M_P(\mathbb{A})$ est un produit direct de $M_P(\mathbb{A})^1$ et A_P^∞. Pour $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P, on pose $A_P^{Q,\infty} = A_P^\infty \cap M_Q(\mathbb{A})^1$. L'application H_P induit alors un isomorphisme entre $A_P^{Q,\infty}$ et $\mathfrak{a}_P^Q$.

Fixons K un sous-groupe compact maximal admissible de $G(\mathbb{A})$ par rapport à M_0. La notion d'admissibilité par rapport à un sous-groupe de Levi minimal est

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

définie dans le paragraphe 1 de [2]. Il en découle donc que, pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P, $K \cap M_P(\mathbb{A})$ est admissible dans $M_P(\mathbb{A})$ et on obtient aussi la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K = N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{A})K$, ce qui nous permet d'étendre H_P à $G(\mathbb{A})$ en posant $H_P(x) = H_P(m)$ où $x = nmk$ avec $m \in M_P(\mathbb{A})$, $n \in N_P(\mathbb{A}), k \in K$. Dans ce cas, $H_P(x)$ ne dépend pas du choix de m.

On note Ω^G le groupe de Weyl de (G, M_0). Pour tout $s \in \Omega^G$, on choisit un représentant w_s dans l'intersection de $G(\mathrm{F}) \cap K$ avec le normalisateur de M_0. Cela n'est pas toujours possible donc on impose la condition sur K que cela est possible. On peut toujours trouver un tel K dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n$ et c'est le cas qui va nous intéresser. Pour un F-sous-groupe H de G et $s \in \Omega^G$, on note sH le F-sous-groupe $w_s H w_s^{-1}$. Le groupe Ω^G agit donc ainsi sur $\mathcal{F}(M_0)$. Pour tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$, l'application $\Omega^G \ni s \mapsto sB \in \mathcal{P}(M_0)$ est une bijection. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, soit Ω^P le sous-groupe de Ω^G stabilisant P. On a donc $\Omega^P = \{s \in \Omega^G | w_s \in M_P(\mathrm{F})\}$.

Notons finalement que, parfois, pour économiser l'espace, on utilisera la notation $[H]$ pour noter $H(\mathrm{F})\backslash H(\mathbb{A})$.

2.2. Le domaine de Siegel

Soit B un sous-groupe de Borel de G semi-standard. Pour un compact $\omega \subseteq N_B(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ et un réel négatif c, on définit le domaine de Siegel $\mathfrak{S}_B(\omega, c)$ dans $G(\mathbb{A})$ comme

$$\mathfrak{S}_B(\omega, c) = \{mak \in G(\mathbb{A}) | m \in \omega, k \in K, a \in A_B^\infty(c)\},$$

où $A_B^\infty(c) = A_B^\infty(G, c) = \{a \in A_B^\infty | \alpha(H_B(a)) > c, \forall \alpha \in \Delta_B\}$. En général, pour un sous-groupe parabolique semi-standard P de G contenant B, on définit

$$\mathfrak{S}_B^P(\omega, c) = \{mak \in G(\mathbb{A}) | m \in \omega, k \in K, a \in A_B^\infty(P, c)\},$$

où $A_B^\infty(P, c) = \{a \in A_B^\infty | \alpha(H_B(a)) > c, \forall \alpha \in \Delta_B^P\}$.

On utilisera le résultat suivant de la théorie de réduction, que l'on peut trouver, par exemple dans [5].

Proposition 2.1. *Il existe un réel négatif c_0 et, pour tout sous-groupe de Borel semi-standard B de G, un compact $\omega_B \subseteq N_B(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ tels que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P contenant B, on a :*

$$G(\mathbb{A}) = P(\mathrm{F})\mathfrak{S}_B^P(\omega_B, c_0).$$

Fixons la constante c_0 comme ci-dessus. Pour tout sous-groupe de Borel semi-standard B, on fixe aussi un ω_B comme dans la proposition 2.1, de façon que si $B' \in \mathcal{P}(M_0)$ est tel que $sB = B'$, où $s \in \Omega^G$, on a it $\omega_{B'} = w_s \omega_B w_s^{-1}$. Les définitions de ce paragraphe sont valables en particulier pour les sous-groupes de Levi de G. On voit donc que l'on peut fixer les compacts ω_B de façon que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P et tout $B \in \mathcal{P}(M_0)$ contenu dans P, le compact $M_P(\mathbb{A}) \cap \omega_B$ ainsi que le sous-groupe $K_P := M_P(\mathbb{A}) \cap K$ jouissent des rôles de ω_B et K ci-dessus par rapport au groupe réductif M_P et son sous-groupe de Borel $B \cap M_P$, la constante c_0 restant la même.

Soient $B \in \mathcal{P}(M_0)$, $P \supseteq B$ et $T \in \mathfrak{a}_0$. On définit $F_B^P(x, T)$ comme la fonction caractéristique de l'ensemble :

$$\{x \in G(\mathbb{A}) |\ \exists \delta \in P(\mathrm{F})\ \delta x \in \mathfrak{S}_B^P(\omega_B, c_0), \quad \varpi(H_B(\delta x) - T) < 0\ \forall \varpi \in \widehat{\Delta}_B^P\}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Autrement dit, si l'on pose

$$A_B^\infty(P, c_0, T) := \{a \in A_B^\infty(P, c_0) | \varpi(H_B(a) - T) < 0, \ \forall \varpi \in \widehat{\Delta}_B^P\},$$

il en découle alors que $F_B^P(\cdot, T)$ est la fonction caractéristique de la projection de $\omega_B A_B^\infty(P, c_0, T)K$ sur $A_P^\infty N_P(\mathbb{A}) M_P(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})$.

2.3. Algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, pour tous $P, P_1, P_2 \in \mathcal{F}(M_0)$ tels que $P_1 \subseteq P_2$, on note $N_1^2 = N_1 \cap M_2$, $\mathfrak{m}_P = \mathrm{Lie}(M_P)$, $\mathfrak{n}_P = \mathrm{Lie}(N_P)$ et $\mathfrak{n}_1^2 = \mathrm{Lie}(N_1^2)$. Soit $\overline{P} \in \mathcal{F}(M_P)$ le sous-groupe parabolique opposé à P (*i.e.* tel que $\overline{P} \cap P = M_P$). On note alors $\bar{\mathfrak{n}}_P = \mathfrak{n}_{\overline{P}}$ et $\bar{\mathfrak{n}}_1^2 = \mathfrak{m}_2 \cap \bar{\mathfrak{n}}_1$.

On fixe une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ invariante par adjonction. Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, la restriction de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\bar{\mathfrak{n}}_P \times \mathfrak{n}_P$ est alors non dégénérée, donc l'espace $\bar{\mathfrak{n}}_P$ s'identifie à l'espace dual $\mathfrak{n}_P$ grâce à cette forme.

2.4. Fonctions de Bruhat-Schwartz

On note $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis de F et $\mathrm{F}_\infty := \mathrm{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, de façon à avoir $\mathbb{A} = \mathrm{F}_\infty \times \mathbb{A}_f$. Notons $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ l'ensemble des fonctions de Bruhat-Schwartz sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$, *i.e.* l'espace de fonctions sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ engendré par des fonctions du type $f_\infty \otimes \chi^\infty$ où f_∞ est une fonction de la classe de Schwartz sur $\mathfrak{g}(\mathrm{F}_\infty)$ et χ^∞ est une fonction caractéristique d'un compact ouvert de $\mathfrak{g}(\mathbb{A}_f)$.

2.5. Les mesures de Haar

Soit P un sous-groupe parabolique semi-standard de G. On fixe dx une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$, ainsi que, pour tout sous-groupe connexe V de N_P (resp. toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{n}_P$), l'unique mesure de Haar sur $V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$) pour laquelle le volume de $V(\mathrm{F}) \backslash V(\mathbb{A})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathrm{F}) \backslash \mathfrak{h}(\mathbb{A})$) soit 1. Choisissons aussi la mesure de Haar dk sur K pour laquelle la mesure totale de K vaut 1.

On fixe aussi une norme euclidienne $\| \cdot \|$ sur $\mathfrak{a}_0$ invariante par le groupe de Weyl Ω^G et sur tout sous-espace de $\mathfrak{a}_0$ la mesure de Haar compatible avec cette norme. Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ tel que $Q \supseteq P$, on en déduit les mesures de Haar sur $A_P^{Q,\infty}$ et A_P^∞ *via* l'isomorphisme H_P.

Soit dp la mesure de Haar sur $P(\mathbb{A})$ invariante à gauche normalisée de façon que $dx = dp\, dk$ (grâce à la décomposition d'Iwasawa). Notons $\rho_P^G = \rho_P$ l'élément de $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ tel que $d(\mathrm{Ad}(m)n) = e^{2\rho_P(H_P(m))}\, dn$ pour $m \in M_P(\mathbb{A})$ et $n \in N_P(\mathbb{A})$. Il s'ensuit qu'il existe une unique mesure de Haar dm sur $M_P(\mathbb{A})$ telle que si l'on écrit $p = nm$ où $p \in P(\mathbb{A})$, $n \in N_P(A)$ et $m \in M_P(\mathbb{A})$, alors $dp = e^{-2\rho_P(H_P(m))}\, dn\, dm$. Les mesures de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ et A_P^∞ induisent alors une unique mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})^1$, que l'on fixe, telle que la mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ soit le produit de mesures sur A_P^∞ et sur $M_P(\mathbb{A})^1$.

2.6. $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$

Soit W un F-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et soit $V \subseteq W$ un sous-espace de dimension n, où $n \in \mathbb{N}$. Notons $\widetilde{G} = \mathrm{GL}(W)$. Fixons un vecteur $e_0 \in W \smallsetminus V$ et notons D_0 la droite qu'il engendre. On a alors $W = V \oplus D_0$, ce qui permet d'identifier $G = \mathrm{GL}(V)$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

comme un sous-groupe de $\widetilde{G}$ stabilisant V et fixant e_0. Choisissons n droites $D_1, \ldots, D_n$ dans V qui engendrent V. Soit M_0 le stabilisateur dans G des droites $(D_i)_{i=1,\ldots,n}$. C'est un F-sous-groupe de Levi minimal de G. Soit alors $M_{\widetilde{0}}$ l'unique F-sous-groupe de Levi minimal de $\widetilde{G}$ contenant M_0. Alors $M_{\widetilde{0}}$ est le stabilisateur des droites $(D_i)_{i=0,\ldots,n}$ dans $\widetilde{G}$.

Les résultats des paragraphes précédents s'appliquent aux groupes G et $\widetilde{G}$ et leurs sous-groupes de Levi minimaux M_0 et $M_{\widetilde{0}}$. Les objets associés à $\widetilde{G}$ seront notés toujours avec un tilde. Pour le choix du sous-groupe compact maximal, on fixe des vecteurs non nuls $e_i \in D_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, ce qui, avec le choix du vecteur e_0, définit les isomorphismes $\widetilde{G} \cong \mathrm{GL}_{n+1}$ et $G \cong \mathrm{GL}_n$. On pose alors $\widetilde{K} = \prod_v \widetilde{K}_v$ où, pour une place finie v de F, on note $\widetilde{K}_v = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_v)$, où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de la complétion de F en v ; pour une place réelle v, on pose $\widetilde{K}_v = O(n+1)$ – le groupe orthogonal anisotrope – et pour une place complexe, on pose $\widetilde{K}_v = U(n+1)$ – le groupe unitaire anisotrope. On pose aussi $K = \widetilde{K} \cap G(\mathbb{A})$. Dans ce cas, $\widetilde{K}$ et K vérifient les conditions du paragraphe (2.1). Les inclusions $G \hookrightarrow \widetilde{G}$ et $M_0 \hookrightarrow M_{\widetilde{0}}$ induisent l'inclusion $\Omega^G \hookrightarrow \Omega^{\widetilde{G}}$. On choisit aussi des représentants du groupe de Weyl $\Omega^{\widetilde{G}}$ de $\widetilde{G}$ comme les éléments permutants les vecteurs e_i. Pour tout $\widetilde{s} \in \Omega^{\widetilde{G}}$, on a alors $w_{\widetilde{s}} \in \widetilde{G}(\mathrm{F}) \cap \widetilde{K}$ et si $s \in \Omega^G$, alors $w_s \in G(\mathrm{F}) \cap K$.

On identifie $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0^*$ avec des sous-espaces de $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$ et $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^*$ respectivement. En particulier, la mesure de Haar et la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}_0$ sont celles d'un sous-espace de $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$.

Posons $V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} D_i \subseteq V$. On fixe $B \in \mathcal{P}(M_0)$, le stabilisateur du drapeau

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V. \tag{2.3}$$

On appelle $P \in \mathcal{F}(M_0)$, tels que $P \supseteq B$, les sous-groupes paraboliques standards de G. Tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ standard est alors défini comme le stabilisateur d'un sous-drapeau du drapeau (2.3) ci-dessus.

Notons $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(V, \mathrm{F})$ et $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(W, \mathrm{F})$. Pour un F-sous-espace $\mathcal{V} \subseteq V$ de type $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=k}^{l} D_i$ où $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, on pose $\mathcal{V}^* = \{\lambda \in V^* | \, \lambda|_{D_i} = 0, \ 1 \leqslant i < k, \ l < i \leqslant n\}$ et $\mathcal{V}^{\perp} = \{\lambda \in V^* | \lambda|_{\mathcal{V}} = 0\}$.

Pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$, on admet la notation :

$$P := \widetilde{P} \cap G. \tag{2.4}$$

Alors P est un sous-groupe parabolique de G semi-standard. Le groupe G (resp. $\widetilde{G}$) agit aussi naturellement sur V^* (resp. W^*) donc aussi sur $V \times V^*$ (resp. $W \times W^*$). Pour $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$, on note $\mathcal{V}_{\widetilde{P}} \subseteq V \times V^*$ le plus grand sous-espace de $V \times V^*$ stabilisé par $\widetilde{P}$ vu comme un sous-espace de $W \times W^*$. On note aussi $Z_{\widetilde{P}} \subseteq V$ le plus petit sous-espace de V tel que $M_{\widetilde{P}}$ stabilise $Z_P \oplus D_0 \subseteq W$. On pose $\mathcal{Z}_{\widetilde{P}} = Z_{\widetilde{P}} \times Z_{\widetilde{P}}^* \subseteq V \times V^*$.

On note $\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) = \{P \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}) | \, B \subseteq \widetilde{P}\}$. On appelle les éléments de $\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ les sous-groupes paraboliques *relativement standards* de $\widetilde{G}$.

Soit $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$. Il est défini alors par une suite des entiers $0 = i_0 \leqslant \cdots \leqslant i_l = n$ et un entier k tels que $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n+1$ et k vérifie la propriété que si $i_{j-1} = i_j$ pour un $1 \leqslant j \leqslant l$, alors $j = k$. Le sous-groupe $\widetilde{P}$ est alors le stabilisateur du drapeau :

$$0 = V_{i_0} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i_{k-1}} \subsetneq V_{i_k} \oplus D_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i_l} \oplus D_0 = W. \tag{2.5}$$

Dans ce cas, P est le stabilisateur de

$$0 = V_{i_0} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i_{k-1}} \subseteq V_{i_k} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i_l} = V.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

On a de plus

$$\mathcal{V}_{\widetilde{P}} = V_{i_{k-1}} \times V_{i_k}^{\perp} \subseteq V \times V^*, \quad Z_{\widetilde{P}} = \bigoplus_{i_{k-1} < j \leqslant i_k} D_i. \tag{2.6}$$

On voit que l'on a des isomorphismes :

$$M_{\widetilde{P}} = \prod_{1 \leqslant j < k} \mathrm{GL}_{i_j - i_{j-1}} \times \mathrm{GL}(Z_{\widetilde{P}} \oplus D_0) \times \prod_{k < j \leqslant l} \mathrm{GL}_{i_j - i_{j-1}} \cong \widetilde{G}_{\widetilde{P}} \times \mathbf{M}_{\widetilde{P}} \tag{2.7}$$

$$M_P = \prod_{1 \leqslant j < k} \mathrm{GL}_{i_j - i_{j-1}} \times \mathrm{GL}(Z_{\widetilde{P}}) \times \prod_{k < j \leqslant l} \mathrm{GL}_{i_j - i_{j-1}} \cong G_{\widetilde{P}} \times \mathbf{M}_{\widetilde{P}} \tag{2.8}$$

où $\widetilde{G}_{\widetilde{P}} = \mathrm{GL}(Z_{\widetilde{P}} \oplus D_0)$, $G_{\widetilde{P}} = \mathrm{GL}(Z_{\widetilde{P}})$ et l'on voit $\mathbf{M}_{\widetilde{P}}$ comme un sous-groupe de M_P, donc aussi de $M_{\widetilde{P}}$, qui agit trivialement sur $Z_{\widetilde{P}}$. Dans ce contexte, on note $A_{\widetilde{P}}^{st,\infty} := A_{\mathbf{M}_{\widetilde{P}}}^{\infty}$ – la partie standard du tore $A_{\widetilde{P}}^{\infty}$ puisque $A_{\widetilde{P}}^{\infty} \cap G(\mathbb{A}) = A_{\widetilde{P}}^{st,\infty}$, d'où la notation. On pose aussi $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st} := \mathfrak{a}_{\mathbf{M}_{\widetilde{P}}}$, donc $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st} \subseteq \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$, ce qui détermine les mesures de Haar sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st}$ et sur $A_{\widetilde{P}}^{st,\infty}$. On a alors :

$$M_P(\mathbb{A}) = A_{\widetilde{P}}^{st,\infty}(\mathbf{M}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})), \quad M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A}) = A_{\widetilde{P}}^{st,\infty}(\mathbf{M}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times \widetilde{G}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})).$$

On fixe donc l'unique mesure de Haar sur $\mathbf{M}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$ de façon que la mesure de Haar sur $M_P(\mathbb{A})$ choisie soit le produit de cette mesure et de celle sur $A_{\widetilde{P}}^{st,\infty}$.

On fixe un $c_0 < 0$ tel que la proposition 2.1 ci-dessus soit vraie pour tous les groupes GL_k définis sur F où $k \leqslant n+1$. On suppose alors que pour tout sous-groupe de Borel relativement standard $\widetilde{B}$ de $\widetilde{G}$, on a $\omega_B \subseteq \omega_{\widetilde{B}}$.

On remarque finalement une conséquence de notre choix des représentants du groupe de Weyl. On suppose donc que pour tout $s \in \Omega^{\widetilde{G}}$, on a $w_s \in \widetilde{G}(\mathrm{F}) \cap \widetilde{K}$. Soient $s \in \Omega^{\widetilde{G}}$, $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ et $\widetilde{P}, \widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$ tels que $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$. Alors pour tout $x \in \widetilde{G}(\mathbb{A})$ et tout $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$, les formules suivantes sont vraies :

$$\hat{\tau}_{s\widetilde{P}}^{s\widetilde{Q}}(H_{s\widetilde{P}}(x) - T) = \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(w_s^{-1}x) - s^{-1}T), \tag{2.9}$$

$$F_{sB}^{sP}(x, T) = F_{\widetilde{B}}^{\widetilde{P}}(w_s^{-1}x, s^{-1}T). \tag{2.10}$$

2.7. Relation entre $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st}$ et $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$

L'application naturelle $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st} \to \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}$, induite par la projection $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}} \to \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}$, est un isomorphisme. On note $j_{\widetilde{P}}$ son jacobien et on note

$$\iota_{\widetilde{P}}^{st} : (\mathfrak{a}_{\widetilde{P},\mathbb{C}}^{\widetilde{G}})^* \to (\mathfrak{a}_{\widetilde{P},\mathbb{C}}^{st})^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st}, \mathbb{C}) = \mathfrak{a}_{H_{\widetilde{P}},\mathbb{C}}^*$$

l'isomorphisme induit. Si $\widetilde{P} = \widetilde{G}$, on pose $j_{\widetilde{P}} = 1$.

Ainsi, pour toute fonction ϕ sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ qui est $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$-invariante et tout $\lambda \in (\mathfrak{a}_{\widetilde{P},\mathbb{C}}^{st})^*$, on a :

$$\int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{st}} e^{\lambda(H)} \phi(H)\, dH = j_{\widetilde{P}}^{-1} \int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} e^{\iota_{\widetilde{P}}^{st}(\lambda)(H)} \phi(H)\, dH. \tag{2.11}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

2.8. Quelques résultats de la théorie de la réduction

On fixe un sous-groupe de Borel semi-standard $\widetilde{B}_0 \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ de $\widetilde{G}$. Pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$ et tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$, on note $H_{\widetilde{P}} \in \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ la projection de sH dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ où $s \in \Omega^{\widetilde{G}}$ est tel que $s\widetilde{B}_0 \subseteq \widetilde{P}$. Cette définition ne dépend pas du choix de s.

La relation (2.10) nous permet de poser la définition suivante. Soient $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$ et $s \in \Omega^{\widetilde{G}}$ tel que $s\widetilde{B}_0 \subseteq \widetilde{P}$; on pose donc :

$$F^{\widetilde{P}}(x,T) := F^{P}_{s\widetilde{B}_0}(x, T_{s\widetilde{B}_0}), \quad x \in \widetilde{G}(\mathbb{A}), \quad T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}. \tag{2.12}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de $s \in \Omega^{\widetilde{G}}$ car $F^{\widetilde{P}}_{\widetilde{B}}$ est $M_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$-invariant pour tout sous-groupe de Borel semi-standard $\widetilde{B}$ contenu dans $\widetilde{P}$. Remarquons aussi que si le paramètre T appartient à la chambre $\mathfrak{a}^+_{\widetilde{B}_0}$, alors $T_{s\widetilde{B}_0}$ est dans la chambre $\mathfrak{a}^+_{s\widetilde{B}_0}$. On note désormais :

$$\mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}} := \mathfrak{a}^+_{\widetilde{B}_0}.$$

Le lemme suivant est l'application du lemme 6.4 de [1] à notre situation.

Lemme 2.2. *Il existe un $T_+ \in \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ tel que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard $\widetilde{Q}$ de $\widetilde{G}$, tout sous-groupe de Borel semi-standard $\widetilde{B}$ contenu dans $\widetilde{Q}$, tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ et tout $x \in \widetilde{G}(\mathbb{A})$, on a :*

$$\sum_{\widetilde{B}\subseteq\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} \sum_{\delta\in\widetilde{P}(\mathrm{F})\backslash\widetilde{Q}(\mathrm{F})} F^{\widetilde{P}}(\delta x, T)\tau^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) = 1.$$

Fixons alors un $T_+ \in \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ comme dans le lemme 2.2 ci-dessus.

On a alors l'analogue relatif du lemme 2.2.

Proposition 2.3. *Soit $\widetilde{Q}$ un sous-groupe parabolique relativement standard de $\widetilde{G}$. Alors, pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ et tout $x \in G(\mathbb{A})$, on a :*

$$\sum_{B\subseteq\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} \sum_{\eta\in P(\mathrm{F})\backslash Q(\mathrm{F})} F^{\widetilde{P}}(\eta x, T)\tau^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\eta x) - T_{\widetilde{P}}) = 1,$$

où la somme porte sur tous les sous-groupes paraboliques relativement standards de $\widetilde{G}$ contenus dans $\widetilde{Q}$ et on note $P = \widetilde{P} \cap G$, etc.

Démonstration. Soient $\widetilde{Q}$ et T comme dans l'énoncé de la proposition. Fixons un sous-groupe de Borel relativement standard $\widetilde{B}$ contenu dans $\widetilde{Q}$. Pour un $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ tel que $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$, on fixe $\Omega^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P},\widetilde{Q}}$ un ensemble de représentants dans $\{s \in \Omega^{\widetilde{G}} | s^{-1}\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$ et $s^{-1}\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)\}$ pour la relation $s_1 \sim s_2$ si est seulement si $s_1 s_2^{-1}\widetilde{P} = \widetilde{P}$. Pour $s \in \Omega^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P},\widetilde{Q}}$, on note $P_s = (s^{-1}\widetilde{P}) \cap G$.

On voit donc que la somme dans le lemme égale

$$\sum_{\widetilde{B}\subseteq\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} \sum_{s\in\Omega^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P},\widetilde{Q}}} \sum_{\eta\in P_s(\mathrm{F})\backslash Q(\mathrm{F})} F^{\widetilde{P}}_{\widetilde{B}}(w_s\eta x, T_{\widetilde{B}})\tau^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(w_s\eta x) - T_{\widetilde{P}}).$$

Sous cette forme, le résultat est démontré dans [7], lemme 2.3. □

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Soit $\widetilde{P}$ un sous-groupe parabolique relativement standard de $\widetilde{G}$. On note

$$\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P}) = \{\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}) \cap \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) | \widetilde{B} \subseteq \widetilde{P}\}. \tag{2.13}$$

Posons $\omega_P = \omega_B \cap M_P(\mathbb{A})$ et $K_P = K \cap M_P(\mathbb{A})$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Soit $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$. Le sous-ensemble suivant de $M_P(\mathbb{A})$*

$$\bigcup_{\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})} \omega_P(A_B^\infty(P, c_0) \cap A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0))K_P$$

se surjecte sur $M_P(\mathrm{F})\backslash M_P(\mathbb{A})$.

Démonstration. En vertu de la proposition 2.1, il suffit de montrer que pour tout $a \in A_B^\infty(P, c_0)$, il existe un $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$ tel que $a \in A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0)$. On se ramène facilement au cas $\widetilde{P} = \widetilde{G}$ et dans ce cas, c'est l'assertion (2.5) de [7]. □

On note aussitôt le corollaire qui suit.

Corollaire 2.5. *Soient $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$. L'ensemble*

$$\bigcup_{\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})} \omega_P(A_B^\infty(P, c_0) \cap A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0, T_{\widetilde{B}}))K_P,$$

où $\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$ est défini par (2.13) ci-dessus, se surjecte sur l'ensemble des $m \in M_P(\mathrm{F})\backslash M_P(\mathbb{A})$ tels que $F^{\widetilde{P}}(m, T) = 1$.

Démonstration. Soient $m \in M_P(\mathrm{F})\backslash M_P(\mathbb{A})$ et $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$ tel que $k_1 a k_2 \in \omega_P(A_B^\infty(P, c_0) \cap A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0))K_P$ est un représentant de m dans $M_P(\mathbb{A})$, comme dans le lemme 2.4 ci-dessus. Il résulte du lemme 2.2 et du lemme combinatoire de Langlands (proposition 1.7.2 de [10]) que si $\widetilde{k}_1 \in \omega_{\widetilde{B}} \cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$, $\widetilde{a} \in A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0)$ et $\widetilde{k} \in \widetilde{K} \cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$ sont tels que $F_{\widetilde{B}}^{\widetilde{P}}(\widetilde{k}_1 \widetilde{a} \widetilde{k}, T) = 1$, alors $\hat{\tau}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{P}}(T - H_{\widetilde{B}}(\widetilde{a})) = 1$. En particulier, puisque $\omega_B \subseteq \omega_{\widetilde{B}}$ pour tout $\widetilde{B} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) \cap \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ et $K \subseteq \widetilde{K}$, si l'on suppose que $F^{\widetilde{P}}(m, T) = F_{\widetilde{B}}^{\widetilde{P}}(k_1 a k_2, T_{\widetilde{B}}) = 1$, on a $\hat{\tau}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{P}}(T - H_{\widetilde{B}}(a)) = 1$ d'où $a \in A_B^\infty(P, c_0) \cap A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0, T_{\widetilde{B}})$ et le corollaire suit. □

2.9. Majorations cruciales

Dans ce paragraphe, on se propose de donner une majoration de l'intégrale du type :

$$\int_{M_P(\mathrm{F})\backslash M_P(\mathbb{A})} e^{\rho(H_P(m))} F^{\widetilde{P}}(m, T) |\Phi(m)| \, dm \tag{2.14}$$

où $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, $\rho \in \mathfrak{a}_P^*$ et Φ est une fonction sur $M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$ invariante à gauche par $M_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) A_{\widetilde{G}}^\infty$. Pour $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$, notons :

$$A_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G},\infty}(\widetilde{P}, c_0, T_{\widetilde{B}}) := A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P}, c_0, T_{\widetilde{B}}) \cap A_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G},\infty}.$$

On a alors le lemme suivant.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Lemme 2.6. *Soit* $\rho \in \mathfrak{a}_P^*$*. Il existe une constante* $c > 0$ *indépendante de* ρ *ainsi que, pour tout* $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$*, un* $\rho_{\widetilde{B},\widetilde{P}} \in (\mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}})^*$ *tels que pour toute fonction* Φ *comme ci-dessus et pour tout* $T \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$*, l'intégrale (2.14) est majorée par* c *fois*

$$\sum_{\widetilde{B}\in\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}},B,\widetilde{P})} \int_{A_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G},\infty}(\widetilde{P},c_0,T_{\widetilde{B}})} e^{\rho_{\widetilde{B},\widetilde{P}}(H_{\widetilde{B}}(a))} \sup_{\substack{k_1\in\omega_{\widetilde{B}}\cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})\\ k_2\in\widetilde{K}\cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})}} |\Phi(k_1ak_2)|\, da.$$

Démonstration. Soient $B_P = B\cap M_P$ et $B_P(\mathbb{A})^1 = N_B^P(\mathbb{A})M_B(\mathbb{A})^1$. Alors $\omega_P \subseteq B_P(\mathbb{A})^1$. Le compact K_P est un sous-groupe compact maximal de $M_P(\mathbb{A})$. La décomposition d'Iwasawa implique que l'on a $M_P(\mathbb{A}) = B_P(\mathbb{A})^1 A_B^\infty K_P$. Il existe alors une unique mesure db' sur $B_P(\mathbb{A})^1$ invariante à gauche telle que $dm = e^{-2\rho_B^P(H_P(a))}\, db'\, da\, dk$.

En utilisant le corollaire 2.5, on voit alors que l'intégrale (2.14) est majorée par :

$$\sum_{\widetilde{B}\in\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}},B,\widetilde{P})} \mathrm{vol}(\omega_P) \int_{A_B^\infty(P,c_0)\cap A_{\widetilde{B}}^\infty(\widetilde{P},c_0,T_{\widetilde{B}})} e^{(\rho-2\rho_B^P)(H_B(a))} \sup_{\substack{k_1\in\omega_P\\ k_2\in K_P}} |\Phi(k_1ak_2)|\, da. \tag{2.15}$$

Soit $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$. On peut appliquer les résultats du paragraphe 2.7 à $\widetilde{P} = \widetilde{B}$ car on a $\mathfrak{a}_B = \mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^{st}$. Si l'on note $\rho_{\widetilde{P},\widetilde{B}} = \iota_{\widetilde{B}}^{st}(\rho - 2\rho_B^P) \in (\mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}})^*$, on obtient, en vertu de l'égalité (2.11), que (2.15) égale

$$\sum_{\widetilde{B}\in\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}},B,\widetilde{P})} j_{\widetilde{B}}^{-1}\mathrm{vol}(\omega_P) \int_{A_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G},\infty}(\widetilde{P},c_0,T_{\widetilde{B}})} e^{\rho_{\widetilde{B},\widetilde{P}}(H_{\widetilde{B}}(a))} \sup_{\substack{k_1\in\omega_P\\ k_2\in K_P}} |\Phi(k_1ak_2)|\, da.$$

On conclut en remarquant que $\omega_P \subseteq \omega_{\widetilde{B}} \cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$ et $K_P \subseteq \widetilde{K} \cap M_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})$. □

3. Formule des traces relative pour $\mathfrak{gl}(n+1)//\mathrm{GL}(n)$

On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}(\widetilde{G})$. Conformément au paragraphe 2.3, pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$, on note $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}} = \mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})$, $\mathfrak{n}_{\widetilde{P}} = \mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})$, etc. Pour la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on choisit la forme trace.

3.1. Les invariants

Soit $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Suivant la décomposition $W = V \oplus D_0$, on écrit :

$$X = \begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

où $B \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(D_0, V)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(V, D_0)$ et $d \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(D_0, D_0)$. On rappelle que l'on a fixé un vecteur non nul $e_0 \in D_0$. On note alors $e_0^* \in W^*$ l'élément défini par $e_0^*(e_0) = 1$ et $e_0^*|_V \equiv 0$ et on identifie donc d avec $e_0^*(d(e_0)) \in \mathbb{G}_a$, u avec $u(e_0) \in V$ et v avec l'élément de $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(V, \mathrm{F})$ défini par $x \mapsto e_0^*(v(x))$.

On dit que $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ est *semi-simple régulier* s'il vérifie les conditions de la proposition suivante, due à [15], théorème 6.1 et proposition 6.3.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3.1. *Soit* $X = \begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\det(a_{ij}) \neq 0$ *où* $a_{ij} = vB^{i+j}u$, $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$.

(2) *Le stabilisateur de* X *dans* G *est trivial et l'orbite de* X *dans* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *pour l'action de* G *est fermée pour la topologie de Zariski.*

On introduit alors les invariants suivants pour l'action de G sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Soit $X = \begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ comme ci-dessus. On pose $A_0(X) = d$ et $A_i(X) = vB^{i-1}u$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ ainsi que $B_j(X) = \operatorname{Tr} \bigwedge^j B$ pour $j = 1, \ldots, n$. Alors, le lemme 3.1 de [18] dit que les fonctions A_i, B_j engendrent l'anneau des polynômes sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ invariants sous l'action de G. Ils définissent alors une relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$, moins fine que la relation de conjugaison par $G(\mathrm{F})$, où $X, Y \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$ sont dans la même classe si et seulement si $A_i(X) = A_i(Y)$ et $B_j(X) = B_j(Y)$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$. Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. Cette relation pour des éléments semi-simples réguliers coïncide avec la relation de conjugaison sous $G(\mathrm{F})$ comme il est démontré dans [15], proposition 6.2.

Lemme 3.2. *Soient* X *et* Y *deux éléments semi-simples réguliers de* $\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$. *Ils appartiennent à la même classe dans* $\mathcal{O}$ *si et seulement s'ils sont conjugués par* $G(\mathrm{F})$.

Dans le paragraphe 2.6, on a introduit pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$ des sous-espaces $\mathcal{V}_{\widetilde{P}}$ et $\mathcal{Z}_{\widetilde{P}}$ de $V \times V^*$. Voici leur rapport avec la décomposition (3.1).

Lemme 3.3. *Soient* $X = \begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ *et* $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$. *Alors*

(i) $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}$ *si et seulement si* $B \in \mathfrak{m}_P$ *et* $(u, v) \in \mathcal{Z}_{\widetilde{P}}$;

(ii) $X \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}$ *si et seulement si* $B \in \mathfrak{n}_P$ *et* $(u, v) \in \mathcal{V}_{\widetilde{P}}$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul matriciel direct. □

On étudiera maintenant les intersections des classes $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ avec les algèbres de Lie de sous-groupes paraboliques relativement standards.

Proposition 3.4. *Soit* $\widetilde{P}$ *un sous-groupe parabolique relativement standard de* $\widetilde{G}$. *Alors, pour tous* $X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$, $N \in \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ *et* $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, *on a :*

$$X \in \mathfrak{o} \iff X + N \in \mathfrak{o}.$$

Démonstration. La preuve s'appuie sur le lemme 3.3 ci-dessus et est essentiellement identique à celle de la proposition 2.5 de [19]. □

Corollaire 3.5. *Soient* $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ *et* $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. *Alors pour tout* $A \subseteq \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ *et tout* $B \subseteq \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$, *on a :*

$$\mathfrak{o} \cap (A \oplus B) = (\mathfrak{o} \cap A) \oplus B.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

3.2. Convergence du noyau modifié

On définit $\det \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^{*}$ comme le déterminant du tore $A_{\widetilde{0}}$ pour son action sur W. Notons que pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ et tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on a alors $|\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} = e^{\sigma \det(H_G(x))}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$. Pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et toute classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, posons

$$k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = k_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi + U_{\widetilde{P}})x)\, dU_{\widetilde{P}}, \quad x \in M_P(\mathrm{F})N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}). \tag{3.2}$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$, on pose alors

$$\begin{aligned} k_{\mathfrak{o}}^{T}(x) &= k_{f,\mathfrak{o}}^{T}(x) \\ &= \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}$ est défini par (2.1). N.B. : la somme sur δ dans $P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})$ est finie en vertu du lemme 5.1 de [1].

Théorème 3.6. *On a pour tout $T \in T_{+} + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^{+}$ et tout $\sigma \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} |k_{\mathfrak{o}}^{T}(x)||\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma}\, dx < \infty.$$

Démonstration. En utilisant la proposition (2.3), il découle que $k_{\mathfrak{o}}^{T}(x)$ égale la somme sur $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ de $(-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}}$ fois la somme sur δ dans $P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})$ de

$$\left(\sum_{\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) \ni \widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}} \sum_{\eta \in P_1(\mathrm{F})\backslash P(\mathrm{F})} F^{\widetilde{P}_1}(\eta\delta x, T_{\widetilde{P}_1}) \tau_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}_1}(\eta\delta x) - T_{\widetilde{P}_1}) \right) \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x).$$

Suivant l'article [1], paragraphes 6 et 7, on a :

$$\tau_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}}(H)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H) = \sum_{\widetilde{P}_2 \supseteq \widetilde{P}} \sigma_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}(H) \quad H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{1}}$$

où

$$\sigma_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{P}_2}(H) = \sigma_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}(H) = \sum_{\widetilde{Q} \supseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{2}}^{\widetilde{Q}}} \tau_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{Q}}(H)\hat{\tau}_{\widetilde{Q}}(H), \quad H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{1}}.$$

Si l'on pose

$$\chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^{T}(x) = F^{\widetilde{1}}(x, T)\sigma_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}(H_{\widetilde{1}}(x) - T_{\widetilde{1}}), \quad x \in \widetilde{P}_1(\mathrm{F})\backslash \widetilde{G}(\mathbb{A}), \tag{3.4}$$

$$k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\mathfrak{o}}(x) = k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x), \quad x \in P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A}), \tag{3.5}$$

on s'aperçoit alors que

$$k_{\mathfrak{o}}^{T}(x) = \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}_2} \sum_{\delta \in P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^{T}(\delta x) k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(\delta x) \tag{3.6}$$

où la somme porte sur tous les couples $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2 \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ tels que $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}_2$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

On fixe alors de tels $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}_2$ et l'on s'aperçoit qu'il suffit de démontrer :

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \chi^T_{\widetilde{1},\widetilde{2}}(x)|k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x)|e^{\sigma \det(H_G(x))}\, dx < \infty. \tag{3.7}$$

Si $\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}_2 \neq \widetilde{G}$, c'est une conséquence du lemme 5.1 de [1] que $\sigma^{\widetilde{2}}_{\widetilde{1}} \equiv 0$ donc l'intégrale (3.7) converge. Si $\widetilde{P}_1 = \widetilde{P}_2 = \widetilde{G}$, les résultats de la section 2.9, le lemme 2.6 en l'occurrence, montrent que l'intégrale (3.7) est majorée par une somme sur $\widetilde{B} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) \cap \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ d'une intégrale d'une fonction continue sur l'ensemble $A^{\widetilde{G},\infty}_{\widetilde{B}}(\widetilde{G}, c_0, T_{\widetilde{B}})$ qui est compact, donc il y a aussi convergence dans ce cas. Si $\widetilde{P}_1 \subsetneq \widetilde{P}_2$, on démontrera un peu plus.

Théorème 3.7. *Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ deux sous-groupes paraboliques relativement standards de $\widetilde{G}$ tels que $\widetilde{P}_1 \subsetneq \widetilde{P}_2$. Alors pour tout réel $\varepsilon_0 > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C qui ne dépend que de N, f, σ et ε_0 telle que :*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \chi^T_{\widetilde{1},\widetilde{2}}(x)|k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x)||\det x|^{\sigma}_{\mathbb{A}}\, dx < Ce^{-N\|T\|}$$

pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$ tel que $\forall \alpha \in \Delta_{\widetilde{B}_0}$ $\alpha(T) > \varepsilon_0\|T\|$.

On fixe alors deux sous-groupes relativement standards $\widetilde{P}_1 \subsetneq \widetilde{P}_2$. On introduit d'abord quelques notations. Pour tous sous-groupes paraboliques relativement standards $\widetilde{Q} \subseteq \widetilde{S}$, posons :

$$(\bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{Q}})' = \bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{Q}} \Big\backslash \bigcup_{\widetilde{Q}\subseteq\widetilde{R}\subsetneq\widetilde{S}} \bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{R}}_{\widetilde{Q}}, \quad \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{Q}} = (\bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{Q}})' \oplus \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}} \oplus \mathfrak{n}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{Q}}.$$

On a alors les décompositions suivantes :

$$\bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{S}}_{\widetilde{Q}} = \coprod_{Q\subseteq R\subseteq S} (\bar{\mathfrak{n}}^{\widetilde{R}}_{\widetilde{Q}})' \tag{3.8}$$

et $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}} = \coprod_{\widetilde{P}_1\subseteq\widetilde{S}\subseteq\widetilde{P}} (\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}} \oplus \mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}})$ pour tout $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2$.

Finalement, en utilisant le corollaire 3.5, on obtient, pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et tout $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2$

$$\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) = \coprod_{\widetilde{P}_1\subseteq\widetilde{S}\subseteq\widetilde{P}} (\mathfrak{o} \cap (\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}} \oplus \mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}})(\mathrm{F})) = \coprod_{\widetilde{P}_1\subseteq\widetilde{S}\subseteq\widetilde{P}} ((\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})) \oplus \mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}}(\mathrm{F})).$$

Grâce à cela, on peut réécrire $k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ comme :

$$\sum_{\widetilde{P}_1\subseteq\widetilde{S}\subseteq\widetilde{P}} \sum_{\eta\in\mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta\in\mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\eta + \zeta + U_{\widetilde{P}})x)\, dU_{\widetilde{P}}.$$

Fixons un caractère additif non trivial ψ sur $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. En appliquant la formule sommatoire de Poisson pour la somme portant sur $\eta \in \mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}}(\mathrm{F})$ de la fonction :

$$\mathfrak{n}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A}) \ni Y \longmapsto \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(Y + \zeta + U_{\widetilde{P}})x)\, dU_{\widetilde{P}},$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

pour tout $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$, on obtient

$$k_{P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{P}} \sum_{\eta \in \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta),$$

où :

$$\Phi_{\widetilde{S}}(x, X, Y) = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}(X + U_{\widetilde{S}})x)\psi(\langle Y, U_{\widetilde{S}}\rangle)\, dU_{\widetilde{S}}, \quad x \in G(\mathbb{A}), X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A}), Y \in \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A}).$$

En utilisant l'égalité (3.8), on peut écrire $k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ aussi comme :

$$\sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta).$$

Grâce à cette formule, on a pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x) &= \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) \\ &= \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta) \\ &= \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P}_2} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'(\mathrm{F})} \Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta) \sum_{\widetilde{R} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

On invoque maintenant l'identité due à Arthur [1], proposition 1.1 :

$$\sum_{\{\widetilde{P} | \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2\}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{P}_2}} = \begin{cases} 0 \text{ si } \widetilde{R} \neq \widetilde{P}_2, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.10}$$

On en déduit que la somme (3.9) décrivant $k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x)$ se réduit à :

$$(-1)^{d_{\widetilde{P}_2}^{\widetilde{G}}} \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{P}_2} \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta).$$

Ainsi, pour démontrer le théorème 3.7 il suffit de majorer :

$$\int_{P_1(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} \chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^{T}(x) \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_{\widetilde{S}}(x, \zeta, \eta)| e^{\sigma \det(H_G(x))}\, dx \tag{3.11}$$

où $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{P}_2$ sont fixés. Remarquons que la double somme sur $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ s'est réduite à la somme sur tout $\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})$.

En utilisant la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{A}) = P_1(\mathbb{A})K$, ainsi que la décomposition $P_1 = N_1 M_1$, il découle que (3.11) égale

$$\begin{aligned} &\int_K \int_{[M_1]} \int_{[N_1]} F^{\widetilde{1}}(m_1, T)\sigma_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}(H_{\widetilde{1}}(m_1) - T_{\widetilde{1}}) e^{(\sigma \det - 2\rho_1)(H_1(m_1))} \\ &\times \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_{\widetilde{S}}(n_1 m_1 k, \zeta, \eta)|\, dn_1\, dm_1\, dk. \end{aligned}$$

Pour $\widetilde{B} \in \mathcal{P}(M_{\widetilde{0}}, B, \widetilde{P})$ (voir définition (2.13)), soit $\lambda_{\widetilde{B},\widetilde{1},\sigma}$ l'élément de $(\mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}})^*$ associé à $\rho = \sigma \det - 2\rho_1 \in \mathfrak{a}_1^*$ par le lemme 2.6. En vertu de ce lemme, il suffit de borner, pour un tel $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{P}_1$ fixé, l'expression suivante :

$$\int_{A_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G},\infty}(P_{\widetilde{1}},c_0,T_{\widetilde{B}})} \int_{[N_1]} \sigma_{\widetilde{1}}^{\widetilde{2}}(H_{\widetilde{1}}(a) - T_{\widetilde{1}}) e^{\lambda_{\widetilde{B},\widetilde{1},\sigma}(H_{\widetilde{B}}(a))}$$
$$\times \sup_{k_1 \in \omega_{\widetilde{1}}, k \in \widetilde{K}} \sum_{\eta \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \sum_{\zeta \in \mathfrak{m}'_{\widetilde{S},\widetilde{1}}(\mathrm{F})} |\Phi_{\widetilde{S}}(n_1 k_1 a k, \zeta, \eta)| \, dn_1 \, da$$

où $\omega_{\widetilde{1}} = \omega_{\widetilde{B}} \cap M_{\widetilde{1}}(\mathbb{A})$.

L'intégrale ci-dessus est essentiellement identique à celle qui apparaît dans la preuve de la proposition 4.4 dans [3], qui affirme justement qu'une telle expression vérifie les conditions du théorème 3.7. Plus précisément, on voit qu'elle apparaît quand on passe de l'expression (4.8) à (4.9) dans *loc. cit*. On remarque que dans la preuve dans *loc. cit.*, on a $\lambda_{\widetilde{B},\widetilde{1},\sigma} = 2\rho_{\widetilde{B}} - 2\rho_{P_{\widetilde{1}}}$, mais en réalité, la preuve marche sans changement pour n'importe quel $\lambda \in (\mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^{\widetilde{G}})^*$, ce qui démontre les théorèmes 3.7 et 3.6. □

4. Propriétés qualitatives

On fixe une fois pour toutes $\eta : \mathrm{F}\backslash\mathbb{A}^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère continu, qui est trivial sur le groupe $\mathbb{R}^*_{>0}$ vu comme un sous-groupe de $\mathbb{A}^*$ *via* l'inclusion $\mathbb{R}^*_{>0} \hookrightarrow (\mathrm{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^* \hookrightarrow \mathbb{A}^*$. Notons alors pour $s \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{A}^*$:

$$\eta_s(x) = |x|_{\mathbb{A}}^s \eta(x).$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $T \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$, on note

$$k^T(x) = k_f^T(x) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x), \quad x \in G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A}).$$

Grâce au théorème 3.6, les distributions suivantes :

$$I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f) = \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) \eta_s(\det x) \, dx, \quad \mathfrak{o} \in \mathcal{O}, T \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+,$$
$$I^T(\eta_s, f) = \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} k_f^T(x) \eta_s(\det x) \, dx$$

sont bien définies pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Dans le paragraphe 4.3, on démontrera que pour $s \in \mathbb{C}$, la fonction $T \mapsto I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f)$ est un polynôme-exponentielle et si $s \neq -1, 1$, son terme purement polynomial, noté $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$, ne dépend pas de T. Pour bien énoncer ce résultat, on étudie d'abord les fonctions de type polynôme-exponentielle dans le paragraphe 4.1. et, dans le paragraphe 4.2, on introduit les distributions $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$ pour tout sous-groupe parabolique relativement standard $\widetilde{Q}$ de $\widetilde{G}$. La suite de cette section est consacrée aux propriétés des distributions $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, \cdot)$ pour $s \neq -1, 1$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

4.1. Polynômes-exponentielles

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Par un polynôme-exponentielle sur $\mathcal{V}$, on entend une fonction sur $\mathcal{V}$ de la forme

$$f(v)=\sum_{\lambda\in\mathcal{V}^*}e^{\lambda(v)}P_\lambda(v),\quad v\in\mathcal{V}$$

où P_λ est un polynôme sur $\mathcal{V}$ à coefficients complexes, égal à 0 pour presque tout $\lambda\in\mathcal{V}^*$. On appelle exposants de f les $\lambda\in\mathcal{V}^*$ tels que $P_\lambda\neq 0$ et le polynôme correspondant à $\lambda=0$ le terme purement polynomial de f. On a alors le résultat d'unicité suivant : si f est comme ci-dessus et $g=\sum_{\lambda\in\mathcal{V}^*}e^\lambda Q_\lambda$ est un polynôme-exponentielle sur $\mathcal{V}$ tel que $g(v)=f(v)$ pour tout $v\in\mathcal{V}$, alors pour tout $\lambda\in\mathcal{V}^*$, on a $P_\lambda=Q_\lambda$.

Pour $i=0,1,\dots,n$, soit $e_i^*\in\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^*$ le caractère par lequel $A_{\widetilde{0}}$ agit sur D_i. Posons aussi $e_j^\vee\in\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}$, les éléments tels que $e_i^*(e_j^\vee)=\delta_{ij}$ où $i,j=0,1,\dots,n$. On pose pour $i=1,\dots,n$

$$\widetilde{\varpi}_i^-=\frac{n+1-i}{n+1}\left(\sum_{j=1}^{i}e_j^*\right)-\frac{i}{n+1}\left(e_0^*+\sum_{j=i+1}^{n}e_i^*\right),$$

$$\widetilde{\varpi}_i^+=\frac{n+1-i}{n+1}\left(e_0^*+\sum_{j=1}^{i-1}e_j^*\right)-\frac{i}{n+1}\left(\sum_{j=i}^{n}e_i^*\right).$$

On définit $\widetilde{\varpi}_i^{-,\vee}$, $\widetilde{\varpi}_i^{+,\vee}$ en remplaçant * par $^\vee$. Alors $\widetilde{\varpi}_i^-,\widetilde{\varpi}_i^+\in(\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^{\widetilde{G}})^*$. On pose aussi $\widetilde{\varpi}_l^-=\widetilde{\varpi}_l^+=0$ pour $l\notin\{1,\dots,n\}$.

Fixons un sous-groupe parabolique relativement standard $\widetilde{Q}$ de $\widetilde{G}$ stabilisant le drapeau

$$0=V_{i_0}\subsetneq\cdots\subsetneq V_{i_{k-1}}\subsetneq V_{i_k}\oplus D_0\subsetneq\cdots\subsetneq V_{i_l}\oplus D_0=W.$$

Alors

$$\widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}=\{\widetilde{\varpi}_{i_a}^-,\ \widetilde{\varpi}_{i_b+1}^+\mid 1\leqslant a\leqslant k-1,\ k\leqslant b\leqslant l-1\},$$

$$\widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}^\vee=\{\widetilde{\varpi}_{i_a}^{-,\vee},\ \widetilde{\varpi}_{i_b+1}^{+,\vee}\mid 1\leqslant a\leqslant k-1,\ k\leqslant b\leqslant l-1\}.$$

Posons $\widetilde{\varpi}_{\widetilde{Q}}^-:=\widetilde{\varpi}_m^-$ où $m=\max(\{j\mid\widetilde{\varpi}_j^-\in\widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}\}\cup\{0\})$. De même, on pose $\widetilde{\varpi}_{\widetilde{Q}}^+:=\widetilde{\varpi}_m^+$ où $m=\min(\{j\mid\widetilde{\varpi}_j^+\in\widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}\}\cup\{0\})$. Pour $s\in\mathbb{C}$, posons :

$$s_{\widetilde{Q}}:=\frac{s(n+1)+i_{k-1}+i_k-n}{i_k-i_{k-1}+1}\tag{4.1}$$

et

$$\rho_{\widetilde{Q},s}:=(1+s_{\widetilde{Q}})\widetilde{\varpi}_{\widetilde{Q}}^-+(1-s_{\widetilde{Q}})\widetilde{\varpi}_{\widetilde{Q}}^+\in(\mathfrak{a}_{\widetilde{Q},\mathbb{C}}^{\widetilde{G}})^*.\tag{4.2}$$

Avec la notation du paragraphe 2.7, on a le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soient $s\in\mathbb{C}$ et $\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)$. Alors*

1. $$\rho_{\widetilde{Q},s}=\iota_{\widetilde{Q}}^{st}(s\det-2\rho_Q)+2\rho_{\widetilde{Q}}$$

   où l'on voit $s\det-2\rho_Q$ comme l'élément de $(\mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^{st})^*$ par restriction ;

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

2. *pour tout* $m \in \mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})$, *on a*
$$e^{-\rho_{\widetilde{Q},s}(H_{\widetilde{Q}}(m))}|\det m|_{\mathbb{A}}^s = |\det m|_{\mathbb{A}}^{s_{\widetilde{Q}}};$$
3. *pour tout* $\widetilde{R} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ *tel que* $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$, *la restriction de* $\rho_{\widetilde{Q},s}$ *à* $\widetilde{R}$ *égale* $\rho_{\widetilde{R},s}$.

Démonstration. Calcul direct. □

Lemme 4.2. *Soit* $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$.

(i) *Pour tout* $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$ *et tout* $\widetilde{\varpi}^\vee \in \widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}^\vee$, *on a* $\rho_{\widetilde{Q},s}(\widetilde{\varpi}^\vee) \neq 0$.

(ii) *Pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$ *et tout* $\widetilde{\varpi}^\vee \in \widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}^\vee$, *on a* $\mathrm{Re}(\rho_{\widetilde{Q},s}(\widetilde{\varpi}^\vee)) > 0$.

Démonstration. On a, pour $1 \leqslant a \leqslant k-1$, $\rho_{\widetilde{Q},s}(\widetilde{\varpi}_{i_a}^{-,\vee}) = i_a(1+s)$ et, pour $k \leqslant b \leqslant l-1$, $\rho_{\widetilde{Q},s}(\widetilde{\varpi}_{i_b+1}^{+,\vee}) = (n-i_b)(1-s)$, d'où les résultats voulus. □

On note le corollaire immédiat du lemme 4.2.

Corollaire 4.3. *Soit* $\widetilde{Q}$ *un sous-groupe parabolique relativement standard de* $\widetilde{G}$. *Alors, pour tout sous-groupe parabolique* $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$ *différent de* $\widetilde{G}$ *et tout* $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$, *la restriction de* $\rho_{\widetilde{Q},s}$ *à* $\mathfrak{a}_{\widetilde{R}}^{\widetilde{G}}$ *est non nulle.*

Soit $v_{\widetilde{Q}}$ le volume dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ du parallélotope engendré par $(\widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}})^\vee$. Suivant le paragraphe 2 de [2], posons
$$\hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\mu) = v_{\widetilde{Q}}^{-1} \prod_{\widetilde{\varpi} \in \widehat{\Delta}_{\widetilde{Q}}} \mu(\widetilde{\varpi}^\vee), \quad \mu \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q},\mathbb{C}}^*. \tag{4.3}$$

Supposons $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$; pour $X \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}$, on note $X_{\widetilde{R}}$ sa projection dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{R}}$ selon la décomposition (2.2). Suivant *loc. cit.*, posons
$$\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, X) = \sum_{\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}} \hat{\tau}_{\widetilde{R}}(H_{\widetilde{R}} - X_{\widetilde{R}}) \tau_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}(H), \quad H, X \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}. \tag{4.4}$$

Lemme 4.4. *Soit* $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$. *Alors, pour tout* $s \in \mathbb{C}$
$$p_{\widetilde{Q},s}(X) := \int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{st}} e^{(s\det + 2\rho_{\widetilde{Q}} - 2\rho_Q)(H)} \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, X)\, dH, \quad X \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}$$
est un polynôme-exponentielle sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}/\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$. *De plus, si* $s \neq -1, 1$, *pour tout* $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$, *il existe un polynôme* $P_{\widetilde{Q},\widetilde{R},s}$ *de degré au plus* $d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ *sur* $\mathfrak{a}_{\widetilde{R}}/\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$ *tel que*
$$p_{\widetilde{Q},s}(X) := j_{\widetilde{Q}}^{-1} \sum_{\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}} e^{\rho_{\widetilde{R},s}(X_{\widetilde{R}})} p_{\widetilde{Q},\widetilde{R},s}(X_{\widetilde{R}})$$
où $p_{\widetilde{Q},\widetilde{G},s}(X_{\widetilde{G}}) = (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1}$. *En particulier, si* $s \neq -1, 1$, *la fonction* $p_{\widetilde{Q},s}$ *est un polynôme-exponentielle dont le terme purement polynomial est constant et égale à* $(-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} j_{\widetilde{Q}}^{-1} \hat{\theta}_Q(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Remarque 4.5. On ne prétend pas que les polynômes $p_{\widetilde{Q},\widetilde{R},s}$ sont uniquement déterminés pour tout $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$. En effet, il arrive que $\rho_{\widetilde{R},s} = \rho_{\widetilde{R}',s}$ pour $\widetilde{R} \neq \widetilde{R}'$. Cependant, $\widetilde{G}$ est le seul sous-groupe parabolique $\widetilde{R} \supseteq \widetilde{Q}$ tel que $\rho_{\widetilde{R},s} = 0$ si $s \neq -1, 1$, d'où l'unicité du terme $p_{\widetilde{Q},\widetilde{G},s}$.

Démonstration. En utilisant le lemme 4.1 et l'équation (2.11), on a

$$p_{\widetilde{Q},s}(X) = j_{\widetilde{Q}}^{-1} \int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(H)} \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, X)\, dH.$$

Il résulte du lemme 2.1 de [2] que pour un X fixé, la fonction $\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}} \ni H \mapsto \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, X)$ est à support compact. L'intégrale ci-dessus est donc bien définie et le lemme 2.2 dans *loc. cit.* montre que c'est un polynôme-exponentielle, ce qui démontre la première partie du lemme.

Quand $s \neq -1, 1$, on applique le lemme 4.2(i) et son corollaire 4.3 et on voit que l'on est dans la même situation que dans le lemme 4.3 de [19]. En utilisant ce lemme, on conclut. □

4.2. Une généralisation du théorème 3.6

Soient W' un F-espace vectoriel de dimension $m+1$, $V' \subseteq W'$ un sous-espace de dimension m et $D'_0 \subseteq (W' \smallsetminus V') \cup \{0\}$ une droite, où $m \in \mathbb{N}$. Soient $\mathbf{M} \cong \prod_{i=1}^{k} \mathrm{GL}_{n_i}$, $G' = \mathrm{GL}(V')$ et $\widetilde{G}' = \mathrm{GL}(W')$ où $k \in \mathbb{N}$, et $n_i \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, \ldots, k$. On identifie G' avec le sous-groupe de $\widetilde{G}'$ qui agit trivialement sur D'_0. On va généraliser le théorème 3.6 au cas de l'inclusion $\mathbf{M} \times G' \hookrightarrow \mathbf{M} \times \widetilde{G}'$.

Notons $\mathfrak{m} = \mathrm{Lie}(\mathbf{M})$, $\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}(G')$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}' = \mathrm{Lie}(\widetilde{G}')$. Pour $X \in (\mathfrak{m} \times \widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathrm{F})$, soient $X_1 \in \mathfrak{m}(\mathrm{F})$ et $X_2 \in \widetilde{\mathfrak{g}}'(\mathrm{F})$ tels que $X = X_1 + X_2$. Soit $\mathcal{O}^{\mathbf{M} \times \widetilde{G}'}$ la relation d'équivalence sur $(\mathfrak{m} \times \widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathrm{F})$ définie de la façon suivante. On a $X = X_1 + X_2 \sim Y = Y_1 + Y_2$ si et seulement si les polynômes caractéristiques de X_1 et Y_1 coïncident et si X_2 et Y_2 sont dans la même classe pour la relation d'équivalence dans $\widetilde{\mathfrak{g}}'(\mathrm{F})$ décrite dans le paragraphe 3.1 par rapport à l'inclusion $G' \hookrightarrow \widetilde{G}'$.

Soit B un F-sous-groupe de Borel de $\mathbf{M} \times G'$ et fixons aussi M_0, une partie de Levi de B. Soit $M_{\widetilde{0}}$ l'unique sous-groupe de Levi minimal de $\mathbf{M} \times \widetilde{G}'$ tel que $M_{\widetilde{0}} \supseteq M_0$. On peut alors parler de sous-groupes paraboliques standards de $\mathbf{M} \times G'$ et semi-standards de $\mathbf{M} \times \widetilde{G}'$. Notons $\mathcal{F}_{\mathbf{M} \times G'}(M_{\widetilde{0}}, B)$ le sous-ensemble de sous-groupes paraboliques semi-standards $\widetilde{P}$ de $\mathbf{M} \times \widetilde{G}'$ tels que $\widetilde{P} \supseteq B$.

Fixons un sous-groupe de Borel $\widetilde{B}_0 \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$ de $\widetilde{G}'$. Soit $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}})$. Pour tout $H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{B}_0}$, on note $H_{\widetilde{P}}$ la projection de sH dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$ où s est un élément du groupe de Weyl de $\mathbf{M} \times \widetilde{G}'$ tel que $s\widetilde{B}_0 \subseteq \widetilde{P}$.

Pour une fonction $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{m} \times \widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathbb{A}))$, un $\widetilde{P} \in \mathcal{F}_{\mathbf{M} \times G'}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{\mathbf{M} \times \widetilde{G}'}$, on pose

$$k_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathrm{Lie}(N_{\widetilde{P}})(\mathbb{A})} f(x^{-1}(\xi + U_{\widetilde{P}})x)\, dU_{\widetilde{P}}, \quad x \in (\mathbf{M} \times \widetilde{G}')(\mathbb{A}).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Pour un $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{B}_0}^+$, on pose donc

$$k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{F}_{\mathbf{M}\times G'}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) k_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x)$$

où $P = \widetilde{P} \cap (\mathbf{M} \times G')$.

Théorème 4.6. *Soit $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{m} \times \widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathbb{A}))$, alors pour tout $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{B}_0}^+$ suffisamment régulier et tout $\sigma \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}} \int_{(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})\backslash\mathbf{M}(\mathbb{A})^1 \times G'(\mathbb{A})} |k_{f,\mathfrak{o}}^T(x)| |\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \, dx < \infty.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.6. Les détails sont laissés au lecteur. Notons que si $f = f_1 \otimes f_2$ où $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}(\mathbb{A}))$ et $f_2 \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}'(\mathbb{A}))$, c'est une conséquence immédiate des théorèmes 3.6 ci-dessus et 3.1 de [3]. $\square$

Notons alors pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}$ et $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{m} \times \widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathbb{A}))$

$$I_{\mathfrak{o}}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}',T}(\eta_s, f) = \int_{(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})\backslash\mathbf{M}(\mathbb{A})^1 \times G'(\mathbb{A})} k_{f,\mathfrak{o}}^T(x) \eta_s(\det x) \, dx.$$

Revenons au contexte de l'inclusion $G \hookrightarrow \widetilde{G}$. Soit $\widetilde{Q}$ un sous-groupe parabolique relativement standard de $\widetilde{G}$. Comme il est expliqué dans le paragraphe 2.6, on a les décompositions $M_{\widetilde{Q}} \cong \mathbf{M}_{\widetilde{Q}} \times \widetilde{G}_{\widetilde{Q}}$ et $M_Q \cong \mathbf{M}_{\widetilde{Q}} \times G_{\widetilde{Q}}$ où $\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}$, $G_{\widetilde{Q}}$ et $\widetilde{G}_{\widetilde{Q}}$ vérifient les conditions de ce paragraphe.

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, il existe $\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},1}, \dots, \mathfrak{o}_{\widetilde{Q},m} \in \mathcal{O}^{\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}\times\widetilde{G}_{\widetilde{Q}}}$, où $0 \leqslant m < \infty$, tels que

$$\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o} = \coprod_{i=1}^{m} \mathfrak{o}_{\widetilde{Q},i} \cap \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F}). \tag{4.5}$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$ et $s \in \mathbb{C}$, on définit alors les distributions $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$ et $I^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ par:

$$I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f) = \sum_{i=1}^{m} I_{\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},i}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_{s_{\widetilde{Q}}}, f), \quad I^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f) \tag{4.6}$$

où $s_{\widetilde{Q}}$ est défini par (4.1) et pour $\mathfrak{o}_{\widetilde{Q}} \in \mathcal{O}^{M_{\widetilde{Q}}}$, $I_{\mathfrak{o}_{\widetilde{Q}}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$ est la distribution associée à l'inclusion $M_Q \hookrightarrow M_{\widetilde{Q}}$ décrite ci-dessus par rapport au sous-groupe de Levi minimal M_0 de M_Q et aux sous-groupes de Borel $B \cap M_Q$ de M_Q et $\widetilde{B}_0 \cap M_{\widetilde{Q}}$ de $M_{\widetilde{Q}}$.

Pour $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, on pose

$$f_{\widetilde{Q}}(X) = \int_K \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f(k^{-1}(X + U_{\widetilde{Q}})k) \eta(\det k) \, dU_{\widetilde{Q}} \, dk, \quad X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})\,; \tag{4.7}$$

alors $f_{\widetilde{Q}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$. Notons que l'application

$$\widetilde{Q} \supseteq \widetilde{P} \mapsto M_{\widetilde{Q}} \cap \widetilde{P}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

définit une bijection entre les sous-groupes paraboliques relativement standards de $\widetilde{G}$ contenus dans $\widetilde{Q}$ et les sous-groupes paraboliques semi-standards de $M_{\widetilde{Q}}$ contenant $B \cap M_Q$. En utilisant le lemme 4.1, on s'aperçoit alors que pour tout sous-groupe de Borel relativement standard $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{Q}$ et tous $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$ et $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}) &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash \mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \sum_{i=1}^{m} k^{T_{\widetilde{B}}}_{f_{\widetilde{Q}},\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},i}}(m)\eta_{s_{\widetilde{Q}}}(\det m)\, dm \\ &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash \mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} e^{-\rho_{\widetilde{Q},s}(H_{\widetilde{Q}}(m))} \sum_{\widetilde{P}\subseteq \widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}} \\ &\quad \times \sum_{\eta \in (P\cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\eta m) - T_{\widetilde{P}}) \\ &\quad \times \left(\sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap \mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f_{\widetilde{Q}}(\mathrm{Ad}((\eta m)^{-1})(\xi + U_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}))\, dU_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}} \right) \eta_s(\det m)\, dm. \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.3. Le comportement en T

On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$, $s \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $T \in T' + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$. Alors*

$$I_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta_s, f) = \sum_{\widetilde{Q}\in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} p_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}} - T'_{\widetilde{Q}}) e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T'_{\widetilde{Q}})} I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T'}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}})$$

où pour un sous-groupe parabolique $\widetilde{Q}$ relativement standard, la fonction $p_{\widetilde{Q},s}$ est définie dans le lemme 4.4, $\rho_{\widetilde{Q},s} \in (\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}})^*$ est défini par (4.2), la distribution $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T'}$ est définie dans le paragraphe 4.2 et $f_{\widetilde{Q}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.7) dans le même paragraphe.

Démonstration. Il est démontré dans le paragraphe 2 de [2] que les fonctions $\Gamma'_{\widetilde{Q}}$, définies par (4.4), vérifient la relation suivante. Pour tout sous-groupe parabolique relativement standard $\widetilde{P}$ de $\widetilde{G}$, on a :

$$\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H - X) = \sum_{\widetilde{Q}\supseteq \widetilde{P}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H)\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, X), \quad H, X \in \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}. \tag{4.9}$$

Fixons un $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$ et soit $T \in T' + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$. En utilisant l'égalité ci-dessus dans la définition du noyau $k_{\mathfrak{o}}^T$ (3.3) avec $H = H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T'_{\widetilde{P}}$ et $X = T_{\widetilde{P}} - T'_{\widetilde{P}}$ pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et tout $\delta \in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})$, on a

$$I_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta_s, f) = \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\widetilde{P}\in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \sum_{\widetilde{Q}\supseteq \widetilde{P}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \Psi_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}^{T,T'}(\delta x)\eta_s(\det x)\, dx$$

$$= \sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} \int_{Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)\ni\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}} \sum_{\delta\in(P\cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \times \Psi^{T,T'}_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}(\delta x)\eta_s(\det x)\,dx \tag{4.10}$$

où :

$$\Psi^{T,T'}_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}(x) = k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(x)-T'_{\widetilde{P}})\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(x)-T'_{\widetilde{Q}}, T_{\widetilde{Q}}-T'_{\widetilde{Q}}).$$

Le fait que l'on peut sortir la somme $\sum_{\widetilde{Q}}$ avant l'intégrale va se déduire du fait que l'on va montrer que les intégrales correspondantes sont absolument convergentes.

Fixons $\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)$. On remplace l'intégrale sur $Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})$ par l'intégrale sur

$$N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})\times A^{st,\infty}_{\widetilde{Q}}\times(M_Q(\mathrm{F})\backslash\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1\times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))\times K$$

ce qui donne $dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(am))}\,dn\,da\,dm\,dk$.

Soient $m\in(\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1\times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$, $a\in A^{st,\infty}_{\widetilde{Q}}$, $k\in K$, $\delta\in M_Q(\mathrm{F})$ et $\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}$. On a donc :

$$\int_{N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})} \Psi^{T,T'}_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}(\delta namk)\,dn = \int_{N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})} \Psi^{T,T'}_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}(na\delta mk)\,dn$$

car $\delta\in M_Q(\mathrm{F})$ normalise $N_Q(\mathbb{A})$ sans changer sa mesure et il commute avec $A^{st,\infty}_{\widetilde{Q}}\subseteq A^{\infty}_{Q}$. Les facteurs de $\Psi^{T,T'}_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}(na\delta mk)$ deviennent :

$$\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(na\delta mk)-T'_{\widetilde{Q}}, T_{\widetilde{Q}}-T'_{\widetilde{Q}}) = \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(a)+H_{\widetilde{Q}}(m)-T'_{\widetilde{Q}}, T_{\widetilde{Q}}-T'_{\widetilde{Q}}),$$

$$\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(na\delta mk)-T'_{\widetilde{P}}) = \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m)+H_{\widetilde{P}}(a)-T'_{\widetilde{P}}) = \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m)-T'_{\widetilde{P}}).$$

Quant à $k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(na\eta mk)$, on fait le changement de variable $(a^{-1}n^{-1}(\xi+U_{\widetilde{P}})na-\xi)\mapsto U_{\widetilde{P}}$ (voir la définition de $k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}$ au début du paragraphe 3.2) et l'on obtient :

$$k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(na\delta mk) = e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(a))}\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} f((\delta mk)^{-1}(\xi+U_{\widetilde{P}})\delta mk)\,dU_{\widetilde{P}}.$$

Ensuite, comme la mesure de $N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$ vaut 1, en faisant le changement de variable $((\delta m)^{-1}(\xi+U_{\widetilde{Q}})\delta m-\xi)\mapsto U_{\widetilde{Q}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&e^{-2\rho_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(a))}\int_K\int_{[N_Q]} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(na\delta mk)\eta(\det k)\,dn\,dk\\
&= \int_K\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} f((\delta mk)^{-1}(\xi+U_{\widetilde{P}})\delta mk)\eta(\det k)\,dU_{\widetilde{P}}\,dk\\
&= \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\int_K\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} f((\delta mk)^{-1}(\xi+U_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}+U_{\widetilde{Q}})\delta mk)\eta(\det k)\,dU_{\widetilde{Q}}\,dk\,dU_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}\\
&= e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(m))}\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\sum_{\xi\in\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} f_{\widetilde{Q}}((\delta m)^{-1}(\xi+U_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}})\delta m)\,dU_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

où $f_{\widetilde{Q}}\in\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.7) dans le paragraphe 4.2.

Remarquons que l'on a $2\rho_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(m)) = 2\rho_Q(H_Q(m))$. En utilisant les lemmes 4.1 et 4.4 ainsi que l'égalité (2.11), on voit donc que l'intégrale sur $A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}$ se réduit alors à

$$\int_{A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}} \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(a) + H_{\widetilde{Q}}(m) - T'_{\widetilde{Q}}, T_{\widetilde{Q}} - T'_{\widetilde{Q}}) e^{(s \det + 2(\rho_{\widetilde{Q}} - \rho_Q))(H_{\widetilde{Q}}(a))} \, da$$
$$= e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T'_{\widetilde{Q}} - H_{\widetilde{Q}}(m))} p_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}} - T'_{\widetilde{Q}}).$$

En utilisant le calcul (4.11) et en regardant la relation (4.8), on s'aperçoit qu'avec la notation de l'équation (4.10), on a

$$\int_{Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}} \sum_{\delta \in (P \cap M_Q)(\mathrm{F}) \backslash M_Q(\mathrm{F})} \Psi_{\widetilde{P},\widetilde{Q},\mathfrak{o}}^{T,T'}(\delta x) \eta_s(\det x) \, dx$$
$$= e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T'_{\widetilde{Q}})} p_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}} - T'_{\widetilde{Q}}) I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T'}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}).$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

En utilisant la proposition 4.7 démontrée ci-dessus et le lemme 4.4 qui décrit les fonctions $p_{\widetilde{Q},s}$ explicitement, on obtient le comportement en T des distributions $I_{\mathfrak{o}}^T$ et I^T.

Théorème 4.8. *Soit $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$. Les fonctions $T \mapsto I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f)$ et $T \mapsto I^T(\eta_s, f)$ où $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $s \in \mathbb{C}$ et T parcourt $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ sont des polynômes-exponentielles. De plus, si $s \neq -1, 1$, leur parties purement polynomiales sont constantes et données respectivement par*

$$I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) := \sum_{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} j_{\widetilde{Q}}^{-1} \hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T'_{\widetilde{Q}})} I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T'}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}),$$
$$I(\eta_s, f) := \sum_{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} j_{\widetilde{Q}}^{-1} \hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T'_{\widetilde{Q}})} I^{M_{\widetilde{Q}},T'}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}),$$

pour tout $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. En particulier, les distributions $I_{\mathfrak{o}}$ et I ne dépendent pas de T'.

Remarque 4.9. Soit $\widetilde{Q}$ un sous-groupe parabolique relativement standard de $\widetilde{G}$. Par le même raisonnement que dans la proposition 4.7, on obtient que pour tout $s \in \mathbb{C}$, les distributions $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$ et $I^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, \cdot)$, définies dans le paragraphe 4.2, sont des polynômes-exponentielles en T qui ne dépendent pas de $T_{\widetilde{Q}} \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}$. Cependant, si $\widetilde{Q} \neq \widetilde{G}$, le terme purement polynomial n'est pas constant.

Remarque 4.10. En vertu de la convergence absolue, pour tout $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et tout $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$, il découle que les fonctions $\mathbb{C} \ni s \mapsto I^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f)$ et $\mathbb{C} \ni s \mapsto I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f)$, où $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, sont holomorphes. Le théorème 4.8 énonce alors que pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, les fonctions $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \ni s \mapsto I(\eta_s, f)$ et $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \ni s \mapsto I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ sont holomorphes et admettent des prolongement méromorphes à $\mathbb{C}$ avec des pôles possibles en -1 et 1.

4.4. Équivariance

Soient $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $y \in G(\mathbb{A})$. Notons $f^y \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ la fonction définie par $f^y(X) = f(\mathrm{Ad}(y)X)$.

On voit que $I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f^y)$ pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et que $s \in \mathbb{C}$ est égal à

$$\int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x) \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x y) - T_{\widetilde{P}}) \eta_s(\det(xy))\, dx.$$

Pour $x \in G(\mathbb{A})$ et $P \in \mathcal{F}(B)$, soit $k_P(x)$ un élément de K tel que $x k_P(x)^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Alors, en utilisant l'égalité (4.9), on a :

$$\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x y) - T_{\widetilde{P}}) = \sum_{\widetilde{Q} \supseteq \widetilde{P}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}, -H_{\widetilde{P}}(k_P(\delta x) y))$$

d'où l'on obtient que $I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f^y)$ est égal à la somme sur $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ de

$$\int_{Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(x) - T_{\widetilde{Q}}, -H_{\widetilde{Q}}(k_Q(x) y))$$
$$\times \sum_{\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \cap M_Q(\mathrm{F}) \backslash M_Q(\mathrm{F})} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x) \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) \eta_s(\det(xy))\, dx.$$

Soit $x = namk$ où $n \in N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$, $a \in A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}$ et $k \in K$. Donc $dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(am))}\, dn\, da\, dm\, dk$ et pour $\delta \in M_Q(\mathrm{F})$ on a

$$\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(\delta namk) - T_{\widetilde{Q}}, -H_{\widetilde{Q}}(k_Q(\delta namk) y)) = \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(a) + H_{\widetilde{Q}}(m) - T_{\widetilde{Q}}, -H_{\widetilde{Q}}(ky)).$$

Ensuite, en faisant les mêmes opérations comme dans (4.11) au début de la preuve de la proposition 4.7, on s'aperçoit que l'on a pour $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ et $\delta \in M_Q(\mathrm{F})$

$$\int_{A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}} \int_K \int_{[N_Q]} e^{(s\det - 2\rho_Q)(H_Q(am))} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta nmak) \Gamma'_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta namk)$$
$$- T_{\widetilde{Q}}, -H_{\widetilde{P}}(k_P(\delta namk) y)) \eta(\det k)$$
$$dn\, dk\, da = |\det m|_{\mathbb{A}}^{s_{\widetilde{Q}}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})}$$
$$\times \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_K \int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(H)} f(k^{-1}((m\delta)^{-1}(\xi + U_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}})\delta m + U_{\widetilde{Q}})k) \eta(\det k)$$
$$\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H, -H_{\widetilde{Q}}(ky))\, dU_{\widetilde{Q}}\, dH\, dk\, dU_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}$$
$$= |\det m|_{\mathbb{A}}^{s_{\widetilde{Q}}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} f_{\widetilde{Q},s,y}((m\delta)^{-1}(\xi + U_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}) m\delta)\, dU_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}$$

où l'on pose

$$f_{\widetilde{Q},s,y}(X)=\int_K\int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f(k^{-1}(X+U_{\widetilde{Q}})k)u'_{\widetilde{Q},s}(k,y)\eta(\det k)\,dU_{\widetilde{Q}}\,dk,\quad X\in\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})$$

où

$$u'_{\widetilde{Q},s}(k,y)=\int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(H)}\Gamma'_{\widetilde{Q}}(H,-H_{\widetilde{Q}}(ky))\,dH,\quad k\in K, s\in\mathbb{C}.$$

La fonction $K\ni k\mapsto u'_{\widetilde{Q},s}(k,y)$ étant continue, on a bien $f_{\widetilde{Q},s,y}\in\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 4.11. *Soient $y\in G(\mathbb{A})$, $s\in\mathbb{C}$ et $f\in\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$. Les distributions $I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,\cdot)$ vérifient*

$$I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f^y)-\eta_s(\det y)I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f)=\eta_s(\det y)\sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)\smallsetminus\{\widetilde{G}\}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})}I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s,f_{\widetilde{Q},s,y})$$

où les distributions $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s,\cdot)$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ sont définies par (4.6). En particulier, pour $s\neq -1,1$, on a

$$I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,f^y)=\eta_s(\det y)I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,f),\quad I(\eta_s,f^y)=\eta_s(\det y)I(\eta_s,f).$$

Démonstration. La formule pour la différence $I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f^y)-\eta_s(\det y)I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f)$ est claire après les calculs que l'on a faits. Si $s\neq -1,1$, cette formule-ci démontre aussi l'η_s-invariance de la distribution $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$, car si $\widetilde{Q}\subsetneq\widetilde{G}$, d'après la remarque 4.9, le terme $I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s,f_{\widetilde{Q},y,s})$ est un polynôme-exponentielle en T qui ne dépend pas de $T_{\widetilde{Q}}$. En outre, $\rho_{\widetilde{Q},s}$ est non trivial sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ en vertu du lemme 4.2. Il en découle que $e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})}I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s,f_{\widetilde{Q},y,s})$ n'a pas de terme constant dans ce cas et, par conséquent, les termes constants de $I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f^y)$ et de $\eta_s(\det y)I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s,f)$ coïncident. □

4.5. Indépendance des choix

Soient $s\in\mathbb{C}\smallsetminus\{-1,1\}$ et $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$. Dans ce paragraphe, on démontrera que la distribution $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ ne dépend d'aucun choix, sauf celui d'une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ et ceux des mesures sur les F-sous-espaces $\mathcal{V}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, notre choix étant que $\mathcal{V}(\mathrm{F})\backslash\mathcal{V}(\mathbb{A})$ soit de volume 1.

Remarquons d'abord que $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ ne dépend pas du choix du sous-groupe de Borel $\widetilde{B}_0\in\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ choisi au début du paragraphe 2.8 (les paramètres de troncature $T_{\widetilde{P}}$ dépendent du $T\in T_+ +\mathfrak{a}_0^+$ qui lui-même dépend de $\widetilde{B}_0$). En effet, ce choix intervient seulement dans le choix d'une chambre positive. Soient $\widetilde{B}\in\mathcal{P}(M_{\widetilde{0}})$ et $\sigma\in\Omega^{\widetilde{G}}$ tel que $\sigma\widetilde{B}_0=\widetilde{B}$. Notons $I_{\widetilde{B},\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ et $I_{\widetilde{B},\mathfrak{o}}^T(\eta_s,\cdot)$ les distributions obtenues à partir de $\widetilde{B}$. Alors si $T\in\mathfrak{a}_{\widetilde{B}}^+$, on a $I_{\widetilde{B},\mathfrak{o}}^T(\eta_s,\cdot)=I_{\mathfrak{o}}^{\sigma^{-1}T}(\eta_s,\cdot)$ et le théorème 4.8 implique que $I_{\widetilde{B},\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)=I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$.

Démontrons que $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ ne dépend pas du choix du sous-groupe de Borel B de G contenant M_0. Soient $B'\in\mathcal{P}(M_0)$ et $\sigma\in\Omega^G$ tel que $B'=\sigma^{-1}B$. Notons $\widetilde{B}'=\sigma^{-1}\widetilde{B}_0$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Notons $I^T_{B',\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ et $I_{B',\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ les distributions construites par rapport aux sous-groupes de Borel B' et $\widetilde{B}'$. $I^T_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot) = I^{\sigma^{-1}T}_{B',\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ est une conséquence simple de la relation (2.9). Le théorème 4.8 permet de déduire alors de nouveau que $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot) = I_{B',\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$.

Le compact maximal $\widetilde{K}$ que l'on a choisi dans le paragraphe 2.6 dépend du choix des vecteurs non nuls dans les droites D_i où $i = 1,\ldots,n$. Tout autre compact $\widetilde{K}^*$ de ce type défini par rapport à $M_{\widetilde{0}}$ égale donc $\gamma K \gamma^{-1}$ pour un $\gamma \in A_B(\mathrm{F})$. Si l'on note alors $I_{\widetilde{K}^*,\mathfrak{o}}$ la distribution définie par rapport aux mêmes données que $I_{\mathfrak{o}}$ mais pour le compact $\widetilde{K}^* = \gamma K \gamma^{-1}$ où $\gamma \in A_B(\mathrm{F})$, on voit que $I_{\mathrm{K}^*,\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f^{\gamma})$, ce qui est égal à $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ en vertu du théorème 4.11 et du fait que η_s est trivial sur F^*. La distribution $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s,\cdot)$ ne dépend pas alors du choix de sous-groupe compact maximal «standard» par rapport à M_0.

Il nous reste à démontrer l'indépendance du choix de sous-groupe de Levi minimal de G (car $M_{\widetilde{0}}$ est déterminé par celui-ci). Soit $M_0' = yM_0y^{-1}$ un F-sous-groupe de Levi minimal de G, où $y \in G(\mathrm{F})$. On note alors $I_{M_0',\mathfrak{o}}$ la distribution définie par rapport au sous-groupe de Borel yBy^{-1}, le compact maximal $y\widetilde{K}y^{-1}$ de $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ et le sous-groupe de Borel $y\widetilde{B}_0y^{-1}$ de $\widetilde{G}$. On trouve alors $I_{M_0',\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f^{y})$ et le résultat découle du théorème 4.11 de nouveau.

4.6. Orbites semi-simples régulières

Soit $\mathcal{O}_{reg} \subseteq \mathcal{O}$ l'ensemble des orbites semi-simples régulières, c'est-à-dire des orbites composées d'éléments semi-simples réguliers. La preuve de la proposition suivante est pratiquement identique à la preuve de son homologue dans le paragraphe 4.6 de [19].

Proposition 4.12. *Pour tous $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, $T \in T_+ + \mathfrak{a}^+_{\widetilde{0}}$, $s \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{reg}$ et $X \in \mathfrak{o}$, on a*

$$I^T_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = \int_{G(\mathbb{A})} f(x^{-1}Xx)\eta_s(\det x)\,dx$$

où l'intégrale est absolument convergente.

5. Formule des traces infinitésimale

Il résulte de l'analyse faite dans le paragraphe 3.1 que l'on a la décomposition de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ en F-sous-espaces stables sous l'action de G suivante :

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{t}_3 \tag{5.1}$$

où $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}_2 = V \times V^*$ et $\mathfrak{t}_3 = \mathbb{G}_a$. Soit $\mathfrak{t} \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$ un F-sous-espace défini comme une somme directe de certains des $\mathfrak{t}_i$, $i = 1, 2, 3$. Il y a donc huit possibilités pour $\mathfrak{t}$. Puisque chaque $\mathfrak{t}_i$ est G-stable et la restriction de la forme trace $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $\mathfrak{t}_i$ est non dégénérée, il en est de même pour $\mathfrak{t}$. Pour $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})$, soit $X_{\mathfrak{t}}$ la projection de X dans $\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ selon la décomposition (5.1) ci-dessus.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Fixons ψ un caractère non trivial de $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. Pour $\mathfrak{t}$ comme ci-dessus, notons $\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}$ l'opérateur sur $\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{u}}(\mathbb{A}))$ suivant

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)(X) = \int_{\mathfrak{t}(\mathbb{A})} f(X - X_{\mathfrak{t}} + Y_{\mathfrak{t}})\psi(\langle X_{\mathfrak{t}}, Y_{\mathfrak{t}}\rangle)\, dY_{\mathfrak{t}}, \quad f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})),\ X \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})$$

où $dY_{\mathfrak{t}}$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ pour laquelle le volume de $\mathfrak{t}(\mathrm{F})\backslash\mathfrak{t}(\mathbb{A})$ vaut 1.

Théorème 5.1. *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et tout $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$, on a*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)).$$

Démonstration. Soient $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$. On se place dans le contexte de la preuve du théorème 3.6. En utilisant l'identité (3.6) et l'analyse qui suit l'équation (3.7), il découle que $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f) - \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)) = I^T(\eta_s, f) - I^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ vaut

$$\int_{[G]} \Bigg(k_{\widetilde{G},\widetilde{G}}(x, f) - k_{\widetilde{G},\widetilde{G}}(x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)) \\ + \sum_{\widetilde{P}_1 \subsetneq \widetilde{P}_2} \sum_{\delta\in P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \chi^T_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(\delta x)(k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(\delta x, f) - k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(\delta x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))) \Bigg) \eta_s(\det x)\, dx$$

où, pour les sous-groupes paraboliques relativement standards $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}_2$ et $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, on pose

$$k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(x, \phi) = \sum_{\widetilde{P}_1\subseteq\widetilde{P}\subseteq\widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \left(\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} k_{\phi,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) \right), \quad x \in P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A}).$$

On a alors pour tout $x \in G(\mathbb{A})$

$$k_{\widetilde{G},\widetilde{G}}(x, f) = \sum_{\xi\in\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})} f(x^{-1}\xi x) = \sum_{\xi\in\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})} \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)(x^{-1}\xi x) = k_{\widetilde{G},\widetilde{G}}(x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$$

grâce à la formule sommatoire de Poisson. On s'aperçoit alors que $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f) - \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ est en réalité la somme sur $\widetilde{P}_1 \subsetneq \widetilde{P}_2$ de

$$\int_{P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \chi^T_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(x)(k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(x, f) - k_{\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2}(x, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)))\eta_s(\det x)\, dx.$$

Fixons $\varepsilon_0 > 0$. En utilisant le théorème 3.7 pour f et $\mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f)$, on a donc pour tout $N > 0$

$$|I^T(\eta_s, f) - I^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))| = O(e^{-N\|T\|})$$

si $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ est tel que $\forall\alpha \in \Delta_{\widetilde{B}_0}$, $\alpha(T) > \varepsilon_0\|T\|$. D'après le théorème 4.8, la différence $I^T(\eta_s, f) - I^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ est un polynôme-exponentielle en T. L'égalité ci-dessus, valable pour tout $N > 0$, n'est possible alors que si ce polynôme-exponentielle est identiquement nul. En particulier, en invoquant de nouveau le théorème 4.8, on a égalité des termes constants de $I^T(\eta_s, f)$ et de $I^T(\eta_s, \mathcal{F}_{\mathfrak{t}}(f))$ pour $s \neq -1, 1$. □

6. Orbites semi-simples

Soit $\mathcal{O}_{rs} \subseteq \mathcal{O}$ l'ensemble des classes contenant un élément $\begin{pmatrix} B & u \\ v & d \end{pmatrix}$ tel que le polynôme caractéristique de B soit séparable (*i.e.* B est semi-simple régulier dans $\mathfrak{g}(\mathrm{F})$). On qualifie ces classes de *relativement semi-simples régulières*. Si $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$, alors tout élément $\begin{pmatrix} B_0 & u \\ v & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}$ possède la propriété selon laquelle B_0 est semi-simple régulier.

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$. Le but de cette section est de donner une expression explicite pour $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, \cdot)$, ce que l'on achève par le théorème 6.12. Les résultats sont analogues, et parfois même identiques, à ceux de la section 6 de [19] et, par conséquent, on renvoie souvent à cet article pour les preuves détaillées. En particulier, on omet les résultats de convergence, qui sont démontrés dans le paragraphe 6.7, ainsi que les résultats de prolongement méromorphe qui se trouvent dans le paragraphe 6.8 de *loc. cit.* On utilisera aussi la même notation que dans la section 6 de *loc. cit.*, ce qui rendra l'analogie plus visible.

Voici le plan de la section : après avoir introduit quelques notations dans le paragraphe suivant 6.1, on décrit la décomposition de $\mathfrak{o}$ en $G(\mathrm{F})$-orbites dans le paragraphe 6.2. On introduit encore un peu plus de notations dans le paragraphe 6.3. Dans le paragraphe 6.4, on définit une expression $i_{\mathfrak{o}}(x)$ pour laquelle on a

$$I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = \int_{[G]} i_{\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\, dx \tag{6.1}$$

si $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$. En supposant cela, on donne la preuve du théorème 6.12 omettant les preuves des énoncés techniques. Dans la section 6.5, on introduit un nouveau noyau tronqué $i^T_{f,\mathfrak{o}}(x)$ tel que $\int_{[G]} i^T_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\, dx = I^T_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. Ce résultat nous permet de démontrer (6.1) dans le paragraphe suivant 6.6. On finit la preuve dans le dernier paragraphe 6.7 où l'on étudie certaines fonctions zêta – les homologues des fonctions zêta étudiées dans [19].

6.1. Notations

On utilisera les lettres I, J, avec de possibles indices, pour noter des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}^*$. Soit $I \subseteq \mathbb{N}^*$ fini. On pose $-I = \bigcup_{i \in I}\{-i\}$. On dit que $\mathcal{I}$ est un ϵ-sous-ensemble de I, si $\mathcal{I} \subseteq I \cup -I$ et si pour tout $i \in \mathcal{I}$, on a $-i \notin \mathcal{I}$. Dans ce cas, on écrit $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I$. La notation est un peu abusive car $\mathcal{I}$ n'est pas forcément un sous-ensemble de I. On définit aussi $|\mathcal{I}| = \{|i| | i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{I}^\sharp \subseteq_\epsilon I$ par la propriété $\mathcal{I} \sqcup \mathcal{I}^\sharp = |\mathcal{I}| \sqcup -|\mathcal{I}|$. Autrement dit, $\mathcal{I}^\sharp = -\mathcal{I}$ mais on écrira $\mathcal{I}^\sharp$ dans ce contexte. On réserve les lettres $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$, et seulement ces trois lettres avec de possibles indices, pour des ϵ-sous-ensembles.

On utilisera aussi la notation abrégée suivante : soient $I' \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I'$, on écrira $\mathcal{J} \cup \mathcal{I} \subseteq_\epsilon I'$ pour signifier que la réunion ensembliste $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est aussi un ϵ-sous-ensemble (ce qui n'est pas toujours vrai). On utilise le symbole $\sqcup$ pour noter la réunion disjointe, donc $I \sqcup J = I'$ implique $I \cap J = \varnothing$. On écrira aussi, pour $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I'$ fixés ,

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I'} := \sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I' \\ |\mathcal{J}|=I'}}, \quad \sum_{\mathcal{K} \sqcup \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}} := \sum_{\substack{\mathcal{K}, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \\ \mathcal{K} \cap \mathcal{J} = \varnothing}}, \quad \sum_{|\mathcal{K}| \sqcup |\mathcal{J}| = I'} := \sum_{\substack{\mathcal{K}, \mathcal{J} \subseteq_\epsilon I' \\ |\mathcal{K}| \sqcup |\mathcal{J}| = I'}}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Finalement, pour $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \sqcup \mathcal{J}_4 \subseteq_\epsilon I_0$ et $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3$, on utilisera parfois la notation suivante

$$\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2} := \mathcal{J}_3 \smallsetminus \mathcal{J}_2, \quad \mathcal{J}_{13} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3, \quad \mathcal{J}_{134} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_3 \cup \mathcal{J}_4, \text{ etc.}$$

6.2. Orbites dans une classe relativement semi-simple régulière

Dans ce paragraphe, on décrit une décomposition en orbites d'une classe relativement semi-simple régulière.

En utilisant la décomposition (3.1), on va écrire les éléments X de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sous la forme

$$X = (B, \mathrm{w}, d)$$

où $B \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{w} \in V \times V^*$ et $d \in \mathbb{G}_a$. On considère alors $V \times V^*$ comme un espace vectoriel dont V et V^* sont des sous-espaces. L'action d'un $g \in G$ s'écrit donc simplement

$$\mathrm{Ad}(g)X = (\mathrm{Ad}(g)B, g\mathrm{w}, d)$$

où G agit sur $V \times V^*$ par ses actions naturelles sur V et V^*.

Donnons-nous :

- un polynôme séparable $Q \in \mathrm{F}[T]$ de degré n ;
- une décomposition de Q en facteurs irréductibles $Q = \prod_{i=1}^m Q_i$ et notons $I = \{1, \ldots, m\}$;
- pour tout $i \in I$, notons $\mathrm{F}_i = \mathrm{F}[T]/(Q_i(T))$ (resp. $\mathrm{F}_{-i} = \mathrm{F}[T]/((-1)^{\deg Q_i} Q_i(-T))$) et $F_I = \mathrm{F}[T]/(Q(T))$ (resp. $F_{-I} = \mathrm{F}[T]/((-1)^n Q(-T))$). On identifie F_I (resp. F_{-I}) à $\prod_{i\in I} \mathrm{F}_i$ (resp. $\prod_{i\in I} \mathrm{F}_{-i}$) à l'aide des homomorphismes des F-algèbres $\mathrm{F}[T]/(Q(T)) = \mathrm{F}_I \to \mathrm{F}_i = \mathrm{F}[T]/(Q_i(T))$ (resp. $\mathrm{F}_{-I} \to \mathrm{F}_{-i}$) induits par $T \mapsto T$;
- on fixe l'isomorphisme des algèbres étales $\iota_I : \mathrm{F}_I \to \mathrm{F}_{-I}$ induit par $T \mapsto -T$. On identifie F_{-I} à F_I^* en tant que F-espace vectoriel grâce à la forme bilinéaire non dégénérée $\mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I} \ni (u, v) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(u\iota_I(v))$;
- on note $b_I \in \mathrm{F}_I$ l'image de T dans F_I. Dans ce cas, b_I engendre la F-algèbre étale F_I.

Soit alors $P_I = M_I N_I$ le sous-groupe parabolique standard de G défini comme le stabilisateur du drapeau

$$0 = V_{j_0} \subsetneq V_{j_1} \subsetneq V_{j_2} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{j_m} = V$$

où pour $i \in I$, on a $\deg Q_i = j_i - j_{i-1}$. Pour $i \in I$, posons $Z_i := \bigoplus_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} D_j$. On peut et on fixe un $B \in \mathfrak{m}_{P_I}(\mathrm{F})$ dont Q_i est le polynôme caractéristique pour son action sur Z_i. Alors, B est semi-simple régulier dans $\mathfrak{g}(\mathrm{F})$ et tout élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}(\mathrm{F})$ s'obtient par une telle construction.

L'élément B induit une structure de $\mathrm{F}[T]$-module sur V par $T.v = Bv$. L'algèbre F_I est aussi naturellement un $\mathrm{F}[T]$-module qui est isomorphe, en tant que $\mathrm{F}[T]$-module à V. On fixe un tel isomorphisme et on identifie V à F_I désormais. Notons qu'un tel isomorphisme identifie aussi F_i à Z_i pour tout $i \in I$. De plus, l'isomorphisme $V \cong \mathrm{F}_I$ induit l'isomorphisme dual entre V^* et $(\mathrm{F}_I)^* = \mathrm{F}_{-I}$. On identifie aussi ces espaces. On a donc pour tous $(u, v) \in \mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$, $g \in G(\mathrm{F})$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$v(B^k u) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(b_I^k u\iota_I(v)),$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(gu\iota_I(gv)) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(u\iota_I(v)).$$

Pour tout $i \in I$, on note 1_i et 1_{-i} les unités de F_i et F_{-i} respectivement. Pour tout $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I$, on pose $\mathrm{F}_{\mathcal{I}} = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{F}_i \subseteq \mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$ et $1_{\mathcal{I}} = \sum_{i\in I} 1_i \in \mathrm{F}_{\mathcal{I}}^*$.

Soit T_I le centralisateur de B dans G. C'est un F-tore maximal de G et il est contenu dans M_I. Pour $J \subseteq I$, on note $T_J \subseteq T_I$ le plus grand sous-tore qui agit trivialement sur $\mathrm{F}_{I\smallsetminus J}$. Si $J = \{i\}$, on écrit simplement $T_i = T_{\{i\}}$. Alors $T = \prod_{i\in I} T_i$ et pour tout $i \in I$, le groupe $T_i(\mathrm{F})$ agit simplement transitivement sur F_i^* ainsi que sur F_{-i}^*.

On fixe une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$ contenant un élément X de type (B, w, d). Remarquons que d est le même pour tout $X \in \mathfrak{o}$, on le note simplement $d_{\mathfrak{o}}$.

On introduit l'ensemble $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}} = \{(u, v) \in \mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I} | \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(b_I^i u\iota_I(v)) = A_i(X) \ \ \forall \ 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ où $X \in \mathfrak{o}$ est quelconque et les invariants $A_i(X)$ ont été définis dans le paragraphe 3.1. Comme $T_I(\mathrm{F})$ agit sur $F_I \times \mathrm{F}_{-I}$, commute à B et préserve l'accouplement naturel sur $\mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$, il agit aussi sur $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$. On voit que l'ensemble des orbites dans $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ sous l'action de $T_I(\mathrm{F})$ est en bijection avec l'ensemble des classes de $G(\mathrm{F})$-conjugaison dans $\mathfrak{o}$, la bijection étant induite par l'application $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}} \ni \mathrm{w} \mapsto (B, \mathrm{w}, d_{\mathfrak{o}})$.

Pour $\mathrm{w} \in \mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$ et $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I$, on pose $\mathrm{w}_{\mathcal{I}} := 1_{\mathcal{I}}\mathrm{w}$. Si $\mathcal{I} = \{i\}$, on note simplement $\mathrm{w}_i = \mathrm{w}_{\{i\}}$. On va continuer pourtant d'écrire parfois les éléments de $\mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$ comme (u, v).

Lemme 6.1. *Il existe un $\alpha_I \in \mathrm{F}_I$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathrm{F}_I \times \mathrm{F}_{-I}$, on a*

$$(u, v) \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}} \Longleftrightarrow u\iota_I(v) = \alpha_I.$$

Démonstration. Pour tous $(u, v), (u', v') \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$v(B^k u) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(b_I^k u\iota_I(v)) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(b_I^k u'\iota_I(v')) = v'(B^k u')$$

d'où

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(b_I^k(u\iota_I(v) - u'\iota_I(v'))) = 0, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

D'après la proposition (18.3) dans [9], la forme $\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}$ est non dégénérée et puisque les puissances de b_I engendrent F_I sur F, on obtient

$$u\iota_I(v) = u'\iota_I(v'), \quad \forall\ (u, v), (u', v') \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}. \tag{6.2}$$

On pose donc $\alpha_I := u\iota_I(v)$ où $(u, v) \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ est quelconque. Il reste à démontrer que si $(u, v) \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ est tel que $u\iota_I(v) = \alpha_I$, alors $(u, v) \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$. Pour cela, il suffit de faire le même calcul dans le sens inverse. □

Soit $\alpha_I = (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathrm{F}_I$ comme dans le lemme précédent. Notons $I_0 \subseteq I$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $\alpha_i = 0$.

Proposition 6.2. *Il existe une unique $T_I(\mathrm{F})$-orbite dans $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ composée des $(u, v) \in \mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ tels que $u_i = 0$ et $v_{-i} = 0$ pour tout $i \in I_0$. On choisit $\xi_\varnothing$ un représentant de cette orbite. Alors, les $T_I(\mathrm{F})$-orbites dans $\mathrm{V}_{\mathfrak{o}}$ sont en bijection avec les ϵ-sous-ensembles de I_0, le représentant de l'orbite correspondant à $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ étant $\xi_\varnothing + 1_{\mathcal{I}}$. Les orbites de dimension maximale correspondent aux $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $|\mathcal{I}| = I_0$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 6.2 de [19]. □

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

6.3. Quelques définitions associées aux orbites

D'après la proposition 6.2 ci-dessus, les

$$X_{\mathcal{I}} := (B, \xi_{\varnothing} + 1_{\mathcal{I}}, d_{\mathfrak{o}}) \tag{6.3}$$

où $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$ sont des représentants des orbites pour l'action de $G(\mathrm{F})$ à $\mathfrak{o}$. On les considère fixés désormais.

Pour un F-sous-groupe H de G, $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathrm{F})$ et une F-algèbre R, notons $H(R, X)$ le groupe des R-points du stabilisateur de X dans H. Alors, pour tout $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$ et toute F-algèbre R, on a :

$$G(R, X_{\mathcal{I}}) = T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{I}|}(R). \tag{6.4}$$

Pour tout $i \in I$, on choisit une mesure de Haar sur $T_i(\mathbb{A})$ et pour tout $I' \subseteq I$, on met la mesure produit sur $T_{I'}(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I'} T_i(\mathbb{A})$. On note H_I l'application de Harish-Chandra, introduite dans le paragraphe 2.1, par rapport au sous-groupe parabolique standard P_I. Pour $I' \subseteq I$, on note $\mathfrak{a}_{I'}$ l'image et $T_{I'}(\mathbb{A})^1$ le noyau de la restriction de l'application H_I à $T_{I'}(\mathbb{A})$ (la restriction étant un homomorphisme car $T_{I'}(\mathbb{A}) \subseteq M_{P_I}(\mathbb{A})$). En particulier, $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{a}_{P_I}$ et le quotient $T_{I'}(\mathrm{F})\backslash T_{I'}(\mathbb{A})^1$ est compact. Puisque H_I restreint à $T_{I'}(\mathbb{A}) \cap A_{P_I}^{\infty}$ est un isomorphisme, on obtient une unique mesure de Haar sur $T_{I'}(\mathbb{A})^1$ compatible avec celles sur $T_{I'}(\mathbb{A})$ et $\mathfrak{a}_{I'}$.

Si $I'' \subseteq I' \subseteq I$, les espaces $\mathfrak{a}_{I''}$ et $\mathfrak{a}_{I' \smallsetminus I''}$ sont en somme directe. On voit alors $\mathfrak{a}_{I'}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{I'}, \mathbb{R})$ comme un sous-espace de $\mathfrak{a}_0^*$, et donc de $\mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^*$ aussi.

En particulier, puisque $A_{P_I} \subseteq T_I \subseteq M_{P_I}$, on voit que $\mathfrak{a}_I^*$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(T_I, \mathbb{G}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Pour tout $i \in I \cup -I$, on note alors $\rho_i \in \mathfrak{a}_I^*$ le caractère par lequel T_I agit sur F_i. On a alors $\rho_i = -\rho_{-i}$. Soit $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$. Il en découle donc que $\{\rho_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une base de $\mathfrak{a}_{|\mathcal{I}|}^*$. On pose aussi

$$\rho_{\mathcal{I}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \rho_i \in \mathfrak{a}_{|\mathcal{I}|}^*.$$

Notons que $\rho_{\mathcal{I}^\sharp} = -\rho_{\mathcal{I}}$.

On définit encore :

- pour $I' \subseteq I$, l'espace $\mathfrak{a}_{I',\mathbb{C}}^* := \mathfrak{a}_{I'}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$;
- pour $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$, $\mathbb{1}_{\mathcal{I}}$ la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_{I_0}$ tels que

$$\rho_i(H) \leqslant 0, \ \forall\, i \in \mathcal{I} \cap I_0 \quad \text{et} \quad \rho_i(H) < 0, \ \forall\, i \in \mathcal{I} \cap -I_0.$$

6.4. Le résultat principal

Dans ce paragraphe, on énonce et on démontre le théorème 6.12. Cependant, certains résultats seront seulement énoncés avec les renvois vers leurs démonstrations dans les paragraphes suivants.

On note $M_{\widetilde{I}}$ le sous-groupe de Levi de $\widetilde{G}$ stabilisant F_i, pour tout $i \in I$, ainsi que D_0 et l'on note $M_{\widetilde{I}_0}$ le sous-groupe de Levi de $\widetilde{G}$ qui stabilise les espaces F_i, pour tout $i \in I_0$, ainsi que l'espace somme de D_0 et des F_i pour $i \in I \smallsetminus I_0$. On a donc $M_{\widetilde{I}} \subseteq M_{\widetilde{I}_0}$.

Soit $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}})$. Remarquons alors qu'il existe un unique $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I$ tel que l'espace $\mathcal{V}_{\widetilde{Q}}$ défini dans le paragraphe 2.6 soit égal à $\mathrm{F}_{\mathcal{I}}$. On pose dans ce cas $\mathcal{I}_{\widetilde{Q}} = \mathcal{I}$. D'ailleurs, il est clair que si l'orbite d'un $X_{\mathcal{I}}$ (voir (6.3)), où $\mathcal{I} \subseteq_{\epsilon} I_0$ intersecte non trivialement

$\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$, où $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, alors celui-là est conjugué à un élément de $\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}})$. On peut alors reformuler le lemme 3.3 de la manière suivante.

Lemme 6.3. *Soit $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}})$. Alors $X_{\mathcal{I}} \in \mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F})$ si et seulement si $(|\mathcal{I}| \cup (I \smallsetminus I_0)) \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing$.*

On a en particulier que si $\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o} \neq \varnothing$, alors $(I \smallsetminus I_0) \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing$ autrement dit $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0})$. Pour un sous-groupe parabolique relativement standard $\widetilde{P}$ de $\widetilde{G}$ on pose

$$\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel} = \{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}) | \exists \gamma \in G(\mathrm{F}),\ \gamma \widetilde{Q} \gamma^{-1} = \widetilde{P}\}.$$

Soit $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}$ et $\gamma \in G(\mathrm{F})$ tel que $\gamma \widetilde{Q} \gamma^{-1} = \widetilde{P}$. Grâce à la décomposition de Bruhat, on choisit alors un $s_{\widetilde{Q}} \in \Omega^G/\Omega^Q$ tel que $\gamma \in B(\mathrm{F}) w_{s_{\widetilde{Q}}} Q(\mathrm{F})$. On a alors $w_{s_{\widetilde{Q}}} \widetilde{Q} w_{s_{\widetilde{Q}}}^{-1} = \widetilde{P}$.

Lemme 6.4. *Soient $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors, l'intersection de la $G(\mathrm{F})$-orbite de $X_{\mathcal{I}}$ avec $\mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$ égale*

$$\coprod_{\substack{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel} \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing}} \coprod_{\delta \in M_P(\mathrm{F}, \mathrm{Ad}(w_{s_{\widetilde{Q}}}) X_{\mathcal{I}}) \backslash M_P(\mathrm{F})} \{\mathrm{Ad}(\delta^{-1} w_{s_{\widetilde{Q}}}) X_{\mathcal{I}}\}.$$

Démonstration. Voir la preuve du lemme 6.4 de [19]. □

Pour une fonction ϕ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})$ et $x \in G(\mathbb{A})$ on définit

$$\phi_x(X) := \phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X).$$

Fixons $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$. Soit $\widetilde{P}$ un sous-groupe parabolique semi-standard de $\widetilde{G}$. D'après le lemme 3.3 *b)* on a un isomorphisme N_P-équivariant

$$\mathfrak{n}_{\widetilde{P}} \cong \mathfrak{n}_P \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}}.$$

On pose

$$f^{\widetilde{P}}(X) = \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(X+Y)\, dY, \quad X \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}). \tag{6.5}$$

Supposons en plus que $\widetilde{P}$ est relativement standard et posons

$$i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = i_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\gamma \in N_P(\mathrm{F})} f_{\gamma x}^{\widetilde{P}}(\xi), \quad x \in P(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A}), \tag{6.6}$$

où $f_x^{\widetilde{P}} = (f_x)^{\widetilde{P}}$. En vertu du lemme 6.4 on a alors

$$i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing}} \sum_{\gamma \in P(\mathrm{F}, \mathrm{Ad} w_{s_{\widetilde{Q}}} X_{\mathcal{I}}) \backslash P(\mathrm{F})} f_{\gamma x}^{\widetilde{P}}(\mathrm{Ad}(w_{s_{\widetilde{Q}}}) X_{\mathcal{I}}).$$

On voit donc que

$$\sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \backslash G(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x) = \sum_{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}} \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing}} \sum_{\delta \in G(\mathrm{F}, X_{\mathcal{I}}) \backslash G(\mathrm{F})} f_{\delta x}^{\widetilde{Q}}(X_{\mathcal{I}}). \tag{6.7}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Pour tout $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$ posons $\mathbb{A}_\mathcal{J} = \mathbb{A} \otimes_\mathrm{F} \mathrm{F}_\mathcal{J}$. Notons aussi $\mathbb{A}_{I'} = \mathbb{A} \otimes_\mathrm{F} \mathrm{F}_{I'}$ et $\mathbb{A}_{-I'} = \mathbb{A} \otimes_\mathrm{F} \mathrm{F}_{-I'}$ pour tout $I' \subseteq I$. Fixons un caractère additif continu non trivial ψ sur $\mathrm{F}\backslash\mathbb{A}$. Pour une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$, on définit la «transformée de Fourier» de ϕ par rapport à $\mathcal{J}$

$$\hat{\phi}^\mathcal{J}(X) = \int_{\mathbb{A}_\mathcal{J}} \phi(B', u_\mathcal{J} + \mathrm{w}' - \mathrm{w}'_{\mathcal{J}^\sharp}, d')\psi(\langle u_\mathcal{J}, \mathrm{w}'_{\mathcal{J}^\sharp}\rangle)\, du_\mathcal{J} \tag{6.8}$$

où $X = (B', \mathrm{w}', d') \in \widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A})$; $du_\mathcal{J}$ est la mesure de Haar sur $\mathbb{A}_\mathcal{J}$ pour laquelle $\mathrm{F}_\mathcal{J}\backslash\mathbb{A}_\mathcal{J}$ est de volume 1 et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est l'accouplement défini par la forme trace. En réalité, si l'on écrit $\mathrm{w}' = (u', v') \in \mathbb{A}_I \times \mathbb{A}_{-I}$ et $u_\mathcal{J} = (u, v)$ où $u \in \mathbb{A}_{\mathcal{J}\cap I}$ et $v \in \mathbb{A}_{\mathcal{J}\cap -I}$, on a

$$\langle u_\mathcal{J}, \mathrm{w}'_{\mathcal{J}^\sharp}\rangle = \langle u_\mathcal{J}, \mathrm{w}'\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_I/\mathrm{F}}(u'\iota_I(v) + u\iota_I(v')).$$

La restriction de la fonction $\hat{\phi}^\mathcal{J}$ à $\mathfrak{g}(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}_{I\smallsetminus(\mathcal{J}\cap I)} \times \mathbb{A}_{-I\smallsetminus(\mathcal{J}\cap -I)} \times \mathbb{A}$ est alors de type Bruhat-Schwartz. Dans tout ce qui suit, les arguments des fonctions de type $\hat{\phi}^\mathcal{J}$ seront toujours dans $\mathfrak{g}(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}_{I\smallsetminus(\mathcal{J}\cap I)} \times \mathbb{A}_{-I\smallsetminus(\mathcal{J}\cap -I)} \times \mathbb{A}$, de façon que l'on pourrait les traiter comme les fonctions de type Bruhat-Schwartz.

Soient alors $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}$ et $\mathcal{I} \subseteq_\epsilon I_0$ tel que $|\mathcal{I}| \cap |\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}| = \varnothing$. On a $f_x^{\widetilde{Q}}(X_\mathcal{I}) = \widehat{(f_x)}^{\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}}(X_\mathcal{I})$. On utilisera la notation abrégée $\hat{f}_x^{\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}}(X_\mathcal{I}) := \widehat{(f_x)}^{\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}}(X_\mathcal{I})$. En utilisant (6.4), on voit donc que l'on peut réécrire (6.7) comme

$$\sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}} \sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}|\cap|\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}|=\varnothing}} \sum_{\delta\in T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \hat{f}_{\delta x}^{\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}}(X_\mathcal{I}). \tag{6.9}$$

Les sommes (6.9) et (6.7) sont absolument convergentes, ce que l'on démontre de la même façon que le lemme 6.5 (ou bien le lemme 6.24) de [19].

On pose :

$$i_\mathfrak{o}(x) = i_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A}).$$

Proposition 6.5 (cf. 6.17). *On a pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$:*

$$\int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} |i_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)|\, dx < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} i_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\, dx = I_\mathfrak{o}(\eta_s, f).$$

En utilisant le résultat ci-dessus, on a $\int_{[G]} i_\mathfrak{o}(x)\eta_s(\det x)\, dx = I_\mathfrak{o}(\eta_s, f)$ pour $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, où, grâce à la formule (6.9), on a

$$i_\mathfrak{o}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0}, \widetilde{P})^{rel}} \sum_{\substack{\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0 \\ |\mathcal{I}|\cap|\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}|=\varnothing}} \sum_{\delta\in T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \hat{f}_{\delta x}^{\mathcal{I}_{\widetilde{Q}}}(X_\mathcal{I}).$$

En inversant l'ordre de sommation, on a aussi

$$i_\mathfrak{o}(x) = \sum_{\mathcal{I}\sqcup\mathcal{J}\subseteq_\epsilon I_0} \mu_\mathcal{J} \sum_{\delta\in T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \hat{f}_{\delta x}^{\mathcal{J}}(X_\mathcal{I})$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

où

$$\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\substack{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0},\widetilde{P})^{rel}\\ \mathcal{I}_{\widetilde{Q}}=\mathcal{J}}} 1.$$

Lemme 6.6. *Soit $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. Alors $\mu_{\mathcal{J}} = (-1)^{\#\mathcal{J}}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que l'on a

$$\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{\substack{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0})\\ \mathcal{I}_{\widetilde{Q}}=\mathcal{J}}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}}.$$

Soient $I_1 = \mathcal{J}\cap I_0$ et $I_2 = -(\mathcal{J}\cap -I_0)$. Soit $\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0})$ et notons $k = d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$. Alors, la condition $\mathcal{I}_{\widetilde{Q}} = \mathcal{J}$ signifie qu'il existe des sous-ensembles $\varnothing = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_i = I_1$ et $\varnothing = J_0' \subsetneq J_1' \subsetneq \cdots \subsetneq J_{k-i}' = I_2$ tels que $\widetilde{Q}$ est le stabilisateur du drapeau

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{F}_{J_0} \subseteq \mathrm{F}_{J_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{F}_{J_i} = \mathrm{F}_{I_1} \subsetneq \mathrm{F}_{I\smallsetminus I_2} \oplus D_0 = \mathrm{F}_{(I\smallsetminus I_2)\cup J_0'} \oplus D_0 \\ \subsetneq \mathrm{F}_{(I\smallsetminus I_2)\cup J_1'} \oplus D_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{F}_{(I\smallsetminus I_2)\cup J_{k-i}'} \oplus D_0 = \mathrm{F}_I \oplus D_0. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors $i_1 = \#I_1$, $i_2 = \#I_2$ et

$$a_i^m = \#\{(J_0, J_1, \ldots, J_i) | \varnothing = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_i = \{1, 2, \ldots, m\}\}, \quad i, m \in \mathbb{N},$$

on voit que le nombre des $\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{I}_0})$ tels que $\mathcal{I}_{\widetilde{Q}} = \mathcal{J}$ et $k = d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ est égal à

$$c_k^{i_1,i_2} := \sum_{i=0}^{k} a_i^{i_1} a_{k-i}^{i_2}.$$

On veut alors montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{i_1+i_2} (-1)^k c_k^{i_1,i_2} = \left(\sum_{i=0}^{i_1} (-1)^i a_i^{i_1}\right)\left(\sum_{j=0}^{i_2} (-1)^j a_j^{i_2}\right)$$

est égal à $(-1)^{i_1+i_2}$. Or, comme il est expliqué dans le lemme 6.7 de [19], on a, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^m (-1)^i a_i^m = (-1)^m$, donc le résultat suit de l'identité ci-dessus. □

On vient d'obtenir alors

$$i_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\mathcal{I}\sqcup\mathcal{J}\subseteq_\epsilon I_0} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{\delta\in T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \hat{f}_{\delta x}^{\mathcal{J}}(X_{\mathcal{I}}). \tag{6.10}$$

Lemme 6.7 (cf. corollaire 6.23). *Soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$. L'intégrale suivante*

$$\int_{T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_2)\cup\mathcal{J}_2^\sharp}(H_I(x)) \hat{f}_x^{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(X_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp}) \eta_s(\det x)\, dx, \quad s\in\mathbb{C}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, noté $\overline{\Lambda}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}^{\mathcal{J}}(\eta, f)(s)$, holomorphe sur $s\in\mathbb{C}\smallsetminus\{-1, 1\}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Le rapport entre les $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s)$ et $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ est donné par le lemme suivant.

Lemme 6.8. *Pour tout $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$, on a :*

$$I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = \sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s).$$

Démonstration. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 6.9 de [19], on obtient pour tout $x \in G(\mathbb{A})$:

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \sum_{\delta \in T_{|\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_1}_{\delta x}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^{\sharp}}) \mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2) \cup \mathcal{J}_2^{\sharp}}(H_I(x))$$
$$= \sum_{\mathcal{I} \sqcup \mathcal{J} \subseteq_{\epsilon} I_0} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{\delta \in T_{|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})} \hat{f}^{\mathcal{J}}_{\delta x}(X_{\mathcal{I}}).$$

On multiplie cette égalité par $\eta_s(\det x)$, où $s \in \mathbb{C}$ est tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$. En regardant le côté droit de cette égalité et en utilisant la formule (6.10), on voit que, en vertu de la proposition 6.5, l'intégrale de cette expression sur $T_{I_0}(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})$ est égale à $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$. Or, en vertu du corollaire 6.7, l'intégrale du côté gauche sur le même quotient donne l'égalité cherchée pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Cela suffit pour conclure car $s \mapsto I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ est une fonction méromorphe en vertu de la remarque 4.10. □

On introduit maintenant les fonctions zêta.

Proposition 6.9 (cf. 6.20 et lemme 6.22). *Soit $\mathcal{J} \subseteq_{\epsilon} I_0$. Alors l'intégrale*

$$\int_{G(\mathbb{A}, X_{\mathcal{J}})\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1} X_{\mathcal{J}} x) e^{\lambda(H_I(x))} \eta(\det x)\, dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts d'un ouvert non vide de $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, noté $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)$. De plus, la droite $\mathbb{C}\det \subseteq \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$ est non singulière.

Corollaire 6.10. *Pour $\mathcal{J} \subseteq_{\epsilon} I_0$, on définit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ suivante :*

$$\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)(s) := \zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)(s \det), \quad s \in \mathbb{C}$$

où l'on voit $\det$ *comme un élément de $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|}$ par restriction.*

Remarque 6.11. Il découle de la proposition 6.20 que pour certains $\mathcal{J} \subseteq_{\epsilon} I_0$, pour tout $s \in \mathbb{C}$, l'élément $s \det \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$ n'appartient pas au domaine de convergence de l'intégrale définissant $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)$.

Soit $I_\eta \subseteq I_0$ l'ensemble des $i \in I_0$ tels que la restriction de η au groupe de normes de $\mathbb{A}_i^*$ dans $\mathbb{A}^*$ est non triviale. On est prêt à démontrer le résultat principal de cette section.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Théorème 6.12. *Soit* $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$.

(i) *Pour tout* $\mathcal{J}_1 \subseteq_\epsilon I_\eta$ *tel que* $|\mathcal{J}_1| = I_\eta$, *la fonction de la variable* $s \in \mathbb{C}$ *suivante*

$$\sum_{|\mathcal{J}'|=I_0 \smallsetminus I_\eta} \zeta_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}'}(\eta, f)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$.

(ii) *On a pour tout* $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$:

$$I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f) = \sum_{|\mathcal{J}_1|=I_\eta} \left(\left(\sum_{|\mathcal{J}'|=I_0 \smallsetminus I_\eta} \zeta_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}'}(\eta, f) \right)(s) \right).$$

Démonstration. Le point (i) est démontré dans le corollaire 6.24 ci-dessous. En outre, en vertu du lemme 6.29 de [19], on a l'égalité suivante de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \sum_{\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}} (-1)^{\#(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12})} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2}(\eta, f) = \sum_{|\mathcal{J}|=I_0} \zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f).$$

En utilisant alors l'égalité démontrée dans le lemme 6.8 ainsi que le point (i) de ce théorème, on peut conclure. □

6.5. Seconde formule pour le noyau tronqué

On considère $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ fixée. Pour $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, dans le paragraphe 6.4, équation (6.5), on a introduit la fonction $f^{\widetilde{P}}$ ainsi que $f_x(X) := f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)$. Par $f_x^{\widetilde{P}}$, on entend toujours $(f_x)^{\widetilde{P}}$. Soient $\widetilde{P}, \widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ tels que $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$. On pose alors

$$\mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}} := \mathcal{V}_{\widetilde{P}} \cap \mathcal{Z}_{\widetilde{Q}}. \tag{6.11}$$

Alors, pour $\widetilde{Q}$ fixé, les espaces $\mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}$, où $\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B) \ni \widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$, jouent le rôle des espaces $\mathcal{V}_{\widetilde{P}}$ dans le contexte de l'inclusion $G_{\widetilde{Q}} \hookrightarrow \widetilde{G}_{\widetilde{Q}}$. De plus, on a les relations suivantes :

$$\mathfrak{n}_Q \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}} = \mathfrak{n}_{\widetilde{Q}} \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}, \quad \mathfrak{n}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}} \oplus \mathfrak{n}_Q = \mathfrak{n}_P \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}. \tag{6.12}$$

Les lemmes suivants sont des analogues des corollaires 6.14 et 6.15 de [19].

Lemme 6.13. *Soient* $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ *et* $x \in G(\mathbb{A})$, *alors*

$$\sum_{\gamma \in N_P(\mathrm{F})} f_{\gamma x}^{\widetilde{P}}(\xi) = \sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_P(\mathrm{F})} f_x^{\widetilde{P}}(\xi + \zeta).$$

Lemme 6.14. *Soient* $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ *et* $x \in G(\mathbb{A})$, *alors*

$$\int_{N_P(\mathbb{A})} f_{nx}^{\widetilde{P}}(\xi)\, dn = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f_x(\xi + U)\, dU.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Pour $T \in \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^{+}$, posons

$$i_{\mathfrak{o}}^{T}(x) = i_{f,\mathfrak{o}}^{T}(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\delta \in P(\mathrm{F}) \backslash G(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_{\widetilde{P}}) i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x), \quad x \in G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})$$

où $i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}$ est définie dans la section 6.4 par (6.6). La fonction $i_{\mathfrak{o}}^{T}$ est une variante de $k_{\mathfrak{o}}^{T}$ définie au début du paragraphe 3.2.

Théorème 6.15. *Pour tous $T \in T_{+} + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^{+}$, $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$, on a :*

$$\int_{G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} |i_{f,\mathfrak{o}}^{T}(x)| \; |\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \, dx < \infty.$$

Démonstration. En procédant comme au début de la preuve du théorème 3.6, on montre que l'intégrale $\int_{[G]} |i_{f,\mathfrak{o}}^{T}(x)| \; |\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \, dx$ est majorée par la somme sur les sous-groupes paraboliques relativement standards $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{P}_2$ de

$$\int_{P_1(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{1}^{\widetilde{S}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^{T}(x) \left| \sum_{\widetilde{S} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\gamma \in N_P(\mathrm{F})} f_{\gamma x}^{\widetilde{P}}(\xi + \zeta) \right| |\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \, dx.$$

En utilisant le lemme 6.13 ci-dessus (pour la fonction $X \mapsto f(X + V)$ où $V \in \mathfrak{n}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})$) et ensuite la formule sommatoire de Poisson, on s'aperçoit que la somme entre la valeur absolue dans l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\left| \sum_{\widetilde{S} \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\zeta_1 \in \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}(\mathrm{F})} \sum_{\zeta_2 \in \bar{\mathfrak{n}}_{P}(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x, \xi, \zeta_1 + \zeta_2) \right| \tag{6.13}$$

où :

$$\widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x, X, Y) = \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X + U)) \Psi(\langle U, Y \rangle) \, dU, \;\; x \in G(\mathbb{A}), X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}_1}^{\widetilde{S}}(\mathbb{A}), Y \in \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}(\mathbb{A})$$

et $\bar{\mathfrak{n}}_P$ est le radical nilpotent de l'algèbre de Lie du sous-groupe parabolique opposé à P.

On pose $\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}} = \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_P$. Grâce aux décompositions (6.12), on voit que l'on a $\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}} \subseteq \mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}}$ pour tout $\widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P}$. On pose donc

$$(\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}})' = \mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}} \smallsetminus \bigcup_{\widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subsetneq \widetilde{P}} \mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}}.$$

On a donc $\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{P}} = \coprod_{\widetilde{S} \subseteq \widetilde{R} \subseteq \widetilde{P}} (\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{R}})'$ et, par un raisonnement habituel basé sur l'identité (3.10), on s'aperçoit que (6.13) est égale à

$$\left| \sum_{\zeta \in (\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x, \xi, \zeta) \right|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Posons alors

$$\Psi_{\widetilde{S}}(x, X, Y) = \sum_{\zeta_2 \in \bar{\mathfrak{n}}_2(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x, X, Y + \zeta_2), \quad x \in G(\mathbb{A}), X \in \mathfrak{m}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}}(\mathbb{A}), Y \in \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}(\mathbb{A}).$$

Alors $\Psi_S(x, X, Y) \in \mathcal{S}((\mathfrak{m}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})(\mathbb{A}))$ pour un x fixé et on a :

$$\sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \left| \sum_{\zeta \in (\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} \widetilde{\phi}_{\widetilde{S}}(x, \xi, \zeta) \right| \leqslant \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\zeta_1 \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} |\Psi_S(x, \xi, \zeta_1)|$$

car l'image de $(\mathfrak{l}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'$ par la projection naturelle sur $\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}}$ est contenue dans $(\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'$.

On se ramène alors à borner, pour $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{S} \subseteq \widetilde{P}_2$ fixés :

$$\int_{P_1(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} \chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^T(x) \sum_{\xi \in (\mathfrak{m}_{\widetilde{1}}^{\widetilde{S}})'(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\zeta_1 \in (\bar{\mathfrak{n}}_{\widetilde{S}}^{\widetilde{2}})'(\mathrm{F})} |\Phi_{\widetilde{S}}(x, \xi, \zeta_1)| \, |\det x|_{\mathbb{A}}^{\sigma} \, dx.$$

Cette intégrale est identique à (3.11) du théorème 3.6. Cela conclut la preuve. □

Proposition 6.16. *Pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_{\widetilde{0}}^+$, $s \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{rs}$, on a :*

$$I_{\mathfrak{o}}^T(\eta_s, f) = \int_{G(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} i_{f,\mathfrak{o}}^T(x) \eta_s(\det x) \, dx.$$

Démonstration. Dans la preuve on utilisera la notation du paragraphe 3.2 introduite au début de la preuve du théorème 3.6. Donc, en raisonnant comme au début de la preuve de ce théorème-là, on voit que

$$\int_{[G]} i_{f,\mathfrak{o}}^T(x) \eta_s(\det x) \, dx$$
$$= \sum_{\widetilde{P}_1 \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} \sum_{\widetilde{P}_2 \supseteq \widetilde{P}_1} \int_{P_1(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})} \chi_{\widetilde{1},\widetilde{2}}^T(x) \sum_{\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) \eta_s(\det x) \, dx.$$

Fixons les sous-groupes paraboliques relativement standards $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P}_2$ et décomposons l'intégrale sur $P_1(\mathrm{F}) \backslash G(\mathbb{A})$ en une double intégrale sur $x \in M_1(\mathrm{F}) N_1(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})$ et $n_1 \in N_1(\mathrm{F}) \backslash N_1(\mathbb{A})$. Ensuite, on fait passer cette dernière intégrale à l'intérieur de la somme sur $\widetilde{P}$. On peut le faire car pour tout $\widetilde{P}_1 \subseteq \widetilde{P} \subseteq \widetilde{P}_2$, la fonction $N_1(\mathbb{A}) \ni n_1 \mapsto i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(n_1 x)$ est $N_1(\mathrm{F})$-invariante et continue donc bornée sur le compact $N_1(\mathrm{F}) \backslash N_1(\mathbb{A})$. Comme le volume de $N_P(\mathrm{F}) \backslash N_P(\mathbb{A})$ vaut 1 et $N_P \subseteq N_1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{[N_1]} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(n_1 x) \, dn_1 &= \int_{[N_1]} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{[N_P]} \sum_{\gamma \in N_P(\mathrm{F})} f_{\gamma n n_1 x}^{\widetilde{P}}(\xi) \, dn \, dn_1 \\ &= \int_{[N_1]} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}} \int_{N_P(\mathbb{A})} f_{n n_1 x}^{\widetilde{P}}(\xi) \, dn \, dn_1.\end{aligned}$$

La dernière expression égale $\int_{[N_1]} k_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(n_1 x) \, dn_1$ en vertu du lemme 6.14. On intervertit de nouveau la somme qui porte sur $\widetilde{P}$ et l'intégrale sur $N_1(\mathrm{F}) \backslash N_1(\mathbb{A})$ et l'on recombine

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

cette dernière avec l'intégrale sur $M_1(\mathrm{F})N_1(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$. On retrouve donc

$$\int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} i^T_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\,dx = \sum_{\widetilde{P}_1\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)}\sum_{\widetilde{P}_2\supseteq\widetilde{P}_1}\int_{P_1(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})}\chi^T_{\widetilde{1},\widetilde{2}}(x)k_{\widetilde{1},\widetilde{2},\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\,dx.$$

Chaque intégrale dans la somme ci-dessus converge d'après le théorème 3.7, ce qui justifie l'intégration et, de surcroît, la somme elle-même égale $I^T_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ grâce à l'identité (3.6) et la définition de $I^T_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$ donnée au début de la section 4, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Plaçons-nous maintenant dans le cadre du paragraphe 4.2. On veut généraliser le théorème 6.15 et la proposition 6.16 au cas de l'inclusion $\mathbf{M}\times G'\hookrightarrow\mathbf{M}\times\widetilde{G}'$.

Notons $\mathcal{O}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}_{rs}$ l'ensemble de classes contenant un élément $X_1+X_2\in\mathfrak{m}(\mathrm{F})\times\widetilde{\mathfrak{g}}'(\mathrm{F})$ tel que le polynôme caractéristique de X_1 est séparable et tel que $X_2\in\widetilde{\mathfrak{g}}'(\mathrm{F})$ appartient à une classe relativement semi-simple régulière dans le contexte d'inclusion $G'\hookrightarrow\widetilde{G}'$.

Pour $f\in\mathcal{S}((\mathfrak{m}\times\widetilde{\mathfrak{g}}')(\mathbb{A}))$, $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}_{rs}$ et $\widetilde{P}\in\mathcal{F}_{\mathbf{M}\times G'}(M_{\widetilde{0}},B)$, soit

$$i_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\xi\in\mathrm{Lie}(M_{\widetilde{P}})(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}}\sum_{\gamma\in N_P(\mathrm{F})}\int_{\mathcal{V}'_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}((\gamma x)^{-1})(\xi+Y'_{\widetilde{P}}))\,dY'_{\widetilde{P}}$$

où $x\in(\mathbf{M}\times\widetilde{G}')(\mathbb{A})$ et $\mathcal{V}'_{\widetilde{P}}$ est le plus grand sous-espace de $V'\times(V')^*$ stabilisé par $\widetilde{P}$.

Pour $T\in\mathfrak{a}^+_{\widetilde{B}_0}$, on pose aussi

$$i^T_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}_{\mathbf{M}\times G'}(M_{\widetilde{0}},B)}(-1)^{d^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}_{\widetilde{P}}}\sum_{\delta\in P(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})}\hat{\tau}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}_{\widetilde{P}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x)-T_{\widetilde{P}})i_{f,\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x),$$

où $x\in(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}(\mathbb{A})^1\times G'(\mathbb{A}))$. La preuve du théorème 6.15 s'étend sans problème à ce cas, donnant pour tout $\sigma\in\mathbb{R}$

$$\int_{(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}(\mathbb{A})^1\times G'(\mathbb{A}))}|i^T_{f,\mathfrak{o}}(x)|\,|\det x|^{\sigma}_{\mathbb{A}}\,dx<\infty$$

pour T suffisamment régulier. De même, la preuve de la proposition 6.16 s'étend aussi bien et l'on obtient, avec la notation du paragraphe 4.2, pour $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}'}_{rs}$ et $s\in\mathbb{C}$

$$\int_{(\mathbf{M}\times G')(\mathrm{F})\backslash(\mathbf{M}(\mathbb{A})^1\times G'(\mathbb{A}))} i^T_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\,dx = I^{\mathbf{M}\times\widetilde{G}',T}_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f).$$

Soient maintenant $\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)$, $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}_{rs}$ et $\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},1},\ldots,\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},m}\in\mathcal{O}^{M_{\widetilde{Q}}}$ comme dans l'équation (4.5). Alors $\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},i}\in\mathcal{O}^{M_{\widetilde{Q}}}_{rs}$ pour $i=1,\ldots,m$. On a dans ce cas l'analogue suivant de l'égalité (4.8) : pour tout sous-groupe de Borel relativement standard $\widetilde{B}\subseteq\widetilde{Q}$ et tous $f\in\mathcal{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}(\mathbb{A}))$ et $s\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}I^{M_{\widetilde{Q}},T}_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}) &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1\times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})}\sum_{i=1}^{m} i^{T_{\widetilde{B}}}_{f_{\widetilde{Q}},\mathfrak{o}_{\widetilde{Q},i}}(m)\eta_{s_{\widetilde{Q}}}(\det m)\,dm\\ &= \int_{M_Q(\mathrm{F})\backslash\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1\times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} e^{-\rho_{\widetilde{Q},s}(H_{\widetilde{Q}}(m))}\sum_{\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}}(-1)^{d^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

$$\times \sum_{\delta \in (P\cap M_Q)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m) - T)$$
$$\times \left(\sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap \mathfrak{o} \\ \gamma \in N_P^Q(\mathrm{F})}} \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f_{\widetilde{Q}}(\mathrm{Ad}((\gamma\delta m)^{-1})(\xi + Y))\, dY \right)$$
$$\times \eta_s(\det m)\, dm. \tag{6.14}$$

6.6. Expression intégrale de $J_{\mathfrak{o}}$

Dans ce paragraphe, on démontre la proposition suivante, énoncée dans le paragraphe 6.4 par la proposition 6.5.

Proposition 6.17. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a*

$$\int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} |i_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)|\, dx < \infty \quad \textit{et} \quad \int_{G(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} i_{f,\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\, dx = I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f).$$

Démonstration. Pour tout $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$, soit $\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}$ la fonction caractéristique des $H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}$ tels que $\alpha(H) \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\widetilde{Q}}$. Il résulte du lemme combinatoire de Langlands (proposition 1.7.2 de [10]) que pour tout $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et tout $H \in \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}$, on a

$$\sum_{\widetilde{Q}\supseteq \widetilde{P}} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H)\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H) = 1.$$

En utilisant cette identité, on a pour tout $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$

$$i_{f,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\gamma\in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\gamma x) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}}$$
$$\times \sum_{\gamma\in P(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\gamma x) \left(\sum_{\widetilde{Q}\supseteq\widetilde{P}} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\gamma x) - T_{\widetilde{P}})\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(\gamma x) - T_{\widetilde{Q}}) \right)$$
$$= \sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} \sum_{\gamma\in Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathrm{F})} \bar{\tau}_Q(H_Q(\gamma x) - T_Q) \sum_{\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)\ni\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}}$$
$$\times \sum_{\delta\in(M_Q\cap P)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\eta\gamma x)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta\gamma x) - T_{\widetilde{P}})$$

où les sommes sont absolument convergentes. Il suffit de montrer que pour tout $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ et tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, l'intégrale

$$\int_{Q(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(x) - T_{\widetilde{Q}})$$
$$\times \sum_{\mathcal{F}(M_{\widetilde{0}},B)\ni\widetilde{P}\subseteq\widetilde{Q}} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{P}}} \sum_{\delta\in(M_Q\cap P)(\mathrm{F})\backslash M_Q(\mathrm{F})} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta x)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta x) - T_P)\eta_s(\det x)\, dx \tag{6.15}$$

converge absolument. L'analyse va être analogue à celle de la preuve du théorème 4.8.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Posons $x = namk$ où $n \in N_Q(\mathrm{F})\backslash N_Q(\mathbb{A})$, $m \in M_Q(\mathrm{F})\backslash \mathbf{M}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})^1 \times G_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})$, $a \in A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}$ et $k \in K$. Donc $dx = e^{-2\rho_Q(H_Q(am))}\, dn\, da\, dm\, dk$.

Fixons $\widetilde{P} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)$ tel que $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{Q}$. Pour n, m, k et a comme ci-dessus et $\delta \in M_Q(\mathrm{F})$, on a $\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(\delta namk) - T_{\widetilde{Q}}) = \bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{Q}}(ma) - T_{\widetilde{Q}})$ et, en faisant les changements de variable $\delta a^{-1} na\delta^{-1} \mapsto n$ et $a^{-1}Y_{\widetilde{P}} \mapsto Y_{\widetilde{P}}$,

$$\int_{[N_Q]} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta namk)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta namk) - T_{\widetilde{P}})\, dn = \int_{[N_Q]} i_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\delta namk)\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m) - T_{\widetilde{P}})\, dn$$
$$= \hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m) - T_{\widetilde{P}})e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))} \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \sum_{\gamma \in N_P^Q(\mathrm{F})N_Q(\mathbb{A})} \int \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f_{n\gamma\delta mk}(\xi + Y)\, dY\, dn \tag{6.16}$$

où l'on utilise le fait que la somme des poids pour $A_{\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}} \subseteq A_{\widetilde{Q}}$ agissant sur $\mathfrak{n}_Q \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}} = \mathfrak{n}_{\widetilde{Q}} \oplus \mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}$ (voir paragraphe 6.5, equations (6.11) et (6.12)) égale $2\rho_{\widetilde{Q}}$ car $A_{\mathbf{M}_{\widetilde{Q}}}$ agit trivialement sur $\mathcal{Z}_{\widetilde{Q}} \supseteq \mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}$.

En utilisant le lemme 6.14, on a pour tout $\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F}) \cap \mathfrak{o}$ fixé

$$\int_{N_Q(\mathbb{A})} \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})} f_{n\gamma\delta mk}(\xi + Y_{\widetilde{P}})\, dY_{\widetilde{P}}\, dn = \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{n}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f_{\gamma\delta mk}(\xi + U_{\widetilde{Q}} + Y_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}})\, dU_{\widetilde{Q}}\, dY_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}.$$

On voit alors que l'intégrale sur $k \in K$ de (6.16) multiplié par $\eta(\det k)$ devient :

$$e^{2\rho_{\widetilde{Q}}(H_Q(a))}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H_{\widetilde{P}}(\delta m) - T_{\widetilde{P}}) \sum_{\xi \in \mathfrak{m}_{\widetilde{P}}(\mathrm{F})\cap\mathfrak{o}} \sum_{\gamma \in N_P^Q(\mathrm{F})} \int_{\mathcal{V}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbb{A})} f_{\widetilde{Q}}(\mathrm{Ad}((\gamma\delta m)^{-1})(\xi + Y))\, dY$$

où $f_{\widetilde{Q}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{m}_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}))$ est définie par (4.7) dans le paragraphe 4.2. D'autre part, l'intégrale sur $A_{\widetilde{Q}}^{st,\infty}$ se réduit, grâce à l'identité (2.11) et le lemme 4.1, à

$$\int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{st}} e^{(2\rho_{\widetilde{Q}} - 2\rho_Q + s\det)(H)}\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H + H_{\widetilde{Q}}(m) - T_{\widetilde{Q}})\, dH$$
$$= j_{\widetilde{Q}}^{-1} e^{-\rho_{\widetilde{Q},s}(H_{\widetilde{Q}}(m))} \int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(H)}\bar{\tau}_{\widetilde{Q}}(H - T_{\widetilde{Q}})\, dH.$$

L'intégrale ci-dessus converge pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$ en vertu du lemme 4.2(ii) et donne précisément $\hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1}e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})}$ où $\hat{\theta}_{\widetilde{Q}} = \hat{\theta}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ est définie par (4.3) dans le paragraphe 4.1.

En utilisant alors l'égalité (6.14), on s'aperçoit que l'intégrale (6.15) égale $J_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}})$ multiplié par $j_{\widetilde{Q}}^{-1}\hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1}e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})}$.

On a donc la convergence de l'intégrale dans le théorème, ainsi que pour tout $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier et tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\int_{[G]} i_{\mathfrak{o}}(x)\eta_s(\det x)\, dx = \sum_{\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(M_{\widetilde{0}}, B)} (-1)^{d_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}} j_{\widetilde{Q}}^{-1}\hat{\theta}_{\widetilde{Q}}(\rho_{\widetilde{Q},s})^{-1}e^{\rho_{\widetilde{Q},s}(T_{\widetilde{Q}})} I_{\mathfrak{o}}^{M_{\widetilde{Q}},T}(\eta_s, f_{\widetilde{Q}}).$$

D'après le théorème 4.8, la somme ci-dessus est égale à $I_{\mathfrak{o}}(\eta_s, f)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

6.7. Résultats d'holomorphie

Soient $\{e_i^\vee\}_{i\in I_0\cup -I_0}\subseteq \mathfrak{a}_{I_0}$ les vecteurs tels que

$$\rho_j(e_i^\vee)=\begin{cases}1 \text{ si } j=i,\\ -1 \text{ si } j=-i, & i,j\in I_0\cup -I_0.\\ 0 \text{ sinon,}\end{cases}$$

On a donc $e_i^\vee=-e_{-i}^\vee$ pour tout $i\in I_0$. De plus, il est clair que pour tout $\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0$, l'ensemble $\{e_i^\vee\}_{i\in\mathcal{I}}$ est une base de $\mathfrak{a}_{|\mathcal{I}|}$.

Soit $\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0$. On introduit le cône ouvert $\mathfrak{a}^*_{>\mathcal{I}}$ défini comme

$$\mathfrak{a}^*_{>\mathcal{I}}=\left\{\sum_{i\in\mathcal{I}}a_i\rho_i|a_i>0\right\}\subseteq\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{I}|}\subseteq\mathfrak{a}^*_{I_0}.$$

Donc, pour qu'un $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{I}|,\mathbb{C}}$ vérifie $\mathrm{Re}(\lambda)\in\mathfrak{a}^*_{>\mathcal{I}}$, il faut et suffit que $\mathrm{Re}(\lambda(e_i^\vee))>0$ pour tout $i\in\mathcal{I}$.

Soit $I'\subseteq I$. Pour $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{I,\mathbb{C}}$, on note $\lambda_{I'}$ sa restriction à $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$. Remarquons aussi que le caractère $\det$ est naturellement un élément de $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$. Il vérifie $\det=\sum_{i\in I'}\rho_i$.

On rappelle que nous avons défini I_η comme l'ensemble des $i\in I_0$ tels que la restriction de η au groupe de normes de $\mathbb{A}_i^*$ dans $\mathbb{A}^*$ est non triviale. Pour $I'\subseteq I_0$, notons

$$c_{I'}=\int_{T_{I'}(\mathrm{F})\backslash T_{I'}(\mathbb{A})^1}\eta(\det t)\,dt.$$

On voit donc que si $I'\cap I_\eta\neq\varnothing$, alors $c_{I'}=0$. Notons aussi $v_{I'}$ le volume dans $\mathfrak{a}_{I'}$ du parallélotope déterminé par les vecteurs $\{e_i^\vee\}_{i\in\mathcal{I}}$ où $\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I'$ est tel que $|\mathcal{I}|=I'$. Cela ne dépend pas du choix de $\mathcal{I}$. Notons aussi pour tout $i\in I'$:

$$\mathcal{D}^*_{I',i,\mathbb{C}}:=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}|\lambda(e_i^\vee)=0\}=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}|\lambda(e_{-i}^\vee)=0\}. \tag{6.17}$$

Lemme 6.18. *Soit $\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0$. Alors, pour tout $x\in G(\mathbb{A})$, l'intégrale*

$$\int_{T_{|\mathcal{I}|}(\mathrm{F})\backslash T_{|\mathcal{I}|}(\mathbb{A})}\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(H_I(tx))e^{\lambda(H_I(tx))}\eta(\det t)\,dt,\quad \lambda\in\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{I}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de $\mathrm{Re}(\lambda)\in\mathfrak{a}^*_{>\mathcal{I}}$. Elle admet un prolongement méromorphe, noté $\eta_{\mathcal{I}}$, égal à

$$\eta_{\mathcal{I}}(\lambda)=(-1)^{\#\mathcal{I}}c_{|\mathcal{I}|}v_{|\mathcal{I}|}\prod_{i\in\mathcal{I}}\lambda(e_i^\vee)^{-1}.$$

En particulier, $\eta_{\mathcal{I}}$ ne dépend pas de $x\in G(\mathbb{A})$ et vaut 0 si $|\mathcal{I}|\cap I_\eta\neq\varnothing$. Si $|\mathcal{I}|\cap I_\eta=\varnothing$, l'ensemble $\{\mathcal{D}^*_{|\mathcal{I}|,i,\mathbb{C}}\}_{i\in|\mathcal{I}|}$ est l'ensemble de tous les hyperplans singuliers de $\eta_{\mathcal{I}}$.

Démonstration. Calcul direct. □

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.19. *Soient* $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \subseteq_\epsilon I_0$ *tels que* $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}$ *et* $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3$.

(i) *L'intégrale suivante*

$$\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)(\lambda) = \int_{T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{J}_{12}|}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp}(H_I(x)) e^{(\lambda+\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}})(H_I(x))} \hat{f}_x^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp})\eta(\det x)\, dx,$$

où $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_{12}|,\mathbb{C}}$ *converge absolument et uniformément sur tous les compacts de* $\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_{12}|}$ *et définit une fonction holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_{12}|,\mathbb{C}}$.

(ii) *L'intégrale suivante*

$$\int_{T_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})T_{I_0\smallsetminus|\mathcal{J}|}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_2)\cup\mathcal{J}_2^\sharp}(H_I(x)) e^{\lambda(H_I(x))} \times \hat{f}_x^{\mathcal{J}_3}(X_{\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2^\sharp})\eta(\det x)\, dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de

$$\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_{12}|} \times (\rho_{\mathcal{J}^\sharp_{3\smallsetminus 2}} + \mathfrak{a}^*_{>\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}})$$

et elle admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, *noté* $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)$, *qui vérifie*

$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)(\lambda) = \eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}(\lambda_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|} + \rho_{\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}})\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)(\lambda_{|\mathcal{J}_{12}|}).$$

Si $|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}| \cap I_\eta \neq \varnothing$, *on a* $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f) \equiv 0$ *et dans le cas contraire, l'ensemble :*

$$\{\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,i,\mathbb{C}}\}_{i\in|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{13}|} \cup \{\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,|i|,\mathbb{C}} + \rho_{-i}\}_{i\in\mathcal{J}_{3\smallsetminus 2}},$$

où les hyperplans $\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,i,\mathbb{C}}$ *sont définis par (6.17), est l'ensemble de tous les hyperplans singuliers de* $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)$.

Démonstration. Le premier point est le lemme 6.23 de [19]. Les assertions sur la convergence, le prolongement méromorphe ainsi que l'équation fonctionnelle dans le second point découlent des lemmes 6.26 et 6.27 de *loc. cit*. Finalement, la propriété d'annulation de $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)$ et l'assertion sur ses éventuels hyperplans singuliers découlent de l'équation fonctionnelle qu'elle vérifie et de la propriété analogue de la fonction $\eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}$ décrite dans le lemme 6.18 ci-dessus. □

Proposition 6.20. *Soit* $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$. *Alors, l'intégrale*

$$\int_{G(\mathbb{A},X_{\mathcal{J}})\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}X_{\mathcal{J}}x) e^{\lambda(H_I(x))}\eta(\det x)\, dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$$

converge absolument et uniformément sur tous les compacts de $\mathrm{Re}(\lambda) \in \rho_{\mathcal{J}^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{>\mathcal{J}^\sharp}$ *et admet un prolongement méromorphe à* $\mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}|,\mathbb{C}}$, *noté* $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)$, *qui vérifie*

$$\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f) = \sum_{\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\sqcup\mathcal{J}_3\subseteq\mathcal{J}} (-1)^{\#\mathcal{J}_3}\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_{23}}(\eta, f).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

De plus, l'ensemble

$$\{\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,i,\mathbb{C}}\}_{i\in|\mathcal{J}|}\cup\{\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,|i|,\mathbb{C}}+\rho_{-i}\}_{i\in\mathcal{J}},$$

où les hyperplans $\mathcal{D}^*_{|\mathcal{J}|,i,\mathbb{C}}$ *sont définis par (6.17), contient tous les hyperplans singuliers de* $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta,f)$.

Démonstration. La convergence, le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle découlent de la proposition 6.28 couplée au lemme 6.26 de [19]. L'assertion sur les hyperplans singuliers est une conséquence de l'équation fonctionnelle vérifiée par $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta,f)$ et du lemme 6.19 ci-dessus. □

Dans le contexte du lemme 6.19 ci-dessus, posons $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta,f)=\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(\eta,f)$.

Lemme 6.21. *Soient* $I'\subseteq I_0$ *et* $\mathcal{J}_0\subseteq_\epsilon I'\cap I_\eta$ *tel que* $|\mathcal{J}_0|=I'\cap I_\eta$. *On a alors l'égalité de fonctions méromorphes sur* $\mathfrak{a}^*_{I',\mathbb{C}}$ *suivante*

$$\sum_{|\mathcal{I}_0|=I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|}\zeta_{\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}(f)(\eta,\lambda)=\sum_{\mathcal{J}_0\subseteq\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\subseteq_\epsilon I'}\ \sum_{|\mathcal{J}_3|=I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{12}|}(-1)^{\#\mathcal{J}_3}\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_{123}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(f)(\eta,\lambda).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3,\mathcal{I}_0\subseteq_\epsilon I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|$ tels que $|\mathcal{I}_0|=I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|$ et $\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\sqcup\mathcal{J}_3\subseteq\mathcal{I}_0$. En vertu du lemme 6.19(ii), il découle que si $\mathcal{J}_0\nsubseteq\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2$, alors $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_{23}}(\eta,f)\equiv 0$. En vertu de la proposition 6.20, on a donc :

$$\begin{aligned}&\sum_{|\mathcal{I}_0|=I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|}\zeta_{\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}(f)(\eta,\lambda)\\&\quad=\sum_{|\mathcal{I}_0|=I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|}\ \sum_{\mathcal{J}_0\subseteq\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\subseteq\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}\ \sum_{\mathcal{J}_3\subseteq(\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0)\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}(-1)^{\#\mathcal{J}_3}\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_{23}}(\eta,f)\\&\quad=\sum_{\mathcal{J}_0\subseteq\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\subseteq_\epsilon I'}\ \sum_{\mathcal{J}_3\subseteq_\epsilon I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{12}|}(-1)^{\#\mathcal{J}_3}\sum_{\mathcal{J}_4\subseteq_\epsilon I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{123}|}\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_{1234}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_{23}}(\eta,f).\end{aligned}$$

Il résulte de l'égalité (6.28) du lemme 6.29 de [19] que si $I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{123}|\neq\varnothing$, on a

$$\sum_{\mathcal{J}_4\subseteq_\epsilon I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{123}|}\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_{1234}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_{23}}(\eta,f)\equiv 0.$$

D'où le résultat voulu. □

Lemme 6.22. *Pour tout* $\mathcal{I}\subseteq_\epsilon I_0$ *non vide et tout* $i\in\mathcal{I}$, *la droite* $\mathbb{C}\det$ *n'est pas contenue dans* $\mathcal{D}^*_{|\mathcal{I}|,|i|,\mathbb{C}}\cup(\mathcal{D}^*_{|\mathcal{I}|,|i|,\mathbb{C}}+\rho_{-i})$.

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'il existe un $s\in\mathbb{C}$ tel que $s\det(e^\vee_{|i|})\neq 0$ et $(s\det+\rho_i)(e^\vee_{|i|})\neq 0$. Mais $s\det(e^\vee_{|i|})=s$ et $(s\det+\rho_i)(e^\vee_{|i|})=s+\frac{i}{|i|}$, d'où le résultat. □

Soient $\mathcal{J},\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2\subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\subseteq\mathcal{J}$. Posons :

$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta,f)(s)=\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta,f)(s\det),\quad s\in\mathbb{C}.$$

En vertu des lemmes 6.19 et 6.22, la fonction $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta,f)(s)$ de la variable $s\in\mathbb{C}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. On a alors le corollaire du lemme 6.19 suivant :

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 6.23. *Soient $\mathcal{J}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq_\epsilon I_0$ tels que $\mathcal{J}_1 \sqcup \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$.*

(i) *Pour $-1 < \mathrm{Re}(s) < 1$, la fonction $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s)$ est donnée par l'intégrale absolument convergente suivante :*

$$\int_{T_{I_0 \smallsetminus |\mathcal{J}_{12}|}(\mathrm{F})\backslash G(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{(\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_2)\cup \mathcal{J}_2^\sharp}(H_I(x)) \hat{f}_x^{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_1}(X_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2^\sharp}) \eta_s(\det x)\, dx.$$

(ii) *La fonction $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s)$ est holomorphe sur $s \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$.*

(iii) *Si $|\mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12}| \cap I_\eta \neq \varnothing$, on a $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s) \equiv 0$.*

Démonstration. Pour démontrer le point (i), en vertu du lemme 6.19, il suffit de vérifier

$$\mathrm{Re}(s \det) \in \mathfrak{a}^*_{|\mathcal{J}_{12}|} \times (\rho_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp} + \mathfrak{a}^*_{>\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}) \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 1. \tag{6.18}$$

Autrement dit, on doit avoir $\mathrm{Re}(s)\det - \rho_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp} \in \mathfrak{a}^*_{>\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}$. Or, la restriction de $\det$ à $\mathfrak{a}_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|}$ est égale à $\sum_{i\in\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}} \rho_{|i|} = \sum_{i\in\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}} \frac{i}{|i|}\rho_i$ et $\rho_{(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})^\sharp} = \sum_{i\in\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}} -\rho_i$. Par définition de $\mathfrak{a}^*_{>\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}$, il en découle donc que (6.18) est vérifié si et seulement si pour tout $i \in \mathcal{J} \smallsetminus \mathcal{J}_{12}$, on a $\mathrm{Re}(s)\frac{i}{|i|} > -1$. Comme $\frac{i}{|i|} \in \{-1, 1\}$, l'assertion suit.

Pour le point (ii), en utilisant l'équation fonctionnelle donnée dans le lemme 6.19, on a

$$\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s) = \eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}(s\det + \rho_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}})\Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)(s\det) \tag{6.19}$$

et la description explicite de $\eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}$ donnée dans le lemme 6.18 nous donne

$$\eta_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}(s\det + \rho_{\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}}) = (-1)^{\#(\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12})} c_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|} v_{|\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}|} \prod_{j\in\mathcal{J}\smallsetminus\mathcal{J}_{12}} \left(1 + \frac{i}{|i|}s\right)^{-1}.$$

Puisque $1 + \frac{i}{|i|}s = 0$ implique $s \in \{-1, 1\}$, on a l'holomorphie de $\overline{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f)(s)$ sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$, vu l'holomorphie de $\mathbb{C} \ni s \mapsto \Upsilon_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\mathcal{J}_3}(\eta, f)(s\det)$.

Le point (iii) découle de l'équation fonctionnelle (6.19) ci-dessus. $\square$

Pour $\mathcal{J} \subseteq_\epsilon I_0$, on définit la fonction méromorphe $\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)$ sur $\mathbb{C}$ par

$$\zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)(s) = \zeta_{\mathcal{J}}(\eta, f)(s\det), \quad s \in \mathbb{C}.$$

En vertu de la proposition 6.20 et du lemme 6.22, la définition est licite.

On a alors le corollaire suivant du lemme 6.21 et du corollaire 6.23.

Corollaire 6.24. *Soient $I' \subseteq I_0$ et $\mathcal{J}_0 \subseteq_\epsilon I' \cap I_\eta$ tel que $|\mathcal{J}_0| = I' \cap I_\eta$. On a alors l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ suivante*

$$\sum_{|\mathcal{I}_0| = I'\smallsetminus|I'\cap I_\eta|} \zeta_{\mathcal{J}_0\cup\mathcal{I}_0}(\eta, f) = \sum_{\mathcal{J}_0\subseteq\mathcal{J}_1\sqcup\mathcal{J}_2\subseteq_\epsilon I'} \sum_{|\mathcal{J}_3| = I'\smallsetminus|\mathcal{J}_{12}|} (-1)^{\#\mathcal{J}_3} \overline{\Lambda}^{\mathcal{J}_{123}}_{\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2}(\eta, f).$$

En particulier, en vertu du point (ii) du corollaire 6.23, la somme ci-dessus est holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 1\}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press

Remerciements. Je voudrais remercier mon directeur de thèse, Pierre-Henri Chaudouard, pour toute son aide. Je remercie aussi le rapporteur pour ses commentaires. Ce travail a été partiellement soutenu par le projet Ferplay ANR-13-BS01-0012 et le projet #711733 de la fondation Minerva.

Bibliographie

1. J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$, *Duke Math. J.* **45**(4) (1978), 911–952.
2. J. Arthur, The trace formula in invariant form, *Ann. of Math.* (2) **114**(1) (1981), 1–74.
3. P.-H. Chaudouard, La formule des traces pour les algèbres de Lie, *Math. Ann.* **322**(2) (2002), 347–382.
4. W. T. Gan, B. H. Gross et D. Prasad, Symplectic local root numbers, central critical L values, and restriction problems in the representation theory of classical groups, *Astérisque* **346** (2012), 1–109. Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.
5. R. Godement, Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques. In *Séminaire Bourbaki, 1962/63. Fasc. 3, No. 257*, 1964.
6. A. Ichino et T. Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross–Prasad conjecture, *Geom. Funct. Anal.* **19**(5) (2010), 1378–1425.
7. A. Ichino et S. Yamana, Periods of automorphic forms: the case of $(\mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$, *Compos. Math.* **151**(4) (2015), 665–712.
8. H. Jacquet et S. Rallis, On the Gross–Prasad conjecture for unitary groups, in *On Certain L-Functions*, Clay Math. Proc., vol. 13, pp. 205–265 (American Mathematical Society, 2011).
9. M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost et J.-P. Tignol, *The Book of Involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998). With a preface in French by J. Tits.
10. J.-P. Labesse et J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*. Paris, 2009.
11. A. Mihatsch, On the arithmetic fundamental lemma through Lie algebras. *Mathematische Zeitschrift*. À paraître.
12. R. Neal Harris, The refined Gross–Prasad conjecture for unitary groups, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2014**(2) (2014), 303–389.
13. M. Rapoport, B. Smithling et W. Zhang, On the arithmetic transfer conjecture for exotic smooth formal moduli spaces. *Prépublication* arXiv:1503.06520v2, 2015.
14. M. Rapoport, U. Terstiege et W. Zhang, On the arithmetic fundamental lemma in the minuscule case, *Compos. Math.* **149**(10) (2013), 1631–1666.
15. R. Steve et S. Gérard, Multiplicity one conjectures. *Prépublication* arXiv:0705.2126 8v1, 2008.
16. W. Zhang, On arithmetic fundamental lemmas, *Invent. Math.* **188**(1) (2012), 197–252.
17. W. Zhang, Automorphic period and the central value of Rankin–Selberg L-function, *J. Amer. Math. Soc.* **27** (2014), 541–612.
18. W. Zhang, Fourier transform and the global Gan–Gross–Prasad conjecture for unitary groups, *Ann. of Math.* (2) **180**(3) (2014), 971–1049.
19. M. Zydor, La variante infinitésimale de la formule des traces de Jacquet-Rallis pour les groupes unitaires. *Canad. J. Math.* À paraître.
20. M. Zydor, Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières. *Prépublication* arXiv:1510.04301, 2015.

https://doi.org/10.1017/S1474748016000141 Published online by Cambridge University Press